

Su optimalių sprendinių paieškos situacijose, kurios nėra pilnai bei griežtai apibrėžtos, problemomis matematika susidūrė dar gerokai anksčiau, negu L. Zadeh paskelbė „difuzinės matematikos“ idėjas ir pradėjo kurti negriežtosios matematikos formalizuotą kalbą bei operacinį aparatą.

Pavyzdžiui, su tokiomis situacijomis dar pirmojoje XX amžiaus pusėje buvo susidurta **lošimų teorijoje**, kurios pradininkais laikomi JAV matematikai Dž. Noimanas (J. von Neuman) ir O. Morgenšternas (O. Morgenstern), 1944 m. išleidę veikalą „Lošimų teorija ir ekonominis elgesys“ [49]. Lošimų teorijoje bandoma surasti taisykles, leidžiančias lošėjui, nežinančiam kitų lošėjų būsimų ėjimų, išsirinkti optimalią lošimo strategiją, maksimizuojančią esamomis sąlygomis to lošėjo garantuotą išlošį ar minimizuojančią jo galimą pralošį. **Antagonistiniuose poriniuose lošimuose**, kuriuose vieno lošėjo išlošis yra kito lošėjo pralošis, situacijos neapibrėžtumas „nuimamas“ vadovaujantis prielaida, kad lošėjai yra pakankamai protingi, žino vienas kito interesus ir sugeba pasirinkti tokius ėjimus bei ėjimų dažnius, kad išloštų kuo daugiau bei praloštų kuo mažiau. Tai leidžia pritaikyti taip vadinamąjį nuostolių minimakso (išlošio maksimino) principą, pagal kurį kiekvienas lošėjas maksimuoja garantuotą savo išlošį ar minimuoja maksimalų galimą savo pralošį (nuostolius), ir lošimą, jei lošėjai elgiasi apgalvotai, paverčia determinuotu arba stochastiniu lošimu su vienareikšmiškai apibrėžtomis statistinėmis charakteristikomis.

Tačiau „lošimuose su gamta“ bei su kitais indiferentiškais „lošėjais“ tokia interesų antagonistiškumo prielaida jau nebegali būti laikoma teisinga, todėl tokiuose lošimuose visuomet išlieka daugiau ar mažiau neapibrėžtumo, neleidžiančio iš anksto griežtai nustatyti, kokie lošėjo, lošiančio su „gamta“, ėjimai bus geriausi. Kai „gamtos“ elgesyje pastebime kokius nors dėsningumus ir turime pakankamai daug statistinės informacijos, leidžiančios bent apytikriai nustatyti būsimų „gamtos“ ar kito indiferentiško „lošėjo“ „ėjimų“ tikimybes, ir „lošimai“ kartojasi pakankamai dažnai, tai individualių situacijų neapibrėžtumas gali būti „apeitas“, pasirenkant optimalumo rodikliu būsimų išlošių matematinį vidurkį (matematinę viltį), t. y. sudarant **lošimo stochastinį optimizacinį modelį**. Tačiau, kai „gamtos“ elgesyje nepastebime net stochastinio stabilumo bei kai neturime pakankamos statistinės informacijos, tai situacijos neapibrėžtumo „lošimuose su gamta“ nei eliminuoti, nei „apeiti“ jau nebepavyksta, ir todėl tenka ieškoti kokių nors principų, kurie leistų lošėjui priimti kokį nors sprendimą tokioje neapibrėžtoje situacijoje.

Tiesa, tie principai nesuteikia lošėjui jokios papildomos objektyvios informacijos apie esamą situaciją ir nesumažina jos realaus neapibrėžtumo, ko galima pasiekti, pavyzdžiui, analizuojant tą situaciją bei renkant statistinę informaciją, tačiau jie naudingi bent jau tuo, kad padeda lošėjui apsispręsti ir pereiti nuo neveiklumo prie veiklos, pasirenkant bent jau ne patį blogiausią ėjimą iš visų galimų tuo atveju, kai papildomos informacijos gauti neįmanoma, o priimti kokį nors sprendimą vis dėlto reikia, nes jokio sprendimo nepriėmimas, kartais gali būti blogesnis už nepakankamai gero sprendimo priėmimą.

Vienas tokių principų – **Laplaso principas**, kurio esmę sudaro priskyrimas visiems galimiems „gamtos ėjimams“ **apriori vienodų tikimybių**. Tokiu būdu lošimo su „gamta“ matematinis modelis suvedamas į labai paprastą stochastinį „optimizacinį“ modelį. Žodis „optimizacinis“ čia pateiktas kabutėse, nes iš tikrųjų jokia reali optimizacija šiuo atveju nevyksta, o tik parenkamas toks lošėjo su „gamta“ ėjimas, kuris būtų optimalus tik tuo atveju, jei visų „gamtos ėjimų“ tikimybės būtų vienodos. **Bet koks atitinkamos (tame tarpe – ir) statistinės informacijos rinkimas bei apdorojimas, jei tai būtų įmanoma, galėtų padidinti lošėjo informuotumą ir**

357. lentelė

$i \setminus j$	1	2	3	...	k
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1k}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2k}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	...	a_{sk}

sudaryti lošėjui sąlygas elgtis nors šiek tiek tikslingiau, labiau atsižvelgiant į esamą situaciją, negu vadovaujantis Laplaso principu, neturinčiu daugumoje atvejų nei statistinio, nei loginio pagrindimo ir neduodančio lošėjui jokių garantijų.

Kitas principas, taikomas neapibrėžtiniuose optimizaciniuose modeliuose, yra iš **racionalaus kraštutinio pesimizmo** išplaukiantis **Valdo principas**, vadinamas dar ir **išlošio maksimino (nuostolių minimakso) principu**. Jo esmę sudaro tai, jog lošėjas pasirenka tokia lošimo strategiją, kad jo **garantuotas minimalus galimas išlošis būtų maksimalus (arba maksimalus galimas pralošis būtų minimalus)**. Šis principas skiriasi nuo Laplaso principo jau tuo, kad gali suteikti lošėjui tam tikras garantijas.

Pailiustruosiu šio principo taikymą baigtinio porinio lošimo su „gamta“ pavyzdžiu, kurį vaizduoja 357-oji lentelė.

Priimsime prielaidą, kad galimų „gamtos ėjimų“ aibė yra baigtinė, kurią sudaro k ėjimų. Sunumeruosime tuos ėjimus numeriais $j=1, 2, 3, \dots, k$.

Taip pat priimsime prielaidą, kad lošėjo A galimų ėjimų aibė taip pat yra baigtinė ir susideda iš s ėjimų, kuriuos sunumeruosime numeriais $i=1, 2, 3, \dots, s$.

Pažymėsime lošėjo A išlošį, kurį jis galėtų gauti padaręs ėjimą i tuo atveju, jei „gamta“ padarys ėjimą j (t. y. pereis į būseną j), žymeniu a_{ij} .

Patalpinsime lošėjo A galimų išlošių reikšmes a_{ij} į 357-ąją lentelę, turinčią s eilučių, atitinkančių visus galimus lošėjo A ėjimus $i=1, 2, 3, \dots, s$, ir k stulpelių, atitinkančių visus galimus „gamtos ėjimus“ $j=1, 2, 3, \dots, k$. Tokia lentelė yra duotojo **lošimo su gamta informacinis (o kartu – ir matematinis) modelis**, leidžiantis surasti atsakymą į klausimą, ką išloš (ar praloš, nes kai kurie a_{ij} gali būti ne tik teigiami ar lygūs 0, bet ir neigiami skaičiai) lošėjas A bet kurio galimu atveju, t. y. padaręs bet kurį galimą savo ėjimą i „gamtai“ esant bet kurioje jos galimoje būsenoje j . Ši lentelė vadinama **lošimo mokėjimų (išlošių) matrica**.

Vadovaudamasis Valdo principu, lošėjas A, nustatęs, kokį išlošį $\min_j a_{ij}$ net blogiausiu atveju jis galėtų garantuotai gauti, padaręs tą ar kitą ėjimą A_i , pasirinktų tokį ėjimą A_{i^*} , kuris atitiktų tų minimalių garantuotų išlošių maksimumą $\max_i \min_j a_{ij}$. Dydį $\max_i \min_j a_{ij}$ vadinsime **lošėjo A išlošio maksimumu – didžiausiu garantuotu išlošiu**.

Jei 357-oji lentelė būtų **lošėjo A pralošių (nuostolių) matrica** ir dydžiai a_{ij} vaizduotų galimus lošėjo A pralošius (nuostolius), tai lošėjas A, vadovaudamasis Valdo principu, pasirinktų tokį ėjimą $i=i^*$, kad jo pralošis (galimų nuostolių dydis) būtų garantuotai ne didesnis už $\min_j \max_i a_{ij}$, t. y. už **nuostolių matricos minimaksą**.

Panašūs matriciniai modeliai sudaromi ne tik lošimams su „gamta“, bet ir poriniams lošimams su neindiferentiškais lošėjais, pavyzdžiui, **antagonistiniams lošimams su nuline suma**, kuriuose vieno lošėjo (tarkime, A) išlošis tuo pačiu metu yra kito lošėjo (tarkime, B) pralošis (ir atvirkščiai), dėl ko algebrinė jų suma $a_{ij}+b_{ij}$ visada lygi 0.

Poriniuose antogonistiniuose lošimuose neapibrėžtumas, kaip jau buvo minėta, gali būti „nuimtas“ todėl, kad abu lošėjai, kuriuos laikome pakankamai protingais, žino vienas kito interesus ir, laikydami vienas kitą pakankamai protingais, gali apskaičiuoti optimalius būsimus vienas kito ėjimus **grynosiose strategijose**, atitinkančiose vienareikšmiškai pasirenkamus ėjimus, ar optimalius būsimus vienas kito ėjimų

dažnius **mišrioje strategijoje**, atitinkančiose atsitiktinius ėjimų pasirinkimus su tam tikromis vienareikšmiškai apskaičiuotomis optimaliomis tų ėjimų pasirinkimo tikimybėmis.

Nesunku įrodyti, kad 357-ojoje lentelėje, esant bet kurioms realioms jos elementų a_{ij} reikšmėms, tos **lentelės minimaksas $\min_j \max_i a_{ij}$ negali būti mažesnis už tos lentelės maksiminą $\max_i \min_j a_{ij}$** , t. y., kad **visada galioja negriežta nelygybė $\min_j \max_i a_{ij} \geq \max_i \min_j a_{ij}$** . Taip pat nesunku įrodyti, kad tais atvejais, kai antagonistinio lošimo matrica turi taip vadinamąjį **balno tašką** (i^*, j^*) , t. y., kai dydžiai a_{ij} tenkina **lygybę $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$** , optimalūs lošėjų A ir B ėjimai yra $i=i^*$ ir $j=j^*$, nes nė vienam iš lošėjų, žinančiam, kad priešininkas tuo būtinai pasinaudos, nenaudinga nukrypti nuo šios optimalios strategijos, vadinamos **grynąja optimalia strategija**, ir daryti kitokį ėjimą negu ėjimą, atitinkantį pažymėtąjį žvaigždute balno tašką. Abu tuos įrodymus palieku skaitytojui (žiūr. užduotį 1.16.404.), rekomenduodamas jam knygas [47, 79, 149, 240÷245, 305], kuriose jis gali susipažinti su lošimų teorijos pagrindais.

Nesunku įrodyti, kad tais atvejais, kai antagonistinio porinio lošimo su nuline suma matrica neturi balno taško, tai **lošimas neturi grynos optimalios strategijos** (t. y., optimalios strategijos su determinuotais lošėjų ėjimais), tačiau, naudojantis simplekso algoritmu, visuomet **galima surasti optimalias mišrias lošėjų strategijas, t. y. surasti tikimybes p_i ir q_j , vaizduojančias tuos dažnius, su kuriais lošėjai turi daryti tuos ar kitus savo galimus ėjimus, kad gautų sau optimalų galimą rezultatą – didžiausią išlošio (mažiausią pralošio) vidurkį $\bar{v}$** . Pailiustruosiu šį teiginį konkrečiais pavyzdžiais.

Sudarysime tokio antagonistinio porinio lošimo su nuline suma, aprašomo lošimo mokėjamų matrica, pavaizduota 351-ojoje lentelėje, optimizacinį modelį.*

Iš sąlygos, kad lošėjas A, stengdamasis lošti optimaliai, **stengsis taip rinktis savo ėjimų A_i tikimybes p_i , kad jo išlošio vidurkis nepriklausomai nuo jo priešininko ėjimų j nebūtų mažesnis už**

tam tikrą kiek galima didesnę kol kas dar nežinomą dydį v , išplaukia nelygybių sistema $\sum_{i=1}^s a_{ij}p_i \geq v$, galiojančią visiems $j=1, 2, \dots, k$. Ji riboja ėjimų A_i dažnių p_i pasirinkimą.

Nesunku įrodyti, kad **optimali lošėjo A strategija, apibrėžiama šiuo atveju to lošėjo ėjimų A_i tikimybių p_i pasirinkimu, nepasikeistų, jei visus 351-osios lentelės elementus padidintume ar sumažintume vienu ir tuo pačiu dydžiu**. Pasikeistų tik išlošio (arba pralošio) vidurkis, padidėdamas ar sumažėdamas tuo dydžiu, o optimalios lošėjo A ėjimų tikimybės p_i išliktų tos pačios. Rekomenduočiau skaitytojui pačiam surasti šio beveik akivaizdaus teiginio matematinį įrodymą (žiūr. užduotį 1.16.405.).

Iš šio teiginio išplaukia, jog, sprendami tokio antagonistinio lošimo optimalios strategijos paieškos uždavinį, mes visada galime laikyti, kad $\forall i \forall j (a_{ij} \geq 0)$ ir $v > 0$. Tuomet nelygybių sistemą

$\sum_{i=1}^s a_{ij}p_i \geq v$ galima pertvarkyti į sistemą $\sum_{i=1}^s a_{ij}x_i \geq 1$, kurioje $x_i = \frac{p_i}{v} \geq 0$ ir $j=1, 2, \dots, k$.

Sistema $\sum_{i=1}^s a_{ij}x_i \geq 1$ – tai apribojimų sistema, ribojanti valdomųjų kintamųjų x_i pasirinkimą ir apibrėžianti leistiną sprendinių sritį (LSS).

* Konkretų tokio modelio sudarymo ir jo taikymo pavyzdį, skaitytojas gali rasti 1.16.2.5. skyrelyje. Ten pateikiami detalūs paaiškinimai ir taikomų metodų pagrindimas.

Kadangi $\sum_{i=1}^s p_i = 1$, tai $\sum_{i=1}^s x_i = \sum_{i=1}^s \frac{p_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s p_i = \frac{1}{v}$, iš kur išplaukia, jog, minimizuodami kintamųjų x_i sumą $\sum_{i=1}^s x_i$, mes tuo pačiu maksimizuosime garantuotą lošėjo A išlošio vidurkį $\bar{v} = v$.

Todėl funkciją $F(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^s x_i \rightarrow \min$ galime laikyti optimizacinio modelio tikslo funkcija.

Kadangi ši funkcija yra tiesinė ir apribojimai – tiesinės nelygybės, o valdomų kintamųjų reikšmės $x_i \geq 0$, negali tapti neigiamos, tai **šio uždavinio sprendimui galima taikyti simplekso algoritmą**.

Pavyzdžiui, jei, konkretizuodami lošėjo A išlošių a_{ij} matricą, kurią bendruoju atveju vaizduoja 357-oji lentelė, turinti s eilučių, atitinkančių lošėjo A ėjimus, ir k stulpelių, atitinkančių antrojo lošėjo ėjimus, priimtumė, kad $s=3$, $k=3$, $a_{11}=8$, $a_{12}=2$, $a_{13}=4$, $a_{21}=4$, $a_{22}=5$, $a_{23}=6$, $a_{31}=1$, $a_{32}=7$ ir $a_{33}=3$, tai tokio antagonistinio porinio lošimo su nuline suma matematinį modelį sudarytų tikslo funkcija $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$ ir apribojimai: $x_1 = \frac{p_1}{v} \geq 0$, $x_2 = \frac{p_2}{v} \geq 0$, $x_3 = \frac{p_3}{v} \geq 0$, $8x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1$, $2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1$, $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 1$.

Palieku pačiam skaitytojui įsitikinti (žiūr. 1.16.408. užduotį), kad išsprendę šį tiesinį optimizavimo uždavinį simplekso metodu, rastume, jog $x_1^{(opt)} = \frac{1}{32}$; $x_2^{(opt)} = \frac{3}{16}$; $x_3^{(opt)} = 0$; $F^{(opt)} = \frac{7}{32}$. Atsižvelgdami į tai, kad $x_i = \frac{p_i}{v}$ ir kad $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$, gautume, kad optimalus vidutinis lošėjo A išlošis yra $\bar{v}^{(opt)} = v^{(opt)} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$, o jo ėjimų tikimybės yra $p_1^{(opt)} = \frac{1}{7}$, $p_2^{(opt)} = \frac{6}{7}$, $p_3^{(opt)} = 0$, t. y., kad optimali lošėjo A strategija yra strategija $S_A^{(opt)} = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right)$.

Sprendami šį uždavinį antrojo lošėjo atžvilgiu, t. y. minimizuodami vidutinį jo pralošį, gautume: $y_1 = \frac{q_1}{v} \geq 0$, $y_2 = \frac{q_2}{v} \geq 0$, $y_3 = \frac{q_3}{v} \geq 0$, $8y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 1$, $4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq 1$, $y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 1$, $\Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$, t. y. gautume optimizacinį modelį, dualų pirmojo lošėjo optimizaciniam modeliui. Išsprendę šį uždavinį simplekso metodu, rastume, jog $y_1^{(opt)} = \frac{3}{32}$, $y_2^{(opt)} = \frac{1}{8}$, $y_3^{(opt)} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$, $S_B^{(opt)} = \left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}; 0\right)$. Rekomenduočiau skaitytojui pačiam surasti šių optimizavimo uždavinių (tiesioginio ir dualaus) sprendinius (žiūr. 1.16.408. ir 1.16.409. užduotis).

Nagrinėdami gautuosius antagonistinio lošimo optimizavimo uždavinių sprendinius, galime pastebėti, jog gavome situaciją, panašią į tą, kai antagonistinio lošimo matrica, pavaizduota 357-ojoje lentelėje, turėjo balno tašką. Tuomet lošėjams buvo nenaudinga nukrypti nuo tą tašką atitinkančių grynųjų strategijų, o dabar jiems nenaudinga nukrypti nuo savo **optimalių mišriųjų strategijų**.

$S_A^{(opt)} = (p_1^{(opt)}; p_2^{(opt)}; p_3^{(opt)}) = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right)$ ir $S_B^{(opt)} = (q_1^{(opt)}; q_2^{(opt)}; q_3^{(opt)}) = \left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}; 0\right)$. Lygindami

grynąsias ir mišriasias lošimų strategijas, taip pat galime pastebėti, kad **grynosios strategijos yra dalinis (ribinis) mišriųjų strategijų atvejis: mišrioji lošėjo A strategija tampa grynąja, kai viena iš tikimybių p_i tampa lygi vienetui, o visos kitos – nuliui. Kaip ir grynųjų, taip ir mišriųjų strategijų pasirinkimo atveju protingi lošėjai, lošdami porinį antagonistinį lošimą ir optimizuodami savo**

ėjimų pasirinkimą, pasirenka juos taip, kad lošėjų vidutinis išlošis (ar pralošis) $\bar{v}^* = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k a_{ij} p_i^* q_j^*$

būtų lygus $\max_{p_i} \min_{q_j} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k a_{ij} p_i q_j = \min_{q_j} \max_{p_i} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^s a_{ij} p_i q_j$.

Kai poriniame antagonistiniame lošime su nuline suma kurio nors lošėjo galimų ėjimų skaičius yra lygus 2, t. y. kai $(s=2) \vee (k=2)$, tai **optimalias lošimo strategijas $S_A^{(opt)}$ ir $S_B^{(opt)}$ galima surasti ne tik naudojantis simplekso metodu, bet ir**

paprasciau – vaizduojant galimus lošėjų ėjimus grafiškai, t. y. pasitelkiant nomogramų metodą. Pailiustruosiu šio metodo taikymą konkrečiais pavyzdžiais.

Tarkime, jog $s=2$, $k=4$ ir tokį antagonistinį porinį lošimą su nuline suma aprašo lošėjo A išlošio a_{ij} matrica, pavaizduota 358-ojoje lentelėje, kurią galima laikyti vienu iš galimų 357-osios lentelės variantų.

358. lentelė

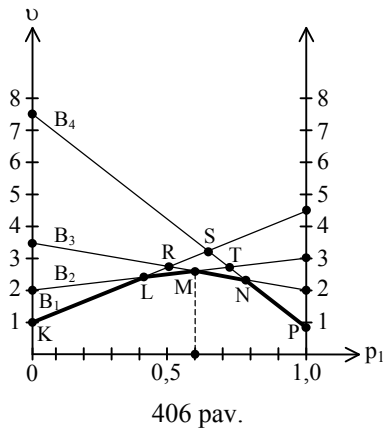
$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4,5	3	2	0,9
A_2	1	2	3,5	7,5

Pažymėsime lošėjo A galimų ėjimų A_1 ir A_2 tikimybes žymenimis p_1 ir p_2 , o lošėjo B galimų ėjimų B_1, B_2, B_3 ir B_4 tikimybes – žymenimis q_1, q_2, q_3 ir q_4 .

Lošėjo A ėjimą A_i atitinka išlošio vidurkis $\bar{v}_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}q_j$. Jei

lošėjas A žinotų lošėjo B ėjimų B_j tikimybes q_j , tai jis galėtų pasirinkti tą ėjimą $A_i=A_{i^*}$, kuris atitiktų maksimalų išlošio vidurkį $\bar{v}_{i^*} = \max_i \bar{v}_i = \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij}q_j = \sum_{j=1}^k a_{i^*j}q_j$. Tačiau lošėjas A lošėjo B ėjimų

tikimybių q_j nežino ir, žinodamas tik lošimo mokėjimų matricą, pavaizduotą 358-ojoje lentelėje, gali išreikšti savo galimų išlošių vidurkių priklausomybes nuo p_i ir q_j matematiškai bei pavaizduoti tas priklausomybes grafiškai, t. y. gali sudaryti nomogramą, pavaizduotą 406 pav., kurioje abscisių ašis yra tikimybės p_1 reikšmių ašis, o ordinačių ašis – lošėjo A galimų išlošių v ašis.



Šiame brėžinyje atkarpos B_j , jungiančios taškus $(p_1=0; v=a_{2j})$ ir $(p_1=1; v=a_{1j})$, vaizduoja lošėjo A vidutinio išlošio $\bar{v}_{B_j}$ priklausomybę nuo jo ėjimo A_1 tikimybės p_1 reikšmės, kai lošėjas B daro ėjimą B_j . Pavyzdžiui, atkarpa B_1 , jungianti taškus $(0;1)$ ir $(1;4,5)$, vaizduoja lošėjo A vidutinio išlošio $\bar{v}_{B_1}$ priklausomybę nuo p_1 tuo atveju, kai lošėjas B daro ėjimą B_1 . Ši priklausomybė aprašoma formule $\bar{v}_{B_1}=4,5p_1+p_2=1+3,5p_1$. Analogiškai gauname formules $\bar{v}_{B_2}=3p_1+2p_2=2+p_1$, $\bar{v}_{B_3}=2p_1+3,5p_2=3,5-1,5p_1$, $\bar{v}_{B_4}=0,9p_1+7,5p_2=7,5-6,6p_1$, kurios 406 pav. pavaizduotos atkarpomis, pažymėtomis B_2, B_3 ir B_4 .

Nagrinėdami 406 pav. galime pastebėti, kad lošėjas B, stengdamasis maksimaliai sumažinti lošėjo A vidutinį išlošį (savo vidutinį pralošį), jokių būdu negali sumažinti to išlošio žemiau laužtinės KLMNP. Kadangi lošėjas A suinteresuotas gauti kuo didesnę garantuotą vidutinį išlošį $\bar{v}$, tai jam tikslinga pasirinkti tokį ėjimo A_1 dažnį, kuris būtų kuo artimesnis tikimybei p_1 , atitinkančiai tašką M, kuriame garantuotas vidutinis išlošis $\bar{v}$ būtų didžiausias.

Tikimybę p_1 , atitinkančią tašką M, galima rasti ne tik grynai grafiškai, bet ir apskaičiuoti, atsižvelgiant į tai, kad taškas M yra atkarpų B_2 ir B_3 susikirtimo taškas, kurio koordinatės privalo tenkinti lygybę $\bar{v}_2 = \bar{v}_3$, t. y. lygybę $2+p_1=3,5-1,5p_1$. Iš tos lygybės išplaukia, jog $p_1^{(opt)} = \frac{1,5}{2,5}=0,6$.

Taigi lošėjo A optimali strategija šiuo atveju yra mišri strategija $S_A^{(opt)}=(p_1^{(opt)}; p_2^{(opt)})=(0,6;0,4)$. Pasinaudodamas šia strategija, lošėjas A garantuotai gaus vidutinį išlošį $\bar{v}_A^{(opt)} \geq 2,6$: jei lošėjas B naudosis tik ėjimais B_2 ir B_3 , tai $\bar{v}_A^{(opt)}=3p_1^{(opt)}q_2+2p_1^{(opt)}q_3+2p_2^{(opt)}q_2+3,5p_2^{(opt)}q_3=3 \cdot 0,6q_2+2 \cdot 0,6q_3+2 \cdot 0,4q_2+3,5 \cdot 0,4q_3=2,6(q_2+q_3)=2,6$, o jei lošėjas B loš neoptimaliai ir naudosis dar ir ėjimais B_1 bei B_4 , tai $\bar{v}_A^{(opt)}=p_1^{(opt)}(4,5q_1+3q_2+2q_3+0,9q_4)+p_2^{(opt)}(q_1+2q_2+3,5q_3+7,5q_4)=3,1q_1+2,6q_2+2,6q_3+3,54q_4=2,6(q_1+q_2+q_3+q_4)+0,5q_1+0,94q_4 \geq 2,6$.

Lošėjo A garantuotas vidutinis maksimalus išlošis $\bar{v}^{(opt)}=2,6$ bus lygus garantuotam minimaliam vidutiniam lošėjo B pralošiui, o tai reiškia, kad taškas M bus optimumo taškas ne tik lošėjui A, bet ir lošėjui B, t. y., kad lošimo matricos maksiminas $\max_{p_i} \min_{q_j} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k a_{ij}p_iq_j$ sutaps su jos

$$\text{minimaksu } \min_{q_j} \max_{p_i} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^s a_{ij}p_iq_j.$$

Pasinaudodami šia aplinkybe, o taip pat tuo, kad taškas M yra atkarpa B_2 ir B_3 , atitinkančių lošėjo B ėjimus B_2 ir B_3 , susikirtimo taškas, galime apskaičiuoti optimalią lošėjo B strategiją, kuri taip pat bus mišri: $S_B^{(opt)} = (q_1^{(opt)}, q_2^{(opt)}, q_3^{(opt)}, q_4^{(opt)}) = (0, q_2^{(opt)}, q_3^{(opt)}, 0)$.

