

Be to, sistema P5 skiriasi nuo sistemos P4 dar ir tuo, kad į sistemą P5 A.Praioras neįtraukė sistemos P4 aksiomos $\vdash Fm\exists nFnp \supset \exists nFmFnp$ analogo. Jei sistemos P5 aksiomų sąrašą papildytume aksioma $\vdash Ut'\forall tUtp \Leftrightarrow \forall tUtp$, tai gautume laiko logikos sistemą, ekvivalenčią laiko logikos sistemai, kurią N. Rešeris (N. Rescher) pavadino SI.

Čia paminėtos laiko logikos sistemos (tame tarpe ir A. Praioro sistemos P4 ir P5 bei N. Rešerio sistemos SI ir SII) dar nesudaro **stratifikuotos laiko logikos sistemų sistemos**, kurioje, pradedant nuo kokios nors minimalios sistemos, papildant ją naujomis aksiomomis, galima būtų gauti vis stipresnes formalios laiko logikos sistemas, apibrėžiančias bei patikslinančias laiko sąvoką, kuriai būtų priskiriama vis daugiau savybių.

Paminėsiu vieną bandymą sudaryti tokią stratifikuotą laiko logikos sistemą.

E. Lemonas (E. J. Lemmon) pasiūlė **minimalią nemetrizuotą laiko logikos sistemą**, kurioje dar nėra jokių prielaidų apie laiko diskretumą ir tolydumą, jo ribotumą ar neribotumą ateityje ir praeityje, apie laiko tiesiškumą ar netiesiškumą, t. y. jo galimybę ar negalimybę „šakotis“ ir pan. Minimali laiko logikos sistema, kurią E. Lemonas pavadino sistema K_t ir kurią laiko minimalia taip pat ir jau minėtasis A. Praioras, gaunama, prijungus prie klasikinio teiginių skaičiavimo aksiomų papildomas aksiomas

$$1.1. ?\neg F\neg(p\supset q)\supset(Fp\supset Fq),$$

$$1.2. ?\neg P\neg(p\supset q)\supset(Pp\supset Pq),$$

$$2.1. ?F\neg P\neg p\supset p,$$

$$2.2. ?P\neg F\neg p\supset p$$

ir prie klasikinio teiginių skaičiavimo išvedimo taisyklių (superpozicijų ir atskyrimo) – papildomas taisyklės $\frac{?A}{?\neg F\neg A}$ ir $\frac{?A}{?\neg P\neg A}$.

Operatoriai G ir H šioje minimalioje logikoje apibrėžiami taip, kaip ir anksčiau: $Gp \stackrel{\text{def}}{=} \neg F\neg p$ ir $Hp \stackrel{\text{def}}{=} \neg P\neg p$. Prijungdami prie sistemos K_t aksiomų aksiomą $?FFp\supset Fp$, mes įvestume **laiko tranzityvumo** savybę, o prijungdami aksiomą $?Fp\supset FFp$ – įvestume teiginį, kad **laikas – tolydus**, nes aksioma $?Fp\supset FFp$ reiškia, jog tarp momento „dabar“ ir to ateities momento, kurį atitinka teiginys Fp , visada egzistuoja laiko momentas, kuris yra ateityje, lyginant su „dabar“, tačiau anksčiau negu tas momentas, kurį aprašo teiginys Fp . Kitaip tariant, tarp bet kurių dviejų laiko momentų $t_1 < t_2$ tuomet visada egzistuotų laiko momentas t' , tenkinantis sąlygas $t_1 < t' < t_2$. Tai reiškia, jog laiko tolydumą ateityje galima apibrėžti aksioma $?Fp\supset FFp$, o laiko tolydumą praeityje – aksioma $?Pp\supset PPp$.

Laiko nepabaigiamumo ateityje savybė gali būti įvesta į laiko logikos sistemą, papildant minimalios sistemos K_t aksiomas aksioma $?Fp\supset F\neg p$, o **laiko pradžios nebuvimas** – įsivedant aksiomą $?Pp\supset P\neg p$. Pirmoji aksioma reiškia, jog jei ateityje nebus p , tai tuomet ateityje bus $\neg p$, t. y., kiek toli mes benusikeltume į ateitį – visuomet kas nors bus: jei nebus „ p “, tai bus „ $\neg p$ “, ir niekad neatsitiks taip, kad nieko nebebūtų. Antroji aksioma analogiškai reiškia, kad niekad negalėjo būti taip, jog nieko nebuvo: jei nebuvo „ p “, tai buvo „ $\neg p$ “, t. y. laikas neturėjo pradžios.

Papildoma aksioma $?Fp\wedge Fq\supset F(p\wedge q)\vee F(p\wedge Fq)\vee F(q\wedge Fp)$ reikštų, kad laiko logikos sistemoje, turinčioje savo aksiomų sąrašą šią aksiomą, **laikas ateityje turi ir išlaiko tiesiškumo savybę**, t. y. negali „šakotis“, o analogiška aksioma $?Pp\wedge Pq\supset P(p\wedge q)\vee P(p\wedge Pq)\vee P(q\wedge Pp)$ reiškia **laiko tiesiškumą praeityje**.

Papildydami minimalios sistemos aksiomų sąrašą naujomis aksiomomis, mes papildytume jomis apibrėžiamą laiko sąvoką naujomis savybėmis, o analizuodami tokias aksiomatines sistemas, galėtume nagrinėti loginius ryšius tarp tų ar kitų laiko savybių.

Analogiškai gali būti konstruojama ir **stratifikuota metrizuoto laiko logikų sistema**.

Jos pagrindą galima gauti, prijungus prie klasikinio predikatų skaičiavimo (žiūr. 1.16.1.5.4. skyrelį) su jo aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis šias papildomas aksiomas

$$A.1.1. ?\neg Fn\neg(p\supset q)\supset(Fnp\supset Fnq),$$

$$A.1.2. ?\neg Pn\neg(p\supset q)\supset(Pnp\supset Pnq);$$

$$A.2.1. ?Fn\neg Pn\neg p\supset p,$$

$$A.2.2. ?Pn\neg Fn\neg p\supset p;$$

$$A.3.1. ?Fm(\exists n)Fnp\supset(\exists n)FmFnp,$$

$$A.3.2. ?Pm(\exists n)Pnp\supset(\exists n)PmPnp;$$

$$A.4.1. ?Fm(\exists n)Pnp\supset(\exists n)FmPnp,$$

A.4.2. $?Pm(\exists n)Fnp \supset (\exists n)PmFnp$;

A.5.1. $?F(m+n)p \supset FmFnp$,

A.5.2. $?P(m+n)p \supset PmPnp$

bei dvi papildomas išvedimo taisyklės R1. $\frac{?A}{? \neg Fn \neg A}$, R2. $\frac{?A}{? \neg Pn \neg A}$.

Jei priimama prielaida, kad ši metrizuota laiko logika apima ir realių skaičių teoriją su jos dėsniais, tai galima įrodyti, jog šioje laiko logikoje laikas turi būti tolydus.

Šią loginę sistemą galima išplėsti, prijungiant prie jos aksiomų aksiomą $?FmFnp \supset F(m+n)p$, kurios nemetrizuotas analogas yra aksioma $?FFp \supset Fp$. Šios aksiomos išreiškia santykio „anksčiau – vėliau“ tranzityvumą.

Taip išplėstoje metrizuotoje laiko logikoje išvedama ir teorema $?PmPnp \supset P(m+n)p$.

Norėdami įvesti prielaidą apie laiko nepabaigiamumą ateityje, čia aprašomąją metrizuotos laiko logikos sistemos išvedimo aparatą turėtume papildyti aksiomą $? \neg Fnp \supset Fn \neg p$. Taip išplėstoje sistemoje galėtume išvesti tos aksiomos nemetrizuotą analogą – teoremą $? \neg Fp \supset F \neg p$, tačiau negalėtume išvesti formulės, teigiančios laiko pradžios nebuvimą. Priimdami tokią prielaidą, privalėtume įsivesti atitinkamą papildomą aksiomą $? \neg Pnp \supset Pn \neg p$. Taigi, kaip tai išplaukia iš aksiomatinių sistemų analizės, **laiko pradžios ir pabaigos buvimas ar nebuvimas – yra nepriklausomos galimybės.**

A. Praioras turimą aksiomų sistemą papildo dar ir aksioma $?Fn \neg p \supset \neg Fnp$, kuri, jo manymu, reiškia laiko nesišakojimą (jo tiesiškumą) ateityje. Įsivedus tokia aksiomą, galima išvesti teoremas:

$?Fnp \supset \neg Fn \neg p$,

$?PnFnp \supset p$,

$?PnF(n+m)p \supset Fmp$,

$?PFp \supset (p \vee Pp \vee Fp)$,

$?Fnp \supset (Fnq \supset Fn(p \wedge q))$,

$?(Fp \wedge Fq) \supset [F(p \wedge q) \vee F(p \wedge Fq) \vee F(q \wedge Fp)]$.

Šios teoremos yra absoliučiai teisingos tik tada, jei laikas „nesišakoja“, t. y., kai negali egzistuoti „kelios skirtingos nepriklausomos ateitys“, o iš vienareikšmiškai apibrėžtų priežasčių, esančių dabar, gali išplaukti tik „vienintelė ateitis“. Jei laikas galėtų „šakotis“, šios teoremos jau nebebūtų absoliučiai teisingos. Rekomenduočiau skaitytojui paanalizuoti tokias situacijas, nes tai padėtų jam suprasti, kam reikalingas aksiomatinės laiko sąvokos nagrinėjimas ir ką jis duoda.

Reikėtų pažymėti, kad anksčiau nagrinėto laiko logikos sistemos P4 ir P5 nėra stratifikuotos, nes jose jungiami teiginiai, besiremiantys įvairiomis nestratifikuotomis prielaidomis, turinčiomis skirtingas prigimtis. Pavyzdžiui, taisyklė $\frac{?A}{?FnA}$ ir aksioma $? \neg Fnp \supset Fn \neg p$ remiasi prielaida, jog laikas

ateityje nesibaigia, aksioma $?Fn \neg p \supset \neg Fnp$ remiasi prielaida apie ateities vienatiškumą („laiko nesišakojimą“), o aksioma $?FmFnp \supset F(m+n)p$ – prielaida apie santykio „anksčiau – vėliau“ tranzityvumą.

Rekomenduočiau skaitytojui grįžti prie čia aprašytų laiko logikos sistemų pavyzdžių ir paanalizuoti, kokiomis prielaidomis remiasi tų sistemų aksiomos ir išvedimo taisyklės.

Reikia taip pat pažymėti, kad čia pateiktas stratifikuotos laiko logikos sistemos pavyzdys, kuris buvo gautas plečiant minimalią Lemono sistemą, nėra vienintelis. Gali egzistuoti ir daugiau stratifikuotų laiko logikos sistemų. Tačiau mes čia jų jau nebenagrinėsime, kaip nebenagrinėsime ir kitų laiko logikos sistemų, besiremiančių skirtingomis operatorių F, P, G ir H interpretacijomis, bei sistemų, kuriose naudojamos ir kitokiais laiko logikos operatoriais (pavyzdžiui, fon Raito operatorium „ir po to“ bei pan.). Sistemotyros kurso klausytojams pakaks tų žinių apie laiko logikas, kurios buvo čia ką tik išdėstytos, o norintys gilintis į šią sritį gali pasinaudoti specialia literatūra, nurodyta gana išsamiaame literatūros sąrašė, pateiktame knygoje [296] (žiūr. toje knygoje A. A. Ivino straipsnį, skirtą laiko logikai).

Apie laiko logikos taikymus kompiuterinių programų verifikavimui galima pasiskaityti knygoje [297]. Tam tikslui geriau tinka sekveninės laiko logikos sistemos, nes tokių sistemų taikymas gali būti automatizuotas. Šioje knygoje skaitytojas ras ir naujesnės literatūros, skirtos laiko ir kitoms neklasikinėms logikoms, sąrašą.

Pereisiu prie **veiksmų logikos** apžvalgos. Veiksmų logikai būdinga tai, kad, **vykstant veiksmams, gali keistis nagrinėjamoji situacija**, į ką būtina atsižvelgti, darant tas ar kitas logines išvadas, priimant sprendimus apie darytinus naujus veiksmus. Tai reiškia, jog **veiksmų logikai būdingas grįžtamojo (atbulinio) ryšio buvimas**. Tokius ryšius galima aprašyti loginėmis funkcijomis, kurias

D. A. Pospelovas (D. A. Pospelov) savo knygoje [126] pavadino **rekurentinėmis Bulio funkcijomis (RBF)**.

RBF D. A. Pospelovas apibrėžia kaip loginę laiko funkciją $y(t)=f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_1(t-1), x_2(t-1), \dots, x_n(t-1), x_1(t-2), \dots, x_n(t-r+1), x_1(t-r), x_2(t-r), \dots, x_n(t-r), y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-k))$, priklausančią nuo loginių argumentų (loginės schemos įėjimų) $x_1, x_2, \dots, x_n$ dabartiniu momentu (dabartiniame takte) t ir nuo tų argumentų reikšmių prieš tai buvusiose taktuose nuo $t-1$ iki $t-r$, kur $r>0$ – koks tai sveikas teigiamas skaičius, o taip pat nuo pačios funkcijos reikšmių $y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-k)$ (t. y. nuo loginės schemos išėjimų) prieš tai buvusiuose taktuose $t-1, t-2, \dots, t-k$, kur $k>0$ – teigiamas sveikas skaičius, o kintamasis t , vaizduojantis diskrečiai besikeičiantį laiką, prabėga sveikų reikšmių seką: $0, 1, 2, \dots$

Nors, kaip matyti iš šio apibrėžimo, funkcija y apibrėžiama lyg ir rekursyviai (t. y. per pačios savęs reikšmes), tačiau ją D. A. Pospelovas pavadino rekurentine todėl, kad jos reikšmės (išėjimo trajektorijos $\bar{y}(t)$ taškų koordinatų reikšmės) gali būti apskaičiuotos rekurentiškai: žinant įėjimo trajektorijas ir ankstesnes išėjimo $y(t)$ reikšmes taktuose $t \leq 0$, galima, naudojantis rekurentišku funkcijos $y(t)$ apibrėžimu, apskaičiuoti tolesnes tos funkcijos $y(t)$ reikšmes.

Pavyzdžiui, jei RBF apibrėžiama lygybe $y(t)=x(t)y(t-1) \vee x(t-1)$, kur $y(0)=1$, tai, esant tokiai įėjimo trajektorijai $\{x(t)\}=0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; \dots$, kai $t=0, 1, 2, \dots$, gauname, jog

$$\begin{aligned} y(1) &= x(1)y(0) \vee x(0) = 0 \wedge 1 \vee 0 = 0, \\ y(2) &= x(2)y(1) \vee x(1) = 0 \wedge 0 \vee 0 = 0, \\ y(3) &= x(3)y(2) \vee x(2) = 1 \wedge 0 \vee 0 = 0, \\ y(4) &= x(4)y(3) \vee x(3) = 0 \wedge 0 \vee 1 = 1, \\ y(5) &= x(5)y(4) \vee x(4) = 0 \wedge 1 \vee 0 = 0, \\ y(6) &= x(6)y(5) \vee x(5) = 0 \wedge 0 \vee 0 = 0, \\ y(7) &= x(7)y(6) \vee x(6) = 1 \wedge 0 \vee 0 = 0, \\ y(8) &= x(8)y(7) \vee x(7) = 0 \wedge 0 \vee 1 = 1, \\ y(9) &= x(9)y(8) \vee x(8) = 0 \wedge 1 \vee 0 = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Gana dažnai tenka nagrinėti logines schemas, su grįžtamaisiais ryšiais, turinčiais ne vieną, o kelis išėjimus, t. y. nagrinėti RBF sistemas.

$$\text{Tokios sistemos pavyzdžiu gali būti sistema } \begin{cases} y_1(t) = x(t) \vee y_2(t-1), \\ y_2(t) = \bar{x}(t)y_2(t-1) \vee y_1(t-2), \\ y_3(t) = y_1(t-1)\bar{y}_3(t-1) \vee y_2(t-1), \text{ esant} \end{cases}$$

pradinėms sąlygoms

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 0, \text{ kai } t \leq 0, \\ y_2(t) &= 0, \text{ kai } t \leq 0, \\ y_3(t) &= 1, \text{ kai } t \leq 0 \end{aligned}$$

ir įėjimo trajektorijai $\{x(t)\}=0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; \dots$, kai $t=0; 1; 2; 3; 4; \dots$

Apskaičiuosime sistemas išėjimus momentais $t=1; 2; 3; \dots$:

$$\begin{aligned} y_1(1) &= x(1) \vee y_2(0) = 1 \vee 0 = 1; \\ y_2(1) &= \bar{x}(1)y_2(0) \vee y_1(-1) = \bar{1} \wedge 0 \vee 0 = 0; \\ y_3(1) &= y_1(0)\bar{y}_3(0) \vee y_2(0) = 0 \wedge \bar{1} \vee 0 = 0; \\ y_1(2) &= x(2) \vee y_2(1) = 0 \vee 0 = 0; \\ y_2(2) &= \bar{x}(2)y_2(1) \vee y_1(0) = \bar{0} \wedge 0 \vee 1 = 1; \\ y_3(2) &= y_1(1)\bar{y}_3(1) \vee y_2(1) = 1 \wedge \bar{0} \vee 0 = 1; \\ y_1(3) &= x(3) \vee y_2(2) = 1 \vee 1 = 1; \\ y_2(3) &= \bar{x}(3)y_2(2) \vee y_1(1) = \bar{1} \wedge 1 \vee 1 = 1; \\ y_3(3) &= y_1(2)\bar{y}_3(2) \vee y_2(2) = 0 \wedge \bar{1} \vee 1 = 1; \\ &\dots \end{aligned}$$

Tokių sistemų realizavimui loginėmis schemomis reikalingi ne tik invertoriai, disjunktoriai ir konjunktoriai, bet ir **vėlinimo blokai**, kurie, būdami įjungti į

$$\begin{cases} y_1(t+1) = \varphi_1(y_1(t), y_2(t), ..., y_s(t)), \\ y_2(t+1) = \varphi_2(y_1(t), y_2(t), ..., y_s(t)), \\ \\ y_s(t+1) = \varphi_s(y_1(t), y_2(t), ..., y_s(t)) \end{cases}$$

Automato vidinės būsenos kitimą galima aprašyti ir lentele, išreiškiančia automato naujų išėjimų $y_1(t+1)$, $y_2(t+2)$, ..., $y_s(t+1)$ (o tuo pačiu – ir automato naujų būsenų) priklausomybę nuo automato senų išėjimų $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_s(t)$ (t. y. nuo automato senų būsenų).

354. lentelė

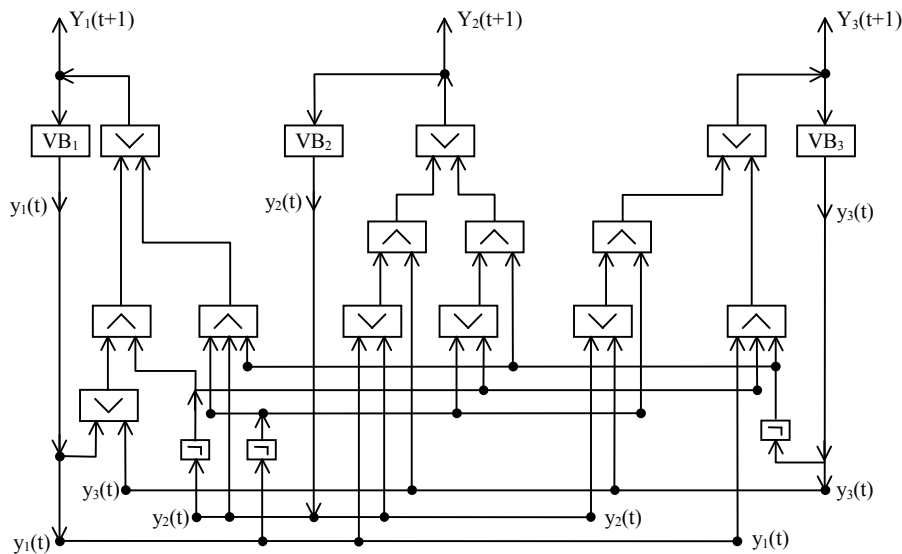
$y_1(t)$	$y_2(t)$	$y_3(t)$	$y_1(t+1)$	$y_2(t+1)$	$y_3(t+1)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

Vėlinimo blokai gali būti konstruojami įvairiai, pasinaudojant įvairiais fiziniais reiškiniiais, dėl jų inercijos trunkančiais tam tikrą fiksuotą laiką. Egzistuoja **indukcinės, akustinės, magnetostrikcinės ir pan. užlaikymo (vėlinimo) linijos**. Vėlinimo blokais gali būti ir **elektromagnetinės bei elektroninės relės** (taip vadinamos kiprelės, kuriose, keisdami varžą R ir talpą C , galime reguliuoti užlaikymo (uždelsimo, vėlinimo) trukmę $\tau = kRC$, kur k – proporcingumo koeficientas). Apie vėlinimo blokus jau esame kalbėję 1.11. skyriuje ir su jais dar susidursime antrojoje šios mokymo priemonės dalyje, kurdami imitacinius modelius, imituojančius tų ar kitų modeliuojamų procesų trukmę. Čia nagrinėjamo baigtinio automato atveju mus domins ne tiek klausimas, kaip tokie blokai konstruojami, kiek klausimas, kaip tokius blokus reikia įjungti į loginę schemą, kad gautume baigtinio automato schemą.

Šioje schemoje žymenimis VB_1 , VB_2 ir VB_3 pažymėti vėlinimo blokai, užlaikantys schemas išėjimo signalus vienu taktu. Tuo momentu, kai bloko VB_1 įėjimu tampa $y_1(t+1)$, jo išėjimas yra lygus vienu taktu prieš tai buvusiam įėjimui, t. y. $y_1(t)$. Analogiškai veikia ir kiti du vėlinimo blokai. Iš vėlinimo blokų išėję signalai, vaizduojantys $y_1(t)$, $y_2(t)$ ir $y_3(t)$ reikšmes, modeliuojamo takto $t+1$ metu pereję loginės schemos elementus, tampa signalais $y_1(t+1)$, $y_2(t+1)$, $y_3(t+1)$ ir patenka į vėlinimo blokų įėjimus, kad, uždelsę juose viena taktą, momentu $t+2$ išeitų iš jų ir patektų į loginę schemą kaip funkcijų

$y_1(t+2)=\varphi_1(y_1(t+1), y_2(t+1), y_3(t+1))$, $y_2(t+2)=\varphi_2(y_1(t+1), y_2(t+1), y_3(t+1))$ ir $y_3(t+2)=\varphi_3(y_1(t+1), y_2(t+1), y_3(t+1))$ argumentai.

Rekomenduodčiau skaitytojui išsiginėti į 405 pav. pavaizduotą schemą ir gerai išsiaiškinti, kaip ji veikia.



405 pav.

Būtų naudinga, jei skaitytojas, analizuodamas schemos veikimą, pabandytų sudaryti automato funkcionavimo (jo perėjimų iš vienos būsenos į kitą) portretą, analogišką tiems portretams, kurie buvo sudaryti 1.3. skyriuje ten nagrinėtiems automatams (žiūr. 15-jį ir 16-jį paveikslėlius).

Pažymėjęs automato būseną $\bar{z}(t)$ koordinatų $y_3(t)$, $y_2(t)$, $y_1(t)$ reikšmėmis, skaitytojas galės nesunkiai įsitikinti, jog šio automato fazinė trajektorija priklauso nuo pradinės būsenos ir anksčiau ar vėliau tampa periodine. Jei momentu $t=0$ automato pradinė būsena būtų $\bar{z}(0)=(y_3(0), y_2(0), y_1(0))=(1; 0; 0)$, tai iki momento $t=1$ automatas pereitų į būseną $\bar{z}(1)=(y_3(1), y_2(1), y_1(1))=(1; 0; 1)$, po to – į būseną $\bar{z}(2)=(0; 1; 1)$, dar po to – į būseną $\bar{z}(3)=(0; 0; 0)$, po to – į būseną $\bar{z}(4)=(0; 1; 0)$, po jos – į būseną $\bar{z}(5)=(1; 1; 1)$, po ko momentu $t=6$ vėl grįžtų į būseną $(0; 1; 0)$ ir toliau tęstų ciklą $(0; 1; 0) \Leftrightarrow (1; 1; 1)$.

Į tą patį nepabaigiamą ciklą $(0; 1; 0) \Leftrightarrow (1; 1; 1)$ automatas patektų iš bet kurios iš jau išvardintų būsenų $((0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1))$, o taip pat ir iš būsenos $\bar{z}(t)=(y_3(t), y_2(t), y_1(t))=(0; 0; 1)$, tačiau iš būsenos $\bar{z}(0)=(z_3(0), z_2(0), z_1(0))=(1; 1; 0)$ mūsų nagrinėjamas autonominis automatas į ciklą $(0; 1; 0) \Leftrightarrow (1; 1; 1)$ jau nebepatektų: jis iškart pakliūtų į išsiginusį ciklą $(1; 1; 0) \Leftrightarrow (1; 1; 0)$, t. y. visą laiką būtų vienoje ir toje pačioje stabilioje būsenoje. Bet kuriuo atveju mūsų nagrinėjamas automatas būsenose $(0; 0; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 0; 1)$ pats savaime galėtų pabuvoti ne daugiau negu vieną kartą, o gana dažnai – ir nė vieno karto. Jei pradinė šio automato būsena būtų parenkama atsitiktinai su vienodomis tikimybėmis, lygiomis $\frac{1}{8}$, tai po kai kurio pakankamai ilgo laiko mes tą automatą rastume arba būsenoje $(1; 1; 0)$ su tikimybe, lygia $\frac{1}{8}$, arba vienoje iš būsenų $(0; 1; 0)$ ir $(1; 1; 1)$ su vienodomis tikimybėmis, lygiomis $\frac{7}{16}$ (ir tos dvi būsenos pastoviai kaitaliotųsi, dėl ko ir susidarytų periodinis procesas).

Autonominius automatus, panašius į ką tik išnagrinėtąjį, 1.4.6. skyrelyje, mes buvome pavadinę **taisyklingais (arba Muro) automatais**. Nesunku įrodyti, kad tokių automatų funkcionavimą visada galima aprašyti RBF, priklausančiomis tik nuo savo pačių ankstesnių reikšmių ir kad tokių automatų funkcionavimas visuomet yra periodinis, priklausantis nuo pradinės būsenos ir nuo RBF sistemos.

Pasitelkę RBF, priklausančias ne tik nuo pačių savęs, bet ir nuo išorinių įėjimų, mes galėtume sudaryti schemų, vadinamų **sekvencinėmis mašinomis bei Milio**

automatais (žiūr. 1.4.6. skyrelį), aprašymus. Rekomenduočiau skaitytojui, naudojantis tokiomis RBF, aprašyti dvejetainių triggerių, turinčių vieną („skaitiklinį“), du („nulinį“ ir „vienetinį“) ir tris („nulinį“, „skaitiklinį“ ir „vienetinį“) įėjimus, funkcionavimą. Jei, atlikdamas šią užduotį, skaitytojas susidurtų su kokiais nors sunkumais, rekomenduočiau jam pastudijuoti gana aiškiai ir paprastai parašytas knygas [50, 101, 102 ir 126], nagrinėjančias **taisyklingų baigtinių automatų ir sekvencinių mašinų analizės ir sintezės klausimus**. Tokių knygų studijos padėtų jam suvokti, kaip konstruojamos automatinės sistemos ir robotai, sugebantys orientuotis ir veikti besikeičiančioje aplinkoje, kai aplinka gali keistis ne tik nuo išorės veiksnių, bet ir pačių robotų veiklos.

Tai taip pat padėtų jam suprasti, kaip sprendžiamos problemos, su kuriomis susiduriama konstruojant **aksiomatinės veiksmų logikos sistemas**. O tos problemos iškyla todėl, kad tokių sistemų pagrindą sudarančios **aksiomos ir išvedimo taisyklės jau nėra pastovios kaip klasikiniuose teiginių bei predikatų skaičiavimuose, o gali keistis priklausomai nuo nagrinėjamoje sistemoje bei jos aplinkoje įvykusių pokyčių, dalis kurių galėjo būti iššaukti nagrinėjamos sistemos subjektų įvykdytų veiksmų**. Todėl 1.15. skyriaus pradžioje ir 1.16.1.3.5. bei 1.16.1.2.4. skyreliuose minėtieji **situaciniai, normatyviniai ir motyvaciniai modeliai veiksmų logikos sistemose būtų jau nebūtinai pastovūs: jie galėtų keistis įvykdytų veiksmų pasekoje**. Todėl būtų būtina atsižvelgti į egzistuojančius grįžtamuosius ryšius, juos atitinkamai matematiškai aprašyti ir išreikšti (kad ir naudojantis jau minėtomis RBF bei schemomis, vadinamomis **automatais su atmintimi**, sugebančiomis fiksuoti bei kaupti patirtį ir iš jos mokytis).

Pavyzdžiui, konstruojant robotus ir programuojant jų veiksmus, tenka atsižvelgti į tai, kad robotas, sutikęs savo kelyje kliūtį, sugebėtų nuspręsti, ar reikia ją apeiti, ar pašalinti, ar atidaryti uždarytas duris, ar reikia sienoje gręžti skylę, pasidarant reikalingą išėjimą ir tokiu būdu pakeičiant esamą situaciją.

Veiksmų logikai būdingu matematiniu aparatu tenka naudotis ir sudarant kompiuterinius žaidimus, kuomet tenka imituoti įvairius virtualios aplinkos pasikeitimus, atsirandančius žaidimo dalyvių įvykdytų bei vykdomų veiksmų pasekoje.

Pavyzdžiui, lėktuvo skrydžio simulatoriuose bei kompiuteriniuose žaidimuose, imituojančiuose lėktuvo viražus, reikia sugebėti pakankamai greitai ir pakankamai tiksliai apskaičiuoti, kaip keičiasi vaizdas, matomas iš lėktuvo, kokios to vaizdo dalys pasidaro matomos, kokie nauji vaizdai išnyra, kaip keičiasi matymo kampai, šešėlių ilgiai ir t. t. ir t. t. Kad visa tai nėra taip jau paprasta, tuo nesunkiai įsitikintume, pabandę visus tuos pasikeitimus numatyti, apskaičiuoti jų charakteristikas ir sudaryti juos imituojančią programą.

Veiksmų logikoje kartais susidaro situacijos, kada net elementarios klasikinio teiginių skaičiavimo aksiomos, tokios kaip $p \wedge q \rightarrow p$, pasirodo, jau esančios nebegaliojančiomis.

Analogiškos situacijos gali susidaryti ir **mikropasaulio logikoje**, kurioje galioja kvantinės mechanikos dėsniai ir gali negalioji kai kurie klasikinės mechanikos dėsniai (kaip, pavyzdžiui, reliatyvistinėje mechanikoje, esant dideliems greičiams, jau nebetinka tos paprastos greičių sudėties taisyklės, kurios taikomos klasikinėje mechanikoje, o tenka naudotis jau žymiai sudėtingesnėmis reliatyvistinėmis formulėmis).

Visa tai patvirtina mintį, išsakytą šio skyrelio pradžioje, kad neklasikinės logikos atstovų jau nebestebina ta aplinkybė, jog **skirtingose srityse, kuriose galioja skirtingi dėsniai, gali būti taikomos skirtingos loginės sistemos, besiskiriančios viena nuo kitos savo aksiomatika**. Juk dabar ir matematikų bei fizikų jau nebestebina

ta aplinkybė, kad skirtingose erdvėse, besiskiriančiomis savo charakteristikomis, gali egzistuoti skirtingos geometrijos.

Tačiau, iš kitos pusės, **ši aplinkybė dar nereikia, jog skirtingos loginės sistemos (ir skirtingos geometrijos) negali turėti bendrų bruožų ir negali tapti sudėtinėmis kokios nors didesnės sistemos dalimis, kad sistemotyro mokslo atstovai negali ir neturi dėti pastangų tokių sistematizuojančių sistemų paieškoms bei konstravimui.** Kodėl, pavyzdžiui, negalėtų egzistuoti geometrinių erdvių teorija, apibendrinanti įvairias geometrijas, arba, pavyzdžiui, kodėl negalėtų būti sukurta tokia loginių sistemų teorija, kurioje įvairios loginės sistemos (su kurių dalimi mes jau susipažinome ir kurių dar daugiau liko neapžvelgta) sudarytų antrojo tipo sistemą? **Kartu su diferenciacijos procesu logikoje, kaip ir visuose kituose moksluose, turi vykti (ir vyksta) taip pat ir integracijos procesas.**

1.16.1.5.7. Modalinės logikos

Modalinės logikos skiriasi nuo beveik visų iki šiol nagrinėtų logikų, dažnai vadinamų **asertorinėmis**, tuo, kad modalinėse logikose **įvedami papildomi operatoriai, išreiškiantys modalumus: būtinumą, galimumą, negalimumą ir pan.**

Modalines logikas buvo galima nagrinėti ir skyrelyje, skirtame neklasikinėms logikoms, nes intensyvus modalinės logikos dėsnių aprašymo formalizavimas ir formalizuotų modalinių loginių sistemų konstravimas vyko kaip tik tuo pačiu laikotarpiu, kai formavosi neklasikinės logikos. Be to **modalinės logikos turi tą bendrą bruožą su neklasikinėmis logikomis, kad yra daugiareikšmės:** jos gali būti interpretuojamos modalinių teiginių loginių reikšmių lentelėmis, kuriose teiginiams priskiriamos daugiau negu dvi loginės reikšmės – trys, keturios ir daugiau, gana dažnai – net be galo daug loginių reikšmių.

Tačiau modalinių logikų aprašymui šioje mokymo priemonėje išskirtas atskiras skyrelis. Taip buvo padaryta dėl dviejų priežasčių.

Pirmoji priežastis – istorinė. **Modalinės logikos šaknys, galima sakyti, beveik tokios pat senos kaip ir klasikinės logikos.** Modalumais domėjosi jau Aristotelis, kuris, nagrinėdamas logikos problemas, ne taip jau retai naudojosi sąvokomis „būtina“ ir „gali būti“, o taip pat išreikštinai formulavo bei neišreikštinai vartojo kai kurias modalinės logikos išvedimo bei priešpastatymo (neigimo) taisykles. Aristotelis net kūrė silogistiką su modaliniais universaliais ir daliniais teiginiais.

Tiesa, sąvoką „gali būti“ Aristotelis vartojo ne kokia nors viena griežtai apibrėžta prasme, o suteikdavo įvairiose situacijose jai įvairias prasmes, kurios intuityviai šiek tiek skyrėsi. Bet juk ir dabar, šiuolaikinėse modalinėse logikose, modalumus „gali būti“ ir „būtina“ kai kurie logikai interpretuoja ne visai vienodai. Dėl to ir atsirado tiek daug skirtingų modalinės logikos sistemų. Vienas jų yra klasikinės, kitos – neklasikinės.

Modaline logika ir jos problemomis domėjosi ne tik Aristotelis, bet ir jo pasekėjai, pavyzdžiui, Teofrastas ir Eudemas, kurie skirtingai nuo Aristotelio, nagrinėjusio **faktų modalumą („modalis de re“)**, nagrinėjo **kalbos modalumus („modalis de dicto“)**. Modalinės logikos raidos istorijoje pažymėtinas ir 1.16.1.5.6. skyrelyje jau minėtasis Diodoras bei eilė viduramžių mokslininkų.

Taigi, **modalinės logikos istorinės šaknys yra žymiai senesnės negu neklasikinių logikų ir todėl modalinės logikos raidos istoriją sutapatinti su neklasikinių logikų raidos istorija būtų neteisinga.**

Antroji priežastis – **modalinių logikų specifika, išskirianti jas į atskirą gana savarankišką logikos mokslo sritį, kurią galima būtų interpretuoti kaip klasikinės logikos (ir kai kurių neklasikinių logikų, pavyzdžiui, intuicionistinės) plėtinį.** Tokios specifinės srities nagrinėjimui buvo tikslinga išskirti atskirą skyrelį, kas ir buvo padaryta, nors **šiuolaikinę matematinę modalinę logiką tikrai būtų galima priskirti neklasikinių logikų aibei.** Kai kurie logikai laikosi kaip tik tokios nuomonės.

Modalinę logiką galima nagrinėti **tradicine – taip vadinamąja „siaurąja“ – prasme**, kuomet apsiribojama modaliniais operatoriais „būtina“ („h“, arba „N“ nuo lotyniško žodžio „necesse“) ir „gali būti“ („◇“, arba „P“ nuo lotyniško žodžio „possible“, t. y. „galima“) bei jų neigimais ir jų kompozicijomis („h h“, „◇ h ◇“, „~ h ◇~ h“ ir pan.), ir taip vadinamąja **„plačiąja prasme“**, kuomet nagrinėjami ne tik ką tik minėtieji aletiniai, bet ir deontiniai, episteminiai, aksiologiniai ir kiti modalumai.

Neklasikinių logikų skyrelyje mūsų nagrinėtąsias **laiko logikas irgi galima priskirti prie modalinių logikų „plačiaja prasme“**, nes operatorius „F“ ir „P“ galima laikyti modalumo operatoriais.

Istoriškai pradžioje susiformavo modalinė logika „siaurąja“ prasme – **aletinė modalinė logika**. Todėl modalinių logikų nagrinėjimą pradėsime nuo jos ir tik skyrelio pabaigoje pereisime prie modalinės logikos „plačiaja“ prasme.

Aletinius modalumus „gali būti“ ir „būtina“ bei jų neiginius ir iteracijas bei kitas kompozicijas galima nagrinėti įvairiais aspektais, kadangi tie modalumai bei jų kompozicijos gali turėti daug šiek tiek skirtingų interpretacijų.

Visų pirma, galima išskirti taip vadinamus **loginius ir „fizinius“ (ontologinius) modalumus**. Tokia aletinių modalumų klasifikacija remiasi dar Leibnico įvestu teisingų teiginių skirstymu į **fakto ir logikos tiesas**. Pirmųjų teisingumas nustatomas eksperimentaliai nagrinėjant mus supantį pasaulį, antrieji yra arba logikos bei matematikos dėsniai, kuriuos **Kantas laikė teisingais apriori**, arba iš tų dėsnių deduktyviai išplaukiantys teiginiai. Loginis modalumas „būtina“ reiškia „logiškai įrodoma“, o „gali būti“ – „logiškai nepaneigiama“. Fizinis modalumas „būtina“ vartojamas tada, kai kalbama apie gamtos dėsnius, o fizinis modalumas „gali būti“ priskiriamas teiginiams, kurie teigia tai, kas fiziškai būti gali, tačiau ne visada būtinai įvyksta.

Leibnicas laikė būtinais tik logiškai būtinus teiginius, jų neiginius – negalimais, o visus kitus teiginius – tik galimais. Panašios nuomonės laikosi ir kai kurie šių laikų logikai, priklausantys filosofinei neopozityvizmo kryptčiai. Tačiau dauguma logikų yra šiek tiek kitokios nuomonės ir **skiria dvi būtinumo ir galimybės rūšis – loginę ir fizinę**. Apie loginę ir fizinę galimybes ir negalimybę mes jau kalbėjome 1.15.3. skyrelyje.

Kartais modalumai „būtina“ ir „gali būti“, vartojami dar ir taip vadinamąją **deontinę (normatyvinę) prasme**. Tuomet modalumas „būtina“ reiškia „privalu“, o modalumas „gali būti“ suprantamas kaip „leidžiama“, t. y. nedraudžiama juridinėmis, moralinėmis ir kitokiomis normomis.

Laiko logikos interpretacijoje modalumas „būtina“ suprantamas kaip požymis to, kas būtinai būna visada, o modalumas „gali būti“ – kaip tai, kas būna kai kada, bet ne būtinai būna visada.

Reikėtų skirti ir jau minėtuosius „de re“ ir „de dicto“ modalumus, kurie dažnai labai artimi savo prasme. **Kai modalumo operatorius vartojamas „de dicto“, kaip tai daroma šiuolaikinėje modalinėje logikoje, tai jis priskiriamas visam teiginiui (veikia visą teiginį), o kai modalumas vartojamas prasme „de re“, tai jis priskiriamas tik teiginio predikatui**. Šiuo atžvilgiu modalumų „de dicto“ ir „de re“ vartojimas yra panašus į išorinio ir vidinio neiginių vartojimą. Modalumų vartojimą „de dicto“ ir „de re“ prasme pailiustruosiu fon Raito pavyzdžiu. Teiginys „Gali būti, kad Džonsas negyvas“ reiškia modalumą pavartotą „de dicto“ prasme, o teiginys „Džonsas gali būti negyvas“ – modalumą „de re“. Daugelis logikų laiko, kad šie teiginiai ekvivalentūs. Tačiau Petro Ispano, jau minėto 1.16.1.5.5.2. skyrelyje, pavyzdys „Sėdintis žmogus gali vaikščioti“ rodo, jog modalumus „de dicto“ ir „de re“ vis dėlto reikėtų skirti. Juk jei šiame sakinyje galimybės modalumą vartoti „de dicto“ ir priskirti visam teiginiui, tai šis teiginys bus neteisingas, nes sėdint vaikščioti neįmanoma. Tačiau jei šį modalumą interpretuoti „de re“ ir priskirti teiginio predikatui, tai Petro Ispano teiginys tampa teisingu, nes sėdinčiam žmogui išlieka galimybė vaikščioti.

Atsižvelgiant į tai, ar teiginio teisingumo būtinybė bei galimybė priklauso ar nepriklauso nuo kitų teiginių teisingumo ar neteisingumo, skiriami santykiniai (sąlyginiai) ir absoliutūs modalumai.

Absoliutūs modalumai priskiriami teiginiams, kurie yra būtinai teisingi arba gali būti teisingi nepriklausomai nuo kitų teiginių. Pavyzdžiui, logikos ir matematikos dėsniai yra būtinai teisingi absoliučiaja prasme.

Tačiau pasitaiko atvejų, kuomet kokio nors teiginio p teisingumo būtinumas ar galimumas priklauso nuo kito teiginio q teisingumo ar neteisingumo. Tokie modalumai vadinami **santykiniais (reliaciniais, sąlyginiais)** ir žymimi $h(p \setminus q)$ bei $\Diamond(p \setminus q)$, kai tuo tarpu absoliutūs modaliniai teiginiai žymimi $h p$ bei $\Diamond q$.

Santykinės modalinės funkcijas nagrinėjo jau minėtasis fon Raitas (von Wright G.H.). Mes čia jų nenagrinėsime, apsiribodami tik absoliučiais modalumais, todėl juos nagrinėdami trumpumo dėlei nevartosime žodžio „absolutus“.

Modalinių logikų „siaurąją“ prasmę istorijoje priimta išskirti tris etapus: 1) Antikos ir viduramžių, 2) modalinės logikos formalizavimo ir formalių modalinių sistemų konstravimo, 3) aletinių modalinių sistemų interpretavimo, jų semantinės analizės ir sistematizavimo etapą, sutampantį su šiuolaikiniu modalinės logikos „plačiąją“ prasmę sistemų konstravimo, analizės ir sistematizavimo etapu.

Pirmajam etapui, kurio pradžią žymi jau minėtieji Aristotelio bei stoikų darbai, yra būdinga, kad jo metu formavosi modalinės logikos pagrindinės sąvokos ir vyko neformalus jų savybių nagrinėjimas.

Antikos logikai ir scholastai ne tik įvedė ir naudojo modalumus „būtina“, „galima“, „nebūtina“ ir „negalima“ (Aristotelis – „de re“, o Teofrastas ir Eudemas – „de dicto“ prasme), bet ir suformulavo kai kuriuos modalinės logikos dėsnius (pavyzdžiui, tokius, kuriuos, naudodamiesi dabartine simbolika, užrašytume formulėmis: $h A \rightarrow A$, $A \rightarrow \Diamond A$, $h A \leftrightarrow \sim \Diamond \sim A$, $\Diamond A \leftrightarrow \sim h \sim A$).

XIII a. viduramžių logikas U. Šervudas nagrinėjo šešias modalumų rūšis: teisinga, neteisinga, galima, negalima, atsitiktina, būtina. Vėlesnių laikų logikai (U. Okamas, Ž. Buridas) pagrindinių modalumų skaičių sumažino iki trijų, suveddami juos į modalumus „būtina“ („neišvengiama“), „galima“ („gali būti“) ir „negalima“ („neįmanoma“).

XVIII a. Žymus filosofas E. Kantas (1724–1804), gyvenęs ir dirbęs Karaliaučiuje, visus teiginius pagal jų modalumo požymius suskirstė į **asertorinius** (t. y., tuos, kuriuos dabar nagrinėja klasikinės ir neklasikinės nemodalinės logikos), **apodiktinius** (t. y. teiginius, turinčius būtinumo požymį) ir **problematicus** (t. y. teiginius, turinčius galimumo modalumą).

Tačiau nei XVIII, nei XIX a. ypatingo susidomėjimo modaline logika kaip galima savarankiška logikos sritimi nebuvo. Todėl taip ir nebuvo sukurta nei viena modalinės logikos sistema.

Formalių modalinės logikos sistemų kūrimas prasidėjo tik **antrajame modalinės logikos raidos etape**, kuomet tokios sistemos buvo pradėtos taikyti ne tik tam, kad būtų galima **atskirti dvi tiesas – būtinąją ir galimąją, bet ir bandant sukurti tokią matematinę logikos sistemą, kurioje būtų išvengta materialinės implikacijos paradokso**, apie kuriuos mes jau kalbėjome 1.16.1. poskyrio pradžioje.

Šio etapo pradžia laikoma XX a. pirmoji pusė, kai 1918 m. pasirodė mūsų jau keletą kartų minėto JAV logiko K. Luiso, lietuviškoje literatūroje dažnai vadinamo K. E. Luju (C. I. Lewis), pionieriškas darbas „A Survey of symbolic logic“, pateikęs **aksiomatinę modalinę loginę sistemą**, vėliau pavadintą S3, aprašymą. Tiesa, kai kurios idėjos, susišaukiančios su šiuo Luiso darbu, buvo šiek tiek anksčiau išsakytos Mak Kaloko darbe, bet tuomet jos nebuvo pastebėtos ir įvertintos.

1920 m. irgi jau ne kartą mūsų minėtas lenkų logikas J. Lukasievičius sukonstravo trireikšmę modalinę logiką, o 1953 m. – keturiareikšmę.

Tas pats K. Luisas kartu su K. Lengfordu (C. H. Langford) 1932 m. darbe „Symbolic Logic“ aprašė modalinės logikos sistemą, kuri dabar vadinama Luiso sistema S2 ir yra mažiau griežta negu S3. Vėliau buvo sukonstruotos ir kitos modalinės Luiso sistemos: S1, S4, S5 ir S6 bei eilė tarpinių sistemų, o taip pat ir silpnesnių už S1.