Tikimybų q_1 ir q_4 optimalios reikšmės turėtų būti lygios 0, nes, kaip tai matyti iš 406 pav., lošėjui B daryti ėjimus B_1 ir B_4 būtų nuostolinga: tuo galėtų pasinaudoti lošėjas A, padidindamas savo vidutinį išlošį (o tuo pačiu ir lošėjo B pralošį). Pavyzdžiui, jei lošėjas B naudotųsi tik ėjimais B_1 ir B_3 , tai lošėjas A sumažintų ėjimų A_1 dažnį taip, kad jo garantuotas vidutinis išlošis padidėtų ir atitiktų jau ne tašką M, o tašką R. Padidėtų ir lošėjo B vidutinis pralošis. Dar labiau padidėtų lošėjo A išlošis ir lošėjo B pralošis, jei lošėjas B naudotųsi tik ėjimais B_1 ir B_4 , o lošėjas A atitinkamai padidintų ėjimų A_1 ėjimų dažnį p_1 taip, kad tas dažnis atitiktų tašką S.

Abiejų lošėjų bendro optimumo taške M turėtų galioti ne tik lygybės $a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = a_{13}p_1 + a_{23}p_2 = 2,6$, bet ir lygybės $a_{12}q_2 + a_{13}q_3 = a_{22}q_2 + a_{23}q_3 = 2,6$ bei lygybė $q_2 + q_3 = 1$, iš kurių gauname, jog $q_2^{(opt)} = 0,6$ ir $q_3^{(opt)} = 0,4$. Taigi, $S_B^{(opt)} = (0; 0,6; 0,4; 0)$.

Lošėjui B laikantis optimalios strategijos, lošėjo A vidutinis išlošis (o kartu – ir lošėjo B vidutinis pralošis) jau nebeprisiklausytų nuo to, kokią strategiją pasirinktų lošėjas A. Įrodysime tai.

Optimalus lošėjo B vidutinis pralošis $\bar{v}_B^{(opt)} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k a_{ij} p_i q_j^{(opt)} = a_{12} p_1 q_2^{(opt)} + a_{13} p_1 q_3^{(opt)} + a_{22} p_2 q_2^{(opt)} + a_{23} p_2 q_3^{(opt)} = 3p_1 \cdot 0,6 + 2p_1 \cdot 0,4 + 2p_2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 5 \cdot p_2 \cdot 0,4 = 2,6p_1 + 2,6p_2 = 2,6$. Kaip matyti iš gauto rezultato, kai tikimybės q_2 ir q_3 yra lygios savo optimalioms reikšmėms, lošėjo B vidutinis pralošis jau nebeprisiklauso nuo p_1 , ir p_2 yra konstanta tikimybų p_1 ir p_2 kitimo atžvilgiu. Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti įrodyti šį teiginį bendruoju atveju, t. y. esant bet kokiai porinio antagonistinio lošimo su nuline suma matricai (a_{ij}) .

Tą patį rezultatą, kurį gavome, sprenddami šį antagonistinio lošimo uždavinį grafiniu metodu, galima buvo gauti ir naudojantis simplekso algoritmu. Pavyzdžiui, ieškodami lošėjo B optimalios strategijos, būtume gavę apribojimus $y_1 = \frac{q_1}{v} \geq 0$, $y_2 = \frac{q_2}{v} \geq 0$, $y_3 = \frac{q_3}{v} \geq 0$, $y_4 = \frac{q_4}{v} \geq 0$, $4,5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 0,9y_4 \leq 1$, $y_1 + 2y_2 + 3,5y_3 + 7,5y_4 \leq 1$ ir tikslo funkciją $\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \rightarrow \max$. Pereidami nuo nelygybių prie lygybių, gautume tokį šio uždavinio matematinį modelį:

$$y_5 = 1 - (4,5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 0,9y_4),$$

$$y_6 = 1 - (y_1 + 2y_2 + 3,5y_3 + 7,5y_4),$$

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = -\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \rightarrow \min.$$

Šio uždavinio sprendimą simplekso metodu vaizduoja 359-ioji, 360-oji ir 361-oji lentelės:

359. lentelė

B.K.\L.K.	L.n.	y_1	y_2	y_3	y_4
y_5	1	4,5	3	2	0,9
y_6	1	1	2	3,5	7,5
F	0	1	1	1	1

360. lentelė

B.K.\L.K.	L.n.	y_1	y_5	y_3	y_4
y_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{10}$
y_6	$\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{69}{10}$
F	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{10}$

361. lentelė

B.K.\L.K.	L.n.	y_1	y_5	y_6	y_4
y_2	$\frac{3}{13}$	$\frac{55}{26}$	$\frac{7}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{237}{130}$
y_3	$\frac{2}{13}$	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{207}{65}$
F	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{5}{26}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{47}{130}$

Optimalųjį sprendinį $y_1^{(opt)} = 0$, $y_2^{(opt)} = \frac{3}{13}$, $y_3^{(opt)} = \frac{2}{13}$, $y_4^{(opt)} = 0$, $y_5^{(opt)} = 0$ vaizduoja 361-oji lentelė, iš kurios matyti, kad optimali tikslo funkcijos $F(y_1, y_2, y_3, y_4) = -\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = -(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$ reikšmė yra lygi $-\frac{5}{13}$. Kadangi $y_1^{(opt)} + y_2^{(opt)} + y_3^{(opt)} + y_4^{(opt)} = \frac{1}{v^{(opt)}}$, tai $v^{(opt)} = \frac{13}{5} = 2,6$, iš kur išplaukia, kad $q_1^{(opt)} = v^{(opt)} \cdot y_1^{(opt)} = 2,6 \cdot 0 = 0$, $q_2^{(opt)} = v^{(opt)} \cdot y_2^{(opt)} = 2,6 \cdot \frac{3}{13} = 0,6$, $q_3^{(opt)} = v^{(opt)} \cdot y_3^{(opt)} = 2,6 \cdot \frac{2}{13} = 0,4$, $q_4^{(opt)} = 0$. Todėl $S_B^{(opt)} = (0; 0,6; 0,4; 0)$, o tai sutampa su tuo rezultatu, kuris buvo gautas sprendžiant šį uždavinį grafiniu būdu (žiūr. 406 pav.).

Nesunku įsitikinti, kad, sprenddami simplekso metodu šiam uždaviniui dualų uždavinį $x_1 = \frac{p_1}{v} \geq 0$, $x_2 = \frac{p_2}{v} \geq 0$, $4,5x_1 + x_2 \geq 1$, $3x_1 + 2x_2 \geq 1$, $2x_1 + 3,5x_2 \geq 1$, $0,9x_1 + 7,5x_2 \geq 1$, $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 =$

$$=0-(-x_1-x_2) \rightarrow \min, \text{ b\u0177tume gav\u0117: } x_1^{(\text{opt})} = \frac{3}{13}, x_2^{(\text{opt})} = \frac{2}{13}, x_3^{(\text{opt})} = x_4^{(\text{opt})} = x_5^{(\text{opt})} = x_6^{(\text{opt})} = 0, v^{(\text{opt})} = 2,6,$$

i\u0161 kur i\u0161plaukia, jog $S_A^{(\text{opt})} = (p_1^{(\text{opt})}, p_2^{(\text{opt})}) = (0,6; 0,4)$, o tai irgi sutampa su anks\u0107iau gautu rezultatu.

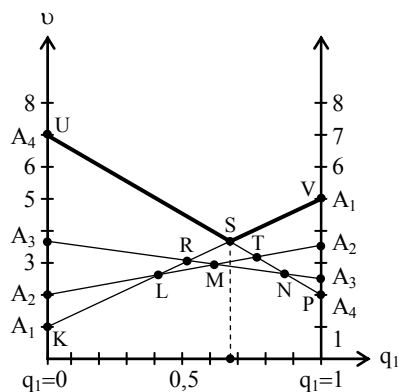
Pana\u0161iai gali b\u017bti i\u0161spr\u0117stas ir antagonistinio porinio lo\u0161imo su nuline suma u\u017bdavinys, kai lo\u0161\u0117jo A i\u0161lo\u0161i\u0177 matrica turi $s \times k = (s \times 2)$ matavim\u0177. Tik \u0161iuo atveju, sprend\u0177iant u\u017bdavin\u0177 grafiniu metodu, ribojan\u0107i\u0177 lau\u017etlin\u0117 sudaro ne apatin\u0117 (\u0177i\u0177r. lau\u017etlin\u0117 KLMNP 406-ajame pav.), o vir\u0161utin\u0117 lau\u017etlin\u0117 (\u0177i\u0177r. lau\u017etlin\u0117 USV 407-ajame pav.).

Tarkime, jog lo\u0161\u0117jo A i\u0161lo\u0161i\u0177 a_{ij} matric\u0177 ($s \times k$) = (4 \times 2) vaizduoja 362-oji lentel\u0117, kuri\u0177 atitinka grafikas, pavaizduotas 407 pav.

Tame grafike pavaizduotos lo\u0161\u0117jo A vidutini\u0177 i\u0161lo\u0161i\u0177 $\bar{v}_i$ priklausomyb\u0117s, atsirandan\u0107ios padarius \u0117jim\u0177 A_i , nuo lo\u0161\u0117jo B \u0117jim\u0177 B_j tikimybi\u0177 q_j : $\bar{v}_1 = 5q_1 + q_2 = 1 + 4q_1$, $\bar{v}_2 = 3,5q_1 + 2q_2 = 2 + 1,5q_1$, $\bar{v}_3 = 2,5q_1 + 3,75q_2 = 3,75 - 1,25q_1$, $\bar{v}_4 = 2q_1 + 7q_2 = 7 - 5q_1$.

362. lentel\u0117

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2
A_1	5	1
A_2	3,5	2
A_3	2,5	3,75
A_4	2	7



407 pav.

I\u0161 407 pav. matyti, kad lo\u0161\u0117jui A, norin\u0107iam i\u0161lo\u0161ti kuo daugiau, tikslinga naudotis tik \u0117jimais A_1 ir A_4 su tam tikrais da\u017bniais $p_1^{(\text{opt})}$ ir $p_4^{(\text{opt})}$, o lo\u0161\u0117jui B, suprantant kad lo\u0161\u0117jas A b\u017btent taip ir darys, pasirinkti toki\u0177 mi\u0161ri\u0177j\u0177 strategij\u0177 $S_B^{(\text{opt})} = (q_1^{(\text{opt})}, q_2^{(\text{opt})})$, kuri atitikt\u0177 lau\u017etlin\u0117s USV minimumo ta\u0161k\u0177 S.

Tame ta\u0161ke vidutinis lo\u0161\u0117jo A i\u0161lo\u0161is $v_1 = 5q_1 + q_2$ turi b\u017bti lygus vidutiniam jo i\u0161lo\u0161iui $v_4 = 2q_1 + 7q_2$, i\u0161 kur i\u0161plaukia lygyb\u0117 $1 + 4q_1 = 7 - 5q_1$, t. y. $q_1^{(\text{opt})} = \frac{2}{3} \approx 0,67$. Tod\u0117l $S_B^{(\text{opt})} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ir $\bar{v}^{(\text{opt})} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$.

Optimali\u0177 lo\u0161\u0117jo A strategij\u0177 $S_A^{(\text{opt})} = (p_1^{(\text{opt})}, p_2^{(\text{opt})}, p_3^{(\text{opt})}, p_4^{(\text{opt})}) = (p_1^{(\text{opt})}, 0; 0; p_4^{(\text{opt})})$ gausime i\u0161 lygyb\u0117s $5p_1 + 2p_4 = p_1 + 7p_4$, pakeisdami p_4 i\u0161 $1 - p_1$: $2 + 3p_1 = 7 - 6p_1$; $p_1^{(\text{opt})} = \frac{5}{9}$; $p_4^{(\text{opt})} = \frac{4}{9}$; $S_A^{(\text{opt})} = (\frac{5}{9}, 0; 0; \frac{4}{9})$, $\bar{v}^{(\text{opt})} = 5 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$.

Ie\u0161kodami optimalios lo\u0161\u0117jo A strategijos simplekso metodu b\u017btume gav\u0117: $x_1 = \frac{p_1}{v} \geq 0$, $x_2 = \frac{p_2}{v} \geq 0$, $x_3 = \frac{p_3}{v} \geq 0$, $x_4 = \frac{p_4}{v} \geq 0$, $5x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 + 2x_4 \geq 1$, $x_1 + 2x_2 + 3,75x_3 + 7x_4 \geq 1$, $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$.

Pertvarkydami \u0161ias formules i\u0161 standartin\u0117 bendrojo tiesinio optimizacinio modelio form\u0177 taip, kaip tai buvo padaryta 1.15.2.6. skyrelyje, b\u017btume gav\u0117 lygybes:

$$x_7 = 1 - (5x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 + 2x_4 - x_5)$$

$$x_8 = 1 - (x_1 + 2x_2 + 3,75x_3 + 7x_4 - x_6)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 - (-x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \rightarrow \min$$

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_7 + x_8 = 2 - (6x_1 + 5,5x_2 + 6,25x_3 + 9x_4 - x_5 - x_6).$$

\u0160io u\u017bdavinio sprendim\u0177 simplekso metodu vaizduoja 363-oji, 364-oji ir 365-oji lentel\u0117s.

363. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₇	1	5	3,5	2,5	2	-1	0
x ₈	1	1	2	3,75	7	0	-1
F	0	-1	-1	-1	-1	0	0
W	2	6	5,5	6,25	9	-1	-1

364. lentelė

\	L.n.	x ₇	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
x ₁	0,2	0,2	0,7	0,5	0,4	-0,2	0
x ₈	0,8	-0,2	1,3	3,25	6,6	0,2	-1
F	0,2	0,2	-0,3	-0,5	-0,6	-0,2	0
W	0,8	-1,2	1,3	3,25	6,6	0,2	-1

365. lentelė

\	L.n.	x ₇	x ₂	x ₃	x ₈	x ₅	x ₆
x ₁	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{41}{66}$	$\frac{10}{33}$	$-\frac{2}{33}$	$-\frac{7}{33}$	$\frac{2}{33}$
x ₄	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{13}{66}$	$\frac{65}{132}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{33}$	$-\frac{5}{33}$
F	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{9}{44}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$
W	0	-1	0	0	-1	0	0

365-oji lentelė rodo, kad leistinas sprendinys egzistuoja, nes pagalbinės tikslo funkcijos W minimali reikšmė yra lygi 0. Išbraukę iš tos lentelės nebereikalingus stulpelius, atitinkančius fiktyvius kintamuosius x₇ ir x₈, matome, jog visų kitų tikslo funkcijos F koeficientų reikšmės yra neigiamos, t. y., matome, kad 365-oji lentelė vaizduoja ne tik leistiną, bet ir optimalų sprendinį, kuris yra toks:

$x_1^{(opt)} = \frac{5}{33}$, $x_2^{(opt)} = 0$, $x_3^{(opt)} = 0$, $x_4^{(opt)} = \frac{4}{33}$, $x_5^{(opt)} = 0$, $x_6^{(opt)} = 0$. Optimali tikslo funkcijos $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ reikšmė yra lygi $\frac{3}{11}$, todėl $v^{(opt)} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ ir $p_1^{(opt)} = v^{(opt)} \cdot x_1^{(opt)} = \frac{11}{3} \cdot \frac{5}{33} = \frac{5}{9}$, $p_2^{(opt)} = 0$, $p_3^{(opt)} = 0$, $p_4^{(opt)} = \frac{4}{9}$, $S_A^{(opt)} = (\frac{5}{9}; 0; 0; \frac{4}{9})$. Analogiškai, naudojantis simplekso metodu, buvo galima gauti, jog $S_B^{(opt)} = (q_1^{(opt)}, q_2^{(opt)}) = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$. Rekomenduoju skaitytojui tuo įsitikinti (žiūr. 1.16.412. užduotį).

Taigi, kai **antagonistinio porinio lošimo su nuline suma matrica neturi balno taško, optimalias lošėjų strategijas, kurios šiuo atveju bus mišrios, visada galima rasti, naudojantis simplekso metodu. Kai lošimo matricos matmenys $s \times k$ yra $2 \times k$ arba $s \times 2$, tai optimalų sprendinį galima rasti ir paprasčiau: grafiniu metodu** nustatant, kurie lošėjų ėjimai turėtų būti **aktyvūs** ir kurie – **pasyvūs** (t. y. tokie, kuriais naudotis mišrioje strategijoje nėra tikslinga), o po to apskaičiuojant optimalius teorinius aktyviųjų ėjimų dažnius – tikimybes p_i ir q_j – bei optimalias vidutinio išlošio (pralošio) reikšmes $\bar{v}$ aktyvias strategijas vaizduojančių atkarpų susikirtimo taške.

Kai antagonistinio porinio lošimo su nuline suma matrica turi balno tašką, tai, kaip jau buvo minėta, optimalus sprendinys surandamas dar paprasčiau – surandant grynąsias maksiminines ir minimaksines lošėjų strategijas, atitinkančias tą tašką.

Taigi, **poriniame antagonistiniame lošime su nuline suma visuomet galima rasti optimalias lošėjų strategijas: jei lošimo matrica turi balno tašką, tai tos strategijos bus gryniosios, o jei balno taško neturi – mišriosios.**

O tai reiškia, jog **antagonistiniame poriniame lošime prielaida, kad to lošimo lošėjai yra pakankamai protingi, visais atvejais leidžia eliminuoti situacijos neapibrėžtumą ir rasti optimalias lošimo strategijas.**

Visai kitokia situacija susidaro lošime su „gamta“, nes „gamta“ nėra lošėjo A antagonistas, ir todėl gali nebetikti tos prielaidos ir tie metodai, kuriais vadovaudamiesi lošėjai – antagonistai galėdavo apskaičiuoti vienas kito būsimus optimalius ėjimus. Žinoma, jei lošėjas A turi sukaupęs gana daug statistinės informacijos apie buvusius „gamtos ėjimus“ ir ta informacija rodo, jog dėl „gamtos“ elgesio stochastinio stabilumo galima pakankamai patikimai apskaičiuoti galimų „gamtos ėjimų“ tikimybes q_j , tai jis gali apskaičiuoti savo galimo būsimo išlošio vidurkius $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j$, atitinkančius kiekvieną galimą savo ėjimą i , ir išsirinkti tą

$$\begin{aligned} \text{ėjimą } i=i^*, \text{ kurį atitinka didžiausias išlošio vidurkis } \bar{a} = \bar{a}_{i^*} = \max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j = \\ = \sum_{j=1}^k a_{i^*j} q_j. \end{aligned}$$

Kai lošėjas A neturi galimybės apskaičiuoti „gamtos ėjimų“ tikimybių q_j , tai jis galėtų pasinaudoti jau minėtuoju (tačiau dažniausiai niekuo nepagrįstu) Laplaso principu ir priimti, jog $q_j = \frac{1}{k}$, t. y., kad visų galimų „gamtos ėjimų“ tikimybės yra vienodos, arba pasirinkti tokį savo ėjimų dažnį, kad jo išlošis nepebriklausytų nuo „gamtos“ ėjimų. Vadovaudamasis Laplaso principu, lošėjas A pasirinktų tą ėjimą $i=i^*$, kuris atitiktų lošimo matricos eilutę i^* , turinčią didžiausią savo elementų sumą $\sum_{j=1}^k a_{ij}$, o antruoju atveju galėtų, naudodamasis simplekso algoritmu, rasti aktyviausias strategijas ir savo ėjimų dažnius.

Kai lošėjas A – kraštutinis pesimistas ir visada tikisi blogiausio, tai jis greičiausiai pasirinks tą ėjimą $i=i^*$, kuris duoda geriausią rezultatą tarp galimų blogiausių, gaudamas išlošį, ne mažesnę už $\max_i \min_j a_{ij}$. Tai ir sudaro mūsų jau minėto Valdo principo esmę. Todėl formulę $W = \max_i \min_j a_{ij}$ vadina **Valdo kriterijum** (o taip pat – **išlošio maksimino kriterijum** bei **kraštutinio pesimizmo kriterijum**).

Kartais naudojamosi ir kitu kraštutinio pesimizmo kriterijum – **minimaksinės rizikos, arba Sevidžo kriterijum**.

Naudojantis šiuo kriterijum, lošimo išlošių matrica $\|a_{ij}\|$ transformuojama į **lošimo rizikos matricą** $\|r_{ij}\|$, kurios elementai r_{ij} apskaičiuojami, naudojantis formule $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$. Dydis r_{ij} rodo, kiek lošėjas A, pasirinkdamas ėjimą i situacijoje, kai „gamta daro ėjimą j “, praranda, lyginant su tuo maksimaliu išlošiu $\max_i a_{ij}$, kurį jis būtų galėjęs gauti situacijoje j , jei būtų iš anksto žinojęs, kad „gamta“ tikrai bus būsenoje j . Išsirinkdami iš galimų blogiausių atvejų geriausiąjį, ir gauname formulę $S = \min_i \max_j r_{ij}$ – **Sevidžo kriterijaus matematinę išraišką**. Sprendimai, priimami vadovaujantis Valdo ir Sevidžio kriterijais, gali sutapti, bet gali ir nesutapti (žiūr. užduotį 1.16.428.).

Kai lošėjas A nėra kraštutinis pesimistas ir todėl nėra įsitikinęs, kad visada nutiks tai, kas blogiausia, jis, lošdamas neapibrėžtinį lošimą su gamta, gali pasinaudoti **Hurvico kriterijum**, kuris jungia savyje tam tikrą dalį pesimizmo su tam tikra dalimi optimizmo. Santykį tarp pesimizmo ir optimizmo išreiškia **pesimizmo koeficientas** γ , kurio reikšmę, priklausančią intervalui $(0, 1)$, pasirenka pats lošėjas: kuo labiau jis linkęs į pesimizmą, tuo artimesnę 1 koeficiento γ reikšmę jis renka. **Hurvico kriterijaus matematinė išraiška – formulė** $H = \max_i \left[\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right]$. Iš jos išplaukia, jog lošėjas, vadovaudamasis šiuo kriterijum, pasirinks tą ėjimą $i=i^*$, kuris atitinka didžiausią sumos $\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij}$ reikšmę $\max_i \left[\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right] = \gamma \min_j a_{i^*j} + (1-\gamma) \max_j a_{i^*j}$. Kai $\gamma=1$, tai Hurvico kriterijus sutampa su Valdo kriterijum, atitinkančiu kraštutinį pesimizmą, o kai γ tampa lygiu 0, tai

Hurvico kriterijus tampa **kraštutinio optimizmo kriterijum**. Dėl to, kad koeficiento γ reikšmė pasirenkama subjektyviai, **Hurvico kriterijus yra subjektyvus**. Tačiau jei taip surasta „optimali“ i^* reikšmė i^* yra stabili gana plačiame γ reikšmės kitimo diapazone, tai galima tikėtis, kad ėjimas $i=i^*$ yra ne tik subjektyviai, bet ir objektyviai optimalus ar bent pakankamai artimas objektyviai optimaliam, kai toks „egzistuoja“.

Gana dažnai ir lošimuose su „gamta“ lošėjai, kai nesugeba prognozuoti „gamtos“ ėjimų tikimybių, pasirinkdami ėjimus bei jų dažnius (tikimybes p_i) mišrioje strategijoje, vadovaujasi jau mums iš antagonistinių lošimų teorijos žinomu lošėjo A vidutinių nuostolių minimakso kriterijum, kuriuo naudojantis surandamos optimalios lošėjų strategijos tuose lošimuose.

Kai lošimo su gamta matrica turi balno tašką, tai tas kriterijus sutampa su Valdo kriterijum, tačiau tais atvejais, kai lošimo matrica balno taško neturi, tų kriterijų taikymas duoda jau skirtingus rezultatus: taikydamas Valdo kriterijų lošėjas A pasirenka atitinkamą grynąją strategiją, o laikydamas „gamtą“ savo antagonistu – mišriąją strategiją.

Pavyzdžiui, jei lošimo matrica, pavaizduota 358-ojoje lentelėje, būtų lošėjo A lošimo su „gamta“ išlošių matrica, tai lošėjas A, vadovaudamasis Valdo kriterijum, pasirinktų grynąją strategiją $S_A=(0;1)$, nes elementas $a_{i^*,j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = 1,0$ priklauso antrajai tos lentelės eilutei.

Laikydamas „gamtą“ savo antagonistu, lošėjas A, kaip tai išplaukia iš mūsų anksčiau gautų šio antagonistinio lošimo optimizavimo rezultatų, pasirinktų mišriąją strategiją $S_A=(p_1;p_2)=(0,6;0,4)$. Kaip tai matyti iš 406 pav., lošėjas A, laikydamasis šios strategijos, galėtų būti garantuotai tikras, kad jo vidutinis išlošis niekada nebus mažesnis už 2,6, kai tuo tarpu, vadovaudamasis Valdo kriterijum ir pasirinkdamas strategiją $S_A=(0;1)$, jis galėtų būti garantuotai tikras, jog jo išlošis niekada nebus mažesnis tik už $\max_i \min_j a_{ij} = 1,0$.

Jei lošimo su „gamta“ matrica būtų 362-oji lentelė, tai lošėjas A, vadovaudamasis Valdo kriterijum, pasirinktų grynąją strategiją $S_A=(p_1;p_2;p_3;p_4)=(0;0;1;0)$, nes $a_{i^*,j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = 2,5$ priklauso trečiajai tos lentelės eilutei. Toks strategijos pasirinkimas garantuotų lošėjui A, kad jo išlošis niekada nebus mažesnis už $a_{i^*,j^*} = 2,5$.

Jei lošėjas A, laikydamas „gamtą“ savo antagonistu, šiuo atveju pasirinktų, kaip mes jau buvome apskaičiavę, optimalią mišriąją strategiją $S_A=(\frac{5}{9};0;0;\frac{4}{9})$, tai jo

garantuotas vidutinis išlošis
$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j = 5 \cdot \frac{5}{9} q_1 + 3,5 \cdot 0 \cdot q_1 + 2,5 \cdot 0 \cdot q_1 + 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot q_1 + 1 \cdot \frac{5}{9} \cdot q_2 + 2 \cdot 0 \cdot q_2 + 3,75 \cdot 0 \cdot q_2 + 7 \cdot \frac{4}{9} \cdot q_2 = \left(\frac{25}{9} + \frac{8}{9}\right) q_1 + \left(\frac{5}{9} + \frac{28}{9}\right) q_2 = \frac{33}{9} (q_1 + q_2) = \frac{11}{3}$$

nepriklausytų nuo „gamtos ėjimų“ ir būtų lygus $3\frac{2}{3}$, o tai daugiau už 2,5 (nors kartais,

kai $q_2 > \frac{14}{15}$, gali būti ir mažiau už $2,5 + 1,25q_2$).

Apibendrinami šių dviejų pavyzdžių nagrinėjimo rezultatus, galime suformuluoti (o po to – ir įrodyti) išvadą, galiojančią ir bendruoju atveju: **kai lošimo su „gamta“ matrica neturi balno taško, tai lošėjas A, laikydamas „gamtą“ protingu antagonistu ir naudodamasis antagonistiniuose lošimuose taikoma**

tokiais atvejais optimalia mišriąja strategija, gali sau garantuoti vidutinį maksiminį išlošį (minimaksinį pralošį), ne blogesnį, o dažnai – ir geresnį už tą, kurį jis galėtų sau garantuoti, naudodamasis iš Valdo kriterijaus išplaukiančia grynąja strategija.