Luiso ir Lukasievičiaus modalinės sistemos skiriasi visų pirma tuo, kad Luiso sistemose **naudojamos griežtosios implikacijos, apibrėžiamos modalinės logikos operatoriais, modifikacijomis**, o Lukasievičiaus sistemose – **daugiareikšmėmis materialiosiomis implikacijomis**.

1956 m. vokiečių logikas V. Akermanas (W. Ackermann) savo darbe „Begründung einer strenger Implikation“ pasiūlė dar vieną modalinių sistemų klasę, kurioje naudojamas taip vadinamąja **Akermano stipriąja implikacija**. V. Akermano nuomone stiprioji implikacija adekvačiau aprašo

loginių išvadų gavimo procedūrą negu Luiso griežtosios implikacijos. Stipriosios ir griežtųjų implikacijų palyginimą Akermanas pateikė savo straipsnyje „Über die Beziehung zwischen strikten und strenger Implikation“. Kai kurie logikai (pavyzdžiui, Andersonas, Belnapas) laikosi nuomonės, kad Akermano stiprioji implikacija pakankamai adekvačiai aprašo loginį išvedamumą, tačiau dauguma logikų tos nuomonės nepalaiko. Todėl paieškos šioje srityje tęsiamos, apie ką jau buvo rašyta 1.16.1.5.6. skyrelyje, kalbant apie A. Zinovjevo ir jo bendradarbių sukonstruotas loginio išvedimo sistemas S^s , S^w , S^m , S^c ir pan.

Buvo sukonstruota ir daugiau aletinių modalinių sistemų (Giodelio, fon Raito, Feiso, Karnapo, Tarskio, Brauerio, Gžegorčiko ir kitų).

Modalinės sistemos gali būti konstruojamos aksiomatiškai bei naudojantis sekvencijomis, o taip pat naudojantis tų sistemų loginius operatorius aprašančiomis charakteristinėmis daugiareikšmėmis matricomis. Tiesa, ne visoms sukonstruotoms modalinėms sistemoms tokios matricos sudarytos. Dviem paskutiniaisiais būdais sudarytose sistemose teoremų išvedimo būdas gali būti automatizuojamas.

Skaitytojui gali kilti klausimas, kodėl atsirado (ir vis dar atsiranda) tiek daug skirtingų modalinių sistemų. Tam yra keletas priežasčių.

Visų pirma, **modaliniai operatoriai gali būti interpretuojami gana įvairiai**, ir todėl skirtingos modalinės sistemos, besiskiriančios viena nuo kitos savo stiprumu, skiriasi ir modalinių operatorių „būtiny“ ir „gali būti“ interpretacija – „silpnė“ ar „stipresnė“.

Antra, skirtingos modalinės loginės sistemos, besiskirdamos modalinių operatorių interpretacija, gali skirtingai spręsti **modalinių operatorių iteracijos problemą**, t. y. gali skirtingai suvedinėti teiginius su keliais modaliniais operatoriais (pavyzdžiui, teiginius $\Diamond p$, $h h h p$, $\Diamond h \Diamond p$, $h \Diamond h p$, $\Diamond \sim h p$ ir pan.) į paprastesnius teiginius, turinčius mažiau modalinių operatorių. Kadangi intuityviai tampa jau sunku spręsti, kaip turėtų būti interpretuojami teiginiai, turintys daug modalinių operatorių, ir kaip juos suvesti į paprastesnius teiginius, tai ir tenka konstruoti bei nagrinėti įvairaus stiprumo formalias aksiomatinės modalines sistemas, besiskiriančias savo aksiomatika bei modalinių operatorių (o tuo pačiu – ir tokių loginių operatorių kaip implikacija ar neigimas) interpretacija.

Modalinės logikos sistemos gali skirtis ir savo formalia kalba, t. y. tuo, kokie loginiai operatoriai (tame tarpe – ir modaliniai) priimami kaip pagrindiniai, kuriais naudojantis apibrėžiami visi kiti loginiai operatoriai. Pavyzdžiui, Luiso modalinėse sistemose pagrindiniais operatoriais gana dažnai pasirenkami operatoriai „ $\wedge$ “ (konjunkcija), „ $\sim$ “ (loginis neigimas) bei „ $\Diamond$ “ (modalinės galimybės operatorius) ir, jais naudojantis, eksplicitiškai apibrėžiami visi kiti operatoriai: disjunkcija „ $\vee$ “ kaip $\text{def } p \vee q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$, griežtoji implikacija „ $\rightarrow$ “ (arba „ $\Rightarrow$ “) kaip $\text{def } p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ (arba „ $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim \Diamond(p \wedge \sim q)$ “), būtinumo modalinis operatorius „ h “ kaip $\text{def } h \Leftrightarrow \sim \Diamond \sim$, griežtasis ekvivalentumas „ $\Leftrightarrow$ “ kaip $\text{def } (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$, materialioji implikacija „ $\supset$ “ kaip $\text{def } (p \supset q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ ir t. t.

Žinoma, pagrindiniais operatoriais gali būti pasirinkti (ir neretai pasirenkami) ne tik minėtieji, bet ir kiti operatoriai. Pavyzdžiui, neretai pagrindiniais operatoriais pasirenkami operatoriai „ $\vee$ “, „ $\sim$ “, „ h “ arba „ $\wedge$ “, „ $\sim$ “ ir „ h “, o po to, jais naudojantis, eksplicitiškai apibrėžiami ir visi kiti loginiai operatoriai, tame tarpe ir modalinės galimybės operatorius „ $\Diamond$ “, kuris tuomet apibrėžiamas formule $\text{def } \Diamond \Leftrightarrow \sim h \sim$.

Gali būti pasirinktos ir kitos pagrindinių loginių operatorių kombinacijos, kurios gaunamos papildžius kurią nors nemodalinių loginių operatorių sistemą nors vienu modaliniu operatorium (nors, žinoma, galima įvesti ir abu modalinius operatorius kaip pagrindinius ir nebūtinai išreiškiamus eksplicitiškai vieną per kitą).

Pagrindiniai loginiai operatoriai (tame tarpe – ir modaliniai) gali būti apibrėžti lentelėmis (charakteristinėmis matricomis), tačiau dažniausiai yra apibrėžiami implicitiškai, t. y. suformuluojant atitinkamas aksiomas bei išvedimo taisykles (žiūr. 1.5.5., 1.16.1.5.2. ir 1.16.1.5.4. skyrelius).

Kartais implicitiniai ir eksplicitiniai apibrėžimai taip sujungiami, kad pasirodo net nebesvarbu, kuriuos loginius operatorius laikyti pagrindiniais, o kuriuos – išvestiniais.

Kaip pavyzdį pateiksiu modalinės sistemos $S1^0$, kuri yra šiek tiek silpnė už jau minėtąją Luiso sistemą $S1$, išvedimo aparatą. Jį sudaro penkios aksiomos, keturios išvedimo taisyklės ir šeši eksplicitiniai apibrėžimai.

Sistemos $S1^0$ aksiomos:

- A1. $?p \wedge q \Rightarrow p$,
- A2. $?p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$,
- A3. $?[(p \wedge q) \wedge r] \Rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$,

A4. $?p \Rightarrow p \wedge p$,

A5. $?[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Sistemos $S1^0$ išvedimo taisyklės:

1) superpozicijos taisyklė $\frac{? \mathcal{A}(p)}{?S_p^{\mathfrak{B}}[\mathcal{A}(p)]}$, teigianti, jog įstačius į bet kurią išvedamą formulę $\mathcal{A}$

visur vietoj į ją įeinančio bet kurio elementaraus teiginio p bet kurią formulę $\mathfrak{B}$, gautoji tokiu būdu iš formulės $\mathcal{A}$ formulė $S_p^{\mathfrak{B}}[\mathcal{A}(p)]$ išlieka išvedama;

2) sujungimo taisyklė $\frac{? \mathcal{A}, ? \mathfrak{B}}{? \mathcal{A} \wedge \mathfrak{B}}$;

3) atskyrimo taisyklė $\frac{? \mathcal{A}, ? \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{B}}{? \mathfrak{B}}$;

4) pakeitimo griežtai ekvivalenčia formule taisyklė, teigianti, jog jei $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$, tai bet kuri išvedama formulė, pakeitus bet kurioje vietoje į jos sudėtį įeinančią formulę $\mathcal{A}$ jai griežtai ekvivalenčia formule $\mathfrak{B}$, gautoji po tokio pakeitimo formulė išlieka išvedama.

Sistemos $S1^0$ eksplisitiniai apibrėžimai:

1) $\mathcal{A} \vee \mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sim(\sim \mathcal{A} \wedge \sim \mathfrak{B})$,

2) $(\mathcal{A} \supset \mathfrak{B}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\sim(\mathcal{A} \wedge \sim \mathfrak{B})]$,

3) $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{A} \supset \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \supset \mathcal{A})$,

4) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{B}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\sim \diamond(\mathcal{A} \wedge \sim \mathfrak{B})]$,

5) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \Rightarrow \mathcal{A})$,

6) $h \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sim \diamond \sim \mathcal{A}$.

Taip aprašytoje sistemoje $S1^0$ visiškai nesvarbu, kuri iš operatorių („ $\Rightarrow$ “ ar „ $\diamond$ “) laikyti pagrindiniu, kuri – išvestiniu. Tačiau, atsižvelgiant į tai, kad sistemai $S1^0$ (kaip ir visoms kitoms Luiso modalinėms sistemoms), būdingi griežtosios implikacijos „ $\Rightarrow$ “ paradoksai, galima teigti, kad šioje sistemoje griežtoji implikacija dar nėra ekvivalenti intuityviam loginiam išvedamumui, o todėl modalinės galimybės operatorius „ $\diamond$ “, būdamas surištas su griežtąja implikacija, negali būti pilnai ekvivalentus intuityviai suvokiamai tokio operatoriaus prasmei. Sistema $S1^0$ implicitiškai apibrėžia tik vieną iš galimų operatoriaus „ $\diamond$ “ interpretacijų, tačiau ne būtinai pačią priimtinausią.

Sistemoje $S1^0$, naudojantis jos išvedimo aparatu, galima išvesti be galo daug įvairių teoremų. Štai kai kurios iš jų, kurių išvedimą palieku skaitytojui, kaip pratimą, lavinantį jo įgūdžius naudotis modalinės logikos aksiomatiniu išvedimo aparatu:

$? \sim p \Leftrightarrow p$,

$?p \Rightarrow (p \vee q)$,

$?(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow h(\sim p \vee q)$,

$? \sim p \Leftrightarrow (p \supset \sim p)$,

$? h p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)$,

$?(p \Rightarrow q) \Rightarrow (h p \supset h q)$,

$?[(p \Rightarrow q) \wedge \diamond p] \Rightarrow \diamond q$,

$? h [(p \vee q) \supset (q \vee p)]$,

$? h \{(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]\}$ ir t. t.

Jei prie sistemos $S1^0$ postulatų pridėtume dar vieną aksiomą A6. $?p \Rightarrow \diamond p$, tai **gautume sistemą, sutampančią su Luiso sistema S1.**

Toje sistemoje būtų išvedamos visos sistemos $S1^0$ teoremos ir be to galima būtų papildomai išvesti eilę naujų, neišvedamų sistemoje $S1^0$.

Štai keletas specifinių sistemos S1 teoremų:

$? \sim \diamond p \Rightarrow \sim p$,

$? h h p \Rightarrow p$,

$? h p \Rightarrow \diamond p$,

$? h p \supset p$,

$?(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \supset q)$,

? Jei $? \mathcal{A} \Rightarrow h \mathfrak{B}$, tai $? \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ ir t. t.

Jei prie sistemos $S1^0$ postulatų pridėtume papildomą aksiomą $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow p$, tai gautume modalinę sistemą, kurią vadina $S2^0$.

Pridėję tą aksiomą A7. $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow p$ prie sistemos $S1$ aksiomų, **gautume sistemą, ekvivalenčią Luiso sistemai $S2$** , aprašytai jau minėtojoje „Symbolic Logic“.

Sistemoje $S2$, kuri yra stipresnė už $S1$ ir $S2^0$, galima papildomai išvesti eilę naujų teoremų, pavyzdžiui, teoremas:

- $?h p \Leftrightarrow (p \wedge h p)$,
- $?[(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)]$,
- $\Diamond(p \vee \sim p) \Leftrightarrow (p \vee \sim p)$,
- $\Diamond \sim (\Diamond p \wedge \sim p)$,
- $\Diamond p \vee \Diamond \sim p$ ir t. t.

Sistemoje $S2$ išvedamos ir taip vadinamos **Bekerio taisyklės**:

- 1) jei $? \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, tai $?h \mathcal{A} \Rightarrow h \mathcal{B}$,
- 2) jei $? \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, tai $? \Diamond \mathcal{A} \Rightarrow \Diamond \mathcal{B}$.

Sistemą $S2$ Luisas laikė labiausiai atitinkančią intuityviai modalinių operatorių „ h “ ir „ $\Diamond$ “ interpretacijai, tačiau ne visi logikai su tuo sutinka. Pavyzdžiui, Karnapas laiko vienintele pilnai tinkama modalinės logikos sistema žymiai stipresnę sistemą $S5$, o Mak–Kinsis ir Tarskis labiau tinkama laiko sistemą $S4$ su jos redukcine aksioma $?h p \Rightarrow h h p$ („jei p yra būtina, tai būtina, kad p būtų būtina“).

Pridėję prie sistemos $S2$ postulatų dar vieną aksiomą $?[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim \Diamond q \Rightarrow \sim \Diamond p)]$, **gausime modalinę sistemą, ekvivalenčią Luiso sistemai $S3$** , aprašytai jau minėtajame „A Survey of symbolic logic“. Sistemą $S3$ galima gauti ir papildžius sistemą $S1$ aksioma $?[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim \Diamond p \Rightarrow \sim \Diamond q)]$.

Sistemoje $S3$ išvedamos taip vadinamos **suvedimo (redukcijos) teoremos**, pavyzdžiui, $?h h p \Leftrightarrow h h h p$, $? \Diamond \Diamond p \Leftrightarrow \Diamond \Diamond \Diamond p$, $?h p \Rightarrow h \Diamond h p$, $? \Diamond h \Diamond p \Rightarrow \Diamond p$, $?h \Diamond h \Diamond p \Leftrightarrow h \Diamond p$, $? \Diamond h \Diamond h p \Leftrightarrow \Diamond h p$, $? \Diamond h h \Diamond p \Rightarrow \Diamond p$, $?h h \Diamond p \Leftrightarrow h h \Diamond p$, $? \Diamond \Diamond h h p \Leftrightarrow \Diamond \Diamond h p$ ir pan.

Todėl **sistemoje $S3$ visus galimus modalumus su besikartojančiais modalumo operatoriais galima suvesti į 42 skirtingus modalumus, kai tuo tarpu visose silpnesnėse sistemose $S2$, $S2^0$, $S1$, $S1^0$ egzistuoja be galo daug skirtingų modalumų su besikartojančiais modalumo operatoriais**.

Papildę sistemos $S3$ postulatų sistemą aksioma $? \Diamond p \Rightarrow \Diamond p$ (arba, kas yra tas pats, aksioma $?h p \Rightarrow h h p$), **gausime modalinę sistemą $S4$** . Joje galima išvesti eilę papildomų (tame tarpe – redukcijos) teoremų, todėl **sistemoje $S4$ egzistuoja jau tik 12 skirtingų modalumų**, į kuriuos gali būti suvesti visi kiti modalumai su besikartojančiais modaliniais operatoriais. Štai tie dvylika modalumų: 1) $h p$, 2) $h \Diamond p$, 3) $h \Diamond h p$, 4) $\sim h p$, 5) $\sim h \Diamond p$, 6) $\sim h \Diamond h p$, 7) $\Diamond p$, 8) $\Diamond h p$, 9) $\Diamond h \Diamond p$, 10) $\sim \Diamond p$, 11) $\sim \Diamond h p$, 12) $\sim \Diamond h \Diamond p$.

Papildę sistemos $S4$ postulatų sistemą aksioma $? \Diamond p \Rightarrow h \Diamond p$ (arba aksioma $?h (p \Rightarrow h \Diamond p)$), **gausime modalinę sistemą, ekvivalenčią Luiso sistemai $S5$** , kuri yra formaliai pilna modalinėje teiginių logikoje ir kurioje **visi modalumai su besikartojančiais modaliniais operatoriais susiveda tik į keturis skirtingus modalumus**: $h p$, $\Diamond p$, $\sim h p$ ir $\sim \Diamond p$.

Jei sistemos $S2$ postulatų būtime papildę aksioma $? \Diamond \Diamond p$, **tai būtime gavę sistemą $S6$** , kuri yra nesuderinama nei su sistema $S3$, nei su $S5$.

Papildę Luiso sistemą $S3$ aksioma $? \Diamond \Diamond p$, **gautume sistemą $S7$** , kuri nesuderinama nei su $S4$, nei su $S5$.

Jei sistemą $S3$ būtime papildę aksioma $?h \Diamond \Diamond p$, tai **būtime gavę sistemą $S8$** , kuri taip pat nesuderinama nei su $S4$, nei su $S5$.

Čia aprašytasis Luiso modalinių sistemų gavimo būdas nėra vienintelis. Gana dažnai naudojamosi **Giodelio aksiomatizacija**, kuomet modalinės sistemos gaunamos, prijungiant prie klasikinio teiginių bei predikatų skaičiavimo papildomas aksiomas ir išvedimo taisykles, implicitiškai apibrėžiančias modalumo operatorius.

Pavyzdžiui, sistema $S4$ gaunama iš klasikinio teiginių skaičiavimo, papildžius jį išvedimo taisykle $\frac{? \mathcal{A}}{?h \mathcal{A}}$ ir aksiomomis: 1) $?h (p \supset q) \supset (h p \supset h q)$, 2) $?h p \supset p$, 3) $?h p \supset h h p$.

Jei trečiąją aksiomą $?h p \supset h h p$ pakeistume aksioma $? \sim h p \supset h \sim h p$, gautume modalinę sistemą, ekvivalenčią $S5$.

Papildę klasikinį teiginių skaičiavimą aksiomų schema $?h (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (h \mathcal{A} \supset h \mathcal{B})$ bei „ h “ įvedimo taisykle $\frac{? \mathcal{A}}{?h \mathcal{A}}$, gautume taip vadinamąją **K sistemą**, prie kurios prijungę aksiomų schemą

$?h \mathcal{A} \supset \mathcal{A}$, gautume **T sistemą**, turinčią dar be galo daug skirtingų modalumų.

Papildę T sistemą aksiomų schema $? \mathcal{A} \supset h \Diamond \mathcal{A}$, gautume taip vadinamąją **B sistemą**.

Neretai naudojamosi **fon Raito modalinėmis sistemomis M, M' ir M''**, kuriose naudojamosi loginiais operatoriais: „~“ – loginiu neigimu, „∨“ – disjunkcija, „→“ – materialiąja implikacija, „↔“ – materialiuoju ekvivalentumu, „M“ – modalumo operatorium, reiškiančiu galimybę ir „N“ – modalumo operatorium, reiškiančiu būtinumą. Sistemos M išvedimo aparatas gaunamas papildžius teiginių skaičiavimą aksiomomis: 1) $\Box p \rightarrow Mp$, 2) $\Box M(p \vee q) \leftrightarrow (Mp \vee Mq)$ bei išvedimo taisyklėmis:

$$1) \frac{\Box(\Box f \leftrightarrow \Box g)}{\Box(M\Box f \leftrightarrow M\Box g)}, 2) \frac{\Box f}{\Box N\Box f}. \text{ Sistema M, kaip įrodė Sobocinskis, yra ekvivalenti sistemai T.}$$

Jei sistemos M teoremų išvedimo aparatą papildytume aksioma $\Box MMp \rightarrow Mp$, tai gautume sistemą, kurią fon Raitas pavadino M'. Tas pats Sobocinskis įrodė, jog ji ekvivalenti Luiso sistemai S4.

Jei sistemą M papildytume aksioma $\Box M \sim Mp \rightarrow \sim Mp$, tai gautume sistemą M'', kuri yra ekvivalenti sistemai S5. To ekvivalentumo įrodymas taip pat priklauso Sobocinskiui.

Egzistuoja eilė kitų Luiso modalinių sistemų aksiomatizacijų (Šmidto, Saimonso ir kit.), kurių čia nebeįrašinėsiu.

Nuo visų tų sistemų žymiai skiriasi **Akermano modalinė sistema**, kurioje naudojamosi stipriąja implikacija „→“, disjunkcija „∨“, konjunkcija „∧“, loginiu neigimu „¬“ (arba „-“) ir logine konstanta „\$“ reiškiančia absurdišką teiginį (jo loginę reikšmę).

Akermano sistemos aksiomų schemas:

- A1. $\Box f \rightarrow f$,
- A2. $\Box(\Box f \rightarrow g) \rightarrow ((\Box f \rightarrow g) \rightarrow (\Box f \rightarrow \Box g))$,
- A3. $\Box(\Box f \rightarrow g) \rightarrow ((\Box f \rightarrow \Box g) \rightarrow (\Box f \rightarrow g))$,
- A4. $\Box(\Box f \rightarrow (\Box f \rightarrow g)) \rightarrow (\Box f \rightarrow g)$,
- A5. $\Box f \wedge \Box g \rightarrow \Box f$,
- A6. $\Box f \wedge \Box g \rightarrow \Box g$,
- A7. $\Box(\Box f \rightarrow g) \wedge (\Box f \rightarrow \Box g) \rightarrow (\Box f \rightarrow \Box g \wedge \Box g)$,
- A8. $\Box f \rightarrow \Box f \vee g$,
- A9. $\Box g \rightarrow \Box f \vee g$,
- A10. $\Box(\Box f \rightarrow \Box g) \wedge (\Box f \rightarrow \Box g) \rightarrow (\Box f \vee \Box g \rightarrow \Box g)$,
- A11. $\Box f \wedge (\Box f \vee \Box g) \rightarrow \Box f \vee (\Box f \wedge \Box g)$,
- A12. $\Box(\Box f \rightarrow g) \rightarrow (\neg \Box f \rightarrow \neg \Box g)$,
- A13. $\Box f \wedge \Box g \rightarrow \Box(\Box f \rightarrow \Box g)$,
- A14. $\Box f \rightarrow \neg \neg \Box f$,
- A15. $\Box \neg \neg \Box f \rightarrow \Box f$,
- A16. $\Box(\Box f \rightarrow \$) \rightarrow \neg \Box f$,
- A17. $\Box f \wedge \neg \Box f \rightarrow \$$.

Akermano sistemos teoremų išvedimo taisyklės:

- 1) $\frac{\Box f, \Box f \rightarrow g}{g}$,
- 2) $\frac{\Box f, \Box g}{\Box f \wedge \Box g}$,
- 3) $\frac{\Box f, \neg \Box f \vee \Box g}{\Box g}$,
- 4) $\frac{\Box f, \Box f \rightarrow (\Box f \rightarrow g)}{\Box f \rightarrow g}$,
- 5) $\frac{\Box f \rightarrow g, (\Box f \rightarrow \Box g) \wedge (\Box g \rightarrow \$)}{\Box g \rightarrow \$}$.

Akermano modalinės sistemos eksplicitiniai apibrėžimai:

- 1) $\Diamond \Box f \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \neg(\Box f \rightarrow \$)$
- 2) $\Box f \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \neg \Diamond \neg \Box f$.

Iš ką tik aprašytos Akermano sistemos galima gauti jai ekvivalenčią, tačiau labiau artimą savo forma įprastoms modalinėms sistemoms, **Akermano ir Belnapo sistemą E**. Tereikia iš Akermano sistemos eliminuoti A16. ir A17., loginę konstantą „\$“, trečiąją ir penktąją išvedimo taisykles bei abu

eksplicitinius apibrėžimus, pakeičiant visa tai į naują aksiomų schemą A16.' $?(h A \wedge h B) \rightarrow h (A \wedge B)$ ir į eksplicitinį modalinio operatoriaus „h“ apibrėžimą $h \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}]$.