Todėl tais atvejais, kai „gamtos ėjimų“ tikimybės q_j lošėjui A nėra žinomos, o jo išlošių a_{ij} matrica neturi balno taško, tai lošėjas A, norėdamas, kad garantuotas jo išlošio vidurkio minimumas būtų kuo didesnis, gali, pasirinkdamas savo ėjimus, šioje nepakankamai apibrėžtoje situacijoje, naudotis antagonistinių lošimų optimizavimo metodais. Tačiau didžiausio garantuoto vidutinio išlošio gavimas dar ne visada reiškia, kad ir realus, t. y. faktiškasis, vidutinis išlošis, kuris priklauso nuo „gamtos ėjimų“ tikimybių ir kartais gali būti didesnis už ką tik minėtąją didžiausią garantuotą išlošį, visada bus pats didžiausias. Priklausomai nuo to, kokios yra gamtos ėjimų B_j tikrosios tikimybės q_j , realus vidutinis išlošis, nebūdamas mažesnis už garantuotą vidutinį išlošį, gali būti už jį gerokai didesnis, ir todėl kartais gali atsitikti ir taip, kad, vadovaudamasis pesimistiniu Valdo kriterijumi, lošėjas A gaus didesnį realų vidutinį išlošį, negu vadovaudamasis kitais kriterijais (žiūr. 1.16.423. užduotį).

Pailiustruosiu įvairių optimalumo kriterijų taikymą lošimuose konkrečiais pavyzdžiais, konkretizuodamas 357-ąją lentelę bei nagrinėdamas įvairias situacijas.

Tarkime, kad lošime su gamta lošėjas A ir gamta gali daryti po keturis „ėjimus“ ir kad lošėjo A išlošių matricą vaizduoja 366–ji lentelė.

366. lentelė

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	5	8	6	6
2	8	6	5	8
3	9	4	5	9
4	8	7	6	8

367. lentelė

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	5	8	6	6
3	9	4	5	9
4	8	7	6	8

368. lentelė

$i \setminus j$	1	2	3
1	5	8	6
3	9	4	5
4	8	7	6

369. lentelė

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	4	0	0	3
3	0	4	1	0
4	1	1	0	1

Lošėjas A gali pastebėti, kad antrasis jo ėjimas niekada negali būti geresnis už ketvirtąjį. Todėl jam visada yra naudingiau vietoj antrojo ėjimo daryti ketvirtąjį, ir todėl jis **lošimų matricą gali supaprastinti**, išbraukdamas antrąją eilutę ir gaudamas matricą, pavaizduotą 367-ojoje lentelėje.

Jei vietoj „gamtos“ loštų protingas lošėjas B – lošėjo A antagonistas, tai jis, pastebėjęs, kad jo ėjimas $j=4$ niekada nebūna geresnis už ėjimą $j=1$ (kadangi $\forall_i (a_{i4} \geq a_{i1})$) ir todėl lošėjas B, darydamas ėjimą $j=4$, visada pralošia arba tiek pat arba daugiau, negu darydamas ėjimą $j=1$), nuspręstų išbraukti lošimų matricoje ketvirtąjį stulpelį. Tuomet gautume antagonistinio lošimo matricą, pavaizduotą 368-ojoje lentelėje.

Nesunku pastebėti, kad ši matrica turi balno tašką $(i^*, j^*) = (4, 3)$, kurį atitinka lošėjo A išlošis, lygus $a_{43}=6$. Kaip jau buvo minėta, balno taškui būdinga tai, kad nė vienam antagonistinio lošimo lošėjui neapsimoka nukrypti nuo to taško. Pavyzdžiui, jei lošėjas A, norėdamas išlošti $a_{31}=9$, padarytų ėjimą $i=3$, tai lošėjas B, norėdamas pralošti kuo mažiau, padarytų ne ėjimą $j=1$, o ėjimą $j=2$, ir lošėjas A vietoj svajotojo išlošio $a_{31}=9$ gautų išlošį $a_{32}=4$, kuris būtų mažesnis ne tik už $a_{31}=9$, bet ir už $a_{43}=6$. Panašiai atsitiktų ir lošėjui B, jei jis pasirinktų ne ėjimą $j^*=3$, o kurį nors kitą ėjimą. Pavyzdžiui, jei jis, norėdamas pralošti kuo mažiau, pasirinktų ėjimą $j=2$, tikėdamasis pralošti $a_{32}=4$, tai iš tikrųjų jis protingam lošėjui A praloštų $a_{12}=8$, t. y., daugiau negu $a_{43}=6$. Taigi, abiem lošėjams – antagonistams šiuo atveju egzistuoja vienintelė optimali grynoji (determinuota) strategija $(i^*, j^*) = (4, 3)$, kuomet $a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, ir jiems neapsimoka nuo jos nukrypti.

Kai lošėjas B yra „gamta“, tai ketvirtojo stulpelio eliminuoti jau negalima, nes „gamta“ nėra lošėjo A atžvilgiu antagonistas ir nesirenka savo „ėjimų“, orientuodamasi į lošėjo A išlošių bei pralošių dydį. Todėl lošėjo A lošimo su „gamta“ matematinis modelis yra 367-oji lentelė.

Jei lošėjas A, apdorodamas statistinę informaciją, nustatytų, jog „gamta“ savo „ėjimus“ daro su pastoviomis tikimybėmis q_j (pavyzdžiui: $q_1=0,1$; $q_2=0,6$; $q_3=0,2$ ir $q_4=0,1$), tai jis, maksimizuodamas savo išlošio vidurkį, pasirinktų tokį ėjimą $i=i^*$, kad tas vidurkis būtų didžiausias. Jei lošėjas A, esant

duotomis tikimybėmis q_j , pasirinktų pirmąjį ėjimą, tai jo išlošio vidurkis $\bar{a}_1$ būtų lygus $\sum_{j=1}^4 a_{1j}q_j = 5 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 = 7,1$. Analogiškai gautume, jog pasirinkęs $i=3$, lošėjas A išloštų vidutiniškai $\bar{a}_3 = 5,2$, o pasirinkęs $i=4$, išloštų $\bar{a}_4 = 7,0$. Lygindami išlošio vidurkius, matome, jog šiuo atveju optimali lošėjo A strategija būtų visada rinktis ėjimą $i=1$ ir gauti išlošio vidurkį $\bar{a}_1 = 7,1$.

Tuo atveju, kai lošėjas A nežinotų „gamtos ėjimų“ tikimybių ir, sprenddamas šį nepilnai apibrėžtą uždavinį, vadovautųsi Laplaso kriterijum, tai jis pasirinktų ėjimą $i=4$, nes suma $\sum_{j=1}^4 a_{4j} = 29$

yra didesnė už sumą $\sum_{j=1}^4 a_{1j} = 25$ ir už sumą $\sum_{j=1}^4 a_{3j} = 27$. Šiuo atveju jis vietoj vidutinio išlošio

$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 a_{4j} = 7,25$, kurio galėjo tikėtis, jei „gamtos ėjimų“ tikimybės (kaip tai išplaukia iš Laplaso prielaidos) būtų vienodos, iš tikrųjų gautų, esant „gamtos ėjimų“ tikimybėms $q_1=0,1$, $q_2=0,6$, $q_3=0,2$ ir $q_4=0,1$, tik vidutinį išlošį $\bar{a}_4 = 7,0$, t. y. mažesnę už tą, kuri gautų turėdamas reikalingą statistinę informaciją apie tikrąjį „gamtos ėjimų“ tikimybių q_j pasiskirstymą ir pasirinkdamas strategiją $S_A=(1;0;0;0)$.

Jei lošėjas A būtų kraštutinis pesimistas ir vadovautųsi Valdo kriterijum, tai jis taip pat pasirinktų ėjimą $i=4$, nes, padaręs tą ėjimą, jis blogiausiu atveju tikėtusi išlošti 6, kai tuo tarpu, padarius ėjimą $i=1$, blogiausiu atveju gaunamas išlošis yra lygus 5, o ėjimą $i=3$ atitinka mažiausias galimas išlošis, lygus 4. Taigi, didžiausią garantuotą išlošį $\max_i \min_j a_{ij} = a_{1,1} = 6$ lošėjas A gautų pasirinkęs ėjimą A_4 . Tą ėjimą ir rekomenduoja Valdo kriterijus.

Kadangi „gamta“ nėra lošėjo A antagonistas, tai lošėjas A, vadovaudamasis Valdo kriterijumi ir pasirinkdamas ėjimą A_4 , gali tikėtis ne tik garantuoto išlošio $v=6$, bet ir realaus vidutinio išlošio $\bar{v} = 8q_1 + 7q_2 + 6q_3 + 8q_4 = 6(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + 2q_1 + q_2 + 2q_4 = 6 + 2q_1 + q_2 + 2q_4$, kuris, būdamas ne mažesniu už 6, kartais galėtų būti ir didesnis, o jei „gamta“ darytų tik „ėjimus“ $j=1$ (arba $j=4$), galėtų tapti lygus net 8 vienetams. Jei visų „gamtos ėjimų“ tikimybės būtų vienodos, tai realus vidutinis lošėjo A išlošis, gautas vadovaujantis Valdo kriterijum, taptų lygus $\bar{v} = 6 + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 7,25$, t. y. ėjimas A_4 tokiu atveju,

kaip jau buvo minėta, būtų optimalus. Taigi, **racionalus kraštutinis pesimizmas ne visada veda prie kraštutinai pesimistinių rezultatų, tačiau visada garantuoja, kad gaunamas rezultatas niekada nebus blogesnis už geriausią tarp galimų blogiausių rezultatų.**

Panašią išvadą galima padaryti ir Sevidžo kriterijaus atžvilgiu. Tuo nesunku įsitikinti, pratęsus lošimo, aprašyto 367-ojoje lentelėje, nagrinėjimą.

Būdamas kraštutiniu pesimistu ir norėdamas pasinaudoti Sevidžo kriterijum, lošėjas A lošimo mokėjimų matricą, pavaizduotą 367-ojoje lentelėje, pertvarkytų į lošimo rizikos matricą, pavaizduotą 369-ojoje lentelėje. Siekdamas, kad blogiausiu atveju jo rizika būtų mažiausia, lošėjas A pasirinktų ėjimą $i=4$, nes $\max_j r_{4j} = 1$ yra mažesnis dydis už $\max_j r_{1j} = 4$ ir už $\max_j r_{3j} = 4$. Lošiant su „gamta“ ir naudojantis Sevidžo kriterijumi, t. y. pasirenkant ėjimą $i=4$, vidutinė lošėjo A rizika būtų lygi $\bar{r} = q_1 + q_2 + q_4 = 1 - q_3$, t. y. ne didesnė už $\max_j r_{4j} = 1$, o kartais – ir mažesnė. Ji galėtų tapti lygi 0, kai $q_3=1$, o mūsų nagrinėjamu atveju, kai $q_3=0,2$, ji būtų lygi 0,8.

Vidutinis išlošis $\bar{v}$, kurį besivadovaudamas kraštutinio pesimizmo kriterijais, esant duotoms gautos ėjimų tikimybėms, $q_1=0,1$, $q_2=0,6$, $q_3=0,2$, $q_4=0,1$, gautų lošėjas A_1 būtų lygus 7,0, t. y. didesnis už garantuotą minimalų išlošį $v=6$, tačiau mažesnis už tą vidutinį išlošį $\bar{v}=7,1$, kurį galėtų gauti protingas lošėjas, jei žinotų gamtos ėjimų tikimybes q_j . Nesunku įrodyti, jo vadovaujantis kraštutinio pesimizmo kriterijais gautas vidutinis išlošis (vidutinis pralošis), niekada nebūdamas mažesnis (didesnis) už garantuotą minimalų išlošį (maksimalų pralošį), niekada negali tapti geresnis už vidutinį išlošį (vidutinį pralošį), kurį lošėjas galėtų gauti, žinodamas gamtos ėjimų tikimybes q_j .

Jei lošėjas A nebūtų kraštutinis pesimistas ir nuspręstų šiame negriežtai apibrėžtame lošime su „gamta“ vadovautis Hurvico kriterijum, pasirinkdamas gana optimistinę pesimizmo koeficiento γ reikšmę $\gamma=0,3$, tai, apskaičiavęs sumą $\bar{v}_i = \gamma \min_j a_{ij} + (1 - \gamma) \max_j a_{ij}$ pirmajai 367-osios lentelės eilutei, jis gautų $\bar{v}_1 = 0,3 \cdot 5 + 0,7 \cdot 8 = 7,1$, antrajai ($i=3$) – $\bar{v}_3 = 0,3 \cdot 4 + 0,7 \cdot 9 = 7,5$ ir paskutinei ($i=4$) – $\bar{v}_4 = 0,3 \cdot 6 +$

+0,7·8=7,4. Pasirinkdamas maksimalią sumą $\max_i \bar{v}_i = \max_i (\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij})$, jis pasirinktą strategiją $i^*=3$, tačiau, esant anksčiau nurodytoms „gamtos ėjimų“ tikimybėms q_j , gautų vietoj to vidutinio išlošio $\bar{v}_{i^*} = \gamma \min_j a_{i^*j} + (1-\gamma) \max_j a_{i^*j} = 0,3 \cdot 4 + 0,7 \cdot 9 = 7,5$, kurio tikėjosi, tik išlošį

$$\bar{a}_{i^*} = \sum_{j=1}^4 a_{i^*j} q_j = \sum_{j=1}^4 a_{3j} q_j = 5,2.$$

Tai rodo, kad šiuo atveju lošėjo A intuityvus optimizmas nepasiteisintų: vietoj vidutiniškai geriausios strategijos jis šiuo atveju tariamai „moksliškai pagrįstai“ (juk ne šiaip sau spėliojo, o „matematinio kriterijum“ vadovavosi!) pasirinktą vidutiniškai blogiausią strategiją. Tačiau čia reikėtų kaltinti ne tik ir ne tiek Hurvico kriterijaus netobulumą, kiek lošėjo A neatsargumą, jo nepagrįstą optimizmą. Jei lošėjas A būtų buvęs atsargesnis ir nebūtų akiai pasitikėjęs savo intuicija, jis būtų pasistengęs patikrinti gauto „optimalaus sprendinio“ stabilumą bei jo jautrumą koeficiento γ pokyčiams, patikrindamas, ar strategija $i=3$ išlieka optimali ir mažiau optimistinėms koeficiento γ reikšmėms. Pavyzdžiui, pasirinkdamas $\gamma=0,5$, jis būtų gavęs, jog šiuo atveju $i^*=4$, t. y. būtų įsitikinęs, jog „optimali“ strategija $i=3$ nėra pakankamai stabili ir, matyt, būtų pasirinkęs mažiau optimistinį (tačiau stabilesnį ir daugumoje atvejų geresnį) lošimo strategijos variantą, iš tikrųjų leidžiantį išlošti šiek tiek daugiau, negu vadovaujantis strategija $i=3$.

Nagrinėdami lošimų, kurių matrica neturi balno taško, pavyzdžius, jau esame nustatę, kad mišri maksimalinė strategija, kuri yra optimali poriniuose antagonistiniuose lošimuose, leidžia ir lošimuose su „gamta“ padidinti lošėjo A garantuotą vidutinį maksimalų išlošį, lyginant su tuo garantuotu išlošiu, kurį užtikrina grynoji lošėjo A strategija, išplaukianti iš Valdo kriterijaus taikymo.

370. lentelė

$A_i \setminus G_j$	G_1	G_2	G_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Pavyzdžiui, kai lošimo su „gamta“ matricą sudaro lošėjo A išlošių matrica, pavaizduota 370-ojoje lentelėje, konkretizuojančioje 357-ąją lentelę, tai, kaip jau buvome gavę anksčiau, naudodamiesi simplekso algoritmu, optimizuodami tokią pačią išlošių matricą turintį porinį antagonistinį lošimą su

nuline suma, lošėjas A, naudodamasis mišria strategija $S_A = (p_1; p_2; p_3) = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right)$, gautų vidutinį išlošį,

kuris bet kuriuo atveju nebūtų mažesnis už $\frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$, kai tuo tarpu Valdo kriterijaus taikymas,

pasirenkant grynąją strategiją $S_A = (0; 1; 0)$, garantuotą lošėjui A tik tai, jog jo vidutinis išlošis, esant bet kuriam „gamtos ėjimui“, nebus mažesnis tik už 4. Iš tikrųjų: jei lošėjas A vadovautųsi mišriąja strategija

$S_A = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right)$, tai jo realus vidutinis išlošis būtų lygus $\bar{v} = 8 \cdot \frac{1}{7} \cdot q_1 + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot q_2 +$
 $+ 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot q_3 + 4 \cdot \frac{6}{7} \cdot q_1 + 5 \cdot \frac{6}{7} \cdot q_2 + 6 \cdot \frac{6}{7} \cdot q_3 = \frac{32}{7} q_1 + \frac{32}{7} q_2 + \frac{40}{7} q_3 = \frac{32}{7} + \frac{8}{7} q_3 \geq \frac{32}{7}$, o jei jis vado-

vautųsi grynąją strategiją $S_A = (0; 1; 0)$, tai realus vidutinis jo išlošis būtų $\bar{v} = 4q_1 + 5q_2 + 6q_3 = 4 + q_2 + 2q_3 \geq 4$. Taigi garantuotas vidutinis lošėjo A išlošis būtų didesnis tada, kada lošėjas vadovautųsi mišriąja

maksimaline strategija $S_A = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right)$, o ne tada, kada jis vadovautųsi iš Valdo kriterijaus taikymo

išplaukiančia grynąją strategiją $S_A = (0; 1; 0)$. Analogišką išvadą gautume ir nagrinėdami lošimus su „gamta“, kuriuos vaizduoja 406 ir 407 pav., nes tų lošimų matricos taip pat neturi balno taškų. Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti įrodyti šios išvados teisingumą bendrojo atveju, t. y. visiems lošimams su „gamta“, kurių matricos neturi balno taškų.

Reikia skirti didžiausią minimalų **garantuotą vidutinį išlošį**, nepriklausantį nuo „gamtos ėjimų“ tikimybių, ir **faktišką vidutinį išlošį, kuris jau priklauso nuo „gamtos ėjimų“ tikimybių q_j** . Poriniame lošime su „gamta“, kurio matrica neturi balno taško, lošėjo A faktiškasis vidutinis išlošis (skirtingai nuo garantuoto vidutinio maksimalio išlošio) ne visada būna didesnis tuo atveju, kai lošėjas A naudojasi mišria maksimaline strategija, negu tuo atveju, kai jis naudojasi grynąją strategiją, išplaukiančia iš Valdo principo. Pavyzdžiui, lošime su „gamta“, kurio matricą vaizduoja 370-oji lentelė, faktiškasis vidutinis lošėjo A išlošis, gautas vadovaujantis mišriąja maksimaline strategija

$S_A = \left(\frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 0\right)$, bus didesnis už faktišką vidutinį išlošį, gautą, vadovaujantis Valdo principu, tik tais

atvejais, kai $\frac{4}{7} + \frac{8}{7}q_3 > q_2 + 2q_3$, t. y., kai $7q_2 + 6q_3 < 4$. Atvejais, kai $7q_2 + 6q_3 > 4$, didesnę faktiškai vidutinį išlošį duos Valdo kriterijus.

Tais atvejais, kai lošimo matrica turi balno tašką, bandymas pereiti nuo grynosios strategijos, išplaukiančios iš Valdo kriterijaus taikymo, prie mišriosios maksimininės strategijos, kuri būtų optimali atitinkamame antagonistiniame lošime, aprašomame minėtają lošimo matrica, turinčia balno tašką, jau nebepadidintų lošėjo A garantuoto vidutinio išlošio.

Pavyzdžiui, jei lošime su „gamta“, kurį aprašo 367-oji lentelė, turinti balno tašką $(i^*, j^*) = (4; 3)$, pereitume prie mišriosios strategijos, optimalios atitinkamame antagonistiniame lošime, tai lošėjo A garantuotas vidutinis išlošis, lyginant su balno tašką atitinkančiu išlošiu $v = 6$, nepadidėtų. Įrodysime šį teiginį.

Jei šiame lošime, vadovaudamasis Valdo kriterijumi, lošėjas A pasirinktų grynąją strategiją $S_A = (p_1; p_3; p_4) = (0; 0; 1)$, tai, kaip jau esame gavę anksčiau, jo vidutinis realus išlošis būtų lygus $\bar{v} = 8q_1 + 7q_2 + 6q_3 + 8q_4 = 6 + 2q_1 + q_2 + 2q_4$. Šis vidutinis išlošis, esant bet kokiam „gamtos ėjimui“, nebūtų mažesnis už garantuotą išlošį, lygų 6, o faktiškasis vidutinis išlošis neretai būtų didesnis už jį, kartais siekdamas net 8.

Jei lošėjas A sudarytų 367-osios lentelės matricą atitinkančio antagonistinio lošimo optimizacinį modelį su apribojimais $x_1 = \frac{p_1}{v} \geq 0$, $x_3 = \frac{p_3}{v} \geq 0$, $x_4 = \frac{p_4}{v} \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$, $x_8 \geq 0$, $x_9 \geq 0$,

$x_{10} \geq 0$, $x_{11} \geq 0$, $x_{12} \geq 0$, $x_9 = 1 - (5x_1 + 9x_3 + 8x_4 - x_5)$, $x_{10} = 1 - (8x_1 + 4x_3 + 7x_4 - x_6)$, $x_{11} = 1 - (6x_1 + 5x_3 + 6x_4 - x_7)$, $x_{12} = 1 - (6x_1 + 9x_3 + 8x_4 - x_8)$ ir tikslo funkcija $F(x_1, x_3, x_4) = 0 - (-x_1 - x_3 - x_4) \rightarrow \min$ bei pagalbinė tikslo funkcija $W(x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = 4 - (25x_1 + 27x_3 + 29x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8) \rightarrow \min$, tai, naudodamasis simplekso algoritmu, gautų tokį optimalų sprendinį: $x_1^{(opt)} = \frac{1}{9}$, $x_3^{(opt)} = 0$, $x_4^{(opt)} = \frac{1}{18}$, $x_5^{(opt)} = 0$,

$x_6^{(opt)} = \frac{5}{18}$, $x_7^{(opt)} = 0$, $x_8^{(opt)} = \frac{1}{9}$, $x_9^{(opt)} = 0$, $x_{10}^{(opt)} = 0$, $x_{11}^{(opt)} = 0$, $x_{12}^{(opt)} = 0$. Minimali tikslo

funkcijos $F(x_3, x_5, x_7) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_3 + 0x_5 + \frac{1}{6}x_7$ reikšmė šiuo atveju būtų lygi $\frac{1}{6}$, todėl maksimali lošėjo

A vidutinio išlošio $\bar{v}^*$ reikšmė būtų $\bar{v}^* = 6$, t. y. lygiai tokia pati, kaip ir garantuotas išlošis, taikant Valdo kriterijų ir naudojantis grynąją strategiją $S_A = (p_1; p_3; p_4) = (0; 0; 1)$. Kadangi optimalų sprendinį atitinkančioje tikslo funkcijos išraiškoje $F(x_3, x_5, x_7) = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}x_3 + 0x_5 - \frac{1}{6}x_7\right)$ koeficientas prie

laisvojo kintamojo x_5 yra lygus 0 ir x_5 gali keistis segmente $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, tai bazinio kintamojo x_1 optimali

reikšmė $x_1^{(opt)} = \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{9}x_3 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{4}{9}x_7\right)$ gali keistis segmente $\left[0; \frac{1}{9}\right]$, o optimali bazinio kintamojo

x_4 reikšmė $x_4^{(opt)} = \frac{1}{18} - \left(\frac{29}{18}x_3 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{5}{18}x_7\right)$ gali keistis segmente $\left[\frac{1}{18}; \frac{1}{6}\right]$. Kai $x_5 = 0$, tai,

naudodamiesi lygybėmis $p_i = x_i^{(opt)} \bar{v}^*$, gautume, jog $p_1 = x_1^{(opt)} \cdot \bar{v}^* = \frac{1}{9} \cdot 6 = \frac{2}{3}$, $p_3 = x_3^{(opt)} \cdot \bar{v}^* = 0$,

$p_4 = x_4^{(opt)} \cdot \bar{v}^* = \frac{1}{3}$, iš kur išplauktų, jog faktiškasis lošėjo A vidutinis išlošis, naudojantis maksiminine

mišriąją strategiją $S_A = (p_1; p_3; p_4) = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$, būtų lygus $\bar{v} = \frac{2}{3}(5q_1 + 8q_2 + 6q_3 + 6q_4) + \frac{1}{3}(8q_1 + 7q_2 + 6q_3 +$

$+ 8q_4) = 6 + \frac{5}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_4$. Jei priimtume, kad $x_5 = \frac{1}{3}$, tai gautume, jog $x_1^{(opt)} = 0$, $x_3^{(opt)} = 0$, $x_4^{(opt)} = \frac{1}{6}$,

$p_1^{(opt)} = 0$, $p_3^{(opt)} = 0$, $p_4^{(opt)} = 1$, t. y. gautume tą pačią grynąją strategiją, kaip ir vadovaudamiesi Valdo principu.

Mišri strategija $S_A = (p_1; p_3; p_4) = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$, būdama ekvivalenti grynajai strategijai $S_A = (0; 0; 1)$

vidutinio garantuoto maksiminio išlošio atžvilgiu, būtų faktiškai geresnė už grynąją strategiją $S_A = (0; 0; 1)$ tik tais atvejais, kai „gamtos ėjimui“ dažniau būtų tokie, jog būtų tenkinama nelygybė

$\frac{5}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_4 > 2q_1 + q_2 + 2q_4$, t. y. nelygybė $q_2 > 3q_1 + 2q_4$. Atveju $q_2 < 3q_1 + 2q_4$ iš Valdo kriterijaus išplaukianti grynoji strategija $S_A = (0; 0; 1)$, vidutinio garantuoto maksimalinio išlošio atžvilgiu būdama ekvivalenti simplekso algoritmu naudojantis apskaičiuotai mišriajai strategijai $S_A = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$, būtų faktiškojo vidutinio išlošio atžvilgiu net geresnė už ją. Pavyzdžiui, jei visų „gamtos ėjimų“ tikimybės q_j būtų vienodos, tai grynoji strategija $S_A = (0; 0; 1)$ būtų optimali.

Kintamojo x_5 reikšmei keičiantis intervale $\left(0; \frac{1}{3}\right)$, gautume tarpines mišriasias maksimalines strategijas $S_A = (p_1; p_3; p_4) = \left(\frac{2}{3} - \alpha; 0; \frac{1}{3} + \alpha\right)$, kur $\alpha \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$. Tas strategijas atitiktų lošėjo A išlošio vidurkis $\bar{v}_A = 6 + \frac{5}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_4 + \alpha(3q_1 - q_2 + 2q_4)$, t. y. visos tos strategijos garantuotą vienodą maksimalinį lošėjo A išlošio vidurkį, lygų 6, tačiau skirtingi faktiškojo vidutinio išlošio. Šis išlošis, kai $q_2 > 3q_1 + 2q_4$, didėtų, mažėjant α , ir būtų didžiausias, kai $\alpha = 0$, kas atitinka mūsų jau minėtąją mišriąją maksimalinę strategiją $S_A = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$. Kai $q_2 < 3q_1 + 2q_4$, faktiškas lošėjo A išlošio vidurkis didėtų, didėjant α , ir taptų didžiausias, kai $\alpha = \frac{2}{3}$, kas atitiktų mūsų jau nagrinėjamą strategiją $S_A = (0; 0; 1)$. Atveju kai $q_2 = 3q_1 + 2q_4$, visos naudojantis simplekso algoritmu surastos maksimalinės strategijos $S_A = \left(\frac{2}{3} - \alpha; 0; \frac{1}{3} + \alpha\right)$ būtų ekvivalenčios ne tik lošėjo A garantuoto maksimalinio išlošio vidurkio, bet ir jo faktiškojo išlošio vidurkio atžvilgiu.