Lukasievičiaus modalinės sistemos apibrėžiamos naudojantis teiginių loginių reikšmių matricomis–trireikšme ir keturiareikšme. Tačiau ir šios sistemos gali būti aprašytos aksiomatiškai.

Papildant predikatų skaičiavimą (klasikinį ir intuicionistinį) įvedamus modalumus bei griežtąją, stipriąją ar daugiareikšmę materialiąją implikacijas implicitiškai apibrėžiančiomis aksiomomis, išvedimo taisyklėmis bei eksplicitiniais apibrėžimais, gaunamos **predikatinės modalinės sistemos**, analogiškos aukščiau aprašytoms teiginių modalinės logikos sistemoms.

A. Zinovjevas, naudodamasis modaliniais operatoriais „M“ – „gali būti“, „N“ – „būtina“ ir „C“ – „atsitiktina“ sukonstravo **modalinę sistemą** S_c^{m1} , aprašytą jau minėtoje jo knygoje „Kompleksinė logika“ [249], kartu išnagrinėdamas ir klasikinį tokios sistemos atvejį S_c^{m1} . Naudodamasis modaliniais operatoriais, fiksuojančiais teiginio teisingumo tikimybę p, A. Zinovjevas sukonstravo **modalinį tikimybinės logikos variantą** – modalinę sistemą, kurią jis pavadino **tikimybinės logikos sistema** S_c^{mp} . Ši sistema nesutampa su teiginių tikimybinės algebros sistema, kurią mes nagrinėjome 1.16.1.1. ir 1.16.1.2.6. skyreliuose ir minėjome 1.16.1.5.6. skyrelyje, kalbėdami apie galimybę „permesi tiltą“ tarp dedukcinės ir indukcinės logikų.

Trečiajame modalinės logikos „siaurąja“ prasme raidos etape, kurio pradžia laikoma XX a. antrosios pusės pradžia, kuomet pasirodė S. Kripkės (Kripke S. A.) darbai, skirti modalinių sistemų pilnumo ir išsprendžiamumo bei neišsprendžiamumo problemoms, daugiausia dėmesio skiriama semantinei modalinių sistemų analizei ir bandymams jas sistematizuoti. Naudodamasis „virtualių pasaulių“ nagrinėjimo metodu, kuomet būtinai teisingais teiginiais laikomi tokie ir tik tokie, kurie teisingi visuose „virtualiuose pasauliuose“ (tame tarpe – ir „realiame pasaulyje“, priklausančiame „virtualių pasaulių“ aibei), o galimai teisingais – tokie teiginiai, kurie teisingi nors viename „virtualiame pasaulyje“, S. Kripkė įrodė, kad modalinė Luiso sistema S5 yra pilna, o vienaviečiame modaliniame predikatų skaičiavime neegzistuoja baigtinio universalus algoritmo, leidžiančio nustatyti, ar bet kuri duotoji modalinė predikatinė formulė yra išvedama ar neišvedama duotojoje modalinėje sistemoje, kai tuo tarpu nemodaliniame vienaviečių predikatų skaičiavime visuomet galima nustatyti bet kurios duotosios formulės išvedamumą.

Čia aš nenagrinėsiu modalinės logikos raidos trečiojo etapo pagrindinių pradininkų S. Kripkės, K. Šiutės ir kitų logikų darbų, skirtų modalinių sistemų semantinei analizei, nes trečiasis modalinės logikos „siaurąja“ prasme raidos etapas dar tęsiasi ir pasirodo vis naujų darbų, skirtų šiai temai. Su pagrindiniais S. Kripkės ir K. Šiutės darbais skaitytojas gali susipažinti knygoje [248]. Jie pateikti tos knygos papildymuose kartu su tos knygos redaktoriaus G. E. Minco apžvalginiu darbu, o pagrindinėje tos knygos dalyje pateiktas R. Feyso knygos vertimas, kuriame aprašytos visos mūsų čia paminėtos modalinės logikos sistemos. Knygoje [248] skaitytojas ras ir gana išsamų literatūros, skirtos modalinėms logikoms, sąrašą. Informaciją apie naujus darbus modalinės ir, apskritai, neklasikinės logikos srityje skaitytojas gali rasti knygoje [297, 298]. Jose galima susipažinti su **hibridinėmis ir deskriptyvinėmis logiškėmis**, taikomomis dirbtinio intelekto ir ekspertinėse sistemose reliacinių struktūrų ir loginių ryšių žinių bankuose aprašymui (žiūr. šios mokymo priemonės 1.16.3. poskyrį), taip pat su naujais darbais dinaminės ir laiko logikų srityje ir tų logikų taikymais kompiuterinių programinių sistemų veikimo analizėje ir verifikavime. Gaila tik, kad šiose knygoje, nors jos pavadintos vadovėliais, naujos žinios pateikiamos fragmentiškai ir kartais per daug abstrakčiai, nors vienas iš autorių anksčiau sugebėjo rašyti mokymo priemonės studentams suprantama kalba (žiūr. [299]).

Pereisiu prie modalinės logikos „plačiaja“ prasme apžvalgos.

Modalinėje logikoje „plačiaja“ prasme, kaip jau buvo minėta, nagrinėjami ne tik aletiniai, bet ir episteminiai, deontiniai, aksiologiniai bei kitokie modalumai, o taip pat bandoma nagrinėti **apibendrintąją modalinę sistemą**, tinkančią bet kurio tipo modalinei sistemai.

Tokioje apibendrintoje modalinėje sistemoje vartojami **trijų rūšių modalumai**: 1) **stiprusis teigiamas**, kurį žymėsime V, 2) **stiprusis neigiamas**, kurį žymėsime Y, ir 3) **silpnasis**, kurį žymėsime W.

Stipriųjų teigiamų modalumų V pavyzdžiai: „logiškai būtina“ – loginėje modalinėje sistemoje, „ontologiškai („fiziškai“) būtina“ – ontologinėje („fizinėje“) modalinėje sistemoje, „įrodoma“ – episteminėje žinių sistemoje, „įsitikinęs“ – episteminėje įsitikinimų sistemoje, „privaloma“ – deontinėje sistemoje, „gerai“ – absoliučioje aksiologinėje sistemoje, „geriau“ – palyginamojoje aksiologinėje

sistemoje, „visada“ – laiko logikos absoliučioje modalinėje sistemoje, „anksčiau“ – palyginamojoje laiko logikos sistemoje.

Stipriųjų neigiamų modalumų Y pavyzdžiai: „logiškai neįmanoma“ – loginėje modalinėje sistemoje, „ontologiškai neįmanoma“ – ontologinėje modalinėje sistemoje, „paneigiama“ – episteminėje žinių sistemoje, „atmetama“ – episteminėje įsitikinimų sistemoje, „draudžiama“ – deontinėje sistemoje, „blogai“ – absoliučioje aksiologinėje sistemoje, „blogiau“ – palyginamojoje aksiologinėje sistemoje, „niekada“ – absoliučioje laiko logikos sistemoje, „vėliau“ – palyginamojoje laiko logikos sistemoje.

Silpnųjų modalumų W pavyzdžiai: „logiškai atsitiktina“ – loginėje modalinėje sistemoje, „ontologiškai atsitiktina“ – ontologinėje modalinėje sistemoje, „nepatikrinama“ („neišsprendžiama“) – episteminėje žinių sistemoje, „abejoja“ („abejotina“) – episteminėje įsitikinimų sistemoje, „normatyviai vis tiek“ – deontinėje sistemoje, „aksiologiškai vis tiek“ – absoliučioje aksiologinėje sistemoje, „vienodai vertinga“ – palyginamojoje aksiologinėje sistemoje, „tik kai kada“ – absoliučioje laiko logikos sistemoje, „tuo pačiu metu“ – palyginamojoje laiko logikos sistemoje.

Gana dažnai kartu su čia išvardintais modalumais V, Y ir W, vartojamas dar ir **papildomas modalumas U**, kuris gali būti išreikštas per pagrindinius modalumus:

$$U_p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} V_p \vee W_p.$$

Papildomas modalumas U ne visose sistemose turi jį atitinkančius žodžius, nes lietuvių kalboje (o taip pat ir kitose natūraliose kalbose) ne visada pavyksta rasti žodį, pilnai atitinkanti sąvokų V ir W disjunkciją. Tačiau tai nereiškia, jog sąvoka U negali egzistuoti ir negali būti išreikšta formalioje kalboje.

Papildomo modalumo U pavyzdžiai: „logiškai gali būti“ – loginėje modalinėje sistemoje, „ontologiškai gali būti“ – ontologinėje modalinėje sistemoje, „įmanoma“ – episteminėje įsitikinimų sistemoje, „leidžiama“ – deontinėje sistemoje.

Čia išvardintus pavyzdžius patogiau apžvelgti patalpinus juos į lentelę (žiūr. 355-ąją lentelę).

355. lentelė

	Loginiai modalumai	Ontologiniai modalumai		Episteminiai modalumai	
				Žinių	Įsitikinimų
V	logiškai būtina	ontologiškai būtina		įrodoma (verifikuojama)	įsitikinęs (laikosi nuomonės)
Y	logiškai neįmanoma	ontologiškai neįmanoma		paneigiama (falsifikuojama)	atmeta
W	logiškai atsitiktina	ontologiškai atsitiktina		neišsprendžiama	abejoja (abejotina)
U	logiškai gali būti (logiškai įmanoma)	ontologiškai gali būti (ontologiškai įmanoma)			laiko įmanomu
	Deontiniai modalumai	Aksiologiniai modalumai		Laiko logikos modalumai	
		Absoliutūs	Palyginamieji	Absoliutūs	Palyginamieji
V	privaloma	gerai	geriau	visada	anksčiau
Y	draudžiama	blogai	blogiau	niekada	vėliau
W	normatyviai visvien	aksiologiškai visvien	vienodai vertinga	tik kai kada	tuo pačiu metu
U	leidžiama				

Modalumo operatorius V, Y, W ir U galima laikyti tam tikrais **kvalifikatoriais**, kurie šiek tiek panašūs į kvantorius, tačiau skiriasi nuo jų tuo, kad **kvantifikuodami teiginius bei predikatus mes patiksliname kiekybę (vartojamų sąvokų apimtį), o**

naudodamiesi kvalifikatoriais patiksliname kokybę (ryšio tarp S ir P charakterį). Kvalifikavimą ir kvantifikavimą galima kombinuoti. Taip gaunami teiginiai (predikatai): „logiškai būtina, kad kiekvienas S būtų P“, „gerai, kad kai kurie S yra P“ ir pan. Kombinuojant kvalifikaciją ir kvantifikaciją modaliniame predikatų skaičiavime, išskyla daug įvairių problemų. Kai kuriais atvejais tampa net sunku atskirti, kur čia kvalifikacija, o kur kvantifikacija, nes kai kuriais atvejais kai kurie kvalifikatoriai gali būti išreikšti per kvantorius.

Įvesti kvalifikatoriai V, Y ir W minimalioje bendrojoje modalinėje teorijoje, kuri galėtų būti taikoma bet kokioms modalinėms sistemoms, būdami neišreiškiami vienas per kitą, turi tenkinti kai kuriuos reikalavimus. Atsižvelgiant į tuos reikalavimus galima suformuluoti artutinį minimalios bendrosios modalinės teorijos apibrėžimą – aprašymą, nurodantį pagrindines tos teorijos savybes.

Minimali bendroji modalinė teorija, būdama asertorinės logikos antstatu (asertorinio teiginių bei predikatų skaičiavimo plėtinys), privalo turėti savo sudėtyje ne mažiau kaip visus tris pagrindinius kvalifikatorius (V, Y ir W), kurie turi tenkinti šiuos reikalavimus:

1) kvalifikacijos, duodamos stipriaisiais kvalifikatoriais, turi būti nesuderinamos su kvalifikacija, duodama silpnuoju kvalifikatorium, t. y. turi būti tenkinama sąlyga $\sim(Vp \wedge Wp) \wedge \sim(Yp \wedge Wp)$;

2) iš teiginio asertorinio teisingumo ar neteisingumo neturėtų vienareikšmiškai išplaukti išvada, kokią pagrindinį kvalifikatorių galima tam teiginiui taikyti, t. y. formalioje modalinėje teorijoje neturėtų būti galima išvesti teoremas: $p \rightarrow Vp$, $p \rightarrow Yp$, $p \rightarrow Wp$, $\sim p \rightarrow Vp$, $\sim p \rightarrow Yp$, $\sim p \rightarrow Wp$;

3) iš teiginio, kvalifikuoto silpnuoju kvalifikatorium, neturėtų išplaukti nei to teiginio asertorinis teisingumas, nei neteisingumas, t. y. formalioje modalinėje teorijoje neturėtų būti galima išvesti teoremas: $Wp \rightarrow p$ ir $Wp \rightarrow \sim p$;

4) jei koks tai teiginys gali būti kvalifikuojamas silpnuoju kvalifikatorium, tai juo turėtų būti kvalifikuojamas ir to teiginio neiginys, t. y. bendrojoje modalinėje teorijoje turėtų būti išvedama teorema $Wp \rightarrow W\sim p$.

Implicitiškai apibrėždami loginių jungčių „ $\rightarrow$ “, „ $\wedge$ “ ir „ $\vee$ “ bei kvalifikatorių V, Y ir W savybes, galime suformuluoti dar keletą aksiomų ir išvedimo taisyklių, kurios turėtų galioti bendrojoje minimalioje modalinėje sistemoje.

Tokia sistema, kaip galima įsitikinti, galėtų būti sistema, kurią pavadinsime M1 ir čia aprašysime.

Minimaliosios modalinės teiginių logikos sistemos M1 aksiomų sistemą sudaro šios aksiomos:

A0. Teiginių skaičiavimo aksiomos;

A1. $\sim(Vp \wedge Wp) \wedge \sim(Yp \wedge Wp)$;

A2. $Wp \rightarrow W\sim p$;

A3. $Vp \wedge Vq \rightarrow V(p \wedge q)$;

A4. $V(p \vee q) \vee W(p \vee q) \leftrightarrow Vp \vee Vq \vee Wp \vee Wq$;

A5. $Y(p \vee q) \leftrightarrow Yp \wedge Yq$.

Sistemos M1 išvedimo taisyklės:

1) superpozicijos taisyklė: $\frac{? \mathcal{A}(p)}{? S_p^{\mathfrak{B}}[\mathcal{A}(p)]}$;

2) atskyrimo taisyklė: $\frac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$;

3) egzistencialumo taisyklė, leidžianti iš bet kurios išvedamos formulės, pakeičiant joje vienoje ar keliuose vietose bet kurią į tos formulės sudėtį įeinančią formulę jai ekvivalenčia, gauti išvedamą formulę:

$$\frac{? \mathcal{U}(A, \mathfrak{B}, \dots, B, \mathfrak{B}, \dots), ? \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}}{? \mathcal{U}(A, \mathfrak{C}, \dots, B, \mathfrak{B}, \dots)}.$$

Pagalbinis modalinis operatorius U sistemoje M1 apibrėžiamas (išreiškiamas per pagrindinius modalinius operatorius) formule $Up \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} Vp \vee Wp$.

Nesunku įsitikinti, kad naudodamiesi bet kuria 355-joje lentelėje pateikta kvalifikatorių „V“, „Y“, „W“ ir „U“ interpretacija bei teiginių skaičiavime priimta loginių jungčių „~“, „^“, „→“ ir „↔“ interpretacija, mes gausime, jog sistemos M1 visos aksiomos yra tapačiai teisingos formulės, o taip pat, jog sistemos M1 išvedimo taisyklės leidžia gauti iš tapačiai teisingų formulių tik tapačiai teisingas formules. Tai reiškia, jog sistema M1 yra kontensyviai („inhaltlich“) neprieštaringa. Nesunku įrodyti, kad ši sistema yra ir formaliai neprieštaringa.

Sistema M1 – gana silpna. Joje negali būti išvesta eilė formulių, išvedamų stipresnėse logikos sistemose.

Sistemoje M1 negali būti išvestos formulės $Vp \rightarrow p$, $p \rightarrow Up$, $Up \rightarrow \sim V \sim p$, $\sim V \sim p \rightarrow Up$, $Vp \rightarrow \sim U \sim p$, $\sim U \sim p \rightarrow Vp$, laikomos teisingomis ir išvedamomis daugelyje stipresnių modalinių sistemų. Pavyzdžiui, net tokioje silpnoje sistemoje, kokia yra mūsų šiame skyrelyje išnagrinėtoji sistema $S1^0$, laikoma, jog teiginys hp yra ekvivalentus teiginiui $\sim \Diamond \sim p$, t. y. toje sistemoje galioja formulė $Vp \leftrightarrow \sim U \sim p$. Kadangi Luiso sistemos $S1$, $S2$, $S3$, $S4$ ir $S5$, kaip jau matėme, gali būti gautos iš sistemos $S1^0$, papildant ją naujomis aksiomomis, tai formulė $Vp \leftrightarrow \sim \Diamond \sim p$ galioja ir visose tose sistemose. Tačiau ši formulė dar negali būti išvesta sistemoje M1. Sistemoje $S1$ formulė $p \rightarrow \Diamond p$ yra teorema, todėl toje sistemoje ir visose gautose iš jos stipresnėse sistemose yra išvedama formulė $p \rightarrow Up$, kuri tačiau dar nėra išvedama sistemoje M1.

Skaitytojui gali kilti klausimas, kam reikalinga tokia silpna sistema kaip M1. Ar nebūtų tikslinga pradėti bendrosios **stratifikuotos modalinių sistemų sistemos** kūrimą nuo stipresnės sistemos? Tačiau pasirodo, jog norint sukurti bendrąją formalizuotą modalinės logikos sistemą, kuri aprėptų visus 355-ojoje lentelėje pateiktus atvejus, tenka pradėti nuo pakankamai silpnos sistemos, nes stipresnės sistemos jau nebegalėtų atitikti kai kurių interpretacijų, kurios toje lentelėje intuityviai priskiriamos kvalifikatoriams V, Y, W ir U. Pavyzdžiui, **sistema, kurioje būtų išvedamos formulės $Vp \rightarrow p$ ir $p \rightarrow Up$, jau nebegalėtų būti formaliu deontinės logikos modeliu**, nes toje logikoje iš tos aplinkybės, jog privaloma įvykdyti veiksmus, kad teiginys p taptų teisingas, ne visada ir ne būtinai išplaukia, kad tokie veiksmai tikrai bus įvykdyti ir teiginys p tikrai taps teisingas. Teiginys Vp – tai tik normatyvinis reikalavimas, kuris kartais taip ir lieka nerealizuotas. Deontinėje interpretacijoje negali būti teorema ir formulė $p \rightarrow Up$, nes iš to fakto, kad įvyko įvykis, kurio rezultate teiginys p tapo teisingas, ne visada išplaukia, jog toks įvykis būtinai priklauso leidžiamų (leistinų) įvykių aibei, t. y., jog iš p teisingumo būtinai turėtų išplaukti teiginio Up teisingumas.

Taigi, norint sukurti bendrąją formalią modalinės logikos sistemą, kuri galėtų būti bet kurios konkrečios modalinės plačiąją prasme sistemos modeliu, tenka apsiriboti tik tokiomis aksiomomis, kurios būtų teisingos bet kurioje konkrečioje sistemoje. Formalios sistemos M1 aksiomos, kaip jau buvo minėta, šią sąlygą tenkina. Rekomenduočiau skaitytojui tai patikrinti, naudojantis 355-ojoje lentelėje pateiktomis kvalifikatorių V, W, Y ir U interpretacijomis.

Tačiau nors sistema M1 ir gana silpna, vis dėl to ir joje gali būti išvestos teoremos, kurių tarpe pasitaiko ir ne visai trivialių.

Pailiustruosiu kelių teoremų išvedimą sistemoje M1. Laikysiu, kad skaitytojas gerai išstudijavo 1.16.1.5.2. skyrelį, o taip pat kitus skyrelius, skirtus teoremų išvedimui formaliose sistemose, ir jau moka išvestinėti teoremas teiginių skaičiavime. Todėl, išvedinėdamas teoremas sistemoje M1, kai kurių elementarių išvedimo žingsnių jau nebevaizduosiu, iškart peršokdamas per kelis tokius žingsnius, to detaliai net nekomentuodamas, o tik pažymėdamas komentaro „Teiginių skaičiavimas“ santrumpa {TS}.

Pavyzdžiui, iš aksiomos A5. $\neg Y(p \vee q) \leftrightarrow Yp \wedge Yq$, naudojantis teiginių skaičiavimo matematiniu aparatu, beveik iškart gaunama teorema $\neg Y(p \vee q) \rightarrow Yp$, reiškianti, jog, pavyzdžiui, episteminėje įsitikinimų sistemoje (žiūr. 355-ąją lentelę) iš teiginio $p \vee q$ atmetimo išplaukia teiginio p (o taip pat ir teiginio q) atmetimas (kai tuo tarpu iš konjunkcijos $p \wedge q$ atmetimo ne būtinai išplaukia, jog reikia atmesti ir atskirą teiginį p , nes konjunkcija $p \wedge q$ gali būti atmesta ne tik todėl, kad neteisingas teiginys p , bet ir dėl kitų priežasčių, kada teiginys p atskirai gali būti ir teisingas).

Pasinaudojant aksioma A4, kvalifikatoriaus U apibrėžimu $Up \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} Vp \vee Wp$ ir egzistencialumo taisykle, išvedama teorema $\neg U(p \vee q) \leftrightarrow \neg Up \vee \neg Uq$, reiškianti, kad, pavyzdžiui, deontinėje sistemoje iš to, kad leidžiama $p \vee q$, išplaukia, jog leidžiama arba p atskirai, arba q atskirai (nors nedraudžiamas ir atvejis, kai bus ir p , ir q).

Išvesime šiek tiek sudėtingiau gaunamą teoremą $\neg Wp \rightarrow \neg Vp \wedge \neg Yp$, reiškiančią, pavyzdžiui, absoliučioje laiko logikoje, jog iš to, kad p būna teisingu teiginiu tik kai kada, išplaukia, kad teiginys p negali būti nei visada teisingu, nei visada neteisingu:

- 1) $\neg (Vp \wedge Wp) \wedge \neg (Wp \wedge Yp)$ {A1.};
- 2) $\neg (Vp \wedge Wp)$ {TS};
- 3) $\neg \neg Vp \vee \neg Wp$ {TS};
- 4) $\neg Wp \rightarrow \neg Vp$ {TS};
- 5) $\neg (Wp \wedge Yp)$ {TS, A1.};
- 6) $\neg Wp \rightarrow \neg Yp$ {TS};
- 7) $\neg Wp \rightarrow \neg Vp \wedge \neg Yp$ {TS: (4),(6)}.

Nors sistemoje M1 neišvedama teorema $\neg Vp \rightarrow p$, tačiau išvedama teorema $\neg Vp \rightarrow Up$, atitinkanti aletinės logikos teoremą) $\neg h p \rightarrow \Diamond p$:

- $\neg A \rightarrow A \vee B$ {TS};
- $\neg Vp \rightarrow Vp \vee Wp$ {superpozicija};
- $\neg Vp \rightarrow Up$ {egzistencialumo taisyklė ir Up apibrėžimas}.