Šis pavyzdėlis rodo, kad tuo atveju, kai lošėjui A „gamtos ėjimų“ tikimybės q_j nėra žinomos ir lošimo matrica turi balno tašką, grynoji lošėjo strategija, atitinkanti tą tašką, gali būti laikoma optimalia ne tik antagonistiniame lošime. Ji gali būti laikoma „optimalia“ ir lošime su „gamta“, nes ji leidžia gauti didžiausią garantuotą vidutinį išlošį. Žodis „optimali“ čia pavartotas kabutėse todėl, kad lošime su „gamta“ ši strategija, garantuodama, jog minimalus išlošis bus pats didžiausias (maksimalus pralošis bus pats mažiausias), negarantuoja jog faktiškas išlošis bus pats didžiausias. Tais atvejais, kai lošimo su „gamta“ matrica neturi balno taško, didžiausią garantuotą minimalų vidutinį išlošį, kaip jau matėme iš ankstesnių pavyzdžių, lošėjas A gali pasiekti, naudodamasis mišriąja strategija, kurios apskaičiavimui galima pasinaudoti simplekso algoritmu, arba, kai $(s=2) \vee (k=2)$, – ir grafiniu metodu. Tokiu būdu surasta mišrioji strategija atitinkamame antagonistiniame lošime būtų optimali tikraja to žodžio prasme.

Baigiant šį skyrelį, reikėtų pažymėti, jog garantuotą minimalų išlošį lošime su „gamta“ dažnai galima būtų reikšmingai padidinti, jei pavyktų atspėti būsimų „gamtos ėjimų“ tikimybes q_j .

1.16.2.5. Aktyvūs „idealūs“ ir „neidealūs“ eksperimentai. Statistinių sprendimų teorija ir jos taikymai

Žymiai daugiau ir dažniau lošėjas A galėtų išlošti ne spėliodamas, o pasistengęs gauti daugiau informacijos apie galimus „gamtos ėjimus“, t. y. sumažindamas situacijos, kurioje jis priima sprendimą, neapibrėžtumą. Vieną iš tokių būdų mes jau minėjome. Tai – statistinės informacijos apie jau buvusius „gamtos ėjimus“ surinkimas ir jos apdorojimas, apskaičiuojant taip vadinamąsias **apriorines „gamtos ėjimų“ tikimybes q_j** . Tačiau ne visada tos tikimybės q_j yra pakankamai stabilios, t. y. nebūtinai būsimų „gamtos ėjimų“ tikimybės **dabar** tiksliai sutampa su apriorinėmis tikimybėmis, apskaičiuotomis naudojantis informacija apie tai, kaip „gamta“ „elgėsi“ **anksčiau**. Todėl dažnai būna tikslinga, prieš darant atsakingą ėjimą, neapsiriboti vien tik apriorine informacija, o paeksperimentuoti, bandant nustatyti dabartinę „gamtos“ būseną (jos „ėjimą“ dabar) ar bent jau patikslinti galimų „gamtos ėjimų“ tikimybių reikšmes, nustatant taip vadinamas **aposteriorines tikimybes**.

Kad skaitytojas geriau suvoktų apriorinių ir aposteriorinių tikimybių esmę ir vaidmenį prognozėse, pateiksiu tokį pavyzdėlį. Daugiamečiai meteorologiniai stebėjimai leidžia nustatyti ne tik

vidutinę temperatūrą bei vidutinį kritulių kiekį Vilniuje kiekvieno mėnesio kiekvienai dienai, bet ir įvertinti tų dydžių pasiskirstymo tikimybes. Prognozuojant temperatūros ir kritulių kiekio pasiskirstymą ateinančiam mėnesiui, minėtosios tikimybės vaidins apriorinių tikimybių vaidmenį. Tačiau tos tikimybės charakterizuoja temperatūros ir kritulių pasiskirstymą tik vidutiniškai ir, vadovaujantis tik jomis, negalima tikėtis labai patikimų trumpalaikių prognozių, prognozuojant, lis ar nelis šiandien po vidurdienio bei kokia tada bus temperatūra. Žymiai patikimesnes **trumpalaikes prognozes** mes gausime, jei apriorines tikimybes papildysime aposteriorinėmis, kurias mes galėsime apytikriai nustatyti tos dienos rytą išėję į balkoną ir pažvelgę į dangų bei pasižiūrėję, ką rodo prie lango iš lauko pusės pritvirtintas termometras bei barometras.

Nenorėčiau, kad kai kurie skaitytojai, nepakankamai įsigilinę į šį pavyzdėlį, nuvertintų apriorinių tikimybių reikšmę.

Visų pirma, **tų tikimybių žinojimas gali būti labai vertingas ilgalaikėms atsitiktinių dydžių vidurkių prognozėms**, kai tuo tarpu aposteriorinių tikimybių žinojimas toms prognozėms ne visuomet yra vertingas.

Antra, apriorinių tikimybių pasiskirstymo žinojimas svariai papildo tą informaciją, kurią gauname iš aposteriorinių tikimybių žinojimo, ir neretai padeda išvengti apmaudžių klaidų. Pavyzdžiui, iš ilgalaikių stebėjimų žinodami, kokie nepastovūs yra orai Lietuvoje, lyginant su orais vietovėse, kurioms būdingas kontinentinis klimatas, mes, net matydami, kad iš ryto šviečia saulė, kartais vis dėl to, eidami į darbą, pasiimtume lietsargį, kuomet tokiu atveju to nedarytų šalies su kontinentiniu klimatu gyventojas.

Taigi, gali būti **naudingas ir apriorinių, ir aposteriorinių tikimybių žinojimas**.

Eksperimentai, skirti aposteriorinių tikimybių nustatymui, reikalauja tam tikrų išlaidų, tačiau kai **eksperimento kaina** c būna mažesnė už tą papildomą išlošį, kurį gauna lošėjas, pasinaudodamas eksperimento metu gauta papildoma informacija, tai eksperimentuoti apsimoka. Eksperimento kaina priklauso ne tik nuo eksperimento sudėtingumo, bet ir nuo to, ar eksperimentas yra aktyvus, ar pasyvus.

Aktyviais eksperimentais vadinami eksperimentai, kurie atliekami specialiai, siekiant gauti atsakymą į iškilusį klausimą.

Pasyviu eksperimentu vadinamas jau turimos informacijos registravimas ir apdorojimas, siekiant patvirtinti ar paneigti iškeltas hipotezes. Statistinės informacijos rinkimas ir apdorojimas – pasyvaus eksperimento pavyzdys.

Eksperimentus, kurių metu mums pavyksta pilnai išsiaiškinti „gamtos“ būseną, t. y. tiksliai sužinoti jos „ėjimą“, vadinsime **„idealiais“**, o visus kitus – **„neidealiais“**. „Neidealių“ eksperimentų metu mes gauname papildomą informaciją, kurios dar nepakanka visiškam situacijos neapibrėžtumo „nuėmimui“, tačiau ta informacija leidžia apskaičiuoti (ar bent apytikriai įvertinti) aposteriorines „gamtos ėjimų“ tikimybes, adekvačiau aprašančias galimą „gamtos“ „elgesį“ **dabar** negu apriorinės tikimybės, aprašančios **„vidutinį“** „gamtos“ „elgesį“.

Apskaičiuosime, kokį papildomą išlošį galėtų duoti „idealus“ eksperimentas, kurio kaina yra c. Įvykdę „idealių“ eksperimentą, mes kiekvieną kartą, žinodami konkretų „gamtos ėjimą“ j, stulpelyje j išsirinktume tą eilutę, kurioje mūsų išlošio a_{ij} reikšmė yra didžiausia, ir išloštume $\max_i a_{ij}$. Pažymėsime tą išlošį β_j . Atsižvelgdami į

„idealaus“ eksperimento kainą, gautume, kad grynasis išlošis tuomet būtų lygus $\beta_j - c$. Laikydami, kad „gamtos ėjimai“ j pasiskirstę su apriorinėmis tikimybėmis q_j , gautume, jog to išlošio vidurkis, eksperimentuojant pakankamai daug kartų, būtų lygus

$$\sum_{j=1}^k (\beta_j - c) q_j = \sum_{j=1}^k \beta_j q_j - c \sum_{j=1}^k q_j = \sum_{j=1}^k \beta_j q_j - c. \text{ Jei neeksperimentuotumėme, o, naudoda-}$$

miesi žinomomis apriorinėmis „gamtos ėjimų“ tikimybėmis, iškart rinktumėmės strategiją i^* , maksimizuojančią išlošio matematinį vidurkį, tai, kaip jau esame 1.16.2.4.

skyrelyje apskaičiavę anksčiau, gautume vidutinį išlošį $\bar{a} = \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j = \bar{a}_{i^*}$.

$$\begin{aligned} \text{Lygindami galimus vidutinius išlošius } \sum_{j=1}^k \beta_j q_j - c = \sum_{j=1}^k q_j \max_i a_{ij} - c \text{ ir } \bar{a} = \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j, \\ \text{išvedame, jog „idealus“ eksperimentas apsimoka, jei tenkinama nelygybė} \\ \sum_{j=1}^k \beta_j q_j - c > \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j, \text{ t. y., jei eksperimento kaina } c \text{ yra mažesnė už skirtumą} \\ \sum_{j=1}^k \beta_j q_j - \max_{i=1} \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j = \min_{i=1} \left[\sum_{j=1}^k \beta_j q_j - \sum_{j=1}^k a_{ij} q_j \right] = \min_i \sum_{j=1}^k (\beta_j - a_{ij}) q_j = \\ = \min_i \sum_{j=1}^k (\max_i a_{ij} - a_{ij}) q_j = \min_i \sum_{j=1}^k r_{ij} q_j = \min_i \bar{r}_i. \end{aligned}$$

Taigi, jei $c < \min_i \bar{r}_i$, t. y., jei „idealaus“ eksperimento kaina yra mažesnė už minimalią vidutinę duotojo lošimo su „gamta“ riziką, tai eksperimentuoti apsimoka, nes tuomet mes gauname papildomą vidutinį išlošį $\min_i \bar{r}_i - c$, lyginant su tuo vidutiniu išlošiu, kurį gautume, jei naudotumėmės tik apriorinėmis „gamtos ėjimų“ tikimybėmis q_j ir nesinaudotumėme „idealiu“ eksperimentu.

Pailiustruosiu šią išvadą konkrečiu pavyzdžiu. Lošime su „gamta“, kurio informacinis modelis yra 367-oji lentelė, lošėjas A, naudodamasis jam žinomomis „gamtos ėjimų“ apriorinėmis tikimybėmis q_j , kaip jau matėme, būtų pasirinkęs strategiją $i^*=1$ ir gautų vidutinį išlošį $\bar{a} = \bar{a}_1 = 7,1$. Jei lošėjas būtų naudojęsis „idealiu“ eksperimentu, tai matematinis jo išlošio vidurkis būtų lygus $\sum_{j=1}^k \beta_j q_j - c = \sum_{j=1}^k q_j \max_i a_{ij} - c = 0,1 \cdot 9 + 0,6 \cdot 8 + 0,2 \cdot 6 + 0,1 \cdot 9 - c = 7,8 - c$. Jei „idealaus“ eksperimento kaina $c < 7,8 - 7,1 = 0,7$, tai eksperimentuoti apsimokėtų. Tą pačią išvadą būtume gavę, pasinaudodami 369-ąja lentele, vaizduojančia lošimo rizikos matricą, nes $\min_{i=1} \bar{r}_i = \min(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = \min(0,1 \cdot 4 + 0,6 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 3; 0,1 \cdot 0 + 0,6 \cdot 4 + 0,2 \cdot 1 + 0,1 \cdot 0; 0,1 \cdot 1 + 0,6 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 1) = \min(0,7; 2,6; 0,8) = 0,7$.

Pereisime prie eksperimento, kuris nėra „idealus“, nagrinėjimo. Tarkime, jog toks eksperimentas gali duoti w skirtingų rezultatų $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots, E_w$, priklausančių nuo to, kokioje būsenoje z_j buvo „gamta“ to eksperimento metu. Laikysime tuos rezultatus skirtingais nesuderinamais įvykiais, nes vienas ir tas pats eksperimentas negali vienu ir tuo pačiu metu duoti ir rezultatą E_1 , ir, pavyzdžiui, E_2 . Tarkime taip pat, kad mes iš ankstesnių specialių eksperimentų jau žinome sąlygines tikimybes $p(E_v/z_j)$, nusakančias, kaip priklauso tikimybė gauti eksperimento rezultatą E_v nuo to, kokioje būsenoje z_j yra „gamta“.

Kaip jau žinome iš 1.5.17 ir 1.16.1.2.6. skyrelių, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$, todėl sąlyginę aposteriorinę tikimybę $p(z_j/E_v)$, t. y. tikimybę, kad, gavus eksperimento rezultatą E_v , „gamta“ bus būsenoje z_j , galima apskaičiuoti, naudojantis lygybėmis $p(E_v \cap z_j) = p(E_v) \cdot p(z_j/E_v) = p(z_j) \cdot p(E_v/z_j)$ ir $p(z_j) = q_j$, iš kurių gauname formulę

$$p(z_j/E_v) = \frac{p(z_j) \cdot p(E_v/z_j)}{p(E_v)} = \frac{p(z_j) \cdot p(E_v/z_j)}{\sum_{j=1}^k p(z_j) \cdot p(E_v/z_j)} = \frac{q_j \cdot p(E_v/z_j)}{\sum_{j=1}^k q_j \cdot p(E_v/z_j)}.$$

Žinodami apriorines „gamtos ėjimų“ tikimybes $p(z_j) = q_j$ bei sąlygines tikimybes $p(E_v/z_j)$ ir naudodamiesi ką tik išvestąja formule, vadinama **Bejeso (Th.Bayes) formule**, mes nesunkiai galime apskaičiuoti sąlygines aposteriorines „gamtos ėjimų“ tikimybes $p(z_j/E_v)$.

Gavę „neidealaus“ eksperimento rezultatą E_v , mes galime priimti gana natūralią prielaidą, jog duotuoju momentu „gamtos ėjimų“ j tikimybės yra lygios sąlyginėms

aposteriorinėms tikimybėms $p(z_j/E_v)$ ir pasirinkti tą savo ėjimą $i=i_{E_v}^*$, kurį padarę, galėtume gauti maksimalų išlošio sąlyginį matematinį vidurkį $\max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot p(z_j/E_v) = \sum_{j=1}^k a_{i_{E_v}^* j} \cdot p(z_j/E_v)$.

Kadangi eksperimento rezultatai E_v pasiskirstę su tikimybėmis $p(E_v) = \sum_{j=1}^k q_j \cdot p(E_v/z_j)$, kurias, žinodami apriorines „gamtos ėjimų“ tikimybes $q_j = p(z_j)$ ir sąlygines tikimybes $p(E_v/z_j)$, taip pat galime lengvai apskaičiuoti, tai gauname tokį **bendrąjį išlošio, naudojantis „neidealiu“ eksperimentu, matematinį vidurkį**

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sum_{v=1}^w \left[p(E_v) \times \sum_{j=1}^k \left(a_{i_{E_v}^* j} \cdot p(z_j/E_v) \right) \right] = \sum_{v=1}^w \left[\sum_{j=1}^k (q_j \cdot p(E_v/z_j)) \cdot \left(\max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot p(z_j/E_v) \right) \right] = \\ &= \sum_{v=1}^w \left[\sum_{j=1}^k q_j \cdot p(E_v/z_j) \cdot \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \frac{q_j \cdot p(E_v/z_j)}{\sum_{j=1}^k q_j \cdot p(E_v/z_j)} \right] = \sum_{v=1}^w \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot q_j \cdot p(E_v/z_j). \end{aligned}$$

Kai skirtumas $\tilde{a} - \bar{a} = \sum_{v=1}^w \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot q_j \cdot p(E_v/z_j) - \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot q_j$ yra didesnis

už „neidealaus“ eksperimento kainą c , tai naudotis „neidealiu“ eksperimentu apsimoka, o jei mažesnis – neapsimoka.

Tuo atveju, kai „neidealus“ eksperimentas apsimoka ir juo naudotis tenka kiekvieną kartą prieš pasirenkant ėjimą $i=i^*$, naudinga iš anksto **išsivesti ir suformuluoti taisykles, nurodančias, kaip turėtų priklausyti optimalaus ėjimo $i=i^*$ pasirinkimas nuo eksperimento rezultato E_v .**

Pailiustruosiu visą tai konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, kad lošimo su gamta išlošių matricą vaizduoja 371-oji lentelė, o sąlygines tikimybes $p(E_v/z_j)$, nustatytas dar anksčiau, prieš pradedant taikyti „neidealų“ eksperimentą, vaizduoja 372-oji lentelė.

371. lentelė

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	1	4	5	9
2	3	8	4	3
3	4	6	6	2

372. lentelė

$E_v \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_4
E_1	0,2	0,9	0,4	0,3
E_2	0,1	0,1	0,5	0,3
E_3	0,7	0	0,1	0,4

Tarkime taip pat, kad apriorinės „gamtos ėjimų“ tikimybės $q_j = p(z_j)$ yra tokios: $q_1=0,1$, $q_2=0,2$, $q_3=0,5$, $q_4=0,2$.

Jei nesinaudotume „neidealiu“ eksperimentu, tai optimalią lošimo strategiją gautume maksimizuodami matematinį išlošio vidurkį, apskaičiuojamą naudojantis apriorinėmis „gamtos ėjimų“ tikimybėmis. Tas maksimalus matematinis vidurkis būtų $\max_i \sum_{j=1}^k q_j \cdot a_{ij} = \max(5,2; 4,5; 5,0) = 5,2$ ir atitiktų ėjimą $i^*=1$.

Apskaičiuosime dabar sąlygines aposteriorines tikimybes $p(z_j/E_v)$, naudodamiesi apriorinėmis tikimybėmis q_j , 372-ąją lentelę ir Bejeso formulę:

$$p(z_1/E_1) = \frac{p(z_1) \cdot p(E_1/z_1)}{\sum_{j=1}^k p(z_j) \cdot p(E_1/z_j)} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3} = \frac{0,02}{0,46} \approx 0,0435; \quad p(E_1) = 0,46;$$

$$\begin{aligned}
p(z_2/E_1) &= \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,46} \approx 0,3913; \quad p(z_3/E_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,46} \approx 0,4348; \quad p(z_4/E_1) = \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,46} \approx 0,1304; \\
p(z_1/E_2) &= \frac{p(z_1) \cdot p(E_2/z_1)}{\sum_{j=1}^k p(z_j) \cdot p(E_2/z_j)} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{0,34} \approx 0,0294; \quad p(E_2) = 0,34; \\
p(z_2/E_2) &= \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,34} \approx 0,0588; \quad p(z_3/E_2) = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,34} \approx 0,7353; \quad p(z_4/E_2) = \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,34} \approx 0,1765; \\
p(z_1/E_3) &= \frac{p(z_1) \cdot p(E_3/z_1)}{\sum_{j=1}^k p(z_j) \cdot p(E_3/z_j)} = \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4} = \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,2} = 0,35; \quad p(E_3) = 0,20; \\
p(z_2/E_3) &= \frac{0,2 \cdot 0}{0,2} = 0; \quad p(z_3/E_3) = \frac{0,5 \cdot 0,1}{0,2} = 0,25; \quad p(z_4/E_3) = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,2} = 0,4.
\end{aligned}$$

Tuo atveju, kai eksperimentas duoda rezultatą E_1 , apskaičiuojame, naudodamiesi sąlyginėmis aposteriorinėmis „gamtos ėjimų“ j tikimybėmis $p(z_j/E_1)$, kiekvienam ėjimui i išlošio sąlyginius

matematinis vidurkių $\sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot p(z_j/E_1)$ ir išsirenkame tą ėjimą i^* , kuris atitinka didžiausią sąlyginį

matematinį vidurkį. Gauname, kad $\max_i \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot p(z_j/E_1) \approx \max(4,9563; 5,3913; 5,3914) = 5,3914$, iš kur

išplaukia taisyklė: jei eksperimentas davė rezultatą E_1 , reikia rinktis ėjimą $i^* = 3$ (nors, žinoma, ėjimo $i=2$ rezultatas tik dėl skaičiavimų paklaidos atrodo truputi blogesnis, o iš tikrųjų abu rezultatai yra lygūs $5 \frac{9}{23} \approx 5,3913$).

Kai eksperimentas duoda rezultatą E_2 , tai lošėjo A išlošių sąlyginių matematinių vidurkių apskaičiavimui naudojamės sąlyginėmis aposteriorinėmis tikimybėmis $p(z_j/E_2)$. Gauname, jog

$\max_i \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot p(z_j/E_2) \approx \max(5,5296; 4,1093; 5,2352) = 5,5296$, iš kur išplaukia taisyklė: jei eksperimento rezultatas yra E_2 , tai reikia rinktis ėjimą $i^* = 1$.

Kai eksperimentas duoda rezultatą E_3 , tai išlošių sąlyginių matematinių vidurkių apskaičiavimui naudojamės sąlyginėmis aposteriorinėmis tikimybėmis $p(z_j/E_3)$. Gauname, jog

$\max_i \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot p(z_j/E_3) = \max(5,2000; 3,2500; 3,7000) = 5,2000$, iš kur išplaukia taisyklė: jei eksperimento rezultatas yra E_3 , tai reikia rinktis ėjimą $i^* = 1$.

Apibendrinami visos trys kaitos išvestos taisyklės, gauname tokią **bendrąją optimalios lošimo su „gamta“ strategijos išsirinkimo taisyklę**, kurią galima trumpai pavadinti **optimalia duotojo lošimo su gamta strategija**: kai eksperimento rezultatas yra E_1 , reikia rinktis ėjimą $i^* = 2$ arba $i^* = 3$, o visais kitais atvejais – ėjimą $i^* = 1$.

Naudodamiesi čia aprašytuju „neidealiu“ eksperimentu ir šia taisykle, gausime **bendrą (be-sąlyginį) išlošio matematinį vidurkį** $\tilde{a} = \sum_{v=1}^w p(E_v) \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot p(z_j/E_v) \approx 5,3913 \cdot 0,46 + 5,5296 \cdot 0,34 + 5,2000 \cdot 0,20 \approx 5,4001 \approx 5,4$, iš kurio, kad gautume grynąjį išlošį, dar reikia atimti eksperimento kainą c .

Jei ta kaina mažesnė už $\sum_{v=1}^w \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot q_j \cdot p(E_v/z_j) - \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot q_j = 5,4 - 5,2 = 0,2$, tai eksperimento

taikymas „atsiperka“, o jei ne, tai eksperimentuoti prieš pasirenkant ėjimą i^* neapsimoka ir optimalios strategijos išsirinkimui pakanka pasinaudoti apriorinėmis gamtos ėjimų tikimybėmis, apskaičiuojant

$$\max_i \sum_{j=1}^4 q_j \cdot a_{ij}.$$

Eksperimento rezultatų matematinį apdorojimą galima buvo atlikti žymiai paprasčiau ir greičiau, jei būtume naudojęsi **galutine grynojo išlošio besąlyginio matematinio vidurkio**,

naudojantis „neidealiu“ eksperimentu, apskaičiavimo formule $\sum_{v=1}^w \max_i \sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot q_j \cdot p(E_v/z_j) - c$, kur c – „neidealaus“ eksperimento kaina.

Tada būtų gavę: $\tilde{a} = \sum_{v=1}^3 \max_i \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot q_j \cdot p(E_v/z_j) = \max[(1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 5 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,2 \cdot 0,3); (3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 \cdot 0,3); (4 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3)] + \max[(1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,2 \cdot 0,3); (3 \cdot 0,1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 \cdot 0,3); (4 \cdot 0,1 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3)] + \max[(1 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 4 \cdot 0,2 \cdot 0 + 5 \cdot 0,5 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 \cdot 0,4); (3 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 8 \cdot 0,2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 \cdot 0,4); (4 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 6 \cdot 0,2 \cdot 0 + 6 \cdot 0,5 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,4)] = \max(2,28; 2,48; 2,48) + \max(1,88; 1,37; 1,78) + \max(1,04; 0,65; 0,74) = 2,48 + 1,88 + 1,04 = 5,40$. Tuomet $\tilde{a} - c = 5,4 - c$.

Šie apskaičiavimai būtų ne tik paprastesni, bet ir be skaičiavimo paklaidų, nes, jais naudojantis, jau neberekėjo pradžioje dalinti iš $p(E_1)=0,46$, $p(E_2)=0,34$ ir $p(E_3)=0,20$ ir po to vėl dauginti iš tų pačių dydžių. Optimalius ėjimus taip pat lengva nustatyti skaičiavimų eigoje (žiūr. tų skaičiavimų metu gautas

paryškintas $\max_i \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cdot q_j \cdot p(E_v/z_j)$ reikšmes: jos rodo, prie kokių $i=i^*$ reikšmių pasiekiami išlošio vidurkių maksimumai).

Ieškant lošimuose su „gamta“ optimalių sprendinių realiose situacijose, neišvengiamai susiduriama su jų nepakankamu apibrėžtumu, ir į tai tenka atsižvelgti, vertinant tų sprendinių tikslumą bei jų optimalumo patikimumą. Tačiau daugelyje atvejų galima, surinkus ir apdorojus papildomą informaciją (pavyzdžiui, atlikus atitinkamus aktyvius ar pasyviuosius eksperimentus), sumažinti to neapibrėžtumo laipsnį ir gauti papildomą naudą. **Jei papildomos informacijos surinkimo ir apdorojimo kaina yra mažesnė negu tas papildomas išlošis, kurį galima būtų gauti pasinaudojus ta informacija, ir, jei aplinkybės leidžia sprendimo priėmimą atidėti iki to laiko, kol bus surinkta ir apdorota papildoma informacija, nepatiriant dėl to atidėjimo papildomų nuostolių, viršijančių papildomo išlošio ir informacijos surinkimo bei apdorojimo kainos skirtumą, tai tikslinga rinkti papildomą informaciją ir mažinti situacijos neapibrėžtumą.**

Šias mintis pailiustruosiu konkrečiais pavyzdžiais, nagrinėdamas įvairias galimas **tipines situacijas „lošime su gamta“** ir interpretuodamas žodį „gamta“ pačia plačiąja prasme, t. y. laikydamas, kad „gamtoje“ gali veikti ne tik stichinės, bet ir sąmoningos jėgos, o taip pat, kad pastarosios gali turėti ne tik nenuspėjamų, bet ir nuspėjamų interesų.