Išvesime jau be komentarų dar ir teoremą $\neg Wp \rightarrow Up \wedge U \neg p$, kuri aletinėje modalinėje logikoje interpretuojama kaip teiginys, kad iš to, jog p – atsitiktinai teisingas teiginys, išplaukia, kad tas teiginys p gali būti teisingas, bet gali būti ir neteisingas:

- 1) $\neg A \rightarrow A \vee B$;
- 2) $\neg Wp \rightarrow Wp \vee Vp$;
- 3) $\neg Wp \rightarrow Up$;
- 4) $\neg W \neg p \rightarrow U \neg p$;
- 5) $\neg Wp \rightarrow W \neg p$;
- 6) $\neg W \neg p \rightarrow W \neg \neg p$;
- 7) $\neg W \neg p \rightarrow Wp$;
- 8) $\neg Wp \leftrightarrow W \neg p$;
- 9) $\neg Wp \rightarrow U \neg p$;
- 10) $\neg Wp \rightarrow Up \wedge U \neg p$.

Daugumoje modalinių sistemų stiprieji modaliniai kvalifikatoriai V ir Y nėra nepriklausomi, bet gali būti išreikšti vienas per kitą formulėmis, kurias galima laikyti vieno iš tų kvalifikatorių apibrėžimu, naudojantis kitu kvalifikatorium kaip pagrindiniu: $Yp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} V \neg p$, $Vp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} Y \neg p$.

Santykinėse modalinėse logikose šias formules atitinka formulės $pVq \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} qYp$ ir $pYq \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} qVp$, kuriose teiginiai pVq , qYp , pYq , qVp reiškia tą patį kaip ir teiginiai $V(p/q)$, $Y(q/p)$, $Y(p/q)$ ir $V(q/p)$. Lyginamojoje aksiologinėje modalinėje logikoje teiginys pVq interpretuojamas kaip „p geriau nei q“, teiginys qYp – kaip „q blogiau nei p“ ir t. t.

Priėmus apibrėžimą $Yp \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} V\sim p$ (arba apibrėžimą $Yp \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} V\sim p$), galima sumažinti pagrindinių modalinių operatorių (o kartu ir aksiomų) skaičių sistemoje.

Pavyzdžiui, sistemoje M1 aksiomą A5 tuomet galima pertvarkyti į aksiomą $?V\sim(p\vee q) \Leftrightarrow \sim V\sim p \wedge \sim V\sim q$, o šią – į $?V(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim V\sim p \wedge \sim V\sim q$. Pasinaudodami superpozicijos ir egzistencialumo taisyklėmis, gauname tokią naują aksiomos A5 redakciją $?V(p\wedge q) \Leftrightarrow Vp\wedge Vq$. Kaip matome, šioje redakcijoje aksioma A5 padengia aksiomą A3 ir todėl tą aksiomą iš sistemos M1 galima būtų tuomet eliminuoti. Ir atvirkščiai, jei sistemoje M1 pavyktų įrodyti teoremą $?Vp\wedge Vq \rightarrow V(p\wedge q)$, tai remiantis apibrėžimu $Yp \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} V\sim p$ ir aksioma A3 bei teiginių skaičiavimo teoremomis, būtų galima eliminuoti aksiomą A5.

Gaila tik, kad formalūs apibrėžimai $Yp \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} V\sim p$ ir $Vp \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Y\sim p$ ne visur pilnai atitinka tikrovę ir intuityvų kvalifikatorių V ir Y suvokimą. Pavyzdžiui, aksiologinėje absoliučiojoje logikoje vargu ar galima kategoriškai teigti, kad visa, kas nėra gėris, būtinai yra blogis, o visa, kas nėra blogis, yra gėris (matyt, šioje modalinėje logikoje kvalifikatoriai V ir Y nėra apibrėžiami vienas per kitą ir $Y\sim p$ reiškia ne Vp , o $Vp\vee Wp$). Todėl bendroji modalinė sistema M1, kuri turėtų tikti bet kurių modalumų (tame tarpe – ir aksiologinių) aprašymui, pateikiama pradžioje be apibrėžimų $Y\sim p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Vp$ bei $V\sim p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Yp$. Tik vėliau, stiprinant šią sistemą (o tuo pačiu metu – ir šiek tiek siaurinant jos taikymų sritį), vienas iš tų apibrėžimų gali būti prijungtas prie tos sistemos matematinio teoremų išvedimo aparato, paliekant pagrindiniu tik vieną kurį iš stipriųjų modalinių operatorių.

Sistemos M1 išvedimo aparatą galima stiprinti įvairiai, sudarant naujas modalines sistemas.

Papildę sistemos M1 aksiomas naujomis aksiomomis $?V\sim(Vp\wedge V\sim p)$ ir $?V\sim(Yp\wedge Y\sim p)$, išreiškiančiomis taip vadinamuosius **silpnuosius modalinio neprieštaringumo principus**, gausime jau šiek tiek stipresnę bendrąją modalinę sistemą, pavadintą sistema M2.

Šioje sistemoje jau išvedama žymiai daugiau turiningesnių teoremų.

Papildę sistemą M1 aksiomomis $?V\sim(Vp\wedge \sim p)$ ir $?V\sim(Yp\wedge \sim p)$, išreiškiančiomis taip vadinamuosius **stipriuosius modalinio neprieštaringumo principus**, gausime sistemą, vadinamą sistema M3.

Prijungę prie sistemos M1 aksiomų papildomą aksiomą $?Vp\vee Wp\vee Yp$, reiškiančią taip vadinamąjį **modalinio pilnumo principą**, gausime sistemą, vadinamą sistema M4.

Jei priimame, kad stiprieji modaliniai operatoriai V ir Y išreiškiami vienas per kitą, naudojantis jau minėtomis formulėmis ($Y\sim p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Vp$ arba $V\sim p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Yp$), tai modalinio pilnumo principą galima išreikšti ir trumpiau – viena iš šių trijų formulių:

1) $?V\sim p \rightarrow Up$, 2) $?VYp \rightarrow Up$, 3) $?Up\vee U\sim p$.

Papildę sistemą M2 aksioma, išreiškiančia modalinio pilnumo principą, ir laikydami, kad stiprieji modaliniai operatoriai V ir Y yra apibrėžiami vienas per kitą, gauname sistemą, vadinamą sistema M5.

Sistemoje M5 jau yra išvedama teorema $?Up \leftrightarrow \sim V \sim p$, kurią modalinėje logikoje siaurąja prasme atitinka formulė $? \Diamond p \leftrightarrow \sim h \sim p$, galiojanti daugumoje tos logikos sistemų.

Reikėtų pažymėti, kad ši formulė nėra išvedama ne tik sistemoje M1, bet ir sistemose M2, M3 bei M4. Todėl tik sistemoje M5 papildomas modalinis operatorius U gali vaidinti pagrindinio operatoriaus vaidmenį, t. y. tik sistemoje M5 visus modalinius operatorius galima išreikšti per operatorių U.

Sistemos M5 teoremų išvedimo aparatą atvejui, kai visi kiti modaliniai operatoriai išreiškiami per operatorių U ($Vp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \sim U \sim p$, $Yp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \sim Up$, $Wp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} Up \wedge U \sim p$) ir naudojamosi tik tuo vienu operatorium, galima gauti, prijungus prie klasikinio teiginių skaičiavimo aksiomų dvi specialias modalinės logikos aksiomas A1. $?Up \vee U \sim p$ ir A2. $?U(p \vee q) \leftrightarrow Up \vee Uq$ bei tris išvedimo taisykles, sutampančias su sistemos M1 išvedimo taisyklėmis.

Atitinkamai interpretuodami kvalifikatorius V, Y, W ir U, sistemas M1, M2, M3, M4, ir M5 bei jų teoremų išvedimo matematinį aparatą galime taikyti įvairioms konkrečioms modalinėms sistemoms, tame tarpe ir sistemoms išvardintoms 355-ojoje lentelėje.

Modaliniais operatoriais ir juos apibrėžiančiomis modalinės logikos aksiomomis bei išvedimo taisyklėmis galima papildyti ne tik asertorinį teiginių skaičiavimą, bet ir predikatų skaičiavimą gaunant tokiu būdu **modalines predikatų skaičiavimo sistemas**. Tokiose sistemose susiduriama su papildomomis problemomis, ypač su problemomis, išskylančiomis nustatant modalinių operatorių ir kvantorių sąveikavimo rezultatus, kur įvairių logikų nuomonės ne visada sutampa.

Pavyzdžiui R. Barkan (R. Barcan) ir R. Kanapas (R. Carnap) laikė išvedama formulę $\exists x P(x) \rightarrow \rightarrow \exists x \Diamond P(x)$, kurią dabar dažnai vadina Rūtos Barkan aksioma. Iš jos tiesiogiai išplaukia formulės $\Diamond \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x \Diamond P(x)$, $h \forall P(x) \leftrightarrow \forall x h P(x)$, $\Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$ ir $\exists x h P(x) \rightarrow h \exists x P(x)$.

Tuo tarpu daugelis logikų (Kvainas, fon Raitas, Hintika, Kripke ir kiti) nelaiko tų formulių absoliučiomis loginėmis tiesomis, pateikdami konkrečių pavyzdžių, keliančių abejones tų formulių nepriekaištingumu, ir konstruoja logines sistemas, kuriose Barkan formulė ir iš jos išplaukiančios išvados negalėtų būti tų sistemų teoremomis.

Modalinės logikas galima turtinti ir turtinant jų kalbą, t. y. įvedant į tose logikose konstruojamas ir išvedamas formules papildomas komponentes (pavyzdžiui, komponentes, vaizduojančias veiksmus, tuos veiksmus privalančius bei galinčius vykdyti subjektus ir pan.).

Kaip konkretų tokio modalinių logikų formaliosios kalbos ir išvedimo aparato praturtinimo pavyzdį pateiksiu vieną tokiu būdu praturtintos **normatyvinės veiksmų logikos** variantą, leidžiantį **formalizuoti subjektų normatyvinio elgesio aprašymą** ir tokiu būdu kurti šiek tiek turiningesnius formalius normatyvinius pareigūnų modelius, lyginant su tais, kuriuos nagrinėjome 1.16.1.2.4. ir 1.16.1.3.5. skyreliuose.

Šiame normatyvinės logikos variante veiksmus žymėsime mažosiomis graikiškosiomis raidėmis $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, tų veiksmų subjektus – mažosiomis lotyniškosiomis raidėmis $x, y, z, \dots$, o modalinius kvalifikatorius „privalo daryti“, „gali daryti ir nedaryti“, „turi teisę daryti“ – didžiosiomis lotyniškosiomis raidėmis P, G ir T. Kitas didžiasias lotyniškas raides (su indeksais ir be jų) vartosime vienviečių predikatų žymėjimuose, pavyzdžiui: $Q(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots$.

Nagrinėsime penkis normatyvinių veiksmų α rūšis:

- 1) veiksmus, kuriuos subjektai x **privalo daryti**, formaliai aprašydami juos formule $Px\alpha$;
- 2) veiksmus, kuriuos subjektai x **privalo nedaryti**, aprašydami juos formule $Px\bar{\alpha}$;
- 3) veiksmus, kuriuos subjektai x **gali daryti, bet gali ir nedaryti**, aprašydami juos formule $Gx\alpha$;
- 4) veiksmus, kuriuos subjektai x **turi teisę daryti**, aprašydami juos formule $Tx\alpha$;
- 5) veiksmus, kuriuos subjektai x **turi teisę nedaryti**, aprašydami juos formule $Tx\bar{\alpha}$.

Sudėtingesnėse formulėse galima dar didesnė neigimų įvairovė. Pavyzdžiui, iš formulės $PQ(x)R(\alpha)$, naudojantis neigimo operacija, galima gauti formules $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$, $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$, $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$, $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$, $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$ ir t. t. Formulės $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$, $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$ ir $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$ yra skirtingos: pirmoji formulė teigia, jog tie subjektai x , kurie turi požymį Q , privalo vykdyti veiksmus, neturinčius požymio R , antroji – kad tie subjektai privalo nedaryti veiksmų, turinčių požymį R , o trečioji – jog tie subjektai privalo nedaryti tų veiksmų α , kurie neturi požymio R .

Formulėje $PQ(x)R(\alpha)$ mes išbandėme visus neigimo variantus, išskyrus tuos, kada neigimo ženklas dedamas virš raidės x . Panagrinėsime, kaip galima būtų interpretuoti formulę $PQ(\bar{x})R(\alpha)$. Šios formulės interpretacija galėtų būti tokia „Ne tie subjektai x , kurie turi požymį Q , privalo vykdyti veiksmą α , turintį požymį R “. Klasikiniu atveju $Q(\bar{x}) \leftrightarrow \overline{Q(x)}$, todėl formulę $PQ(\bar{x})R(\alpha)$ klasikinėje logikoje susiveda į formulę $\overline{PQ(x)R(\alpha)}$, kurios interpretaciją jau nagrinėjome. Kadangi subjektų x neigimas klasikinėje logikoje neduoda nieko naujo, tai formulių su neigimo ženklu virš raidžių x, y, z ir t. t. mes čia toliau jau nebeagrinėsime.

Formulės $Px\alpha$, $Px\bar{\alpha}$, $Gx\alpha$, $Gx\bar{\alpha}$, $Tx\alpha$, $Tx\bar{\alpha}$, $\bar{P}x\alpha$, $\bar{P}x\bar{\alpha}$, $\bar{G}x\alpha$, $\bar{G}x\bar{\alpha}$, $\bar{T}x\alpha$, $\bar{T}x\bar{\alpha}$, $\overline{P}x\alpha$, $\overline{P}x\bar{\alpha}$ ir t. t. klasikinėje logikoje reiškia pastovius dviviečius (dviejų kintamųjų x ir α) predikatų. Konkrečiose situacijose, kai įvardijami konkretūs subjektai x ir konkretūs normatyviniai veiksmai α , tie predikatai tampa pastoviais teiginiais, turinčiais logines reikšmes „1“ („tiesa“) arba „0“ („netiesa“).

Nesunku įsitikinti, jog klasikinėje logikoje, neskiriančioje vidinio neigimo nuo išorinio, yra teisingos formulės $\overline{Px\alpha} \leftrightarrow \bar{P}x\alpha$, $\overline{Px\bar{\alpha}} \leftrightarrow \bar{P}x\bar{\alpha}$, $\overline{Gx\alpha} \leftrightarrow \bar{G}x\alpha$, $\overline{Gx\bar{\alpha}} \leftrightarrow \bar{G}x\bar{\alpha}$, $\overline{Tx\alpha} \leftrightarrow \bar{T}x\alpha$, $\overline{Tx\bar{\alpha}} \leftrightarrow \bar{T}x\bar{\alpha}$, o taip pat formulė $Gx\alpha \leftrightarrow Gx\bar{\alpha}$ bei iš jos išplaukianti formulė $\bar{G}x\alpha \leftrightarrow \bar{G}x\bar{\alpha}$.

Todėl, norint aprašyti elementarių teiginių, gaunamų iš nagrinėjamos normatyvinės logikos elementarių predikatų $Px\alpha$, $Px\bar{\alpha}$, $Gx\alpha$ ir t. t., logines reikšmes, kurias jie gauna konkrečioje situacijoje, pakanka išnagrinėti **tris pagrindines situacijas**, kada subjektai x privalo daryti veiksmus α , kada jie privalo tų veiksmų nedaryti ir kada tie subjektai tuos veiksmus gali daryti ar nedaryti, ir nustatyti tose situacijose formulių $Px\alpha$, $Px\bar{\alpha}$, $\bar{P}x\alpha$, $\bar{P}x\bar{\alpha}$, $Gx\alpha$ ir $\bar{G}x\alpha$ logines reikšmes. Jos pavaizduotos 356-joje lentelėje. Toje lentelėje pavaizduotos ir pagalbinių formulių $Tx\alpha$, $Tx\bar{\alpha}$, $\bar{T}x\alpha$ ir $\bar{T}x\bar{\alpha}$ loginės reikšmės, nors pastarąsias buvo galima apskaičiuoti, naudojantis jau minėtomis formulėmis $Tx\alpha \leftrightarrow Px\alpha \vee Gx\alpha$ ir $Tx\bar{\alpha} \leftrightarrow Px\bar{\alpha} \vee Gx\bar{\alpha}$ bei iš jų išplaukiančiomis formulėmis $\bar{T}x\alpha \leftrightarrow \bar{P}x\alpha \wedge \bar{G}x\alpha$ ir $\bar{T}x\bar{\alpha} \leftrightarrow \bar{P}x\bar{\alpha} \wedge \bar{G}x\bar{\alpha}$.

356. lentelė

Konkreči situacija	$Px\alpha$	$Px\bar{\alpha}$	$\bar{P}x\alpha$	$\bar{P}x\bar{\alpha}$	$Gx\alpha$	$\bar{G}x\alpha$	$Tx\alpha$	$Tx\bar{\alpha}$	$\bar{T}x\alpha$	$\bar{T}x\bar{\alpha}$
x privalo daryti α	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
x privalo nedaryti α	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
x gali daryti ir nedaryti α	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0

Analizuodami šią lentelę galime nustatyti eilę papildomų priklausomybių tarp elementarių modalinių normatyvinės logikos predikatų: $Px\alpha \leftrightarrow \bar{T}x\bar{\alpha}$, $Px\bar{\alpha} \leftrightarrow \bar{T}x\alpha$, $\bar{P}x\alpha \leftrightarrow Tx\bar{\alpha}$, $\bar{P}x\bar{\alpha} \leftrightarrow Tx\alpha$, $Gx\alpha \leftrightarrow (Tx\alpha \wedge Tx\bar{\alpha})$, $\bar{G}x\alpha \leftrightarrow (Px\alpha \vee \bar{T}x\alpha) \leftrightarrow (Px\bar{\alpha} \vee \bar{T}x\bar{\alpha})$, $Px\alpha \rightarrow Tx\alpha$, $Px\bar{\alpha} \rightarrow Tx\bar{\alpha}$, $Gx\alpha \rightarrow Tx\alpha$, $Gx\alpha \rightarrow Tx\bar{\alpha}$, $Px\alpha \rightarrow Px\bar{\alpha}$, $Px\bar{\alpha} \rightarrow \bar{P}x\alpha$, $Px\alpha \rightarrow \bar{G}x\alpha$, $Px\bar{\alpha} \rightarrow \bar{G}x\alpha$, $\bar{T}x\alpha \rightarrow Tx\bar{\alpha}$, $\bar{T}x\bar{\alpha} \rightarrow Tx\alpha$. Taip pat galime nustatyti, kad visada yra teisingos šios formulės: $Tx\alpha \vee Tx\bar{\alpha}$, $Px\alpha \vee Tx\bar{\alpha}$, $Px\bar{\alpha} \vee Tx\alpha$, $\bar{P}x\alpha \vee \bar{P}x\bar{\alpha}$, $\bar{P}x\alpha \vee \bar{G}x\alpha$, $\bar{P}x\alpha \vee Tx\alpha$, $\bar{P}x\alpha \vee \bar{T}x\bar{\alpha}$, $\bar{P}x\bar{\alpha} \vee \bar{G}x\alpha$, $\bar{P}x\bar{\alpha} \vee Tx\bar{\alpha}$, $\bar{P}x\bar{\alpha} \vee \bar{T}x\alpha$. Visada teisingos ir formulės, tiesiogiai išplaukiančios iš trečiojo negalimo dėsnio, t. y. formulės: $Px\alpha \vee \bar{P}x\alpha$, $Px\bar{\alpha} \vee \bar{P}x\bar{\alpha}$, $Gx\alpha \vee \bar{G}x\alpha$, $Tx\alpha \vee \bar{T}x\alpha$, $Tx\bar{\alpha} \vee \bar{T}x\bar{\alpha}$.

Rekomenduojau skaitytojui pabandyti interpretuoti visas čia pateiktas visada teisingas formules ir įsitikinti, kad intuityviai visos šios formulės gali būti tik teisingos ir išreiškia atitinkamus logikos dėsnius, galiojančius normatyvinėje veiksmų logikoje.

Taip pat rekomenduočiau iš šių formulių atrinkti tas, iš kurių, naudojantis predikatų skaičiavimo teoremų išvedimo aparatu (aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis), būtų galima išvesti visas likusias teisingas normatyvinės veiksmų logikos formules. Atrinktasias formules būtų galima laikyti normatyvinės veiksmų logikos specifinėmis aksiomomis, kurias prijungę prie predikatų skaičiavimo teoremų išvedimo aparato bei atitinkamai papildę kai kurias predikatų skaičiavimo išvedimo taisykles

(pavyzdžiui, superpozicijos, surišimo kvantoriais) gautume **aksiomatinę normatyvinės veiksmų logikos sistemą**.

Naudodamiesi formalizuota tokios logikos kalba, galėtume tos kalbos formulėmis aprašyti visą eilę juridinių ir moralės normų, o po to, naudodamiesi normatyvinės veiksmų logikos matematiniu aparatu, nagrinėti iš tų normų išplaukiančias išvadas, tikrinti juridinių ir moralės normų neprieštaringumą ir pilnumą. Normatyvine veiksmų logika, kaip jau buvo minėta, galima naudotis ir konstruojant pareigūnų normatyvinius modelius.

Susipažinus su normatyvinės veiksmų logikos pavyzdžiu, būtų naudinga susipažinti ir su **normatyvinės sąveikavimo logikos** pavyzdžiu, iliustruojančiu, kaip galima formaliai aprašyti įvairių subjektų („juridinių asmenų“) sąveikavimą reglamentuojančias juridines normas bei iš jų išplaukiančias išvadas.

Juridinių subjektų, kuriuos sutrumpintai vadinsime tiesiog subjektais (jais gali būti ir atskiri individai ir jų grupės – „juridiniai asmenys“) ir žymėsime mažosiomis lotyniškėmis raidėmis x , y , z (be indeksų ar su jais), sąveikavimą, koks sudėtingas jis bebūtų, galima (bent jau sąlyginai) dekomponuoti į elementarius aktus, sudarytus iš vieno subjekto tam tikro poveikio į kitą subjektą ir iš pastarojo reakcijos (atoveiksmio) į pirmojo subjekto poveikį. Tuomet dviejų subjektų sąveikavimą galima laikyti tokių **elementarių aktų, sudarytų iš poveikio ir atoveiksmio, grandinės grandimi**.

Pirmojo subjekto (subjekto x) juridiniai poveikiai į antrąjį subjektą, kurį vadinsime subjektu y , gali pasireikšti dviem būdais:

1) subjektas x veikia subjektą y , reikalaudamas, jog pastarasis įvykdytų subjekto x pageidaujamą veiksmą, charakterizuojamą tuo, kad tokio įvykdymo pasekoje atitinkamas teiginys p tampa (arba išlieka) teisingu teiginiu;

2) subjektas x veikia subjektą y stengdamasis apriboti pastarojo veiklą ir galimybes taip, kad šis neįvykdytų veiksmo, kurio nepageidauja subjektas x , ir to pasekoje susidarytų situacija, charakterizuojama tuo, jog atitinkamas teiginys p išlieka (ar tampa) teisingu teiginiu.

Pirmojo tipo poveikius priimta vadinti **reikalavimais**. Jų formalium modeliu laikysime nehomogeninę loginę funkciją – pastovų trivietį predikatą $Rxy(p)$, priklausantį nuo dviejų objektinių kintamųjų x ir y bei nuo propozicinio kintamojo p . **Formulė $Rxy(p)$** reiškia frazė: „Subjektas x reikalauja iš subjekto y įvykdyti veiksmą, kurio pasekoje teiginys p tampa (išlieka) teisingu teiginiu“. Pirmojo tipo poveikio pavyzdys: „Kreditorius reikalauja iš skolininko y , kad šis nustatytu laiku grąžintų skolą“. Čia reikalaujamas veiksmas yra skolos grąžinimas nustatytu laiku, o teiginys p yra teiginys „Skolininko y skola kreditoriui x grąžinta nustatytu laiku“.

Antrojo tipo poveikius vadinsime **apribojimais**, o jų formalium modeliu laikysime **formulę $Axy(p)$** , reiškiančią, kad subjektas x stengiasi taip apriboti subjekto veiklą bei galimybes, kad atitinkamas teiginys p išliktų (taptų) teisingu teiginiu. Antrojo tipo poveikio pavyzdžiai: 1) „Policininkas x areštuoja nusikaltėlį y nusikaltimo vietoje, kad šis negalėtų pasislėpti bei sunaikinti nusikaltimo įkalčių“; 2) „Teisiamasis x prašo nušalinti teisėją y nuo bylos nagrinėjimo, kad šis, būdamas asmeniu, suinteresuotu neobjektyviu bylos sprendimu, negalėtų šališkai paveikti bylos nagrinėjimo eigą“. Pirmuoju atveju subjekto y veikla apribojama taip, kad šis negalėtų pasislėpti bei sunaikinti nusikaltimo įkalčių, o teiginys p yra teiginys „Nusikaltėlis negali pasislėpti ir sunaikinti nusikaltimo įkalčių“. Antruoju atveju subjekto y veiklą ir galimybes stengiamasi apriboti taip, kad šis negalėtų šališkai paveikti bylos eigos ir jos svarstymo rezultato – teismo nuosprendžio. Teiginys p šiuo atveju yra teiginys „Šališkas teisėjas negali paveikti nagrinėjamos bylos eigos ir jos svarstymo rezultato“.

Subjekto y reakcija (atoveiksmis) į pirmojo tipo poveikį, aprašomą formule $Rxy(p)$, gali pasireikšti dvejopai:

1) subjektas y gali patenkinti subjekto x reikalavimą, įvykdydamas pastarojo pageidaujamą veiksmą, kurio rezultate teiginys p tampa (išlieka) teisingu teiginiu;

2) subjektas y gali pasielgti ir atvirkščiai – nepatenkinti subjekto x reikalavimo, jį atmesdamas ar ignoruodamas, t. y. neįvykdyti to veiksmo, kurio pageidauja subjektas x .

Pirmąją subjekto y atoveiksmio į poveikį $Rxy(p)$ rūšį, kurią galima laikyti ir subjekto y poveikiu į subjektą x , vadinsime **tenkinimu**. Jo formalium modeliu laikysime **predikatą $Tyx(p)$** , reiškiantį, jog subjektas y , tenkindamas subjekto x reikalavimą, vykdo jo pageidaujamą veiksmą, kurio pasekoje teiginys p tampa (išlieka) teisingu teiginiu. Atoveiksmio $Tyx(p)$ pavyzdys: „Skolininkas y laiku grąžina kreditoriui x savo skolą ir todėl teiginys p , teigiantis, kad skola grąžinta laiku, tampa teisingu teiginiu“.

Antrąją atoveiksmio į poveikį $Rxy(p)$ rūšį, kaip priešingą pirmajai atoveiksmio rūšiai, vadinsime **netenkinimu**. Ją galima aprašyti formule $\overline{Tyx(p)}$, reiškiančia, kad subjektas y netenkina subjekto x reikalavimo ir nevykdo jo pageidaujamo veiksmo. Dvireikšmėje logikoje formulė $\overline{Tyx(p)}$

yra ekvivalenti formulei $\overline{T}yx(p)$, todėl ir šią formulę galima laikyti galimu atoveiksmio į poveikį $Rxy(p)$ modeliu. Dvireikšmėje logikoje jokių kitų atoveiksmių (išskyrus jau minėtus – $Tyx(p)$ ir $\overline{T}yx(p)$) į poveikį $Rxy(p)$ būti negali. Atoveiksmio $\overline{T}yx(p)$ pavyzdys: „Skolininkas y neatsižvelgia į kreditoriaus x reikalavimą ir laiku negrąžina jam savo skolos“.

Subjekto y reakcija į antrojo tipo poveikį $Axy(p)$ taip pat gali pasireikšti dvejopai:

1) subjektas y gali sutikti su subjekto x jam primetamais apribojimais ir, priimdamas juos, nevykdyti to veiksmo, kurio pastarasis nepageidauja;

2) subjektas y gali pasielgti ir priešingai – ignoruoti tuos apribojimus, kuriuos subjektas x stengiasi jam primesti, nesutikti su jais, atmesti juos.

Pirmuoju atveju atoveiksmį į poveikį $Axy(p)$ vadinsime **sutikimu (apribojimų priėmimu)** ir vaizduosime **formule $Syx(p)$** , reiškiančia, kad subjektas y sutinka su subjekto x primetamais apribojimais ir nevykdo to veiksmo, kurio pastarasis nepageidauja, o todėl teiginys p išlieka (tampa) teisingu teiginiu. Atoveiksmio $Syx(p)$ pavyzdžiai: 1) „Nusikaltėlis y paklūsta policininko valiai ir leidžiasi areštuojamas, tuo pačiu prarasdamas galimybę pasislėpti ir sunaikinti nusikaltimo įkalčius“; 2) „Teisėjas y priima teisiamojo x pareiškimą ir sutinka būti nušalintas nuo dalyvavimo bylos eigoje, tuo pačiu prarasdamas galimybę šališkai paveikti bylos svarstymą bei teismo nuosprendį“.

Antruoju atveju atoveiksmį į poveikį $Axy(p)$ tenka vadinti **nesutikimu** ir vaizduoti **formule $\overline{S}yx(p)$ (arba formule $\overline{S}yx(p)$)**. Atoveiksmio $\overline{S}yx(p)$ pavyzdžiai: 1) „Nusikaltėlis nesutinka būti areštuojamas ir priešinasi policininkui, bandydamas pabėgti ir pasislėpti“; 2) „Teisėjas y nesutinka su teisiamojo x pareikštais teiginiais, argumentuojančiais teisėjo nušalinimo tikslingumą, ir stengiasi apeliuoti į kitus teismo narius, kad šie atmestų teisiamojo x pretenziją kaip nepagrįstą“.

Formulės $Rxy(p)$ ir $Axy(p)$ taip pat gali turėti savo neiginius $\overline{R}xy(p)$ ir $\overline{A}xy(p)$, dvireikšmėje logikoje ekvivalentūs formulėms $\overline{R}xy(p)$ ir $\overline{A}xy(p)$, reiškiančioms (atitinkamai), kad subjektas x nepateikia subjektui y reikalavimo vykdyti veiksmą, kurio pasekoje teiginys p taptų (išliktų) teisingu teiginiu, ir kad subjektas x nesistengia taip apriboti subjekto y veiklos bei galimybių, jog pastarasis neįvykdytų subjektui x nepageidaujamo veiksmo, o palieka jam (t. y. subjektui y) galimybę elgtis nevaržomai.

Kaip jau buvo minėta, formules $Rxy(p)$, $Axy(p)$, $Txy(p)$, $Sxy(p)$, $Syx(p)$, $Tyx(p)$, o taip pat formules $\overline{R}xy(p)$, $\overline{A}xy(p)$, $\overline{T}yx(p)$ ir $\overline{S}yx(p)$ galima laikyti nehomogeninėmis loginėmis funkcijomis – savo rūšies pastoviais triviečiais predikatais, kurių loginės reikšmės priklauso nuo objektinių kintamųjų x ir y bei nuo propozicinio kintamojo p. Įstačius vietoj x ir y konkrečių subjektų vardus, vienareikšmiškai identifikuojančius tuos subjektus, o vietoj p – atitinkamus konkrečius teiginius, iš minėtųjų triviečių predikatų būtų gauti pastovūs lokalūs teiginiai, kurie tam tikrose situacijose ir tam tikrais momentais galėtų būti teisingi, o kitose situacijose bei kitais momentais – neteisingi. Minėtus predikatus galima paversti pastoviais teiginiais ir surišant kintamuosius x, y ir p bendrumo bei egzistavimo kvantoriais.

Iš formulių $Rxy(p)$, $Axy(p)$, $Txy(p)$ ir $Tyx(p)$ galime gauti sudėtingesnes formules $RQ_1(x)Q_2(y)(p)$, $RQ(x, y)(p)$, $AQ_1(x)Q_2(y)(p)$, $AQ(x, y)(p)$ ir t. t., išskiriančias iš subjektų x ir y aibių jų poaibių $\langle Q_1(x) \rangle$, $\langle Q_2(y) \rangle$, $\langle Q(x, y) \rangle$ pagal tų poaibių elementų požymius Q_1 , Q_2 ir Q , galinčius reikšti tam tikras subjektų x ir y savybes bei santykius tarp jų. Pavyzdžiui, formulė $RQ_1(x)Q_2(y)(p)$ reiškia, jog subjektas x, priklausantis poaibiui $\langle Q_1(x) \rangle$, t. y. tenkinantis predikatinę lygtį $Q_1(x)=1$, reikalauja iš subjekto y, priklausančio poaibiui $\langle Q_2(x) \rangle$, kad pastarasis įvykdytų tokį veiksmą, kurio įvykdymo pasekoje teiginys p taptų (išliktų) teisingu teiginiu. Analogiškai gali būti interpretuojama ir formulė $RQ(x, y)(p)$, kurioje Q gali reikšti ne tik kokią nors bendrą subjektų x ir y savybę, bet ir kokią tai santykį tarp jų. Panašiai gali būti interpretuojamos ir visos kitos subjektų sąveikavimo logikos formulės, kuriose subjektai charakterizuojami tam tikromis savybėmis bei santykiais, panaudojant tam predikatus. Teiginiai p tose formulėse taip pat gali būti ne tik elementarūs bet ir sudėtingi, t. y. gali būti sudaryti iš elementarių teiginių, sujungtų loginėmis jungtimis. Pavyzdžiui, formulė $TxQ(y)(p \rightarrow q \wedge \bar{r})$ reiškia, jog subjektas x tenkina subjekto y, priklausančio poaibiui $\langle Q(y) \rangle$, reikalavimus ir daro tokį veiksmą, kad teiginys $p \rightarrow q \wedge \bar{r}$ taptų (išliktų) teisingu teiginiu.

Atkreipsiu dėmesį į dar vieną šiek tiek sudėtingesnę subjektų sąveikavimą aprašančių sudėtingesnių formulių konstravimo būdą – konstravimą tokių formulių, kurios vaizduoja atvejus, kada vieni sąveikavimo operatoriai patenka į kitų sąveikavimo operatorių veikimo sferą. Pailiustruosiu tai tokiu būdu gautų formulių pavyzdžiais: $Axy(Tyz(p))$, $Sxy(Ayz(Tzx_1(p)))$ ir pan.

Formulė $Axy(Tyz(p))$ reiškia, jog subjektas x, apribodamas subjekto y veiklą, uždraudžia pastarajam tam tikrą veiksmą, kad to pasekoje formulė $Tyz(p)$ taptų teisinga, t. y., kad subjektas y, tenkindamas subjekto z reikalavimus, padarytų tokį veiksmą, kuris užtikrintų teiginio p teisingumą.

Antroji formulė, t. y. formulė $Sxy(Ayz(Tzx_1(p)))$, iššifruojama taip: subjektas x sutinka su jam subjekto y primestu apribojimu, nedarydamas subjektui y nepageidaujamo veiksmo, ir to pasekoje formulė $Ayz(Tzx_1(p))$ išlieka (arba tampa) teisinga, o tai reiškia, jog tuo atveju subjektas y apriboja subjekto z veiklą bei galimybes taip, kad išlieka (arba tampa) teisinga formulė $Tzx_1(p)$, reiškianti, jog subjektas z, tenkindamas subjekto x_1 reikalavimą, padaro tokį veiksmą, kad teiginys p tampa (arba išlieka) teisingu teiginiu.

Panašiu būdu gali būti sudarytos ir interpretuotos dar sudėtingesnės formulės, aprašančios dar sudėtingesnę didelės subjektų grupės sąveikavimą, kurį aprašyti natūralios kalbos žodžiais būtų jau gana sunku, nes tektų konstruoti gana gremėzdiškas sakinių grandines. Palyginkite ką tik nagrinėtą formulę $Sxy(Ayz(Tzx_1(p)))$ su tais sakiniais, kurių prireikė tos formulės iššifravimui, ir pabandykite padaryti iš to palyginimo išplaukiančias išvadas. Manau, jog sutiksite, kad **gana dažnai formulių kalba būna ne tik vienareikšmiškesnė (apibrėžtesnė), bet ir kompaktiškesnė bei aiškesnė (lengviau apžvelgiama ir greičiau suprantama) už natūraliąją kalbą.** Todėl ir kuriami sudėtingų sunkiai apžvelgiamų situacijų formalūs modeliai ir su jais eksperimentuojama (pavyzdžiui, vykdomi matematiniai eksperimentai su sudėtingais imitaciniais modeliais), nes tai leidžia lengviau ir greičiau pamatyti tai, kas toje sunkiai apžvelgiamoje situacijoje mums galėtų būti aktualu. Dar ryškiau formalios kalbos ir formalus matematinio aparato bei matematinio modeliavimo (tame tarpe – ir imitacinio modeliavimo) pranašumai, lyginant su natūraliomis kalbomis ir mąstymo procesais, vykstančiais natūraliomis kalbomis, pasireiškia tada, kai susiduriama su neapžvelgiamomis situacijomis, kurių formalūs modeliai gali būti sudaryti jau tik kolektyvinėmis pastangomis ir per gana ilgą laiką. Tačiau tai nereiškia, kad formalus modeliavimas pajėgus išstumti induktyvaus mąstymo poreikį ir nustelbti induktyvų mąstymą bei intuiciją. Neretai induktyvus mąstymas ir intuicija leidžia pastebėti ir rasti tai, ką gauti formaliais dedukciniais metodais būtų žymiai sunkiau ar iš viso neįmanoma. Ir tai ne tik pasitaiko, bet, kaip tai išplaukia iš jau daug kartų minėtos Giodelio teoremos apie sudėtingų formalų sistemų nepilnumą, yra neišvengiama. Todėl labai svarbu mokėti derinti formalų ir neformalų metodų naudojimą, mokėti sudėtingoje situacijoje pasirinkti tuos metodus, kurie tuo atveju yra efektyvesni, o taip pat nuolat lavinti dedukcinio ir indukcinio mąstymo įgūdžius bei intuiciją.

Tačiau grįžkime prie subjektų sąveikavimą aprašančių formulių. Kadangi tos formulės yra predikatai, tai su jomis galima daryti įvairias logines operacijas: neigimą, konjunkciją, disjunkciją, galima jas jungti implikacijos, Vebo funkcijos, Šeferio štricho ir t. t. ženklais, jų argumentus galima suriši egzistavimo ir bendrumo kvantoriais.

Jau anksčiau buvo pažymėta, kad visos formulės $Rxy(p)$, $Axy(p)$, $Syx(p)$ ir $Tyx(p)$ neigimą dvireikšmėje logikoje galima pakeisti sąryšio operatorių R , A , T ir S neiginiu, t. y. formulę $Rxy(p)$ galima pakeisti jai ekvivalenčia formule $\bar{R}xy(p)$ ir t. t.

Tačiau galimi ir kitokie sąveikos formulių neigimo variantai. Pavyzdžiui, iš formulės $RQ_1(x)Q_2(y)(p)$ galima gauti ne tik formulę $\bar{R}Q_1(x)Q_2(y)(p)$, bet ir formules $\bar{R}Q_1(x)Q_2(y)(p)$, $RQ_1(x)\bar{Q}_2(y)(p)$, $RQ_1(x)Q_2(y)(\bar{p})$, $\bar{R}Q_1(x)\bar{Q}_2(y)(p)$, $\bar{R}Q_1(x)Q_2(y)(\bar{p})$, $RQ_1(x)\bar{Q}_2(y)(\bar{p})$, o taip pat ir formules $\bar{R}\bar{Q}_1(x)Q_2(y)(p)$, $\bar{R}Q_1(x)\bar{Q}_2(y)(p)$, $\bar{R}Q_1(x)Q_2(y)(\bar{p})$, $\bar{R}\bar{Q}_1(x)\bar{Q}_2(y)(p)$, $\bar{R}\bar{Q}_1(x)Q_2(y)(\bar{p})$, $\bar{R}Q_1(x)\bar{Q}_2(y)(\bar{p})$. Analogiškai transformacijas galima daryti ir su formule $AQ_1(x)Q_2(y)(p)$ bei su kitomis subjektų sąveikavimą aprašančiomis formulėmis. Tokiu būdu gautų formulių interpretavimą palieku skaitytojui.

Sąveikavimo logikos formulių jungimas loginėmis jungtimis į sudėtingesnes formules niekuo nesiskiria nuo jau mums įprasto teiginių ir predikatų jungimo į sudėtingus teiginius ir predikatus. Taip pat niekuo nesiskiria ir sąveikavimo formulių kintamųjų surišimo kvantoriais operacijos.

Iš to, kas čia buvo pasakyta apie subjektų sąveikavimą aprašančias formules ir logines operacijas su jomis, išplaukia, jog **gali egzistuoti speciali predikatų algebros dalis – sąveikavimo logikos algebra**, kurioje galioja visi predikatų algebros dėsniai, o be to dar gali galioti ir specifiniai sąveikavimo logikos algebros dėsniai, pavyzdžiui, tokie kaip $\bar{Rxy}(p) \leftrightarrow Rxy(p)$, $Rxy(p) \rightarrow (Tyx(p) \vee \bar{T}xy(p))$ ir pan.

Įvesdami modalumo operatorius V , Y , W ir U į predikatų algebrą bei predikatų skaičiavimą, t. y. kvalifikuodami tais operatoriais tuos ar kitus predikatus bei teiginius, mes gauname **modalinę predikatų algebrą** bei **modalinį predikatų skaičiavimą**. Įvesdami minėtuosius operatorius į sąveikavimo logikos algebrą, mes gauname specifinę modalinės predikatų algebros dalį – **modalinę sąveikavimo logikos algebrą**.

Suteikdami modaliniams operatoriams deontinę interpretaciją, t. y. interpretuodami operatorių „V“ kaip „privaloma“, operatorių „Y“ – kaip „draudžiama“, operatorių „W“ – kaip „normatyviai neutralu“ (t. y. „nei privaloma, nei draudžiama“), o operatorių „U“ – kaip „normatyviai leidžiama“ (t. y. tai, ką „subjektai turi teisę daryti“), mes iš bendrosios modalinės sąveikavimo logikos algebros gauname jos specifinę rūšį – **normatyvinės sąveikavimo logikos algebrą**. Toje algebroje galioja ne tik visi bendrosios modalinės predikatų algebros dėsniai (t. y. visi asertorinės predikatų algebros dėsniai + specifiniai modaliniai dėsniai, t. y. specifinės bendrosios modalinės predikatų algebros teoremos), bet ir eilė specifinių normatyvinės sąveikavimo logikos dėsnų, tokių kaip $URxy(p) \leftrightarrow VTyx(p)$, $UAXy(p) \leftrightarrow VSYx(p)$, $\overline{V}Rxy(p) \leftrightarrow U\overline{T}yx(p)$, $\overline{V}AXy(p) \leftrightarrow U\overline{S}yx(p)$, $URxy(p) \rightarrow Y\overline{T}yx(p)$, $YRxy(p) \rightarrow U\overline{T}yx(p)$, $UAXy(p) \rightarrow Y\overline{S}yx(p)$ ir t. t.

Parodysiu, pavyzdžiui, kad formulė $URxy(p) \leftrightarrow VTyx(p)$ visada yra teisinga, t. y. teisinga visiems subjektams x ir y, visiems jų veiksmams bei tų veiksmų pasekmes apibūdinantiems (iš tų veiksmų išplaukiantiems) teiginiams p.

Formulė $URxy(p)$ reiškia, jog subjektas x turi teisę reikalauti iš subjekto y, kad pastarasis įvykdytų veiksmą, kurio pasekoje teiginys p taptų (arba išliktų) teisingu teiginiu. Įstatę į šią formulę konkrečias x, y ir p reikšmes, gausime teiginį, kuris vienais atvejais bus teisingas, kitais – neteisingas. Taip yra todėl, kad visada egzistuoja tai, ko tas ar kitas subjektas neturi teisės reikalauti iš kitų subjektų, ir visada egzistuoja tai, ko koks nors konkretus subjektas turi teisę reikalauti iš kito konkretaus subjekto y (tame tarpe ir iš paties savęs, kai y sutampa su x).

Pavyzdžiui, koks nors taksi stotelėje laukiantis keleivis turi teisę reikalauti iš sustojusio stotelėje taksi vairuotojo, kad šis nuvežtų minėtąjį keleivį į kurią nors šio miesto dalį keleivio nurodytu adresu. Šiuo konkrečiu atveju formulė $URxy(p)$ pavirsta teisingu teiginiu, kuriame teiginys p yra teiginys „keleivį x taksistas y atvežė į tą miesto vietą, kurią nurodė keleivis“.

Tačiau minėtasis keleivis neturi juridinės teisės stabdyti bet kurią pravažiuojančią mašiną ir reikalauti iš tos mašinos vairuotojo, kad šis nuvežtų jį jo nurodytu adresu. Jis galėtų to vairuotojo tik prašyti tokios paslaugos, ir jau vairuotojo valia tenkinti ar netenkinti tokį keleivio prašymą. Taigi, šiuo konkrečiu atveju formulė $URxy(p)$ pavirsta neteisingu teiginiu.

Analogiškai galima įsitikinti, kad ir formulė $VTyx(p)$, reiškianti, jog subjektas y privalo tenkinti subjekto x reikalavimą įvykdyti tokį veiksmą, kad teiginys p taptų (ar išliktų) teisingu teiginiu, konkrečiose situacijose gali tapti kaip teisingu, taip ir neteisingu teiginiu.

Pavyzdžiui, jau nagrinėtu keleivio ir taksi vairuotojo atveju taksi vairuotojas y privalo patenkinti keleivio x reikalavimą ir nuvežti pastarąjį nurodytu adresu. Taigi, šiuo atveju formulė $VTyx(p)$ pavirsta teisingu teiginiu. O tuo atveju, kai keleivis užsimano to reikalauti iš bet kurio pravažiuojančio automobilio vairuotojo, neužsiimančio keleivių vežiojimu, formulė $VTyx(p)$ tampa neteisingu teiginiu.

Nesunku pastebėti, kad formulės $URxy(p)$ ir $VTyx(p)$ abi kartu tampa arba teisingais arba neteisingais teiginiais, todėl jos ir yra logiškai ekvivalenčios. Galima įsitikinti, kad taip yra bet kuriuo atveju, kokie x, y ir p bebūtų. Taip yra todėl, kad **egzistuoja pastovus ryšys tarp teisės reikalauti ir prievolės tenkinti tą reikalavimą: subjektas x turi teisę ko nors reikalauti iš subjekto y tada ir tik tada, kai subjektas y privalo tenkinti tą reikalavimą**. Šį teiginį galima performuluoti ir atvirkštine tvarka: **subjektas y privalo tenkinti subjekto x reikalavimą tada ir tik tada, kai subjektas x turi teisę to reikalauti iš subjekto y**. Abi šios formuluotės yra ekvivalenčios.

Galėtų pasirodyti, kad formulė $URxy(p) \leftrightarrow VTyx(p)$ išreiškia labai jau trivialią tiesą, apie kurią net kalbėti neverta. Iš tikrųjų, ši tiesa nėra jau tokia triviali. Pavyzdžiui, **teisę prašyti jau skiriasi nuo teisės reikalauti, nes teisę prašyti neimplikuoja būtinumo (prievolės) tenkinti tą prašymą, panašiai, kaip ir teisę tenkinti tą ar kitą prašymą neimplikuoja prievolės prašyti**.