Nagrinėjamas **situacijas pagal jų neapibrėžtumo laipsnį ir jo mažinimo galimybes suskirstysiu į kelias tipinių situacijų grupes:**

1) „gamtos ėjimų“ tikimybės yra nežinomos ir nėra galimybės gauti papildomą informaciją, leidžiančią sumažinti situacijos neapibrėžtumą (pavyzdžiui, dėl laiko ar lėšų stokos nėra galimybių atlikti eksperimentą, iš kurio rezultatų galima būtų spręsti apie „gamtos“ būsimą „ėjimą“ ar bent jau apie galimų jos „ėjimų“ tikimybes; gamtos ėjimų tikimybės gali būti nežinomos ir dėl „gamtos“ elgesio stochastinio nestabilumo);

2) „gamtos ėjimų“ apriorinės tikimybės nėra žinomos, tačiau galima atlikti eksperimentą, iš kurio rezultatų būtų galima spręsti, koks bus būsimas „gamtos ėjimas“ („idealus eksperimentas“), ar bent jau apytikriai įvertinti galimų „gamtos ėjimų“ tikimybes („neidealus eksperimentas“);

3) apriorinės „gamtos ėjimų“ tikimybės yra žinomos, bet dabartiniu metu nėra galimybės atlikti eksperimentą, kurio rezultatai leistų apskaičiuoti aposteriorines „gamtos ėjimų“ tikimybes;

4) yra žinomos apriorinės „gamtos ėjimų“ tikimybės ir yra galimybė atlikti tokius eksperimentus, kurių rezultatai leistų apskaičiuoti aposteriorines tų „ėjimų“ tikimybes.

Pirmoji ir trečioji situacijos buvo išnagrinėtos 1.16.2.4. skyrelyje. Ten buvo pateikti ir tų situacijų pavyzdžiai, ir sprendimo priėmimo tose situacijose pavyzdžiai. Buvo pademonstruoti įvairių principų ir metodų taikymai įvairiais atvejais: ir kai lošiama su protingu lošėju – antragonistu, ir kai lošiama su indiferentiška „gamta“; ir kai lošimo mokėjimų (išlošių ar nuostolių) matricos turi balno taškus, ir kai jos tokių taškų neturi. Buvo pateikti grafiniai namogramų ir simplekso metodo taikymo pavyzdžiai, ieškant sprendimų pirmojoje situacijoje, ir statistinių metodų taikymo trečiojoje situacijoje pavyzdys.

Ketvirtoji situacija buvo nagrinėjama šiame – 1.16.2.5. – skyrelyje. Buvo išnagrinėti „idealaus“ ir „neidealaus“ eksperimentų taikymo pavyzdžiai, išvesta Bajeso formulė, leidžianti apskaičiuoti aposteriorines „gamtos“ ėjimų tikimybes, parodyta, kaip ketvirtojoje situacijoje, atsižvelgiant į atliktų eksperimentų rezultatus, yra sudaromos sprendimų priėmimo taisyklės ir kaip jomis naudojamas. Ten pat buvo pateiktas sprendimų priėmimo taisyklių taikymo rezultatų, gautų trečiojoje ir ketvirtojoje situacijose, palyginimas, esant tokioms pačioms mokėjimų matricoms ir toms pačioms „gamtos“ ėjimų tikimybėms. Buvo išsiaiškintos sąlygos, kada „idealūs“ bei „neidealūs“ eksperimentai apsimoka, kada – neapsimoka.

Man atrodo, jog šios mokymo priemonės skaitytojui joje pateiktų žinių turėtų pakakti bent jau tam, kad jis galėtų suprasti, kaip randami racionalūs sprendiniai nepakankamai apibrėžtose pirmojoje, trečiojoje ir ketvirtojoje tipinėse situacijose.

Belieka panagrinėti antrąją situaciją. Ši situacija ypatinga tuo, kad joje, prieš pradėdant eksperimentus, neapibrėžtumo lygis yra pirmosios situacijos neapibrėžtumo lygis. Todėl trūksta informacijos, reikalingos ne tik sprendimo priėmimui, bet ir būsimo eksperimento suplanavimui, taip pat jau pravešto eksperimento rezultatų galimų interpretacijų ir iš jų išplaukiančių hipotezių pagrįstumo įvertinimui. Juk antrojoje situacijoje informacijos pradžioje turime tik tiek, kad galime sudaryti lošimo mokėjimų matricą, tačiau nežinome ne tik apriorinių „gamtos“ ėjimų tikimybių, bet ir to, ar „gamtos“ elgesys yra stochastiškai pakankamai stabilus, kad galima būtų bent apytikriai apskaičiuoti tų tikimybių reikšmes ir jomis naudotis „gamtos“ elgesio prognozavime.

Tik atliekant vis daugiau eksperimentų ir kaupiant statistinę informaciją, palaipsniui išaiškėja, ar gali nagrinėjamoji antrojo tipo situacija būti pervesta į trečiąją tipą, kuomet bus galima teigti, jog „gamtos“ elgesys bent jau stochastiškai yra pakankamai stabilus ar, jei nėra stabilus, tai keičiasi pakankamai dėsningai, kad galima būtų prognozuoti „gamtos“ ėjimų tikimybių reikšmes.

Juk gali atsitikti ir taip, kad „gamtos“ elgesyje nebus aptikta net stochastinių dėsningumų, leidžiančių kalbėti apie apriorines „gamtos“ ėjimų tikimybes. Tuomet perėjimas į trečiojo tipo situaciją būtų neįmanomas ir statistinės informacijos kaupimas bei naudojimas ta informacija neturėtų prasmės. Tektų naudotis tik eksperimento metu gauta informacija, charakterizuojančia „gamtos“ būseną šiuo momentu, visą laiką pasiliekančią antrojoje tipinėje situacijoje.

Antrosios situacijos specifiką ir sprendimų priėmimo joje metodus bandysiu parodyti, nagrinėdamas konkretų pavyzdį, kurį aiškumo dėlei šiek tiek supaprastinau kai šiek tiek schematizavau. To pavyzdžio nagrinėjimo metu pademonstruosiu vieną iš galimų tokios situacijos tyrimo metodų taikymą ir pabandysiu gauti kai kurias išvadas, turinčias ir teorinę, ir praktinę vertę.

Tarkime, jog viename rutulinių guolių gamyklos ceche veikia automatiniai įrenginiai, gaminantys rutuliukus, reikalingus rutulinių guolių surinkimui. Per pamainą tie įrenginiai gali pagaminti net kelias dešimtis tūkstančių tokių rutuliukų. Rutuliukų skersmenys d turi tenkinti sąlygą $a \leq d \leq b$. Skirtumas $b-a$ yra gana mažas, todėl darbo metu automatinis įrenginys tenka gana dažnai pareguliuoti, kad jie nepradėtų gaminti rutuliukų, turinčių pirmojo tipo defektą $d < a$ ar antrojo tipo defektą $d > b$.

Bet net ir pakankamai gerai suregulavus įrenginius, tarp pagamintų rutuliukų retkarčiais pasitaiko rutuliukų, turinčių to ar kito tipo defektą. Nuo to, kaip buvo atliktas paregulavimas, priklauso, kurio tipo broko bus daugiau. Todėl vienais atvejais automatinis įrenginys pradeda gaminti rutuliukus, kurių tarpe pasitaiko šiek tiek daugiau rutuliukų, turinčių pirmojo tipo defektą, negu rutuliukų, turinčių antrojo tipo defektą, o kitais atvejais atsitinka atvirkščiai: rutuliukai, turintys pirmojo tipo defektą, pasitaiko rečiau ar bent jau ne dažniau negu rutuliukai, turintys antrojo tipo defektą. Todėl pagamintų rutuliukų srautai gali priklausyti vienam iš dviejų čia išvardintų tipų. Pirmojo tipo srautu vadinsime srautą, kuriame dažniau pasitaiko rutuliukai, turintys pirmojo tipo defektą, o antrojo tipo srautu – „atvirkštinį“ srautą.

Buvo pastebėta, kad laiko tarpuose tarp gretimų automatinio įrenginio paregulavimų gaminamų rutuliukų srauto tipas savaime beveik nesikeičia, tačiau, tam laiko tarpui ilgėjant, gali pradėti didėti broko procentai. Reguliavimo metu gaminamų rutuliukų srauto tipas gana dažnai keičiasi į „atvirkštinį“, nes reguliuotojas, norėdamas sumažinti to tipo broko, kuris vyravo iki reguliavimo, dalį neretai persistengia: tiek sumažina vyravusio tipo broko dalį, kad reikšmingai padidėja kito tipo broko dalis.

Tačiau taip būna ne visada, todėl iš anksto patikimai atspėti, kokio tipo srautą pradės gaminti tas ar kitas automatinis įrenginys po reguliavimo, nėra įmanoma. Jokių patikimų rezultatų nedavė ir statistiniai tyrimai, nes pasirodė, jog net vienas ir tas pats reguliuotojas kartais „nureguliuoja“ tai į vieną, tai į kitą pusę.

O štai srautų defektiškumo lygių $\lambda_{ij} = \frac{M_{ij}}{N}$ vidurkių $\bar{\lambda}_{ij} = \frac{\bar{M}_{ij}}{N}$ specialių statistinių tyrimų metu pavyko nustatyti, atliekant rutuliukų partijų, turinčių po N rutuliukų, kokybės **ištisinę kontrolę** ir skaičiuojant kiekvienoje partijoje, priklausančioje i -jo tipo srautui ($i=1, 2$), rutuliukų, turinčių j -jo tipo ($j=1, 2$) defektą, skaičius M_{ij} .

Buvo nustatyta, jog $\bar{\lambda}_{11} \approx 0,02$, $\bar{\lambda}_{12} \approx 0,005$, $\bar{\lambda}_{21} \approx 0,005$, $\bar{\lambda}_{22} \approx 0,045$.

Tų pačių statistinių tyrimų metu buvo nustatyta, jog atsitiktinių dydžių M_{ij} tikimybiniai skirstiniai gana artimi polinominiams skirstiniams, charakterizuojantiems tikimybėmis $p_{11} = \bar{\lambda}_{11}$, $p_{12} = \bar{\lambda}_{12}$, $p_{13} = 1 - \bar{\lambda}_{11} - \bar{\lambda}_{12}$, $p_{21} = \bar{\lambda}_{21}$, $p_{22} = \bar{\lambda}_{22}$, $p_{23} = 1 - \bar{\lambda}_{21} - \bar{\lambda}_{22}$.

Pagaminti rutuliukai, prieš perduodant juos rutulinių guolių surinkimo cechui, partijomis po $N=1000$ rutuliukų siunčiami rutuliukų gamybos cecho kontrolieriams, kurie atlieka jiems atsiųstų partijų **atrankinę kontrolę**.

Tos kontrolės metu kontrolieriai iš kiekvienos partijos, turinčios po $N=1000$ rutuliukų, atranka **atsitiktinę negrąžintinę imtį**, susidedančią iš n rutuliukų, ir tikrina, ar rutuliukų skersmenys d tenkina sąlygą $a \leq d \leq b$.

Čia aš nenurodau imties dydžio n konkrečios reikšmės, nes antrosios situacijos pradžioje dar nėra informacijos, reikalingos imties dydžio n nustatymui. Optimalaus imties dydžio $n^{(opt)}$ nustatymas – vienas iš svarbiausių „neidealaus“ eksperimento planavimo uždavinių. Apie jo sprendimo metodus pakalbėsime šiame skyrelyje šiek tiek vėliau.

Vadovaudamiesi į imtį patekusių rutuliukų kokybės tikrinimo rezultatais (skaičiais m_1 ir m_2 , rodančiais, kiek rutuliukų imtyje turi pirmojo ir kiek – antrojo tipo defektus) bei sprendimų priėmimo taisyklėmis, apie kurias kalbėsime šiame skyrelyje šiek tiek vėliau, kontrolieriai gali pasirinkti vieną iš trijų žemiau aprašomų ėjimų: A_1 – rutuliukų partija pripažįstama tenkinančia kokybės kontrolės reikalavimus ir perduodama rutulinių guolių surinkimo cechui, papildžius ją iki dydžio N tikrai kokybiškais rutuliukais; A_2 – pripažįstama, jog tikrinamos rutuliukų partijos kokybė yra abejotina ir todėl visą tą partiją, susidedančią iš $N-n$ dar nepatikrintų rutuliukų, reikia patikrinti, taikant ištisinės kontrolės metodą; A_3 – partija pripažįstama labai nekokybiška ir yra brokuojama.

Pasirinkus ėjimą A_1 , į rutulinių guolių surinkimo cechą patenka ne tik kokybiški rutuliukai, bet ir tam tikras atsitiktinis skaičius nekokybiškų. Tokių rutuliukų defektai paaiškėja ne iškart, o tik rutulinių guolių surinkimo ir jų kokybės tikrinimo metu, retkarčiais gi – dar vėliau, dėl ko gamykla patiria nemažus nuostolius. Buvo apskaičiuota, kad vidutiniai nuostoliai, kurie atsiranda vienam nekokybiškam rutuliukui patekus į rutulinių guolių surinkimo cechą, kelis kartus viršija rutuliuko savikainą.

Čia sąlyginai priimsime, jog vieno rutuliuko savikaina yra $s=2$ Lt, o vidutiniai nuostoliai, atsirandantys vienam nekokybiškam rutuliukui patekus į rutulinių guolių surinkimo cechą, yra lygus $c=10$ Lt. Todėl pilni vidutiniai gamyklos nuostoliai, atsirandantys vienam rutuliukui, turinčiam pirmojo tipo defektą, patekus į rutulinių guolių surinkimo cechą, yra $c_1=2$ Lt+10 Lt=12 Lt.

Rutuliukai, turintys antrojo tipo defektą, yra remontuojami: jie perduodami į rutuliukų šlifavimo barą, kuriame jie nušlifuojami iki reikiamo dydžio. Priėmę, jog vieno rutuliuko nušlifavimas vidutiniškai kainuoja $r=0,4$ Lt, gauname, jog pilni vidutiniai gamyklos nuostoliai, atsirandantys vienam rutuliukui, turinčiam antrojo tipo defektą, patekus į rutulinių guolių surinkimo cechą, yra lygūs $c_2=10$ Lt+0,4 Lt=10,4 Lt.

Todėl vidutinės papildomos išlaidos, atsirandančios, padarius ėjimą A_1 , kai rutuliukų partija priklauso pirmojo tipo srautui, yra $\bar{v}_{11} = N(\bar{\lambda}_{11}c_1 + \bar{\lambda}_{12}c_2) = 1000 \cdot (0,02 \cdot 12 + 0,005 \cdot 10,4) = 292$ litai.

Kai rutuliukų partija priklauso antrojo tipo srautui, tai vidutinės papildomos išlaidos, atsirandančios padarius ėjimą A_1 , yra lygios $\bar{v}_{12} = N(\bar{\lambda}_{21}c_1 + \bar{\lambda}_{22}c_2) = 1000 \cdot (0,005 \cdot 12 + 0,045 \cdot 10,4) = 528$ litai.

Apskaičiuosime vidutines papildomas išlaidas, atsirandančias, padarius ėjimą A_2 , kurio metu atliekama visos partijos ištisinė kontrolė ir rutuliukai surūšiuojami į tris grupes: 1) kokybiški rutuliukai, 2) rutuliukai, turintys pirmojo tipo defektą, 3) rutuliukai, turintys antrojo tipo defektą. Kokybiški rutuliukai, kaupiami ir partijomis po $N=1000$ rutuliukų perduodami į rutulinių guolių surinkimo cechą. Paprastumo dėlei priimsime, jog tikrinimas vyksta taip, kad kontrolieriai nedaro klaidų. Todėl šiuo atveju į rutulinių guolių surinkimo cechą nekokybiškų rutulių nepatenka ir ten papildomų išlaidų neatsiranda. Priimsime, kad atliekant tokią kontrolę vieno rutuliuko patikrinimo vidutinė kaina yra $c_3=0,3$ Lt. Todėl visos partijos patikrinimo vidutinė kaina yra lygi $Nc_3=300$ Lt.

Rutuliukai, turintys pirmojo tipo defektą, siunčiami į broko izoliatorių, o rutuliukai, turintys antrojo tipo defektą, – į šlifavimo barą. Todėl pilnos vidutinės išlaidos, reikalingos tiriamos partijos atstatymui iki N kokybiškų rutuliukų, padarius ėjimą A_2 , kai tikrinamų rutuliukų partija priklauso pirmojo tipo srautui, yra lygios $\bar{v}_{21} = N(c_3 + \bar{\lambda}_{11}s + \bar{\lambda}_{12}r) = 1000 \cdot (0,3 + 0,02 \cdot 2 + 0,005 \cdot 0,4) = 342$ litams, o kai partija priklauso antrojo tipo srautui, – $\bar{v}_{22} = N(c_3 + \bar{\lambda}_{21}s + \bar{\lambda}_{22}r) = 1000 \cdot (0,3 + 0,005 \cdot 2 + 0,045 \cdot 0,4) = 328$ litams. Padarius ėjimą A_3 ir visą partiją pasiuntus į broko izoliatorių, atsiranda nuostoliai todėl, kad išmetama į broką gana daug kokybiškų rutuliukų, o taip pat ir tam tikras skaičius rutuliukų, kuriuos būtų galima, pašlifavus, paversti kokybiškais. Vidutiniai nuostoliai, atsirandantys padarius ėjimą A_3 , yra lygūs $\bar{v}_{31} = N[(1 - \lambda_{11} - \lambda_{12})s + \lambda_{12}(s - r)]$.

Kai rutuliukų partija priklauso pirmojo tipo srautui, tai vidutiniai nuostoliai yra lygūs $\bar{v}_{31} = 1000[(1 - 0,02 - 0,005)2 + 0,005(2 - 0,4)] = 1958$ litai, o kai rutuliukų partija priklauso antrojo tipo srautui, tai tie nuostoliai yra $\bar{v}_{31} = 1000[(1 - 0,005 - 0,045)2 + 0,045(2 - 0,4)] = 1972$ litai.

373. lentelė

$\begin{matrix} i \backslash j \\ G_1 & G_2 \end{matrix}$	G_1	G_2
A_1	292	528
A_2	342	328
A_3	1958	1972

374. lentelė

$\begin{matrix} i \backslash j \\ G_1 & G_2 \end{matrix}$	G_1	G_2
A_1	292	528
A_2	342	328

Dabar jau galime sudaryti lošimo su „gamta“ mokėjimų matricą, atitinkančią pirmąją situaciją, kuri tuo pačiu metu yra „išsigimusi“ antrojo tipo situacija, gaunama, kai $n=0$.

Ši lošimo mokėjimų matrica turi tris eilutes, atitinkančias kontrolierių ėjimus A_1 , A_2 ir A_3 , bei du stulpelius, atitinkančius „gamtos“ ėjimus*, kuriuos pažymėsime G_1 ir G_2 (žiūr. 373-ąją lentelę).

Nagrinėdami 373-ąją lentelę, pastebime, jog ėjimas A_3 visais atvejais yra blogesnis už ėjimus A_1 ir A_2 . Todėl ėjimą A_3 galima eliminuoti iš ėjimų, galinčių būti racionaliais, sąrašo. Tuomet nagrinėjamo lošimo mokėjimų matrica tampa 374-oji lentelė.

Kai turime tik lošimo mokėjimų matricą, kurią šiuo atveju vaizduoja 374-oji lentelė, ir nežinome ne tik to, kokioje būsenoje – G_1 ar G_2 – dabar yra „gamta“, bet ir to, kokios yra „gamtos“ ėjimų tikimybės* $P\{G_j=G_1\}=q_1$ ir $P\{G_j=G_2\}=q_2=1-q_1$, tai esame kol kas dar tik pirmojoje tipinėje situacijoje.

Joje, norėdami pasirinkti lošimo su „gamta“ strategiją, galėtume vadovautis kokiais nors principais, mūsų jau aprašytais 1.16.2.4. skyrelyje.

* Neatlikę statistinių tyrimų, mes ne tik neturime duomenų tokioms tikimybėms apskaičiuoti, bet nežinome net to, ar „gamtos“ elgesys yra stochastiškai stabilus, t. y. nežinome net to, ar tokios tikimybės kaip pakankamai pastovūs dydžiai iš viso egzistuoja.

Jei vadovautumės Valdo principu, tai apskaičiuosime vidutinės minimaksinės išlaidas $\min_i \max_j \bar{v}_{ij} = \min(528; 342) = 342 = \bar{v}_{21}$, pasirinktume ėjimą A_2 , garantuojanti, jog vidutinės išlaidos, visą laiką darant šį ir tik šį ėjimą, niekada nebus didesnės už 342 litus vienai rutuliukų partijai.

Nesunku įsitikinti, jog tą pačią lošimo strategiją, t. y. strategiją $S(0;1)$, pasirinktume ir vadovaudamiesi kitu kraštutinio pesimizmo principu – Sevidžo principu.

Tą patį gautume ir taikydami Laplaso principą.

Pastebėję, jog lošimo mokėjimų matrica, kurią vaizduoja 347-oji lentelė, neturi balno taško, nes $\min_i \max_j \bar{v}_{ij} = 342$ nėra lygus $\max_j \min_i \bar{v}_{ij} = \max(292; 328) = 328$, mes galime ieškoti mišrios minimaksinės strategijos, t. y. ieškoti ėjimų A_1 ir A_2 kartojimų dažnių $p_1 = p_1^*$ ir $p_2 = p_2^* = 1 - p_1^*$, garantuojančių, jog vidutinės išlaidos nepriklausys nuo „gamtos“ ėjimų ir bus pastovios.

Rasime tuos dažnius p_1^* ir p_2^* bei tas pastovias vidutinės išlaidas: $\bar{v}^* = 292p_1^*q_1 + 528p_1^*q_2 + 342p_2^*q_1 + 328p_2^*q_2 = 292p_1^*q_1 + 528p_1^*(1 - q_1) + 342(1 - p_1^*)q_1 + 328(1 - p_1^*)q_2(1 - q_1) = 328 + 200p_1^* + q_1(14 - 250p_1^*)$.

Kad vidutinės išlaidos $\bar{v}^*$ nepriklausytų nuo „gamtos“ ėjimų, būtina ir pakanka, kad koeficientas prie q_1 būtų lygus 0, t. y. būtina ir pakanka, kad lošėjo A ėjimo A_1 dažnis p_1 būtų lygus $p_1^* = \frac{14}{250} = 0,056$. Tuomet $p_2^* = 1 - p_1^*$ būtų lygus 0,944, o vidutinės lošėjo A išlaidos būtų lygios $\bar{v}^* = 328 + 200p_1^* + 0 = 328 + 200 \cdot 0,056 = 339,2$ lito vienai rutuliukų partijai.

Kadangi $339,2 < \min_i \max_j \bar{v}_{ij} = 342$, tai viršutinės galimų vidutinių išlaidų ribos atžvilgiu mišrioji strategija $S(p_1^*; p_2^*) = (0,056; 0,944)$ yra pranašesnė už grynąją strategiją $S(0;1)$, išplaukiančią iš Valdo ir Sevidžo principų.

Tačiau reikia pažymėti, jog faktiškųjų išlaidų atžvilgiu mišrioji strategija $S(0,056; 0,944)$ ne visada yra pranašesnė už grynąją strategiją $S(0;1)$.

Pavyzdžiui, jei „gamtos“ ėjimų dažniai q_1 ir q_2 būtų 0,8 ir 0,2, tai vidutinės išlaidos $\bar{v}_{ij}$, būdamos lygios $292p_1 \cdot 0,8 + 528p_1 \cdot 0,2 + 342(1 - p_1) \cdot 0,8 + 328(1 - p_1) \cdot 0,2 = 339,2$, nepriklausytų nuo lošėjo A ėjimų ir būtų vienodos ir lygios 339,2 lito vienai rutuliukų partijai, tiek darant ėjimą A_1 , tiek ėjimą A_2 , tiek taikant bet kokias mišrias strategijas.

Jei „gamtos“ ėjimo dažnis q_1 būtų didesnis už 0,8, pavyzdžiui, jei q_1 būtų lygus $0,8 + \delta$, kur $\delta > 0$, tai vidutinės išlaidos $\bar{v}$ būtų lygios $292p_1 \cdot (0,8 + \delta) + 528p_1 \cdot (0,2 - \delta) + 342(1 - p_1) \cdot (0,8 + \delta) + 328(1 - p_1) \cdot (0,2 - \delta) = 339,2 + \delta(14 - 250p_1)$, t. y. priklausytų nuo p_1 ir δ .

Taikant strategiją $S(p_1^*; p_2^*) = S(0,056; 0,944)$, šios išlaidos tuomet būtų lygios $339,2 + \delta(14 - 250p_1^*) = 339,2 + 0 = 339,2$.

Taikant strategiją $S(0;1)$ šios išlaidos būtų lygios $339,2 + \delta(14 - 250 \cdot 0) = 339,2 + 14\delta > 339,2$, nes $\delta > 0$, t. y. šiuo atveju strategija $S(p_1^*; p_2^*) = S(0,056; 0,944)$ būtų geresnė už strategiją $S(0;1)$ ne tik viršutinės galimų vidutinių išlaidų ribos atžvilgiu, bet ir vidutinių faktiškųjų išlaidų atžvilgiu. Tačiau šiuo atžvilgiu dar geresnė būtų grynoji strategija $S(1;0)$, nes visuomet darant tik ėjimus A_1 , t. y. laikant, kad $p_1 = 1$, gauname, jog $\bar{v} = 339,2 + \delta(14 - 250 \cdot 1) = 339,2 - 236\delta < 339,2$, nes $\delta > 0$.

Jei „gamtos“ ėjimo $G_j = G_1$ dažnis q_1 būtų mažesnis už 0,8, pavyzdžiui, jei q_1 būtų lygus $0,8 - \delta$, kur $\delta > 0$, tai, kaip nesunku įsitikinti, gautume, jog geriausia būtų strategija $S(0;1)$, nes vidutinės išlaidos tuomet būtų lygios $339,2 + 14\delta < 339,2$, o blogiausia – strategija $S(1;0)$, nes tuomet vidutinės išlaidos būtų lygios $339,2 - 236\delta > 339,2$.

Tačiau pirmojoje tipinėje situacijoje mes nežinome „gamtos ėjimų“ tikimybių q_1 ir q_2 ir net nežinome, ar tokios tikimybės iš viso egzistuoja, nes „gamtos ėjimų“ dažniai gali ir nebūti pakankamai stabilūs ir gali keistis chaotiškai, t. y. būti nenuspėjami.

Todėl atsargus lošėjas, norėdamas išvengti didelių vidutinių išlaidų, pasirinktų mišriąją strategiją $S(0,056; 0,944)$, kurią taikant vidutinės faktiškosios išlaidos būtų pastovios ir mažesnės už viršutinę vidutinių išlaidų ribą, gaunamą taikant kraštutinio pesimizmo kriterijus. Ir tik tuo atveju, kai lošėjas galėtų tikėtis, kad „gamtos ėjimų“ G_1 pasikartojimo dažnis q_1 yra mažesnis už 0,8, jis rinktųsi ne strategiją $S(0,056; 0,944)$, o strategiją $S(0;1)$.

Turėdamas galimybę atlikti eksperimentus, pavyzdžiui, atlikti rutuliukų partijų kokybės **atrankinę kontrolę**, lošėjas A galėtų pereiti iš pirmosios tipinės situacijos į antrąją.