Panašų pastebėjimą galima išsakyti ir teisės dovanoti atžvilgiu: **subjekto x teisę apdovanoti subjektą y neimplikuoja subjekto y prievolės būtinai priimti iš subjekto x tą apdovanojimą**.

Kad čia ne viskas taip jau paprasta, kaip galėjo pasirodyti iš pirmo žvilgsnio, nesunkiai galime įsitikinti, panagrinėję subjekto x teisę ką nors dovanoti subjektui y ir subjekto y teisę priimti ar nepriimti tą dovaną. Ar subjektas x visada turi juridinę teisę ką nors dovanoti kokiam nors subjektui y ir ar subjektas y visada privalo ir turi juridinę teisę priimti tą dovaną? Juk teigiamas atsakymas į šį klausimą juridiskai įteisintų kyšių davimą ir ėmimą.

Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti formaliai aprašyti tokį subjektų x ir y sąveikavimą, kaip dovanos davimą ir jos ėmimą ir, naudojantis modalumo operatoriais, išreikšti priklausomybes, tuomet atsirandančias tarp tų subjektų teisių ir prievolių. Manau, tai padės skaitytojui įsitikinti, jog ši užduotis nėra triviali.

O štai, įsitikinti, jog kitos ką tik išrašytos normatyvinės sąveikavimo logikos formulės ($UAxy(p) \leftrightarrow VSyx(p)$ ir t. t.) yra visada teisingos, iš tikrųjų nėra sunku. Siūlyčiau skaitytojui patikrinti tas formules.

Siūlyčiau taip pat įsitikinti, jog subjekto x teisės subjekto y atžvilgiu atvejais $UTxy(p)$, $USxy(p)$, $UAxy(p)$ ir $URxy(p)$ neimplikuoja su būtinumu atitinkamos subjekto y prievolės (įsipareigojimo) subjekto x atžvilgiu, taip pat kaip subjekto x prievolės (įsipareigojimas) subjekto y atžvilgiu atvejais $VRxy(p)$, $VAxy(p)$, $VTxy(p)$ ir $V\bar{S}xy(p)$ neimplikuoja su būtinumu atitinkamos subjekto y teisės subjekto x atžvilgiu.

O tuo tarpu subjekto x teisė subjekto y atžvilgiu atvejais $URxy(p)$, $UAxy(p)$, $U\bar{T}xy(p)$, $U\bar{S}xy(p)$ būtinai implikuoja subjekto y prievolę (įsipareigojimą) subjekto x atžvilgiu, kaip ir subjekto x prievolė (įsipareigojimas) subjektui y atvejais $VTxy(p)$, $VSxy(p)$, $V\bar{R}xy(p)$ ir $V\bar{A}xy(p)$ būtinai implikuoja atitinkamą subjekto y teisę subjekto x atžvilgiu. Rekomenduočiau skaitytojui tuo įsitikinti, interpretuojant šias formules ir analizuojant įvairius jų taikymo atvejus.

Naudodamiesi kai kuriomis absoliučiai teisingomis čia nagrinėtomis normatyvinės sąveikavimo logikos formulėmis ir bendrosios modalinės predikatų logikos (modalinio predikatų skaičiavimo) teoremų išvedimo matematiniu aparatu (aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis), galima sukonstruoti ir **aksiomatinę normatyvinės sąveikavimo logikos sistemą**.

Vieną iš tokių sistemų gautume šiek tiek modifikavę modalinio predikatų skaičiavimo išvedimo taisyklės, kad jas (pavyzdžiui, superpozicijos, egzistencialumo, atskyrimo, surišimo kvantoriais) būtų galima taikyti ir normatyvinės sąveikavimo logikos formulėms, ir prijungę prie predikatų skaičiavimo aksiomų šias šešias papildomas aksiomas:

- A1. $?V(p \wedge q) \leftrightarrow (Vp \wedge Vq)$,
- A2. $?U(p \vee q) \leftrightarrow (Up \vee Uq)$,
- A3. $?Vp \rightarrow Up$,
- A4. $?Vp \leftrightarrow \neg U\neg p$,
- A5. $?URxy(p) \leftrightarrow VTyx(p)$
- A6. $?UAxy(p) \leftrightarrow VSyx(p)$.

Naudojantis apibrėžimais $Yp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} V\neg p$ ir $Wp \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \neg Vp \wedge \neg V\neg p$, į šią sistemą galima įvesti ir modalinius operatorius Y ir W .

Naudojantis šios sistemos teoremų išvedimo aparatu, galima išvesti kiekvieną iš anksčiau nagrinėtų absoliučiai teisingų normatyvinės sąveikavimo logikos formulių.

Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti čia pateiktoje formalioje normatyvinės sąveikavimo logikos sistemoje išvesti teoremas:

- $?V\bar{R}xy(p) \leftrightarrow U\bar{T}yx(p)$,
- $?V\bar{A}xy(p) \leftrightarrow U\bar{S}yx(p)$,
- $?URxy(p) \rightarrow Y\bar{T}yx(p)$,
- $?YRxy(p) \rightarrow U\bar{T}yx(p)$,
- $?UAxy(p) \rightarrow Y\bar{S}yx(p)$.

Tuo ir baigsiu modalinių logikų apžvalgą. Tiems skaitytojams, kurie susidomėjo modaline logika ir norėtų sužinoti apie ją daugiau, galima parekomenduoti jau minėtas knygas [248, 58, 289], o taip pat [296÷298] bei [300], nes laiko bei normatyvinės logikos sistemas irgi galima laikyti modalinėmis sistemomis. Daugumos čia išvardintų knygų bei straipsnių pabaigoje pateikta gana turtinga bibliografija, kuria pasinaudodamas skaitytojas galės susipažinti su visais pagrindiniais darbais šioje srityje.

Šis – 1.16.1.5.7. – skyrelis – paskutinis 1.16.1. poskyrio, skirto logikos dėsnių matematiniam modeliavimui ir taikymui, skyrelis. Vienas pagrindinių šio skyrelio tikslų buvo – parodyti skaitytojui, kad **matematinės logikos kalba ir jos matematinis aparatas gali būti taikomi ne tik loginių išvadų gavimui, bet ir sudėtingų situacijų bei procesų modeliavime, kad egzistuoja ne tik samprotavimų logika, bet ir veiksmų bei sąveikavimo logikos**.

Šioje mokymo priemonėje matematinei logikai ir jos taikymams skirta gana daug dėmesio. Tam buvo kelios priežastys.

Pirmoji priežastis – daugumos aukštųjų mokyklų mokymo programose logikai ir loginių procedūrų modeliavimui dažnai neskiriama reikiamo dėmesio, kai tuo tarpu ne tik sisteminis, bet ir bet koks teisingas mąstymas privalo būti logiškas, bet kokie modeliai ir projektai privalo neprieštarauti logikos dėsniams. Studijuojant matematinės sistemos kursą buvo būtina užpildyti šią aukštųjų mokyklų programų spragą.

Antroji priežastis: Kuriant sudėtingų sistemų ir sudėtingų procesų, kuriuose dalyvauja mąstantys ir svarbius sprendimus priimančios žmonės, sisteminius modelius ir projektus bei kompiuterines sistemas, skirtas tokių modelių ir projektų funkcionavimo imitavimui ir analizei, nepakanka vien tik kiekybinės matematikos metodų ir modelių. Kiekybinės matematikos aparatą tikslinga (o dažnai ir būtina) papildyti matematinės logikos aparatu. Tuo tikslu kuriamos deskriptyvinės ir normatyvinės logikos sistemos, padedančios pilniau aprašyti sudėtingas situacijas ir jas analizuoti, pasitelkiant kompiuterinę techniką.

Trečioji priežastis: Šiame – 1.16. – skyriuje (jo 1.16.3. ir 1.16.4. poskyriuose) bus nagrinėjamos ekspertinės, dirbtinio intelekto ir kolektyvinio proto sistemos bei jų taikymai. Tokių sistemų ir jų funkcionavimo nagrinėjimui taip pat būtinos matematinės logikos žinios.

Net ir to žinojimo, kuris išdėstytas 1.16.1 poskyryje, nepakaks. Teks jį papildyti žiniomis apie negriežtai apibrėžtą matematiką bei apie negriežtai apibrėžtą logiką. Tam skiriami šios mokymo priemonės 1.16.2. poskyrio skyreliai. Juose skaitytojas bus supažindinamas su difuzinės matematikos, difuzinės logikos, lošimų teorijos, statistinės sprendimų priėmimo teorijos bei daugiakriterijinio optimizavimo teorijos pradmenimis.

1.16.2. Negriežtai apibrėžta (L. Zadeh) matematika. Neapibrėžtiniai modeliai

Jau šio – 1.16-ojo – skyriaus pradžioje buvo pažymėta, kad **ne visų reiškinių aprašymui tinka griežtai apibrėžta klasikinės matematikos kalba, nes yra reiškinių, kurių matematiniai modeliai neturėtų būti griežtai vienareikšmiškai apibrėžti, kadangi patiems tiems reiškiniams iš esmės būdingas neapibrėžtumas.** Ten buvo pateiktas ir vieno tokio reiškinių pavyzdys. Tokių reiškinių gana daug, todėl aktualu panagrinėti neapibrėžtumą detaliau. Pradėsime nuo aibių.

1.16.2.1. Negriežtai apibrėžiamo aibės ir negriežtai apibrėžiami predikatai

Klasikinėje matematikoje nagrinėjamos tik **griežtai apibrėžtos aibės**. Joje kiekviena aibė apibrėžiama taip, kad bet kurios realios ar virtualios esybės atžvilgiu kiekvienas tos esybės ir tos aibės nagrinėtojas gali vienareikšmiškai ir objektyviai nustatyti, priklauso ar nepriklauso ta esybė tai apibrėžiamai aibei. Pavyzdžiui, nelyginių natūraliųjų skaičių aibė apibrėžiama taip, kad kiekvieno natūralaus skaičiaus atžvilgiu kiekvienas subjektas vienareikšmiškai ir vienodai (nepriklausomai nuo to, kas nustato) gali nustatyti, ar tas natūralusis skaičius priklauso tai aibei, ar nepriklauso. Tas sprendimas bus vienareikšmiškas ir objektyvus ne tik kiekvieno natūralaus skaičiaus, bet ir bet kurios kitos esybės, nesančios natūraliu skaičiumi, atžvilgiu, nes tokia esybė nėra natūralus nelyginis skaičius.

Tačiau ne visos realios aibės gali būti taip griežtai apibrėžtos. Panagrinėkime, pavyzdžiui, nepadorių politikų aibę. Daugybė faktų rodo, jog ši aibė nėra tuščia, nes

gana dažnai ne tik dauguma visuomenės narių, bet ir įvairios specialios komisijos pripažįsta vieno ar kito politiko elgesį nepakankamai padoriu. Iš kitos pusės, nėra pagrindo atmesti hipotezę, jog gali egzistuoti (ir, matyt, egzistuoja) ne tik nepadorūs, bet ir pakankamai padorūs politikai. Juk nemažai politikų laiko save padoriais, o kai kurių iš jų atžvilgiu ir visuomenė laikosi panašios nuomonės. Taigi, galima teigti, jog nepadorių ir padorių politikų aibės nėra tuščios, tačiau neįmanoma vienareikšmiškai nustatyti griežtą ribą tarp šių aibių, kuri leistų kiekvienam iš mūsų vienareikšmiškai ir vienodai spręsti bet kurio konkretaus politiko atžvilgiu, padorus jis ar ne. Kad tuo įsitikintume, pakanka, palyginti padorių ir nepadorių politikų sąrašus, kuriuos sudarė atsitiktinai parinkti skirtingi žmonės: kai kurie sąrašai dalinai ar net pilnai sutaps, tačiau pilno visų sąrašų sutapimo negausime.

Su panašia situacija susidursime ir bandydami skirstyti žmones į pakankamai protingus ir nepakankamai protingus, pakankamai sveikus ir nepakankamai sveikus, gėles – į labai gražias ir mažiau gražias, knygas – į įdomias ir neįdomias ir t. t.

Visų **panašių aibių ribos nėra griežtai apibrėžtos**, todėl tas ribas vadina „išblukusiomis“, o pačias tas aibes – „negrįžtai apibrėžiamomis“, arba „difuzinėmis“. Tokių aibių nagrinėjimo pradininkas – JAV mokslininkas L. Zadeh – jas pavadino „Fuzzy Sets“ (žiūr. pav. [301, 302]).

Aprašant griežtai apibrėžtą aibę $A = \{x\}$, pakanka nurodyti tą aibę aprašantį klasikinės logikos predikatą $P(x)$, kurio reikšmė tampa lygi loginiam vienetui, kai $x \in A$, ir lygi loginiam nuliui, kai $x \notin A$. Naudojantis 1.5. skyriuje įvestais ternarinės TSF kalbos žymėjimais, tuomet galima užrašyti, jog $A \equiv \langle P(x) \rangle$ (arba $A \equiv \langle (x)P \rangle$).

Kai griežtai apibrėžta aibė yra baigtinė, tai, apibrėžiant tokią aibę, vietoj tą aibę aprašančio predikato $P(x)$ galima pateikti tą aibę sudarančių elementų sąrašą $\{x\}$, išvardijant visus tą aibę sudarančius elementus, t. y. nurodant jų vardus ar kokius nors kitus jų identifikatorius, o kartais – tiesiog parodant pačius tuos elementus.

Aprašant negriežtai apibrėžiamas baigtines aibes, paprasto jų elementų išvardijimo ar parodymo jau nebepakanka, nes tokio išvardijimo ar parodymo net ir padaryti, vienareikšmiškai atskiriant esybes, priklausančias ir nepriklausančias nagrinėjamai aibei, yra neįmanoma.

L. Zadeh pasiūlė negriežtai apibrėžiamos aibės A elementus x charakterizuoti jų **priklausomybės aprašomai aibei funkcijomis** $\mu_A(x)$, kurių reikšmės tenkina sąlygą $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$.

Jei $\mu_A(x) = 0$, tai reiškia, jog esybė x tikrai nepriklauso aibei A , o jei $\mu_A(x) = 1$, tai esybė x tikrai priklauso aibei A . Visais kitais atvejais, kai apie esybės x priklausomybę ar nepriklausomybę aibei A mes galime spręsti tik apytikriai (negrįžtai), priklausomybės funkcijos $\mu_A(x)$ reikšmė yra didesnė už 0, tačiau mažesnė už 1. Priimama, kad $\mu_A(x)$ turi būti tuo didesnė, kuo stipriau mes įsitikinę, jog $x \in A$.

Pati funkcijos $\mu_A(x)$ reikšmės nustatymo procedūra tokiais atvejais taip pat nėra griežtai apibrėžta ir skirtingi stebėtojai, stebėdami tą pačią esybę x ir tą pačią aibę A , kartais gali priskirti funkcijai $\mu_A(x)$ skirtingas reikšmes. Taip atsitinka gana dažnai, kai $\mu_A(x)$ reikšmė gaunama kaip **ekspertinis įvertis**, vadovaujantis principu: **kuo labiau mes įsitikinę, jog duotoji esybė x priklauso nagrinėjamai aibei A , tuo didesnę reikšmę priskiriame funkcijai $\mu_A(x)$** . Kartais, kai esybių x , kurios galėtų priklausyti aibei A , elgesys priklausomybės aibei A požymių atžvilgiu yra **statistiškai stabilus**, priklausomybės aibei A funkciją $\mu_A(x)$ galima interpretuoti kaip **tikimybę, jog esybė x priklauso aibei A** , t. y. apibrėžti $\mu_A(x)$ kaip $\mu_A(x) = P(x \in A)$. Tuomet, turėdami pakankamai statistinių duomenų bei kitos informacijos apie aibę A ir esybes x , įvairus stebėtojai galėtų gauti beveik objektyvius ir todėl vienodus ar beveik vienodus

funkcijos $\mu_A(x)$ reikšmių įverčius. Tačiau, **kai galimybės gauti objektyvius įverčius nėra, tai ir subjektyvūs įverčiai yra naudingi, nes jie vis dėlto duoda šokią tokią informaciją apie aibę A ir jos elementus x, o taip pat ir apie patį stebėtoją, tuos įverčius pateikusį.** Todėl ir vykdomos įvairios apklausos visuomenėje.

Tuo atveju, kai negriežtai apibrėžiama aibė A yra baigtinė ir galimiems jos elementams x nustatytos funkcijos $\mu_A(x)$ reikšmės, tai tokią aibę A L. Zadeh aprašo formule $A = \bigcup_{i=1}^n \mu_A(x_i)/(x_i)$, kurioje „ $\bigcup$ “ – aibių bei jų elementų sąjungos (sąsajos)

ženklas, „ x_i “ – esybių, esančių aibės A elementais, identifikatoriai, „ $\mu_A(x_i)/(x_i)$ “ – aibės A elementų žymėjimai, susidedantys iš elemento x_i priklausomybės aibei A funkcijos reikšmės (kokio nors skaičiaus, ne mažesnio už 0 ir ne didesnio už 1) ir to elemento identifikatoriaus (pavadinimo, žymens, atvaizdo ir pan.), patalpinto į skliaustelius.

Pavyzdžiui, negriežtai apibrėžiamą aibę „keli“ (t. y. „keli elementai“) aprašo taip: $\{„keli“\} \stackrel{\text{def}}{=} 0,5/(3) \bigcup 0,8/(4) \bigcup 1/(5) \bigcup 1/(6) \bigcup 0,8/(7) \bigcup 0,5/(8)$.

Šis užrašas reiškia, kad tais atvejais, kai turime 5 arba 6 elementus, visiškai apibrėžtai (su $\mu_A(x)=1$) galime teigti, jog turime „kelis elementus“, o jei elementų mažiau arba daugiau negu 5 ar 6, tai mūsų įsitikinimas, kad tokį jų skaičių galima įvertinti kaip „keli“, tostant nuo 5 bei 6 į vieną ar į kitą pusę, laipsniškai mažėja, pavyzdžiui, sumažėdamas du kartus, kai tų elementų lieka tik trys arba tampa net 8.

Žinoma, toks aibės „keli elementai“ **apibrėžimas yra gana sąlyginis ir subjektyvus, tačiau jis tuo pačiu yra gana informatyvus, nes leidžia susidaryti gana pilną vaizdą, kaip to apibrėžimo autorius (šiuo atveju – L. Zadeh) įsivaizduoja sąvoką „keli“.**

Kai aibės A elementų yra ar gali būti be galo daug, vietoj ženklo „ $\bigcup$ “ naudojamas ženklas „ $\int$ “ – ženklo „ $\bigcup$ “ ir integralo ženklo „ $\int$ “ hibridas.

Pavyzdžiui, negriežtai apibrėžtą aibę „jauni žmonės“, kurioje „x“ yra žmogaus amžius, galima apibrėžti taip: $\{„jauni žmonės“\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{25} 1/(x) \bigcup \int_{25}^{100} \left[1 + \left(\frac{x-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} / (x)$.

Ši formulė reiškia, jog, L. Zadeh nuomone, kai žmogaus amžius x priklauso intervalui nuo 0 iki 25 metų, tai toks žmogus turėtų būti visada laikomas jaunu, ir tai pažymima tuo, kad tuomet $\mu_A(x)=1$, o tuo atveju, kai žmogaus amžius viršija 25m., jo amžiui x didėjant, įsitikinimas, kad jis dar yra jaunas, turėtų mažėti, ką ir rodo

funkcijos $\mu_A(x)$ reikšmė $\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-25}{5} \right)^2}$. Pavyzdžiui, kai $x=35$ metai, tai

$\mu_A(x) = \mu_A(35) = \frac{1}{1+4} = 0,2$, o kai $x=85$, tai $\mu_A(85) = \frac{1}{145}$. Tokį L. Zadeh įvertį

galėtume laikyti praktiškai teisingu, jeigu tarp tūkstančio žmonių, kurių amžius – 85 m., vidutiniškai pasitaikytų apie septynetą tokių, kurių sveikata, išvaizda ir elgesys tikrai būtų jaunatviški.

Aibę „seni žmonės“ L. Zadeh apibrėžia formule $\{„seni žmonės“\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{50} 0/(x) \bigcup \int_{50}^{100} \left[1 + \left(\frac{x-50}{5} \right)^2 \right]^{-1} / (x)$.

Žmones, kurių amžius x viršija 100 metų, L. Zadeh priskiria prie „labai senų“, neįtraukdamas į „senų žmonių“ aibę.

Norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad formulės, kuriomis L. Zadeh bando „apibrėžti“ negriežtas jaunų ir senų žmonių aibes, čia pateiktos ne tam, kad L. Zadeh (arba aš) bandytume patikslinti skaitytojų suvokimą, ką derėtų laikyti jaunu, o ką – senu žmogumi. Juk pačios tos formulės daug kam gali pasirodyti abejotinos, nes skirtingų žmonių subjektyvios nuomonės ir negriežtai apibrėžiamų sąvokų subjektyvūs koncepciniai modeliai gali ne tik nesutapti, bet ir žymiai skirtis. Ir tai yra ne tik tikėtina, bet ir dėsninga, nes tai išplaukia iš sąvokų „negriežtai apibrėžiama aibė“ bei „negriežtai apibrėžiama sąvoka“ esmės.

Tas formules L. Zadeh pateikia ne kaip apibrėžimus, o kaip galimybės matematiškai aprašyti subjektyvias nuomones bei subjektyvius negriežtai apibrėžiamų aibių koncepcinius modelius iliustraciją.

L. Zadeh nuopelnas ne tame, kad jis sudarė keliolika formulių, subjektyviai apibrėžiančių kai kurias negriežtai apibrėžiamas aibes, o tame, kad jis, įvesdamas į matematinę kalbą negriežtai apibrėžiamo aibės, negriežtai apibrėžiama predikato, negriežtai apibrėžiamo algoritmo, lingvistinio kintamojo sąvokas ir tų sąvokų formalaus žymėjimo bei operacijų su jomis techniką, žymiai praplėtė matematikos ir matematinės sistemos tyros taikymo sritį, suteikė ekspertiniams vertinimams „matavimų“, o apytikriams neformalizuotų procedūrų aprašymams – „algoritmų“ statusus, permesdamas „tiltuką“ tarp tikslųjų ir „netikslųjų“ mokslų, tarp objektyvių faktų ir subjektyvių nuomonių apie juos aprašymų.

Įvestos priklausomybės funkcijos ir jų žymėjimai ($\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$ ir pan.) leidžia formaliai apibrėžti negriežtos aibės A poaibius B , t. y. formaliai aprašyti negriežtos aibės ir jos poaibių santykius: $(B \subset A) \rightarrow \forall x [\mu_B(x) \leq \mu_A(x)]$. Atvirkštinė implikacija neteisinga, nes ne visada iš $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ išplaukia, jog $B \subset A$.

Su negriežtai apibrėžiamomis aibėmis galima vykdyti sankirtos „ $\cap$ “, sąjungos (sąsajos) „ $\cup$ “ ir papildymo „ 7 “ operacijas lygiai taip pat, kaip ir su griežtai apibrėžtomis aibėmis. Tačiau negriežtai apibrėžiamų aibių atveju atsiranda **papildoma procedūra – elementų x priklausomybės naujai aibei – aibei rezultatui – funkcijų reikšmių apskaičiavimas** ir ryšium su tuo iškyla klausimas, **kaip, žinant $\mu_{A_1}(x)$ ir $\mu_{A_2}(x)$, apskaičiuoti $\mu_{A_1 \cap A_2}(x)$ ir $\mu_{A_1 \cup A_2}(x)$, o taip pat, kaip, žinant $\mu_A(x)$, apskaičiuoti $\mu_{CA}(x)$.**

Kad galėtume atsakyti į šiuos klausimus, įsivesime negriežtai apibrėžiamo predikato sąvoką.