Jei egzistuotų „idealus“ eksperimentas, leidžiantis absoliučiai tiksliai nustatyti „gamtos“ būseną G_j (šiuo konkrečiu atveju tai reikštų nustatymą, kuriam rutuliukų srauto tipui priklauso kontrolieriams

šiuo metu pateikta rutuliukų partija), tai lošėjas A, atlikęs „idealią“ eksperimentą, galėtų vadovautis tokia **optimalių sprendimų priėmimo taisykle**: kai $G_j = G_1$, tai rutuliukų partiją reikia iškart perduoti į rutuliukų guolių surinkimo cechą, t. y. daryti ėjimą A_1 , o kai $G_j = G_2$, reikia atlikti visos pateiktos rutuliukų partijos ištisinę kontrolę, t. y. daryti ėjimą A_2 . Taikydami šią taisyklę, atveju $G_j = G_1$ gautume vidutinės išlaidas $\bar{v}_{11} = 292$, o atveju $G_j = G_2$ – išlaidas $\bar{v}_{22} = 328$. Bendros vidutinės išlaidos būtų lygios $292q_1 + 328q_2 = 328 - 36q_1$. Vadinasi, taikant „idealią“ eksperimentą, vidutiniai nuostoliai (neįskaitant „idealaus“ eksperimento kainos) niekada neviršytų 328 ir gana dažnai būtų mažesni, nors, žinoma, niekada negalėtų tapti mažesni už 292 litus vienai rutuliukų partijai. Pavyzdžiui, kai q_1 būtų lygus 0,75, tai pilni vidutiniai nuostoliai būtų 301 litas vienai rutuliukų partijai plius „idealaus“ eksperimento kaina.

Net pačiu nepalankiausiu atveju vidutinės išlaidos $\bar{v}$ (neįskaitant „idealaus“ eksperimento kainos) būtų gerokai mažesni už vidutinės išlaidas $\bar{v}^* = 339,2$, gaunamas taikant strategiją $S(0,056;0,944)$. Išlošis siektų $339,2 - 328 = 11,2$ lito vienai rutuliukų partijai. O pačiu palankiausiu atveju tas išlošis siektų $339,2 - 292 = 47,2$ lito vienai rutuliukų partijai.

Vidutinis išlošis, kurį gautume, taikydami „idealią“ eksperimentą, lyginant su vidutinėmis išlaidomis, gaunamomis taikant minimaksinę strategiją $S(0;1)$, išplaukiančią iš Valdo principo, būtų lygus $342q_1 + 328q_2 - (292q_1 + 328q_2) = 50q_1$ ir, keičiantis q_1 , galėtų keistis nuo 0 iki 50 litų vienai rutuliukų partijai.

Gaila tik, kad, kaip jau buvo minėta anksčiau, „idealus“ eksperimentas šiuo konkrečiu atveju nėra įmanomas, nes neįmanoma tiksliai atspėti, kokio tipo rutuliukų srautą pradės gaminti tas ar kitas automatinis įrenginys po eilinio pareguliojimo.

Tačiau yra įmanomas „neidealus“ eksperimentas – atsitiktinių negrąžintinių imčių ėmimas iš tikrinimui atsiųstų rutuliukų partijų. Kaip pamatysime vėliau, iš tokio „neidealaus“ eksperimento rezultato tyrimo išplaukiančių prognozių tikslumas, didėjant imties apimčiai kai n , didėja ir tuo atveju, kai n pasiektų N , galėtų pasiekti „idealaus“ eksperimento tikslumą. Tačiau tuomet toks eksperimentas taptų ėjimu A_2 , o tai, kaip jau esame apskaičiavę anksčiau, gana brangiai kainuotų ir tais atvejais, kai $q_1 \geq 0,8$, neatsipirktų. Vadinasi, turėtų egzistuoti optimali n reikšmė n^* , priklausanti intervalui $(0;N)$, kuriai esant, „neidealaus“ eksperimento duodamo išlošio ir to eksperimento kainos skirtumas būtų pats didžiausias.

Antrojoje tipinėje situacijoje (bent jau jos pradžioje) mes neturime informacijos, kuri leistu iš anksto apskaičiuoti optimalų imties dydį n^* ir pradėti „neidealią“ eksperimentą, atrenkant iš tikrinimui atsiųstos rutuliukų partijos dydžio $n = n^*$ negrąžintiną imtį. Todėl imties atrinkimo, jos tyrimo ir iš to tyrimo rezultatų išplaukiančių strategijų nustatymo matematinį modeliavimą pradėsime nuo imties $n=1$. Galimų lošimo strategijų efektyvumo vertinimui pasinaudosime sprendimų priėmimo teorijos specialisto H. Vagnerio (H. M. Wagner) pasiūlytu metodu, aprašytu knygoje [149].

Išsivesime žymenis galimiems eksperimento $n=1$ tyrimo rezultatams y :

- 1) atvejį, kai į imtį $n=1$ patekęs rutuliukas defektų neturi, žymėsime žymeniu $y=y_0$;
- 2) atvejį, kai į imtį $n=1$ patekęs rutuliukas turi pirmojo tipo defektą, žymėsime $y=y_1$;
- 3) atvejį, kai į imtį $n=1$ patekęs rutuliukas turi antrojo tipo defektą žymėsime $y=y_2$.

Kadangi pirmojo ir antrojo tipo defektai nesuderinami, tai jokių kitokių imties n kokybinio tyrimo rezultatų būti negali.

Žinoma, jei imtis būtų tiriama ne tik kokybiškai, bet ir kiekybiškai, pavyzdžiui, jei būtų matuojami rutuliukų skersmenys, tai čia pateiktos imties tyrimo rezultatų žymėjimo sistemos nepakaktų. Bet šiame skyrelyje mes nagrinėsime tik **kokybinės atrankinės kontrolės** pavyzdį. Skaitytojams, kurie panorėtų susipažinti su **kiekybinės atrankinės kontrolės** pradmenimis, galima parekomenduoti jau minėtąjį operacijų tyrimo teorijos vadovėlį [149]. Plačiau su **kiekybinės atrankinės kontrolės metodais** mes susipažinsime operacijų tyrimo ir imčių teorijos kursuose.

Sudarysime 375-ąją lentelę, vaizduojančią galimas (hipotetines) sprendimų priėmimo strategijas S_h ir tas strategijas bei lošėjo A ėjimus A_i , o taip pat ir eksperimento $n=1$ rezultatus y_k atitinkančias specialaus indekso $I_{i,h,k}$ reikšmes, reiškiančias atitinkamo ėjimo A_i pasirinkimą, kai $I_{i,h,k}=1$, ir to ėjimo atsisakymą, kai $I_{i,h,k}=0$. Indekso $I_{i,h,k}$ reikšmės pateiktos 357-osios lentelės langeliuose.

357. lentelė

S_h	S_0		S_1		S_2		S_3		S_4		S_5		S_6		S_7	
A_i	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
y_k																
y_0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
y_1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
y_2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1

Šioje lentelėje pavaizduotos visos įmanomos strategijos S_h , atitinkančios atvejį $n=1$. Kai $n=2$, tai galimų eksperimento rezultatų y_k būtų jau ne 3, o 6, būtent $y_{00}, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}, y_{22}$. Tuomet galimų strategijų S_h skaičius būtų jau nebe $2^3=8$, o $2^6=64$. Didėjant n , galimų strategijų S_h skaičius labai sparčiai augtų.

Naudojantis metodais, kurie buvo taikomi išvedant šios mokymo priemonės 1.5.11. skyrelio formules, nesunku įrodyti, kad kintamojo y galimų reikšmių skaičiaus (t. y. indekso k galimų reikšmių skaičiaus priklausomybę) nuo imties dydžio n išreiškia formulė $C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, o galimų strategijų S_h skaičiaus priklausomybę nuo n , kai lošėjas A turi tik du galimus ėjimus, išreiškia formulė $2^{C_{n+2}^2} = 2^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$. Vadinasi, kai $n=3$, tai skirtingų galimų strategijų S_h skaičius bus lygus $2^{10}=1024$. O juk imtys praktiškai gali turėti dešimtis ir net šimtus elementų!

Jei 374-oji lentelė būtų turėjusi ne du, o tris galinčius būti racionaliais ėjimus (pavyzdžiui, jei ėjimas A_3 , pavaizduotas 373-ojoje lentelėje, būtų pasirodęs racionalus), tai galimų strategijų S_h , vaizduojamų 375-ojoje lentelėje, skaičius būtų buvęs ne $2^{C_{n+2}^2}$, o $3^{C_{n+2}^2}$. Bendroju atveju, kai 374-oji lentelė turėtų s eilučių, vaizduojančių lošėjo A galimus ėjimus, tai 375-oji lentelė vaizduotų $s^{C_{n+2}^2}$ galimų strategijų S_h .

Dar daugiau galimų strategijų S_h atsiranda, kai tikriname sudėtingų gaminių kokybę, nes tuomet tikrinamas ne vienas parametras (kaip mūsų nagrinėjamu atveju – rutuliuko skersmens d dydis), o žymiai daugiau, kartais – net kelios dešimtys. Pavyzdžiui, Panevėžio gamykloje „Ekranas“ spalvinių kineskopų **išleidžiamosios atrankinės kontrolės** metu buvo tikrinami net 27 kineskopo parametrai. Kai tikrinamą gaminį pagal jo parametrų tikrinimo rezultatus galima priskirti vienai iš galimų r skirtingų klasių (mūsų čia dabar nagrinėjamų rutuliukų atveju tokių klasių buvo 3: 1) $d < a$; 2) $d > b$; 3) $a \leq d \leq b$), tai galima gauti $C_{n+r-1}^{r-1} = C_{n+r-1}^n$ imties, susidedančios iš n gaminių, tyrimo skirtingų rezultatų, kitaip tariant, 375-oji lentelė gali turėti C_{n+r-1}^{r-1} eilučių. Tokiu atveju egzistotų $s^{C_{n+r-1}^{r-1}}$ skirtingų grynųjų strategijų S_h ir $C_{n+r-1}^{r-1} \cdot s \cdot s^{C_{n+r-1}^{r-1}} = s^{1+C_{n+r-1}^{r-1}} \cdot C_{n+r-1}^{r-1}$ indekso $I_{i,h,k}$ reikšmių langelių.

O juk tais atvejais, kai lošimų mokėjimų matrica neturi balno taško, taikomas ne tik grynosios, bet ir mišriosios strategijos, kurios sudaromos kaip aktyvių grynųjų strategijų S_h kombinacijos. Todėl mišriųjų galimų strategijų egzistuoja dar daugiau negu grynųjų.

Dar didesnė galimų sprendinių įvairovė atsiranda, kai atliekama ne tik **kokybinė gaminio parametrų kontrolė**, atsakanti į klausimą, patenka ar nepatenka tikrinamo parametro reikšmė į leistinų reikšmių sritį, bet ir **kiekybinė gaminio parametrų kontrolė**, atsakanti į klausimą, kokie yra kiekybiniai tikrinamų parametrų įverčiai, t. y. kai kontrolės rezultatai yra parametrų reikšmių matavimo rezultatai. Tokia kontrolė kainuoja brangiau, tačiau ji leidžia gauti daugiau informacijos.

Ar gerai, ar blogai, kad egzistuoja tokia didelė galimų lošėjo A strategijų įvairovė antroje tipinėje situacijoje? Ir gerai, ir blogai.

Atsižvelgdami į **Ešbio suformuluotą pakankamos sprendinių įvairovės principą**, teigiantį, jog, **norint organizuoti efektyvų valdymo procesą, būtina, kad valdymo subjekto galimų sprendinių įvairovė būtų ne mažesnė už valdymo objekto elgesio įvairovę**, galėtume teigti, kad lošėjui A yra naudinga turėti daug leistimų lošimo strategijų S_h .

Tačiau, atsižvelgdami į tai, kad, norint iš galimų strategijų išrinkti geriausiąją, neretai neegzistuoja kito būdo, kaip kiekvieną iš tų strategijų įvertinti ir po to jas tarpusavyje palyginti, turime pripažinti, jog, gausėjant galimų strategijų skaičiui, gana dažnai taip sparčiai didėja skaičiavimų, reikalingų geriausios strategijos išsirinkimui, apimtys, kad toks pasirinkimas, net pasitelkus greitaeigę kompiuterinę techniką, tampa sunkiai realizuojamas. Tuo netrukus įsitikinsime ir šiame skyrelyje.

Grįšime prie 375-osios lentelės. Kai kuriems skaitytojams gali pasirodyti, kad ne visos toje lentelėje pavaizduotos strategijos yra racionalios. Pavyzdžiui, daugeliui skaitytojų kelia abejonių strategija S_4 . Jiems nesuprantama, kodėl imties tikrinimo rezultatas $(y=y_1) \vee (y=y_2)$ kartais gali būti geresnis už rezultatą $y=y_0$, t. y. todėl gali būti tokių atvejų, kad, kai pirmasis iš 1000 rutuliukų partijos atsitiktinai paimtas rutuliukas turi defektą, visą rutuliukų partiją reikia pripažinti kokybiška ir perduoti į rutuliukų guolių surinkimo cechą, o kai tas pirmasis rutuliukas defektų neturi, visą likusių rutuliukų partiją reikia pripažinti abejotina ir tikrinti kiekvieno jos rutuliuko kokybę individualiai. Juk kaip tik taip elgtis rekomenduoja strategija S_4 .

Aš sutinku su šiais skaitytojais, kad strategija S_3 , kuri yra atvirkštinė strategijai S_4 , atrodo gerokai priimtinesnė už strategiją S_4 ir daugumoje atvejų strategijos S_3 taikymas duos geresnius rezultatus negu strategijos S_4 taikymas. Tačiau reikia nepamiršti, kad tuo atveju, kai imtyje,

susidedančioje iš n elementų, randame m elementų turinčių defektus, likusioje partijoje, susidedančioje iš $N-n$ elementų, skaičius tų elementų, kurie turi defektus, sumažėja nuo M iki $M-m$. Todėl likusios partijos defektyvumo lygis $\frac{M-m}{N-n}$, didėjant santykiui $\frac{m}{n}$, mažėja ir tuo atveju, kai $m > n \frac{M}{N}$, likusios partijos defektyvumo lygis $\frac{M-m}{N-n}$ tampa mažesnis už buvusią visos partijos defektyvumo lygį $\frac{M}{N}$, t. y. imties ėmimas kartais gali pagerinti tikrinamos partijos kokybę.

Mūsų nagrinėjamu atveju, kai $n=1$, retkarčiais galėtų nutikti, pavyzdžiui, taip, kad rutuliukų partijoje, susidedančioje iš N rutuliukų, visi rutuliukai, išskyrus vieną, neturėtų defektų. Tuomet, imties ėmimo metu atsitiktinai ištraukus kaip tik tą vienintelį nekokybišką rutuliuką, likusi partijos dalis tikrai taptų absoliučiai kokybiška, nes jos defektyvumo lygis $\frac{M-m}{N-n}$ taptų lygus $\frac{1-1}{1000-1}=0$. Aišku, kad tokią partiją derėtų priimti kaip kokybišką be jokios abejonės. Tačiau, žinoma, toks atsitikimas būtų labai – labai retas. Jo tikimybė būtų lygi $\frac{C_1^1 C_0^0 C_{1000-1}^{1-1}}{C_{1000}^1} \cdot \frac{1000!}{10!999!} \cdot 0.02 \cdot 0.005^0 (1-0.02-0.005)^{999} + \frac{C_0^0 C_1^1 C_{1000-1}^{1-1}}{C_{1000}^1} \cdot \frac{1000!}{0!999!} \cdot 0.02^0 \cdot 0.005 \cdot (1-0.02-0.005)^{999} = \frac{1}{1000} \cdot 1000 \cdot (0.02+0.005) \cdot 0.975^{999} = 0.025 \cdot 0.975^{999} \approx \frac{1}{2.59^{13}}$ pirmojo tipo rutuliukų srauto atveju ir $0.05 \cdot 0.95^{999} \approx \frac{1}{2.785^{23}}$ antrojo tipo rutuliukų srauto atveju.

Be to, akivaizdu, jog tokia partija, kurioje iš 1000 rutuliukų būtų tik vienas rutuliukas, kuris turėtų defektą, bet kuriuo atveju (nepriklausomai nuo to, kokius rezultatus beduotų imtis) labiau apsimokėtų priimti be tikrinimo negu tikrinti kiekvieną jos rutuliuką. Visa bėda tik tame, kad antrojoje tipinėje situacijoje mes nežinome, kiek partijoje, susidedančioje iš 1000 rutuliukų, iš tikrųjų yra kokybiškų rutuliukų. Todėl ir atliekame eksperimentus, imdami imtis. Ir nors imties n ėmimas kartais gali pagerinti gaminių partijos likusios dalies $N-n$ kokybę, tačiau imties ėmimas skiriamas ne tam, o tam, kad gautume informacijos, leidžiančios pakankamai patikimai prognozuoti atsitiktinio dydžio $M-m$ galimą pasiskirstymą ir, remiantis tokia prognoze, pasirinkti bent jau vidutiniškai geriausią gaminių partijos priėmimo strategiją, kurią taikydami pakankamai ilgai gautume mažiausias vidutines išlaidas.

Tai, kokiomis sprendimų priėmimo taisyklėmis derėtų vadovautis bei kokią strategiją reikėtų pasirinkti, labai priklauso nuo to, kaip pasiskirstęs atsitiktinis dydis M , reiškiantis defektinių gaminių skaičių tų gaminių partijose, turinčiose pastovų dydį N .

Statistiniais tyrimais buvo nustatyta, jog egzistuoja tokie atsitiktinio dydžio M skirstiniai, kurių dispersija $DM=E[M^2]-(E[M])^2$ yra lygi binominio skirstinio $B(N,q)$ dispersijai $Nq(1-q)$, kur $q=\frac{E[M]}{N}$.

Tokie skirstiniai buvo pavadinti **ekvibinominiais**. Ekvibinominiams skirstiniams būdinga, kad kovariacija tarp imtyje n surastų defektinių gaminių skaičiaus m ir likusioje partijos dalyje likusių defektinių gaminių skaičiaus $M-m$ yra lygi nuliui. Todėl, kai a.d. M skirstinys priklauso ekvibinominių skirstinių klasei, neegzistuoja tiesinės priklausomybės tarp dydžių m ir $M-m$, nors, žinoma, netiesinė priklausomybė tarp dydžių m ir $M-m$ kartais gali ir egzistuoti (apie tai mes galėtume sužinoti apskaičiavę koreliacinį santykį $\rho_{m,M-m}$). Ekvibinominio skirstinio atveju dydžio m žinojimas nesuteikia mums tiek informacijos, kad galėtume pakankamai patikimai prognozuoti likusios partijos dalies,

susidedančios iš $N-n$ gaminių, defektiškumo lygį $E\left[\frac{M-m}{N-n}\right] = \sum_{M^*=m}^{N-n+m} \frac{M^*-m}{N-n} \frac{C_{M^*}^m C_{N-M^*}^{n-m}}{C_N^n} P\{M=M^*\}$.

Juk antrojoje situacijoje mes dažnai dar neturime tiek informacijos, kad jau žinotume a.d. M skirstinį ir galėtume bent apytikriai įvertinti tikimybes $P\{M=M^*\}$ visoms M^* reikšmėms, galinčioms priklausyti segmentui $[0;N]$.

Atsitiktinio dydžio M skirstiniai, kurių dispersija DM yra didesnė už binominio skirstinio dispersiją $Nq(1-q)$, kur $q=E\left[\frac{M}{N}\right]$, vadinami **hiperbinominiais**. Pažymėję šių dispersijų skirtumo

santyki $\frac{DM - Nq(1-q)}{Nq(1-q)}$ žymeniu δ ir atlikę atitinkamas matematines operacijas,* gauname, jog

$$Dm = nq(1-q) \left(1 + \frac{n-1}{N-1} \delta \right), D[M-m] = (N-n)q(1-q) \left(1 + \frac{N-n-1}{N-1} \delta \right) \text{ ir } \text{cov}(m, M-m) = nq(1-q) \frac{N-n}{N-1} \delta.$$

Kadangi hiperbinominių skirstinių atveju santykis δ yra didesnis už nulį, tai ir $\text{cov}(m, M-m)$ yra teigiama, o tai reiškia, jog tarp dydžių m ir $M-m$ egzistuoja teigiama tiesinė koreliacija: tikėtina, jog didesnes m reikšmes dažniau atitinka didesnės $M-m$ reikšmės.

Vadinasi, hiperbinominių skirstinių atveju 375-osios lentelės strategija S_3 būtų pranašesnė už strategiją S_4 , kuri šiuo atveju būtų neracionali.

Atsitiktinio dydžio M skirstiniai, kurių dispersija DM yra mažesnė už binominio skirstinio $B(N, q)$ dispersiją $Nq(1-q)$, kur $q = E\left[\frac{M}{N}\right] = \frac{1}{N} \sum_{M=0}^N M^* P\{M=M^*\} = \frac{\overline{M}}{N}$, vadinami **subbinominiais**

skirstiniais. Tokiems skirstiniams santykis δ yra neigiamas. Todėl iš čia ką tik pateiktų formulų, skirtų dispersijų Dm bei $D(M-m)$ ir kovariacijos $\text{cov}(m, M-m)$ apskaičiavimui, išplaukia, jog subbinominių skirstinių atveju $Dm < nq(1-q)$, $D(M-m) < (N-n)q(1-q)$ ir $\text{cov}(m, M-m) < 0$.

Tai reiškia, jog subbinominiuose skirstiniuose dydžiai m ir $M-m$ surišti neigiama tiesine koreliacija: tikėtina, kad didesnes m reikšmes dažniau atitinka mažesnės $M-m$ reikšmės.

Vadinasi, subbinominių skirstinių atveju neišprastai atrodanti 375-osios lentelės strategija S_4 yra ne tik leistina, bet ir net pranašesnė už atvirkštinę jai strategiją S_3 . Pastaroji subbinominių skirstinių atveju yra neracionali.

Kadangi antrojoje tipinėje situacijoje (bent jau pradiniuose etapuose) mes dar nežinome atsitiktinių dydžių, nuo kurių priklauso nagrinėjamos partijos defektiškumo lygis, skirstinių (mūsų nagrinėjamų rutuliukų atveju mes nežinome, kurio tipo srautui priklauso atrankinei kontrolei pateikta rutuliukų partija), tai negalime iš anksto žinoti, kuriai skirstinių grupei (ekvibinominių, hiperbinominių ar subbinominių) tie skirstiniai priklauso. Todėl negalime iš anksto nuspręsti, kurios strategijos bus racionalios, kurios – neracionalios.

Kaip tik dėl šios priežasties 375-joje lentelėje mes paliekame ir strategiją S_3 , ir atvirkštinę jai strategiją S_4 , ir visas kitas galimas strategijas, kad tolimesnio tyrimo eigoje atmestume tas strategijas, kurios konkrečiu nagrinėjamu atveju pasirodys neracionalios, ir paliktume tas strategijas, kurios pasirodys esančios racionalios.

Baigdamas 375-osios lentelės aptarimą, rekomenduočiau skaitytojams pabandyti išsivesti dispersijų Dm , $D(M-m)$ bei kovariacijos $\text{cov}(m, M-m)$ apskaičiavimo formules, kurias aš čia pateikiau iškart, jų neišvedinėdamas. Tiems, skaitytojams, kurie nesugebės šių formulų savarankiškai išvesti, galiu rekomenduoti darbą [306].

Norint priimti pagrįstą sprendimą antrojoje situacijoje, vien tik 375-osios lentelės, vaizduojančios hipotetines strategijas S_h bei indeksus $I_{i,h,k}$, dar nepakanka. Būtina įvertinti kiekvienos tų strategijų efektyvumą konkrečioje nagrinėjamoje situacijoje ir nustatyti, kaip tas efektyvumas priklauso nuo „gamtos ėjimų“. Kitaip tariant, reikia gauti lošimo mokėjimų matricą, analogišką 374-ajai lentelei, tačiau žymiai platesnę: vaizduojančią ne du ėjimus A_1 ir A_2 , o aštuonias strategijas ($S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$).

Norėdami sudaryti tokią lentelę, mes turime apskaičiuoti vidutines išlaidas $\overline{v}_h$, kurios galėtų atsirasti, naudojantis strategijomis S_h , $h=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Vidutinių išlaidų $\overline{v}_h$ apskaičiavimui mums prireiks sąlyginių tikimybių $f\{y=y_k/G=G_j\}$, kurias sutrumpintai žymėsime $P(y_k/G_j)$.

Tas tikimybes mes galime apskaičiuoti, pasinaudodami jau turima informacija apie atsitiktinių dydžių $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ skirstinius, nustatytus anksčiau atilikuose statistiniuose tyrimuose, apie kuriuos jau rašėme.

Kadangi, kaip jau buvo anksčiau minėta, kiekvieno tipo rutuliukų sraute, rutuliukų, turinčių pirmojo arba antrojo tipo defektus, bei rutuliukų, neturinčių defektų, skaičiai yra pasiskirstę polinomiškai su tikimybėmis $p_{ij} = \overline{x}_{ij} = \frac{\overline{M}_{ij}}{N}$, tai tikimybė, kad partijoje, paimtoje iš pirmojo tipo srauto ir susidedančioje iš $N=1000$ rutuliukų, bus lygiai M_{11}^* rutuliukų, turinčių pirmojo tipo defektą $d < a$, M_{12}^*

* Studentams, studijuojantiems matematinę statistiką ir jau studijavusiems imčių teorijos pagrindų kursą, rekomenduoju pabandyti patiems atlikti tas operacijas ir išvesti čia pateiktas formules.

rutuliukų, turinčių antrojo tipo defektą $d > b$, ir $N - M_{11}^* - M_{12}^*$ rutuliukų neturinčių defektų, $P\{M_{11} = M_{11}^*, M_{12} = M_{12}^*\}$ yra lygi

$$\frac{N!}{M_{11}^*! M_{12}^*! (N - M_{11}^* - M_{12}^*)!} \cdot \bar{\lambda}_{11}^{M_{11}^*} \cdot \bar{\lambda}_{12}^{M_{12}^*} \cdot (1 - \bar{\lambda}_{11} - \bar{\lambda}_{12})^{N - M_{11}^* - M_{12}^*} =$$

$$= \frac{1000!}{M_{11}^*! M_{12}^*! (1000 - M_{11}^* - M_{12}^*)!} \cdot 0,02^{M_{11}^*} \cdot 0,005^{M_{12}^*} \cdot 0,975^{(1000 - M_{11}^* - M_{12}^*)}.$$

Analogiškai gauname tikimybės $P\{M_{21} = M_{21}^*, M_{22} = M_{22}^*\}$ apskaičiavimo formulę rutuliukų partijoms priklausančioms antrojo tipo srautui: $P\{M_{21} = M_{21}^*, M_{22} = M_{22}^*\} =$

$$= \frac{1000!}{M_{21}^*! M_{22}^*! (1000 - M_{21}^* - M_{22}^*)!} \cdot 0,005^{M_{21}^*} \cdot 0,045^{M_{22}^*} \cdot 0,95^{(1000 - M_{21}^* - M_{22}^*)}.$$

Galima įrodyti, jog ir imtyse, paimitose iš partijų, kuriose rutuliukai, turintys pirmojo ar antrojo tipo defektus, yra pasiskirstę polinomiškai, rutuliukų, turinčių pirmojo ar antrojo tipo defektus, skaičiai bus pasiskirstę taip pat polinomiškai su tomis pačiomis tikimybėmis p_{ij} , t. y. galima įrodyti, jog

$$P\{m_{11} = m_{11}^*, m_{12} = m_{12}^*\} = \frac{n!}{m_{11}^*! m_{12}^*! (n - m_{11}^* - m_{12}^*)!} \cdot \bar{\lambda}_{11}^{m_{11}^*} \cdot \bar{\lambda}_{12}^{m_{12}^*} \cdot (1 - \bar{\lambda}_{11} - \bar{\lambda}_{12})^{n - m_{11}^* - m_{12}^*} =$$

$$\frac{n!}{m_{11}^*! m_{12}^*! (n - m_{11}^* - m_{12}^*)!} \cdot 0,02^{m_{11}^*} \cdot 0,005^{m_{12}^*} \cdot 0,975^{n - m_{11}^* - m_{12}^*} \quad \text{ir} \quad P\{m_{21} = m_{21}^*, m_{22} = m_{22}^*\} =$$

$$= \frac{n!}{m_{21}^*! m_{22}^*! (n - m_{21}^* - m_{22}^*)!} \cdot 0,005^{m_{21}^*} \cdot 0,045^{m_{22}^*} \cdot 0,95^{n - m_{21}^* - m_{22}^*}.$$

Tas įrodymas yra gana gremėzdiškas ir todėl, kaip rodo dėstymo praktika, nemaža dalis studentų jame sunkiai besusigauja. Ta pati praktika parodė, kad studentai žymiai geriau supranta to įrodymo esmę, kai pradžioje pailiustruoją to įrodymo metodo idėją, įrodydamas skirstinio partijose ir skirstinio imtyse, paimitose iš tų partijų, sutapimą binominių skirstinių atveju, o po to šio teiginio teisingumą polinominiam skirstiniui parodai, nagrinėdamas konkretų pavyzdį.