Negriežtai apibrėžiamu predikatu $P(x)$ vadinsime predikatą, galinti turėti loginę reikšmę, priklausančią segmentui $[0,1]$, nustatomą kaip ekspertinį ar statistinį teiginio „konkreči esybė x^* priklauso aibei $\langle P(x) \rangle$ “ teisingumo įvertį. Negriežtai apibrėžiami predikatai gali būti ne tik vienviečiai, bet ir daugiaviečiai: $P(x, y)$, $P(x, y, z)$ ir pan.

Apibrėžę predikatą $P_A(x)$ kaip predikatą $P_A(x) \leftrightarrow (x \in A)$, gauname, kad **priklausomybės funkcijos $\mu_A(x)$ reikšmė yra lygi negriežtai apibrėžiamo predikato $P_A(x)$ teisingumo reikšmei, t. y. gauname, jog $P_A(x) \leftrightarrow \mu_A(x)$.**

Kitaip tariant, pačią priklausomybės funkciją $\mu_A(x)$ galima laikyti negriežtu vienviečiu predikatu.

Su negriežtais predikatais galima vykdyti visas logines operacijas, kurios atliekamos su klasikinės logikos griežtai apibrėžtais predikatais, o taip pat su tikimybinės logikos predikatais.

Negriežtai apibrėžiamą predikatą galima laikyti ne tik klasikinio griežtai apibrėžto, bet ir tikimybinio predikato apibendrinimu, o klasikinį griežtai apibrėžtą ir tikimybinį predikatą – negriežtai apibrėžiamo predikato daliniais atvejais.

Kai negriežtai apibrėžiamam predikatui $P_A(x)$ suteikiama tikimybinė interpretacija, t. y., kai laikoma, kad $\mu_A(x)$ yra lygi tikimybei, jog x priklauso aibei A , tai galima naudotis jau mums žinomomis tikimybinės logikos formulėmis:

$$P_A(x) \wedge P_B(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_{B/A}(x) = \mu_B(x) \cdot \mu_{A/B}(x),$$

$$P_A(x) \vee P_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x),$$

$$\neg P_A(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Kai aibės A ir B yra nepriklausomos, tai $\mu_{B/A}(x) = \mu_B(x)$ ir $\mu_{A/B}(x) = \mu_A(x)$, todėl tokiu atveju $P_A(x) \wedge P_B(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ ir $P_A(x) \vee P_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Kadangi, kaip jau matėme 1.5. skyriuje, $\langle P_A(x) \wedge P_B(x) \rangle = \langle P_A(x) \rangle \cap \langle P_B(x) \rangle$, $\langle P_A(x) \vee P_B(x) \rangle = \langle P_A(x) \rangle \cup \langle P_B(x) \rangle$ ir $\langle \neg P_A(x) \rangle = 1 - \langle P_A(x) \rangle$, o $\langle P_A(x) \rangle \cap \langle P_B(x) \rangle = \langle P_{A \cap B}(x) \rangle$, $\langle P_A(x) \rangle \cup \langle P_B(x) \rangle = \langle P_{A \cup B}(x) \rangle$ ir $1 - \langle P_A(x) \rangle = \langle P_{\neg A}(x) \rangle$, tai gauname, jog tikimybinės interpretacijos atveju: $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_{B/A}(x) = \mu_B(x) \cdot \mu_{A/B}(x)$, $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x)$, $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Kai aibės A ir B yra nepriklausomos, tai gauname, jog $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ ir $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Taikant tikimybinę negriežtų predikatų interpretaciją, galioja visos klasikinės logikos algebros formulės (de Morgano, suklijavimo, absorbcijos ir t. t.), **ir rekomenduotina, dar prieš pereinant nuo loginių prie aritmetinių tikimybinės logikos formulių, maksimaliai supaprastinti logines formules klasikinėje logikoje, įvykdant visus tam reikalingus formulių pertvarkymus, apie kuriuos buvo kalbėta 1.16.1.4. poskyrio skyreliuose.** Tai leidžia ne tik žymiai supaprastinti vėlesnius skaičiavimus, bet ir išvengti galimų klaidų atsirandančių, kai pamirštama, jog tarp sudėtingų predikatų, sudarytų iš elementarių nepriklausomų predikatų, gali atsirasti priklausomybės, į kurias būtina atsižvelgti, taikant perėjimo nuo logikos prie aritmetikos formules.

Pavyzdžiui, apskaičiuojant sudėtingo predikato $P_A(x) \vee (\neg P_A(x) \wedge \neg P_B(x))$, sudaryto iš negriežtai apibrėžiamų nepriklausomų predikatų $P_A(x)$ ir $P_B(x)$, loginę reikšmę taške $x=x^*$, kai žinoma, kad $P_A(x^*)=0,8$, o $P_B(x^*)=0,3$, tikslinga pradžioje, naudojantis klasikine logine algebra, šį sudėtingą predikatą pertvarkyti į jam ekvivalentų paprastesnį predikatą $P_A(x) \vee \neg P_B(x)$ ir tuo atveju, kai aibės A ir B yra nepriklausomos, gauti, jog $P_A(x) \vee \neg P_B(x) = \mu_A(x) + 1 - \mu_B(x) - \mu_A(x)(1 - \mu_B(x)) = 1 - \mu_B(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Tai reiškia, jog $P_A(x^*) \vee (\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*)) = 1 - 0,3 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,94$.

Jei būtume nesupaprastinę predikato $P_A(x) \vee (\neg P_A(x) \wedge \neg P_B(x))$ ir pabandę iškart apskaičiuoti jo loginę reikšmę taške $x=x^*$, apskaičiuodami pradžioje konjunkcijos $\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*)$, o po to ir visos disjunkcijos $P_A(x^*) \vee (\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*))$ reikšmę, tai būtume gavę:

$$1) (1 - \mu_A(x^*))(\neg P_B(x^*)) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14,$$

$$2) 0,8 + 0,14 - 0,8 \cdot 0,14 = 0,828.$$

Kaip matome, būtų tekę atlikti daugiau skaičiavimų ir, kas svarbiausia, būtume gavę neteisingą rezultatą. Taip atsitiko todėl, kad, nors $P_A(x)$ ir $P_B(x)$ – nepriklausomi predikatai, tačiau predikatai $P_A(x)$ ir $(\neg P_A(x) \wedge \neg P_B(x))$ jau nėra nepriklausomi, o todėl

antrajame veiksmė, įvertinant konjunkcijos $P_A(x^*) \wedge (\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*))$ loginę vertę, negalima buvo laikyti, jog ji yra lygi $P_A(x^*)$ ir $(\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*))$ loginių verčių 0,8 ir 0,14 sandaugai $0,8 \cdot 0,14 = 0,112$. Reikėjo $P_A(x^*)$ teisingumo tikimybinę vertę 0,8 dauginti ne iš predikato $(\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*))$ teisingumo tikimybinės vertės 0,14, o iš sąlyginio predikato $(\neg P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*)) / P_A(x^*)$ teisingumo tikimybinės vertės, kuri yra lygi 0, nes kai predikatas $P_A(x)$ yra teisingas tai konjunkcija $(\neg P_A(x) \wedge \neg P_B(x))$ yra būtinai neteisinga. Tuomet antrajame veiksmė būtume gavę: $0,8 + 0,14 - 0,8 \cdot 0,14 = 0,94$, t. y. teisingą atsakymą.

Kadangi sąlygines tikimybes apskaičiuoti ne visada yra taip paprasta, o taip pat ne visada yra pastebimos visos priklausomybės, atsirandančios tarp sudėtingų predikatų, tai **racionalu stengtis nagrinėjama loginę predikatinę formulę jau pačioje pradžioje taip supaprastinti, kad tokių priklausomybių liktų kuo mažiau ar net iš viso neliktų.**

Tikimybinę priklausomybės funkcijų $\mu_A(x)$ interpretaciją $\mu_A(x) = p(x \in A)$, leidžiančią tų funkcijų konjunkciją, disjunkciją ir loginį neigimą išreikšti ką tik minėtomis tikimybinės logikos formulėmis, L. Zadeh pavadino „minkštąja“, kad pagal tą pavadinimą ją būtų galima atskirti nuo kitos interpretacijos, kurią jis pavadino „kietąja“.

„Kietąją“ priklausomybės funkcijų interpretaciją (o kartu ir „kietąją“ negriežtai apibrėžtos logikos variantą) L. Zadeh apibrėžia formulėmis:

$$P_A(x) \wedge P_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$P_A(x) \vee P_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\neg P_A(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Kaip matome, „kietajame“ variante neatsižvelgiama į skirtumą, kuris gali atsirasti tarp rezultatų, gautų operuojant su nepriklausomais ir priklausomais predikatais.

Be to, nors „kietasis“ variantas ir tenkina tą atotykių principo (žiūr., pavyzdžiui, į 1.9.1.2. ir 1.13.3. skyrelius) reikalavimą, kad ribiniu atveju „naujoji“ ir „senoji“ teorijos turėtų sutapti, nes ribiniu atveju, kai $\mu_A(x)$ gali būti lygi tik loginiam vienetui ir loginiam nuliui, ką tik išrašytos „kietojo“ varianto formulės išlieka galiojančiomis, tačiau **negriežtosios logikos „kietasis“ variantas vis dėlto jau nebeaprepia visos klasikinės matematinės logikos kaip, pavyzdžiui ją aprėpia „minkštasis“ negriežtosios logikos variantas.** Įrodysiu šį teiginį.

„Minkštajame“ variante visos klasikinės logikos formulės išlieka galiojančiomis, tame tarpe ir, pavyzdžiui, tapatybė $X_1 X_2 \vee X_1 \bar{X}_2 \equiv X_1$, o tuo tarpu „kietajame“ negriežtosios logikos variante formulės $(P_A(x) \wedge P_B(x)) \vee (P_A(x) \wedge \neg P_B(x))$ ir $P_A(x)$ jau nėra tapačios.

Tuo nesunku įsitikinti, nagrinėjant konkretų atvejį, kai, kintamajam x įgijus fiksuotą reikšmę x^* , predikatai $P_A(x)$ ir $P_B(x)$ tampa teiginiais $P_A(x^*)$ ir $P_B(x^*)$, turinčiais logines reikšmes atitinkamai 0,8 ir 0,3.

Apskaičiuodami sudėtingo teiginio $(P_A(x^*) \wedge P_B(x^*)) \vee (P_A(x^*) \wedge \neg P_B(x^*))$ loginę reikšmę, naudodamiesi „kietąja“ interpretacija, gausime formulę $\max[\min(\mu_A(x^*), \mu_B(x^*)), \min(\mu_A(x^*), 1 - \mu_B(x^*))]$, kurios reikšmė šiuo konkrečiu atveju yra lygi $\max[\min(0,8; 0,3), \min(0,8; 0,7)] = \max(0,3; 0,7) = 0,7$, o tai nesutampa su $\mu_A(x) = 0,8$, kuri turėtume gauti, jei laikytume, jog $X_1 X_2 \vee X_1 \bar{X}_2 = X$.

Ir tai – ne vienintelis atvejis. Tokių atvejų yra labai daug. Pavyzdžiui, formulė $P_A(x) \vee (\neg P_A(x) \wedge P_B(x))$ „kietajame“ variante ne tapati formulei $P_A(x) \vee P_B(x)$, kuri gaunama klasikinės logikos algebroje, supaprastinus formulę $P_A(x) \vee (\neg P_A(x) \wedge P_B(x))$.

Tai lengvai įrodoma, priėmus, kad $P_A(x^*)=0,6$, $P_B(x^*)=0,8$. Tuomet „kietajame“ negriežtosios logikos variante gauname, kad $P_A(x^*) \vee (\neg P_A(x^*) \wedge P_B(x^*)) = \max[0,6; \min(1-0,6; 0,8)] = \max(0,6; 0,4) = 0,6$, kai tuo tarpu $P_A(x^*) \vee P_B(x^*) = \max(0,6; 0,8) = 0,8$.

Taigi, **negriežtoji matematinė logika „kietajame“ variante tikrai neaprepia klasikinės matematinės logikos kaip savo dalinio atvejo, kitaip tariant, klasikinė matematinė logika nėra negriežtosios matematinės logikos „kietajame“ variante dalinis atvejis, jos sudėtinė dalis.**

Trečiasis „kietojo“ varianto trūkumas: tame variante konjunkcijos $P_A(x) \wedge P_B(x)$ loginė reikšmė nepriklauso nuo didesniojo „daugiklio“ pokyčių intervale [„mažesnis“ daugiklis; 1], o disjunkcijos $P_A(x) \vee P_B(x)$ loginė reikšmė nepriklauso nuo mažesniojo „dėmens“ pokyčių intervale [0; didesnis „dėmuo“]. Praktikoje tokie atvejai pasitaiko (pavyzdžiui, aukcione rezultatas priklauso tik nuo didžiausios pasiūlytos sumos ir nepriklauso nuo to, kiek mažesnių sumų buvo pasiūlyta ir kokios jos buvo), tačiau ne taip jau dažnai, todėl, **vargu, ar negriežtosios logikos „kietasis“ variantas yra pakankamai universalus.** Manau, kad „kietąjį“ variantą galima taikyti tik specialiais atvejais.

Visų trijų minėtųjų trūkumų neturi „minkštasis“ (t. y. tikimybinis) negriežtosios logikos variantas. Jis galėtų pretenduoti ir į universalios negriežtosios logikos statusą. Tačiau tuomet negriežtoji logika lyg ir susivestų į tikimybinę logiką, t. y. abi tos logikos formaliai sutaptų, ir negriežtoji L. Zadeh logika, lyginant ją su jau žinoma ir anksčiau susiformavusia tikimybine logika lyg ir nebepateiktų nieko naujo. Tuomet priklausomybės funkcijos $\mu_A(x)$ taptų tikimybiniais predikatais, kurių reikšmių įverčiai $\mu_A(x^*)$ konkrečioms esybėms x^* būtų nustatomi arba statistškai (t. y. apdorojant statistinius duomenis), arba propensityviai (t. y. apmąstant nagrinėjamą situaciją, susikuriant jos koncepcinį modelį ir „pasveriant“ įvairius „už“ ir „prieš“ tą ar kitą hipotetinį variantą). Negriežtosios logikos lygčių ir jų sistemų sprendimą tokiu atveju taip pat būtų galima suvesti į tikimybinės logikos lygčių ir jų sistemų sprendimą, aprašytą 1.16.1.2.6. skyrelyje.

Tačiau iš to, kas čia pasakyta, nederėtų daryti išvados, kad negriežtosios logikos predikatai ir teiginiai „minkštojoje“ interpretacijoje semantiškai visada sutampa su tikimybinės logikos predikatais ir teiginiais, kad sutampa ir jų loginių reikšmių nustatymo būdai.

Pagrindinis skirtumas tarp negriežtosios logikos teiginių ir tikimybinės logikos teiginių net ir tuo atveju, kai pirmieji interpretuojami tikimybiskai, glūdi tame, jog negriežtosios logikos atveju nevienareikšmiškumas atsiranda todėl, kad mes negalime griežtai ir tiksliai atsakyti į klausimą, kuriai negriežtai apibrėžtai aibei turėtų būti priskirta esybė x^* , o tikimybinėje logikoje nevienareikšmiškumas atsiranda todėl, kad mes negalime griežtai ir tiksliai atsakyti į klausimą, į kurią griežtai apibrėžtą aibę pateks esybė x , veikiamą aplinkybių, kurias mes nepilnai žinome ar nepilnai suprantame. Pavyzdžiui, mes galime abejoti, kuriai iš anksčiau minėtų negriežtai apibrėžtų aibių reikėtų priskirti kurį nors konkretų politiką ir tuomet mes, pasvėrę eilę „už“ ir „prieš“ galime suformuluoti negriežtai apibrėžtą teiginį, priskirdami priklausomybės funkcijai $\mu_A(x)$ „taške“ x^* tą ar kitą reikšmę, kurią galėtume interpretuoti ir kaip tikimybę. Tačiau ši tikimybė semantiškai skirsis nuo tikimybės, kurią mes priskiriame teisingumui tikimybinės logikos teiginio, kad metama moneta ar lošimo kauliukas po metimo pateks į tam tikrą griežtai apibrėžtą būseną (moneta guls herbu į viršų, kauliuko viršutinėje sienoje pamatysime šešis taškus ir pan.).

Todėl **negriežtosios logikos teiginių ir predikatų tikimybinės interpretacijos galimybė neveda prie šios mokslo šakos absorbavimo tikimybine**

logika: negriežtoji logika turi savo specifiką ir negali būti pilnai sutapatinta su tikimybine logika, nors griežtosios ir negriežtosios logikų formulių loginės reikšmės gana dažnai gali būti interpretuojamos naudojantis tikimybinės logikos sąvokomis.

Žiūrint iš čia ką tik išsakytų pozicijų, pasaulyje stebimus reiškinius būtų galima klasifikuoti į determinuotus, stochastinius (tikimybinius) ir neapibrėžtinius, ką mes jau esame darę 1.2. skyriuje.

Determinuotais reiškiniais vadinsime reiškinius, kuriuos galima adekvačiai aprašyti vienareikšmiškai apibrėžtomis klasikinės matematikos funkcijomis. Determinuotų sistemų reakciją (išėjimą, būsenos pokytį) į tą ar kitą vienareikšmiškai apibrėžtą aplinkos poveikį, galima tiksliai prognozuoti, t. y. deduktyviai išvesti iš tos sistemos ir to poveikio modelių. Nors realiame pasaulyje tokių idealių sistemų, kurias būtų galima laikyti pilnai determinuotomis, ir nesutinkame, tačiau nemažai sistemų galima laikyti pakankamai artimomis determinuotoms ir jas pakankamai adekvačiai aprašyti determinuotais klasikinės matematikos modeliais, kurių kiekybinės charakteristikos gali būti aprašytos determinuotais dydžiais. Tokių modelių pavyzdžius mes nagrinėjome 1.4., 1.10., 1.11., 1.12. ir 1.13. skyriuose. Determinuoto pastovaus dydžio pavyzdžiu gali būti apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis π , o praktiškai determinuotų kintamų dydžių pavyzdžiais gali būti dienos ir nakties trukmės tam tikrame mūsų planetos taške tam tikrą metų parą, nes mes jas galime iš anksto apskaičiuoti su praktiškai reikalingu tikslumu.

Stochastiniais (tikimybiniiais) reiškiniais vadinsime tokius reiškinius, kurie nėra determinuoti, tačiau galima laikyti determinuotais jų stochastines charakteristikas (statistinius momentus, tikimybinių skirstinių parametrus). Tokie reiškiniai aprašomi tikimybiniiais modeliais, leidžiančiais prognozuoti tokių sistemų evoliuciją tik su tam tikromis tikimybėmis.

Su stochastiniais reiškiniais, jų modeliais, jų analizės ir prognozavimo metodais mes taip pat jau buvome susidūrę (žiūr. 1.2., 1.4. ir 1.14. skyrius). Stochastinių reiškinių individualios charakteristikos dažnai vadinamos **atsitiktiniais dydžiais**. Atsitiktinių dydžių pavyzdžiai: 1) kokio nors pastovaus ar determinuotai kintančio fizikinio dydžio matavimo rezultatai; 2) kokios nors populiacijos demografiniai duomenys, charakterizuojantys tą populiaciją tam tikru jos egzistavimo periodu; 3) brokuotų gaminių skaičius pagamintų gaminių partijoje.

Neapibrėžtiniais reiškiniais vadinsime reiškinius, kurių nedeterminuotumo laipsnis dar aukštesnis negu stochastinių: neapibrėžtiniams reiškiniams būdinga, **kad jie nedeterminuoti ne tik individualiai, bet ir statistiškai**, t. y. **jie neturi determinuotų statistinių charakteristikų**. Jei mes pabandytume analizuoti tokius reiškinius matematinės statistikos metodais (kaip kartais daro, pavyzdžiui, kai kurie biologai, medikai bei kai kurie ekonomistai ir kiti, nepatikrinę, ar nagrinėjami reiškiniai tikrai priklauso stochastinių reiškinių klasei), apskaičiuodami jų „statistines charakteristikas“, tai susidurtume su tuo, kad tos „charakteristikos“ pačios nėra determinuotos. Su tokiais reiškiniais ankstesniuose šios mokymo priemonės skyriuose mes dar nebuvo susidūrę, išskyrus 1.6.4.9. skyrelį. Tokių reiškinių pavyzdžiu gali būti madų (toms ar kitoms aprangos, šukuosenos, laikysenos ir pan. formoms, akustinio ir vizualinio meno apraiškos bei kryptims ir t. t.) formavimasis, plitimas ir evoliucija, o taip pat ir eilė kitų panašių reiškinių, kuriuos galima būtų laikyti savo rūšies epidemijomis. Prie tokių reiškinių priskirtini ir tai ar kitai veiklai talentingų bei genialių žmonių gimimai.

Neapibrėžtinių reiškinių prognozavimas dar labiau nepatikimas negu stochastinių reiškinių prognozavimas.

Čia pateiktas reiškinių ir sistemų klasifikavimo būdas (žiūr. taip pat 1.6.4.9. skyrelį) yra sąlyginis, nes, nagrinėdami realius procesus ir realias sistemas, susiduriame ne su gryniais determinuotais, stochastiniais ar neapibrėžtiniais reiškiniais, bet su jų mišiniais. Filosofai iki šiol vis dar ginčijasi dėl čia išvardintų reiškinių prigimtės. Kaip jau buvo minėta 1.2. skyriuje, egzistuoja filosofų grupė, kuriuos galima būtų pavadinti „deterministais“. Jie teigia, jog visi reiškiniai yra determinuoti, ir mes tik todėl kai kuriuos reiškinius laikome nedeterminuotais, jog nesugebame apžvelgti visų ryšių tarp jų, išnagrinėti visų sąveikavimo grandinių erdvėje ir laike. Kiti filosofai, remdamiesi kvantinėje mechanikoje suformuluotu **neapibrėžtumo principu** (žiūr. 1.9.1.2. skyrelį), teigia, jog visi procesai yra neapibrėžti, ir tik todėl, kad tas neapibrėžtumas pasireiškia nevienodai, kai kuriuos reiškinius mes galime laikyti praktiškai determinuotais. Egzistuoja ir filosofai, kuriuos galima būtų pavadinti „dualistais“. Jie teigia, kad egzistuoja ir tokie procesai, kurie yra determinuoti, ir tokie, kurie yra nedeterminuoti.

Bet kuri ši filosofinė kryptis gali būti išvystyta į logiškai neprieštarinę teoriją, todėl logiškai yra galimi įvairaus tipo „virtualūs pasauliai“. Kuriam tipui priklauso mūsų realus pasaulis, atsakyti dabar vienareikšmiškai neįmanoma ir vargu ar bus įmanoma bent jau artimiausioje ateityje. Todėl praktikoje visas sistemas ir reiškinius tenka skirstyti į jau minėtas tris klases ir jose taikyti atitinkamus metodus bei modelius taip, kad jie duotų praktiškai teisingus rezultatus nepriklausomai nuo galimų filosofinių interpretacijų. Kitaip tariant, reikia kurti tokį matematinį aparatą, kuris tikėtų ir determinuotiems, ir stochastiniams, ir „neapibrėžtiniams“, ir „dualistiniams“ „virtualiems pasauliams“, kuriuose yra galimi ir determinuoti, ir stochastiniai, ir neapibrėžtiniai reiškiniai bei jų mišiniai. **Tokios matematinės kalbos ir toki matematinio aparato kūrimas yra vienas matematinės sistemyros tikslų.**

1.16.2