Tarkime, jog atsitiktinio dydžio M skirstinys yra binominis skirstinys $B(N, q)$, t. y., jog tikimybė $P\{M = M^*\}$ yra lygi $C_N^{M^*} \cdot q^{M^*} \cdot (1 - q)^{N - M^*}$, kur $q = E\left[\frac{M}{N}\right] = \frac{1}{N} E[M] = \frac{1}{N} \sum_{M^*=0}^N M^* \cdot P\{M = M^*\}$.

Kai partijoje, sudarytoje iš N gaminių defektinių gaminių skaičius M yra lygus kokiam nors fiksuotam skaičiui M^* , priklausančiam segmentui $[0; N]$, tai sąlyginė tikimybė, jog į negažintinę imtį, sudarytą iš n gaminių, patekusių defektinių gaminių skaičius m bus lygus fiksuotam skaičiui m^* ,

priklausančiam segmentui $[0; n]$ yra lygi $P\{m = m^* | M = M^*\} = \frac{C_{M^*}^{m^*} C_{N - M^*}^{n - m^*}}{C_N^n}$.

Šioje formulėje M^* negali būti dydis, mažesnis už m^* ir didesnis už $N - (n - m^*) = N - n + m^*$. Tai akivaizdu, nes imtyje negali būti daugiau defektinių gaminių negu jų buvo visoje partijoje, ir jei $n - m^* > 0$, tai visoje partijoje esantis defektinių gaminių skaičius negali viršyti $N - (n - m^*)$, kadangi šiuo atveju $n - m^*$ gaminių tikrai neturi defektų. Vadinsi, kai $m = m^*$, tai $M^* \in [m^*; N - n + m^*]$.

Šį teiginį galima buvo gauti ir formaliai iš formulės $P\{m = m^* | M = M^*\} = \frac{C_{M^*}^{m^*} C_{N - M^*}^{n - m^*}}{C_N^n}$, nes $C_{M^*}^{m^*}$

turi prasmę tik tada, kai $M^* \geq m^*$, o $C_{N - M^*}^{n - m^*}$ turi prasmę tik tada, kai $N - M^* \geq n - m^*$, t. y., kai $M^* \leq N - n + m^*$.

Todėl, pasinaudodami pilnos tikimybės formulę perėjimui nuo sąlyginės tikimybės $P\{m = m^* | M = M^*\}$ prie pilnos tikimybės $P\{m = m^*\}$, dydžio M^* galimo kitimo sritį turime imti ne nuo 0 iki N , o nuo m^* iki $N - n + m^*$.

Nelygybės $0 \leq M^* \leq N$ gausime iš nelygybės $m^* \leq M^* \leq N - n + m^*$, keisdami m^* nuo 0 iki n , nes, kai $m^* = 0$, tai nelygybė $M^* \geq m^*$ tampa nelygybe $M^* \geq 0$, o kai $m = n$, tai nelygybė $M^* \leq N - n + m^*$ tampa nelygybe $M^* \leq N$.

Atsižvelgdami į šias pastabas, apskaičiuosime tikimybę $P\{m = m^*\}$ tuo atveju, kai atsitiktinis dydis M yra pasiskirstęs binomiškai.

$$\begin{aligned}
P\{m=m^*\} &= \sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} P\{m=m^* | M=M^*\} \cdot P\{M=M^*\} = \sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} \frac{C_{M^*}^{m^*} C_{N-M^*}^{n-m^*}}{C_N^n} C_N^{M^*} q^{m^*} (1-q)^{N-M^*} = \\
&= \sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} \frac{M^*!(N-M^*)!N!n!(N-n)!q^{M^*}(1-q)^{N-M^*}}{m^*!(M^*-m^*)!(n-m^*)!(N-M^*-n+m^*)!M^*!(N-M^*)!N!} = \\
&= \frac{n!}{m^*!(n-m^*)!} q^{m^*} (1-q)^{n-m^*} \sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} \frac{(N-n)!q^{M^*-m^*}(1-q)^{N-M^*-n+m^*}}{(M^*-m^*)!(N-M^*-n+m^*)!} = \\
&= C_n^{m^*} q^{m^*} (1-q)^{n-m^*} \sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} C_{N-n}^{M^*-m^*} q^{M^*-m^*} (1-q)^{N-n-(M^*-m^*)} = C_n^{m^*} q^{m^*} (1-q)^{n-m^*},
\end{aligned}$$

$$\text{nes suma } \sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} C_{N-n}^{M^*-m^*} q^{M^*-m^*} (1-q)^{N-n-(M^*-m^*)} = 1.$$

Tuo nesunku įsitikinti, pakeičiant kintamąjį M^* , t. y. įsivedant naują kintamąjį $u=M^*-m^*$.

Kai $M^*=m^*$, tai $u=0$, o kai $M^*=N-n+m^*$, tai $u=N-n$. Todėl

$$\sum_{M^*=m^*}^{N-n+m^*} C_{N-n}^{M^*-m^*} q^{M^*-m^*} (1-q)^{N-n-(M^*-m^*)} = \sum_{u=0}^{N-n} C_{N-n}^u q^u (1-q)^{N-n-u} = (q+1-q)^{N-n} = 1^{N-n} = 1.$$

Vadinasi, kai $P\{M=M^*\} = C_N^{M^*} q^{M^*} (1-q)^{N-M^*}$, tai $P\{m=m^*\} = C_n^{m^*} q^{m^*} (1-q)^{n-m^*}$. Kitaip tariant, kai gaminių partijose, susidedančiose iš N gaminių, defektinių gaminių skaičiai M yra binomiškai pasiskirstę atsitiktiniai skaičiai, kurių vidurkis $\bar{M}$ yra $\sqrt{q}$, tai ir bet kurioje imtyje, turinčioje po n gaminių atsitiktinai paimtų iš tų partijų, defektinių gaminių skaičiai m yra binomiškai pasiskirstę atsitiktiniai skaičiai, kurių vidurkis yra $nq = nE\left[\frac{M}{N}\right] = \frac{n}{N} \sum_{M^*=0}^N M^* P\{M=M^*\}$.

Analogiškai galima įrodyti, jog šiuo atveju ir atsitiktinis dydis $M-m$, nusakantis defektinių gaminių skaičių likusių gaminių partijų dalyse, susidedančiose iš $N-n$ gaminių, taip pat bus pasiskirstęs binomiškai su ta pačia q reikšme. Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti tai įrodyti savarankiškai, t. y. pabandyti įrodyti, jog tuo atveju, kai $P\{M=M^*\} = C_N^{M^*} q^{M^*} (1-q)^{N-M^*}$, tai tikimybė $P\{M-m=M^*-m^*\}$ yra lygi $C_{N-n}^{M^*-m^*} q^{M^*-m^*} (1-q)^{N-n-M^*+m^*}$.

Pereisui prie pavyzdžio, parodančio, kad analogišką savybę turi ir polinominis skirstinys.

Tarkime, jog gaminių partijose, turinčiose po $N=6$ gaminių, tose partijose gaminių, turinčių pirmojo tipo defektą, skaičiai M_1 ir gaminių, turinčių antrojo tipo defektą, nesuderinamą su pirmojo tipo defektu, skaičiai M_2 yra pasiskirstę polinomiškai, kitaip kalbant, tarkime, jog tikimybę, kad partijoje, sudarytoje iš N gaminių, rasime M_1^* gaminių, turinčių pirmojo tipo defektą, ir M_2^* gaminių, turinčių antrojo tipo defektą, nesuderinamą su pirmuoju, galima apskaičiuoti, naudojantis polinominio skirstinio formule

$$P\{M_1=M_1^*; M_2=M_2^*\} = \frac{N!}{M_1^*!M_2^*!(N-M_1^*-M_2^*)!} \cdot \bar{\lambda}_1^{M_1^*} \cdot \bar{\lambda}_2^{M_2^*} \cdot (1-\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2)^{N-M_1^*-M_2^*},$$

$$\bar{\lambda}_1 = E\left[\frac{M_1}{N}\right] = \frac{1}{N} E[M_1] \quad \text{ir} \quad \bar{\lambda}_2 = E\left[\frac{M_2}{N}\right] = \frac{1}{N} E[M_2].$$

Tarkime, jog $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{6}$, $\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{3}$. Tuomet gaminių, neturinčių defektų, dalies vidutinė reikšmė

$$\text{būtų lygi } 1-\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{2}.$$

Išnagrinėsime visus galimus skirtingus tokių partijų sudėčių variantus, apskaičiuodami kiekvieno varianto pasitaikymo tikimybę $P\{M_1=M_1^*; M_2=M_2^*\}$, sutrumpintai pažymėdami ją $P(M_1^*; M_2^*)$.

Šiuo atveju egzistuos $C_{N+2}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ skirtingi variantai, o bendruoju atveju, kai partijos turėtų po N elementų ir jose galėtų pasitaikyti defektinių gaminių, priklausančių r skirtingiems tipams,

dėl ko gaminius būtų galima suklasifikuoti į $r+1$ skirtingų gaminių grupių, skirtingos sudėties partijų galėtų būti $C_{N+r}^r = C_{N+r}^N$.

Apskaičiuodami tikimybes $P(M_1^*; M_2^*)$, gausime:

$$1) \quad P(0;0) = \frac{6!}{0!0!6!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64};$$

$$2) \quad P(0;1) = \frac{6!}{0!1!5!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16};$$

$$3) \quad P(0;2) = \frac{6!}{0!2!4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{3 \cdot 2^4} = \frac{5}{48};$$

$$4) \quad P(0;3) = \frac{6!}{0!3!3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{3^3 \cdot 2} = \frac{5}{54};$$

$$5) \quad P(0;4) = \frac{6!}{0!4!2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{3^3 \cdot 2^2} = \frac{5}{108};$$

$$6) \quad P(0;5) = \frac{6!}{0!5!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81};$$

$$7) \quad P(0;6) = \frac{6!}{0!6!0!} \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729};$$

$$8) \quad P(1;0) = \frac{6!}{1!0!5!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32};$$

$$9) \quad P(1;1) = \frac{6!}{1!1!4!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{3 \cdot 2^4} = \frac{5}{48};$$

$$10) \quad P(1;2) = \frac{6!}{1!2!3!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{5}{36};$$

$$11) \quad P(1;3) = \frac{6!}{1!3!2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2 \cdot 3^3} = \frac{5}{54};$$

$$12) \quad P(1;4) = \frac{6!}{1!4!1!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2 \cdot 3^4} = \frac{5}{162};$$

$$13) \quad P(1;5) = \frac{6!}{1!5!0!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243};$$

$$14) \quad P(2;0) = \frac{6!}{2!0!4!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^6 \cdot 3} = \frac{5}{192};$$

$$15) \quad P(2;1) = \frac{6!}{2!1!3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{5}{72};$$

$$16) \quad P(2;2) = \frac{6!}{2!2!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{5}{72};$$

$$17) \quad P(2;3) = \frac{6!}{2!3!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2 \cdot 3^4} = \frac{5}{162};$$

$$18) \quad P(2;4) = \frac{6!}{2!4!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5}{2^2 \cdot 3^5} = \frac{5}{972};$$

$$19) \quad P(3;0) = \frac{6!}{3!0!3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{5}{432};$$

$$20) \quad P(3;1) = \frac{6!}{3!1!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{5}{216};$$

$$21) P(3;2) = \frac{6!}{3!2!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{5}{324};$$

$$22) P(3;3) = \frac{6!}{3!3!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5}{2 \cdot 3^6} = \frac{5}{1458};$$

$$23) P(4;0) = \frac{6!}{4!0!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2^6 \cdot 3^3} = \frac{5}{1728};$$

$$24) P(4;1) = \frac{6!}{4!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{5}{1296};$$

$$25) P(4;2) = \frac{6!}{4!2!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5}{2^4 \cdot 3^5} = \frac{5}{3888};$$

$$26) P(5;0) = \frac{6!}{5!0!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5 \cdot 3^4} = \frac{1}{2592};$$

$$27) P(5;1) = \frac{6!}{5!1!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^5} = \frac{1}{3888};$$

$$28) P(6;0) = \frac{6!}{6!0!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{2^6 \cdot 3^6} = \frac{1}{46656};$$

Skaičiavimų patikrinimui surasime visų šių tikimybių sumą: $\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{3 \cdot 2^4} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^3} +$
 $+ \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{5}{2^6 \cdot 3} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^3} +$
 $+ \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} + \frac{5}{2 \cdot 3^6} + \frac{5}{2^6 \cdot 3^3} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^4} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^5} + \frac{5}{2^5 \cdot 3^4} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^5} + \frac{1}{2^6 \cdot 3^6} =$
 $= \frac{3^6 + 2^2 \cdot 3^6 + 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5 + 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^6 \cdot 3^2 + 2^6 + 2 \cdot 3^6 + 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 +}{2^6 \cdot 3^6}$
 $+ \frac{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^6 \cdot 3 + 3^5 \cdot 5 + 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 + 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 +}{2^6 \cdot 3^6}$
 $+ \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^5 \cdot 5 + 3^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3 + 1}{2^6 \cdot 3^6} = \frac{46656}{2^6 \cdot 3^6} = 1$, kaip ir turėjo būti.

Tarkime, jog šiose partijose mes imame atsitiktines negražintines imtis, susidedančias iš $n=3$ gaminių.

Galimus rezultatus žymėsime trimačiais vektoriais, kurių pirmoji koordinatė rodys, kiek gaminių, turinčių pirmojo tipo defektą, pateko į imtį, antroji – kiek gaminių, turinčių antrojo tipo defektą, pateko į imtį, trečioji – kiek gaminių, neturinčių defektų, pateko į imtį.

Kadangi mūsų nagrinėjamu atveju partijos, turinčios po 6 gaminius, gali priklausyti bet kuriai iš mūsų čia ką tik išnagrinėtų 28 skirtingų klasių, kurių pasitaikymo tikimybės $P(M_1^*, M_2^*)$ mes jau apskaičiavome, tai galimus imčių ėmimo ir tyrimo rezultatus gali vaizduoti $C_{3+2}^2 = 10$ skirtingų trimačio vektoriaus reikšmių: 1) (0;0;3); 2) (0;1;2); 3) (0;2;1); 4) (0;3;0); 5) (1;0;2); 6) (1;1;1); 7) (1;2;0); 8) (2;0;1); 9) (2;1;0); 10) (3;0;0).

Apskaičiuosime kiekvienos klasės imties gavimo tikimybes $p(m_1, m_2, n-m_1, -m_2)$, žymėdami tas tikimybes mažosiomis raidėmis p , kad atskirtume nuo įvairios sudėties partijų pasitaikymo tikimybių $P(M_1, M_2)$, kurias žymėjome didžiosiomis raidėmis P .

Tikimybių $p(m_1, m_2, n-m_1, -m_2)$ reikšmes apskaičiuosime naudodamiesi pilnosios tikimybės formule, t. y. daugindami atitinkamos partijos pasitaikymo jau apskaičiuotas tikimybių $P(M_1^*, M_2^*)$ reikšmes iš atitinkamos imties gavimo tikimybės toje partijoje, kurią, esant fiksuotoms $M_1 = M_1^*$ ir $M_2 = M_2^*$ reikšmėms, galima apskaičiuoti, naudojantis dvimačio hipergeometrinio skirstinio formule, o po to sumuodami gautas sandaugas:

$$\begin{aligned}
1) \quad p(0,0,3) &= P(0;0) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_0^0 \cdot C_{6-0-0}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(0;1) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_1^0 \cdot C_{6-0-1}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(0;2) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_2^0 \cdot C_{6-0-2}^{3-0-0}}{C_6^3} + \\
&+ P(0;3) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_3^0 \cdot C_{6-0-3}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(1;0) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_0^0 \cdot C_{6-1-0}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(1;1) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_1^0 \cdot C_{6-1-1}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(1;2) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_2^0 \cdot C_{6-1-2}^{3-0-0}}{C_6^3} + \\
&+ P(2;0) \cdot \frac{C_2^0 \cdot C_0^0 \cdot C_{6-2-0}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(2;1) \cdot \frac{C_2^0 \cdot C_1^0 \cdot C_{6-2-1}^{3-0-0}}{C_6^3} + P(3;0) \cdot \frac{C_3^0 \cdot C_0^0 \cdot C_{6-3-0}^{3-0-0}}{C_6^3} + 0 + \dots = \frac{1}{64} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + \\
&+ \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{54} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{20} + \frac{5}{192} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{72} \cdot \frac{1}{20} + \frac{5}{432} \cdot \frac{1}{20} + 0 + \dots + 0 = \frac{1}{8};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad p(0;1;2) &= P(0;1) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_1^1 \cdot C_{6-1}^{3-1}}{C_6^3} + P(0;2) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_2^1 \cdot C_{6-2}^{3-1}}{C_6^3} + P(0;3) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_3^1 \cdot C_{6-3}^{3-1}}{C_6^3} + \\
&+ P(0;4) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_4^1 \cdot C_{6-4}^{3-1}}{C_6^3} + P(1;1) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_1^1 \cdot C_{6-2}^{3-1}}{C_6^3} + P(1;2) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_2^1 \cdot C_{6-3}^{3-1}}{C_6^3} + P(1;3) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_3^1 \cdot C_{6-4}^{3-1}}{C_6^3} + \\
&+ P(2;1) \cdot \frac{C_2^0 \cdot C_1^1 \cdot C_{6-3}^{3-1}}{C_6^3} + P(2;2) \cdot \frac{C_2^0 \cdot C_2^1 \cdot C_{6-4}^{3-1}}{C_6^3} + P(3;1) \cdot \frac{C_3^0 \cdot C_1^1 \cdot C_{6-4}^{3-1}}{C_6^3} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{3 \cdot 2^4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \\
&\frac{5}{2^2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{3 \cdot 2^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^5 \cdot 3^3} = \frac{216}{2^5 \cdot 3^3} = \frac{1}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad p(0;2;1) &= P(0;2) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_2^2 \cdot C_{6-2}^{3-2}}{C_6^3} + P(0;3) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_3^2 \cdot C_{6-3}^{3-2}}{C_6^3} + P(0;4) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_4^2 \cdot C_{6-4}^{3-2}}{C_6^3} + \\
&+ P(0;5) \cdot \frac{C_0^0 \cdot C_5^2 \cdot C_{6-5}^{3-2}}{C_6^3} + P(1;2) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_2^2 \cdot C_{6-3}^{3-2}}{C_6^3} + P(1;3) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_3^2 \cdot C_{6-4}^{3-2}}{C_6^3} + P(1;4) \cdot \frac{C_1^0 \cdot C_4^2 \cdot C_{6-5}^{3-2}}{C_6^3} + \\
&+ P(2;2) \cdot \frac{C_2^0 \cdot C_2^2 \cdot C_{6-4}^{3-2}}{C_6^3} + P(2;3) \cdot \frac{C_2^0 \cdot C_3^2 \cdot C_{6-5}^{3-2}}{C_6^3} + P(3;2) \cdot \frac{C_3^0 \cdot C_2^2 \cdot C_{6-5}^{3-2}}{C_6^3} = \frac{5}{3 \cdot 2^4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2^2 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{216}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{1}{6};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad p(0;3;0) &= P(0;3) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(0;4) \cdot \frac{C_4^3}{C_6^3} + P(0;5) \cdot \frac{C_5^3}{C_6^3} + P(0;6) \cdot \frac{C_6^3}{C_6^3} + P(1;3) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(1;4) \cdot \frac{C_4^3}{C_6^3} + \\
&+ P(1;5) \cdot \frac{C_5^3}{C_6^3} + P(2;3) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(2;4) \cdot \frac{C_4^3}{C_6^3} + P(3;3) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{5}{3^3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3^6} \cdot 1 + \\
&+ \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2 \cdot 3^6} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^3 \cdot 3^6} = \frac{216}{2^3 \cdot 3^6} = \frac{1}{27};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad p(1;0;2) &= P(1;0) \cdot \frac{C_5^2}{C_6^3} + P(1;1) \cdot \frac{C_4^2}{C_6^3} + P(1;2) \cdot \frac{C_3^2}{C_6^3} + P(1;3) \cdot \frac{C_2^2}{C_6^3} + P(2;0) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} + P(2;1) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_6^3} + \\
&+ P(2;2) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} + P(3;0) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_3^2}{C_6^3} + P(3;1) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} + P(4;0) \cdot \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2^4 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^6 \cdot 3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^3} \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^6 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{5} = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^6 \cdot 3^3} = \frac{216}{2^6 \cdot 3^3} = \frac{1}{8};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad p(1;1;1) &= P(1;1) \cdot \frac{C_4^1}{C_6^3} + P(1;2) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^3} + P(1;3) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(1;4) \cdot \frac{C_4^1}{C_6^3} + P(2;1) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^3} + \\
&+ P(2;2) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(2;3) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^3} + P(3;1) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(3;2) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(4;1) \cdot \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{5}{2^4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{5} = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{216}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{1}{6};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad p(1;2;0) &= P(1;2) \cdot \frac{C_1^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} + P(1;3) \cdot \frac{C_1^1 \cdot C_3^2}{C_6^3} + P(1;4) \cdot \frac{C_1^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} + P(1;5) \cdot \frac{C_1^1 \cdot C_5^2}{C_6^3} + P(2;2) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} + \\
&+ P(2;3) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_6^3} + P(2;4) \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} + P(3;2) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} + P(3;3) \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_3^2}{C_6^3} + P(4;2) \cdot \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^6} \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{5} = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^4 \cdot 3^5} = \frac{216}{2^4 \cdot 3^5} = \frac{1}{18};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad p(2;0;1) &= P(2;0) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} + P(2;1) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_6^3} + P(2;2) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(2;3) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + P(3;0) \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_3^1}{C_6^3} + \\
&+ P(3;1) \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(3;2) \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + P(4;0) \cdot \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(4;1) \cdot \frac{C_4^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + P(5;0) \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} = \frac{5}{2^6 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5} + \\
&+ \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^3} \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^6 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{5} + \\
&+ \frac{5}{2^4 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2^5 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^6 \cdot 3^4} = \frac{216}{2^6 \cdot 3^4} = \frac{1}{24};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \quad p(2;1;0) &= P(2;1) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + P(2;2) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(2;3) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_6^3} + P(2;4) \cdot \frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} + P(3;1) \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + \\
&+ P(3;2) \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(3;3) \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_3^1}{C_6^3} + P(4;1) \cdot \frac{C_4^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} + P(4;2) \cdot \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} + P(5;1) \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} = \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{3}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3^6} \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2^4 \cdot 3^5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{216}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{1}{36};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10) \quad p(3;0;0) &= P(3;0) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(3;1) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(3;2) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(3;3) \cdot \frac{C_3^3}{C_6^3} + P(4;0) \cdot \frac{C_4^3}{C_6^3} + P(4;1) \cdot \frac{C_4^3}{C_6^3} + \\
&+ P(4;2) \cdot \frac{C_4^3}{C_6^3} + P(5;0) \cdot \frac{C_5^3}{C_6^3} + P(5;1) \cdot \frac{C_5^3}{C_6^3} + P(6;0) \cdot \frac{C_6^3}{C_6^3} = \frac{5}{2^4 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \\
&+ \frac{5}{2 \cdot 3^6} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{5}{2^6 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{2^4 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2^5 \cdot 3^4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^6 \cdot 3^6} \cdot 1 = \\
&= \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{2^6 \cdot 3^6} = \frac{216}{2^6 \cdot 3^6} = \frac{1}{216}.
\end{aligned}$$

Patikrinsime, ar skaičiavimuose nepadarėme klaidų. Rasime apskaičiuotų tikimybių sumą:
 $p(0;0;3)+p(0;1;2)+p(0;2;1)+p(0;3;0)+p(1;0;2)+p(1;1;1)+p(1;2;0)+p(2;0;1)+p(2;1;0)+p(3;0;0)=$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{27+54+36+8+27+36+12+9+6+1}{216} = \frac{216}{216} = 1$, ką ir turėjome gauti.

Turėdami tiesioginiu būdu apskaičiuotas tikimybių $p(m_1, m_2, n-m_1-m_2)$ reikšmes, galime patikrinti teisingumą teiginio, jog tų tikimybių skirstinys, sutapdamas su tikimybių $P(M_1, M_2, N-M_1-M_2)$ skirstiniu, turėtų būti polinominis, t. y., kad tikimybių $p(m_1, m_2, n-m_1-m_2)$ reikšmes galima apskaičiuoti naudojantis formule $p(m_1, m_2, n-m_1-m_2) = \frac{n!}{m_1!m_2!(n-m_1-m_2)!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} (1-p_1-p_2)^{n-m_1-m_2} =$

$$= \frac{3!}{m_1!m_2!(3-m_1-m_2)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m_2} \cdot \left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)^{3-m_1-m_2}.$$

Atliksime tokius apskaičiavimus ir palyginsime gaunamus rezultatus su rezultatais jau apskaičiuotas tiesiogiai:

- 1) $p(0;0;3) = \frac{3!}{0!0!3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$
- 2) $p(0;1;2) = \frac{3!}{0!1!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$
- 3) $p(0;2;1) = \frac{3!}{0!2!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{6};$
- 4) $p(0;3;0) = \frac{3!}{0!3!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{27};$
- 5) $p(1;0;2) = \frac{3!}{1!0!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8};$
- 6) $p(1;1;1) = \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$
- 7) $p(1;2;0) = \frac{3!}{1!2!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{18};$
- 8) $p(2;1;0) = \frac{3!}{2!1!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{36};$
- 9) $p(3;0;0) = \frac{3!}{3!0!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{216}.$

Tikimybių $p(m_1, m_2, n-m_1-m_2)$ reikšmės, apskaičiuotos abiem būdais, visiškai sutapo, tuo pačiu patvirtindamos anksčiau suformuluoto teiginio teisingumą polinominiams skirstiniams.

Logiškai ir sistemiškai mąstant, šio teiginio teisingumas ne tik binominiams ir polinominiams, bet ir visiems kitiems skirstiniams yra akivaizdus, o čia atlikti skaičiavimai tik patvirtina tą faktą, kad loginis sisteminis mąstymas gana dažnai leidžia gauti rezultatus, kuriems gauti šiaip jau reikėtų gana ilgų ir sudėtingų skaičiavimų.

Minėtasis akivaizdumas išplaukia iš to fakto, kad, turėdami partiją, sudarytą iš N gaminių, ir pasidarydami visų gaminių skirtingų imčių kopijas, mes gautume aibę, sudarytą iš $C_N^n \cdot n$ gaminių, į

kurią kiekvienas pradinis partijos gaminytis įeitų lygiai po $\frac{C_N^n \cdot n}{N} = C_{N-1}^{n-1}$ kartų, t. y. aibę gaminių, patekusių į visas galimas skirtingas imtis, pakartotų pradinę gaminių aibę, sudarytą iš N gaminių, lygiai $C_{N-1}^{n-1} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-1)!}$ kartų. Todėl visos proporcijos, egzistavusios pradinėje gaminių aibėje – partijoje,

sudarytoje iš N gaminių, išliktų ir aibėje, sudarytoje iš visų skirtingų imčių kopijų ir turinčioje $C_N^n \cdot n$ gaminių. Sutaptų ir visų vidurkių bei analogiškų tikimybių reikšmės pradinėje aibėje ir jos kopijų aibėje.

Kitaip tariant, atlikdami pakankamai daug imčių, jei tų imčių ėmimo metu tiriamoji aibė nepasikeistų, mes galėtume gauti apie tiriamąją aibę visą informaciją, kurią būtų galima gauti atliekant tos aibės išsistatinį tyrimą.

Todėl situacija, kurią mes pavadiname antrąja tipine situacija, kai tiriamas procesas yra stochastiškai stabilus, egzistuoja tik tyrimo pradžioje. Tyrimui tęsiantis ir kaupiantis stochastinei informacijai, kai tiriamoji sistema priklauso stochastinių ar determinuotų sistemų klasėms ir žymiai bei

netikėtai nesikeičia laikui bėgant, mes apie tiriamąją bei valdomąją sistemą sužinome vis daugiau ir tai leidžia mums priimti vis racionalesnius valdymo sprendimus.

Bet norėtuši, kad mūsų sprendimai būtų racionalūs ir teisingi ne tik statistiškai, bet ir individualiai, t. y., kad ne tik mūsų sprendimų rezultatų vidurkiai būtų geriausi, bet geriausi būtų ir individualūs rezultatai. Juk konkrečiam gydomam pacientui svarbu ne tik tai, kad jam taikomas gydymo metodas būtų statistiškai efektyvus, bet ir tai, kad tas gydymo metodas padėtų ir jam asmeniškai.

Su panašia situacija susiduria ne tik gydomas pacientas ir jį gydantis gydytojas, bet ir konkrečią bylą tiriantys teisėjai bei joje dalyvaujantys ieškovai ir atsakovai, taip pat įstatymų leidėjai ir piliečiai, kurie privalės tiems įstatymams paklusti, ir t. t., ir t. t.

Todėl svarbu išmokti kurti tokias sprendimų priėmimo taisykles, kurios maksimaliai išnaudotų net vieno atskiuro eksperimento rezultatų teikiamą informaciją, ir taip organizuoti eksperimentus, kad mūsų priimami sprendiniai būtų, kiek įmanoma, geresni ne tik statistiškai, t. y. vidutiniškai, bet ir individualiai. Juk, gerindami kiekvieno individualaus sprendimo rezultatus, mes automatiškai pagerinsime ir tų rezultatų vidurkius. Gimstamumas šalyje negali padidėti, nedidinant gimstančių vaikų skaičiaus atskirose šeimose.

Grišime prie mūsų nagrinėjamų rutuliukų ir prie išvedimo tokių taisyklių, kurios leistų, pasinaudojant vieno „neidealaus“ eksperimento – imties $n=1$ tyrimo – rezultatais, pasirinkti racionaliausią (t. y. pasiteisinančią dažniausiai) rutuliukų partijų priėmimo strategiją.

Dabar, kai jau įsitikinome, kad defektnių gaminių skirstinys, kuris egzistuoja gaminių partijoje, išlieka ir iš tų partijų sudarytų imčių aibėje, galime apskaičiuoti sąlyginių tikimybių $p(y_k/G_j)$ reikšmes, laikydami, kad defektiniai gaminiai ne tik partijose, bet ir imtyse pasiskirstę polinomiškai su tomis pačiomis tikimybėmis $p_{11}=\bar{\lambda}_{11}=0,02$, $p_{12}=\bar{\lambda}_{12}=0,005$, $p_{21}=\bar{\lambda}_{21}=0,005$, $p_{22}=\bar{\lambda}_{22}=0,045$, kaip jie yra pasiskirstę rutuliukų partijose pirmojo ir antrojo tipo srautuose.

Gauname, jog

$$p(y_0/G_1)=p(0;0;1)=\frac{1!}{0!0!1!} \cdot (\bar{\lambda}_{11})^0 \cdot (\bar{\lambda}_{12})^0 \cdot (1-\bar{\lambda}_{11}-\bar{\lambda}_{12})=1-\bar{\lambda}_{11}-\bar{\lambda}_{12}=1-0,02-0,005=0,975;$$

$$p(y_1/G_1)=p(1;0;0)=\frac{1!}{1!0!0!} \cdot \bar{\lambda}_{11} \cdot (\bar{\lambda}_{12})^0 \cdot (1-\bar{\lambda}_{11}-\bar{\lambda}_{12})^0 = \bar{\lambda}_{11}=0,020;$$

$$p(y_2/G_1)=p(0;1;0)=\frac{1!}{0!1!0!} \cdot (\bar{\lambda}_{11})^0 \cdot \bar{\lambda}_{12} \cdot (1-\bar{\lambda}_{11}-\bar{\lambda}_{12})^0 = \bar{\lambda}_{12}=0,005;$$

$$p(y_0/G_2)=p(0;0;1)=1-\bar{\lambda}_{21}-\bar{\lambda}_{22}=1-0,005-0,045=0,950;$$

$$p(y_1/G_2)=p(1;0;0)=\bar{\lambda}_{21}=0,005;$$

$$p(y_2/G_2)=p(0;1;0)=\bar{\lambda}_{22}=0,045.$$

Žinodami tikimybių $P(y_n/G_j)$ reikšmes ir naudodamiesi indeksu $I_{i,h,k}$ reikšmių lentele (žiūr. 375-ąją lentelę), mes galime apskaičiuoti sąlygines ėjimų A_i tikimybes $P(A_i/S_h, G_j)$, t. y. tuos vidutinius ėjimų A_i ($i=1, 2$) darymo dažnius, kuriuos pasirinktų lošėjas A , pasirinkęs strategiją S_h ir atsižvelgdamas į imties tyrimo rezultatus y_k , gautus esant „gamtos ėjimui“ G_j .

Akiivaizdu, kad tikimybių $P(A_i/S_h, G_j)$ reikšmes galima apskaičiuoti, naudojantis formule

$$P(A_i/S_h, G_j) = \sum_{k=0}^2 I_{i,h,k} \cdot P(y_k/G_j), \text{ nes indeksai } I_{i,h,k} \text{ yra lygūs 1, kai, pasirinkus strategiją } S_h \text{ ir esant}$$

imties tyrimo rezultatui $y=y_k$, daromas ėjimas A_i , ir lygus 0, kai tas ėjimas tąkart nedaromas (daromas kitas ėjimas).

Pavyzdžiui, pasirinkus strategiją S_0 , ėjimą A_1 tektų daryti, esant bet kuriam imties tyrimo rezultatui, todėl tikimybė $P(A_1/S_0, G_1)$ turėtų būti lygi 1. Taip pat turėtų būti lygi 1 ir tikimybė

$$P(A_1/S_0, G_2). \text{ Tą patį rezultatą gautume ir naudodamiesi formule } P(A_i/S_h, G_j) = \sum_{k=0}^2 I_{i,h,k} \cdot P(y_k/G_j) :$$

$$P(A_1/S_0, G_1) = I_{1,0,0} \cdot P(y_0/G_1) + I_{1,0,1} \cdot P(y_1/G_1) + I_{1,0,2} \cdot P(y_2/G_1) = 1 \cdot 0,975 + 1 \cdot 0,020 + 1 \cdot 0,005 = 1,000,$$

$$P(A_1/S_0, G_2) = I_{1,0,0} \cdot P(y_0/G_2) + I_{1,0,1} \cdot P(y_1/G_2) + I_{1,0,2} \cdot P(y_2/G_2) = 1 \cdot 0,950 + 1 \cdot 0,005 + 1 \cdot 0,045 = 1,000.$$

Abi tikimybės $P(A_1/S_0, G_1)$ ir $P(A_1/S_0, G_2)$ būtų lygios nuliui, nes būtų lygios nuliui visų indeksų $I_{2,0,k}$ ($k=0, 1, 2$) reikšmės.

Analogiškai gautume, jog tikimybė $P(A_1/S_1, G_1)$ būtų lygi sumai $I_{1,1,0} \cdot P(y_0/G_1) + I_{1,1,1} \cdot P(y_1/G_1) + I_{1,1,2} \cdot P(y_2/G_1) = 1 \cdot 0,975 + 1 \cdot 0,020 + 0 \cdot 0,005 = 0,995$, tikimybė $P(A_1/S_1, G_2)$ būtų lygi sumai $1 \cdot 0,950 + 1 \cdot 0,005 + 0 \cdot 0,045 = 0,955$, tikimybė $P(A_2/S_1, G_1)$ būtų lygi sumai $0 \cdot 0,975 + 0 \cdot 0,020 + 1 \cdot 0,005 = 0,005$, o tikimybė $P(A_2/S_1, G_2)$ – sumai $0 \cdot 0,950 + 0 \cdot 0,005 + 1 \cdot 0,045 = 0,045$.

Apskaičiavę visų sąlyginių tikimybių $P(A_i/S_h, G_j)$ reikšmes, gautume 376-ąją lentelę.

376. lentelė

S_h	S_0		S_1		S_2		S_3		S_4		S_5		S_6		S_7	
G_j	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
G_1	1,000	0,000	0,995	0,005	0,980	0,020	0,975	0,025	0,025	0,975	0,020	0,980	0,005	0,995	0,000	1,000
G_2	1,000	0,000	0,955	0,045	0,995	0,005	0,950	0,050	0,050	0,950	0,005	0,995	0,045	0,955	0,000	1,000

Dabar jau galima apskaičiuoti vidutines išlaidas $\bar{v}_{h,j}$, atsirandančias pasirinkus strategiją S_h ir „gamtai“ padarius ėjimą G_j . Jas apskaičiuosime pasinaudodami vidutinių išlaidų $\bar{v}_{i,j}$ reikšmėmis, pateiktomis 374-ojoje lentelėje, ir tikimybių $P(A_i/S_h, G_j)$ reikšmėmis, pateiktomis 376-ojoje lentelėje, įstatydami tas reikšmes į formulę $\bar{v}_{h,j} = \sum_{i=1}^2 \bar{v}_{ij} \cdot P(A_i | S_h, G_j)$, kuri yra vidurkio apskaičiavimo formulė: vidutinės išlaidos, kurios atsiranda padarius ėjimą A_i , dauginamos iš to ėjimo A_i tikimybės ir surandama visų tokių sandaugų suma, turinti tiek dėmenų, kiek yra galimų ėjimų (šiuo konkrečiu atveju galimų ėjimų A_i yra tik du: A_1 ir A_2).

Gauname tokius rezultatus:

- 1) $\bar{v}_{S_0, G_1} = \bar{v}_{11} \cdot P(A_1 | S_0, G_1) + \bar{v}_{21} \cdot P(A_2 | S_0, G_1) = 292 \cdot 1,000 + 342 \cdot 0,000 = 292$;
- 2) $\bar{v}_{S_0, G_2} = \bar{v}_{12} \cdot P(A_1 | S_0, G_2) + \bar{v}_{22} \cdot P(A_2 | S_0, G_2) = 528 \cdot 1,000 + 328 \cdot 0,000 = 528$;
- 3) $\bar{v}_{S_1, G_1} = 292 \cdot 0,995 + 342 \cdot 0,005 = 292,25$;
- 4) $\bar{v}_{S_1, G_2} = 528 \cdot 0,995 + 328 \cdot 0,045 = 519,00$;
- 5) $\bar{v}_{S_2, G_1} = 292 \cdot 0,980 + 342 \cdot 0,020 = 293,00$;
- 6) $\bar{v}_{S_2, G_2} = 528 \cdot 0,995 + 328 \cdot 0,005 = 527,00$;
- 7) $\bar{v}_{S_3, G_1} = 292 \cdot 0,975 + 342 \cdot 0,025 = 293,25$;
- 8) $\bar{v}_{S_3, G_2} = 528 \cdot 0,950 + 328 \cdot 0,050 = 518,00$;
- 9) $\bar{v}_{S_4, G_1} = 292 \cdot 0,025 + 342 \cdot 0,975 = 340,75$;
- 10) $\bar{v}_{S_4, G_2} = 528 \cdot 0,050 + 328 \cdot 0,950 = 338,00$;
- 11) $\bar{v}_{S_5, G_1} = 292 \cdot 0,020 + 342 \cdot 0,980 = 341,00$;
- 12) $\bar{v}_{S_5, G_2} = 528 \cdot 0,005 + 328 \cdot 0,995 = 329,00$;
- 13) $\bar{v}_{S_6, G_1} = 292 \cdot 0,005 + 342 \cdot 0,995 = 341,75$;
- 14) $\bar{v}_{S_6, G_2} = 528 \cdot 0,045 + 328 \cdot 0,955 = 337,00$;
- 15) $\bar{v}_{S_7, G_1} = 292 \cdot 0,000 + 342 \cdot 1,000 = 342$;
- 16) $\bar{v}_{S_7, G_2} = 528 \cdot 0,000 + 328 \cdot 1,000 = 328$.

Gautas vidutines išlaidas, atsirandančias pasinaudojus strategijomis S_h ir „gamtai“ padarius ėjimą G_j , įrašome į 377-ąją lentelę.

377. lentelė

$G_j \backslash S_h$	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
G_1	292	292,25	293,00	293,25	340,75	341,00	341,75	342
G_2	528	519,00	527,00	518,00	338,00	329,00	337,00	328

377-oji lentelė – tai nauja lošimo su „gamta“ vidutinių išlaidų matrica, atsiradusi atsižvelgiant į imties $n=1$ tyrimo galimus rezultatus ir pakeitusi lošimo su „gamta“ vidutinių išlaidų matricą, kurią turėjome pirmojoje tipinėje situacijoje, t. y. iki „neidealaus“ eksperimento (žiūr. 374-ąją lentelę).

Ši lentelė suteikia lošėjui A (rutuliukų partijos kokybės kontrolieriams) jau daugiau galimybių pasirenkant strategiją, užtikrinančią, jog net blogiausiu atveju vidutinės papildomos išlaidos neviršys tam tikros ribos – vidutinių išlaidų minimo, nes vietoj dviejų ėjimų A_1 ir A_2 , kuriuos lošėjas A turėjo,

naudodamasis 374-ąja lentele, dabar galimas pasirinkimas tarp aštuonių strategijų S_h . Todėl galima tikėtis, jog galima rasti geresnę rutuliukų partijų priėmimo strategiją.

Analizuodami 377-ąją lentelę, galime pastebėti, jog strategija S_2 yra blogesnė už strategiją S_1 visais atvejais, o strategija S_6 yra visais atvejais blogesnė už strategiją S_5 . Todėl strategijas S_2 ir S_6 iš 377-osios lentelės galima eliminuoti kaip šiuo konkrečiu atveju akivaizdžiai neefektyvias. Belieka palyginti šešias likusias strategijas S_h .

Kadangi ši lošimo mokėjimų matrica neturi balno taško, nes $\min_h \max_j \bar{v}_{h,j} = 340,75$ nėra lygus $\max_j \min_h \bar{v}_{h,j} = 328$, tai minimaksinė strategija bus mišri, o minimakso taškas bus dviejų tiesių, vaizduojančių dvi aktyviasias grynąsias strategijas S_h , susikirtimo taškas.

Tas dvi **aktyviasias strategijas** ir tą tašką galima rasti dviem būdais, kuriuos jau taikėme 1.16.2.4. skyrelyje: grafiniu būdu ir taikant simplekso algoritmą.

Taikant jau mums žinomą grafinį būdą, galima nustatyti, jog aktyviosios gryniosios strategijos yra strategijos S_1 ir S_5 . Jas vaizduojančių tiesių susikirtimo tašką galima rasti sprendžiant lygčių sistemą

$$\begin{cases} \bar{v}_{S_1, G_1} q_1 + \bar{v}_{S_1, G_2} q_2 = \bar{v}_{S_5, G_1} + \bar{v}_{S_5, G_2}, \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases} \text{ t. y. lygčių sistema } \begin{cases} 292,25q_1 + 519q_2 = 341q_1 + 329q_2, \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases} \text{ kur } q_1 \text{ ir } q_2 \text{ yra „gamtos ėjimų“ } G_1 \text{ ir } G_2 \text{ tikimybės.}$$

Sprendami šią lygčių sistemą, randame, jog $292,25q_1 + 519(1-q_1) = 341q_1 + 329(1-q_1)$,

$$519 - 226,75q_1 = 329 + 12q_1. \quad 238,75q_1 = 190, \quad q_1^* = \frac{190}{238,75} \approx 0,795811518 \approx 0,80, \quad \bar{v}_{S_5, S_1}^* = 329 + 12q_1^* \approx$$

$$\approx 338,5497382 \approx 338,55.$$

Kaip matome, garantuotas vidutinių minimaksinių nuostolių lygis yra mažesnis už garantuotą minimaksinį lygį $\bar{v} \approx 339,2$, kurį buvo galima pasiekti pirmojoje situacijoje, naudojantis mišriąja strategija $S(p_1, p_2) = S(0,056; 0,944)$, t. y. darant ėjimą A_1 su dažniu $p_1^* = 0,056$ ir ėjimą A_2 su dažniu $p_2^* = 0,944$.

Atlikę „neidealų“ eksperimentą $n=1$, gavome papildomos informacijos, kuri leido pasirinkti racionalesnę strategiją, sumažinančią minimakso lygį iki 338,55, t. y. išlošiant $329,20 - 338,55 = 0,65$ lito kiekvienai rutuliukų partijai. Kadangi eksperimento kaina $c_e = n \cdot c_3 = 1 \cdot 0,3$ lito, tai eksperimentu $n=1$ naudotis apsimokėtų, nes leistų gauti vidutinį grynąjį išlošį $0,65 - 0,30 = 0,35$ lito kiekvienai

Intarpo į 1442 p. tęsinys 22 (dar nesuvestas studentų arba negavau failo)

1.16.2.6. Daugiakriterijinis optimizavimas

Su nepakankamu probleminės situacijos apibrėžtumu, atsirandančiu dėl toje situacijoje veikiančių **subjektų tikslų neapibrėžtumo**, tenka susidurti formuluojant ir bandant spręsti taip vadinamus **daugiakriterijinius optimizavimo uždavinius**. Tokiems uždaviniams būdinga, kad juose figūruojančių **valdymo subjektų tikslai yra charakterizuojami ne vienu, o keliais efektyvumo rodikliais**, ir todėl, ieškant optimalaus sprendinio, **stengiamasi gerinti ne tik kurio nors vieno, o, kiek tai įmanoma, kartu visų tų efektyvumo rodiklių reikšmes, siekiant gauti labiausiai pageidautiną galimą tų reikšmių kombinaciją**.

Kartais daugiakriterijinį optimizavimo uždavinį charakterizuojantiems efektyvumo rodikliams $F_1, F_2, \dots, F_s, \dots, F_v$ pavyksta surasti bendrą matą (pavyzdžiui, įvertinant piniginiiais vienetais pajamų bei nuostolių pokyčius, atsirandančius keičiantis tų rodiklių reikšmėms) ir tokiu būdu **suvesti visus tuos efektyvumo rodiklius į vieną bendrą visus juos atstovaujantį optimalumo rodiklį**. Tuomet daugiakriterijinis optimizavimo uždavinys susiveda į vienakriterijinį optimizavimo uždavinį, kurio matematinio modelio sudarymo ir sprendimo bei gauto sprendinio stabilumo ir jautrumo analizės metodus mes jau esame nagrinėję 1.15. skyriuje. Sprendami tokius uždavinius mes ieškojome atsakymo į klausimą, kokias reikšmes reikėtų parinkti subjekto valdomiems kintamiesiems $x_1, x_2, \dots, x_n$, esant duotoms (t. y. žinomoms ar

prognozuojamoms) nevaldomųjų kintamųjų $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ reikšmėms, kad nagrinėjamoje sistemoje vienas jos funkcionavimo efektyvumo rodiklių, mūsų parinktas to funkcionavimo optimalumo rodikliu, įgytų labiausiai pageidautiną (optimalią) reikšmę.

Tačiau tokia daugiakriterijinio optimizavimo uždavinio, galima sakyti, objektyvaus suvedimo į vienakriterijinį optimizavimo uždavinį galimybė pasitaiko ne taip jau dažnai, nes **daugelyje atvejų skirtingus tikslus nepavyksta suvesti į vieną.**

Šiame skyrelyje mes nagrinėsime kaip tik tokius daugiakriterijinius optimizavimo uždavinius, kuriuose išspręsti tikslų neapibrėžtumo bei nesuderinamumo problemą, objektyviai suvedant visus tą uždavinį charakterizuojančius efektyvumo rodiklius į vieną, nepavyksta ir kuriuose, **gerinant vienų efektyvumo rodiklių reikšmes, kai kurių kitų efektyvumo rodiklių reikšmės neišvengiamai blogėja.**

Susidoroti su tokia prieštara įmanoma tik priimant **kompromisinį sprendinį**, remiantis jau ne vien tik griežta dedukcine logika bei matematiniais metodais, bet ir negriežtai apibrėžtais **subjektyviais kriterijais**. Todėl **tokių daugiakriterijinių optimizavimo uždavinių sprendinių radimo procedūra jau negali būti grynai matematinė ir todėl joje būtinai turi dalyvauti asmenys, atsakingi už priimamą kompromisinį sprendinį.** Jie, atsižvelgdami į apibendrintą informaciją apie formalizuojamus faktorius, o taip pat į faktorius, kurių formalizuoti nepavyksta, ir nusprendžia, koks turi būti tas kompromisinis sprendinys. Aišku, kad **toks kompromisinis sprendinys negali būti pilnai objektyvus, negali nepriklausyti nuo asmenų, atsakingų už priimamą sprendinį, subjektyvios nuomonės.**

Reikia pripažinti, kad net sprendami tradicinius vienakriterijinius optimizavimo uždavinius, aprašytus 1.15. skyriuje, mes tų uždavinių matematinių modelių sudarymo stadijoje irgi dažnai susiduriame su **tikslų nepakankamo apibrėžtumo problema** ir būname priversti ją įveikti, išsirinkdami iš kelių efektyvumo rodiklių, galinčių pretenduoti į optimalumo rodiklio vaidmenį, tik kuri nors vieną ir priimdami jį nagrinėjamos sistemos optimalumo rodikliu. **Ne visada tas vieno optimalumo rodiklio pasirinkimas yra paprastas ir vienareikšmis.** Gana dažnai tas pasirinkimas priklauso nuo eilės aplinkybių, charakterizuojančių nagrinėjamą probleminę situaciją, ir gali būti labai subjektyvus.

Pavyzdžiui, net tokioje, atrodo, nesudėtingoje situacijoje, kada ką tik baigusiam universitetą jaunam specialistui tenka rinktis vieną iš dviejų galimų darboviečių, kai vienoje būsimas darbas gana įdomus, bet darbo užmokestis nėra toks didelis, kokio norėtusi, o antrojoje – darbo užmokestis šiek tiek didesnis, bet darbas – gerokai mažiau patrauklus, susiduriame su būsimo sprendimo neapibrėžtumu. Juk pilnai gali atsitikti (o realiaame gyvenime taip ir atsitinka), kad šioje situacijoje vieni jaunuoliai rinktųsi pirmąją, o kiti – antrąją darbovietę. O tai kaip tik ir reiškia, jog skirtingi jaunuoliai gali pasirinkti skirtingus optimalumo rodiklius. Ir tas pasirinkimas, priklausydamas nuo įvairių aplinkybių (jaunuolio vertybių skalės, jo polinkių ir gabumų, jo išsivaizduojamos ateities vizijos, jo šeimos sudėties bei jos materialinės padėties ir t. t.), kurios skirtingiems žmonėms gali būti skirtingos bei gali keistis laikui bėgant, negali būti visiems žmonėms ir visiems laikams vienareikšmiškai apibrėžtas.

Taigi, net sprendami taip vadinamus vienakriterijinius optimizavimo uždavinius, mes galime susidurti su nepakankamu probleminės situacijos apibrėžtumu, atsirandančiu dėl valdymo subjektų tikslų nepakankamo apibrėžtumo, ir galime būti priversti priimti ne tik objektyvius, bet ir subjektyvius sprendimus. Tačiau vienakriterijinio optimizavimo uždavinio sprendimo metu visa tai daroma pradinėje fazėje, dar ruošiantis optimizavimo uždavinio matematinio modelio sudarymui, o pats tokio vienakriterijinio optimizavimo uždavinio matematinio modelio sudarymas ir taikymas, uždavinio sprendimo algoritmo sudarymas ir taikymas, kai nevaldomųjų kintamųjų reikšmės yra determinuotos ir žinomos, vyksta jau vienareikšmiškai apibrėžtai. Todėl kartais ir susidaro įspūdis, kad sprendžiant taip vadinamus vienakriterijinius optimizavimo uždavinius, kai nevaldomųjų kintamųjų reikšmės laikomos determinuotomis ir yra mums duotos, neapibrėžtumo lyg ir nėra.

Vienakriterijiniuose optimizavimo uždaviniuose tradiciškai pripažįstamas tik tas neapibrėžtumas, kuris atsiranda dėl **nevaldomųjų kintamųjų nepakankamo apibrėžtumo.** Priklausomai nuo to neapibrėžtumo lygio bei nuo tikslo funkcijos priklausomybės nuo nevaldomųjų kintamųjų tiesiškumo ar netiesiškumo, o taip pat nuo to, ar nagrinėjamas optimizavimo uždavinys, laikui bėgant, bus sprendžiamas ir gautas sprendinys bus taikomas pakankamai daug kartų, ar tik vieną kartą, galimi skirtingi atvejai ir taikomi skirtingi optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmai.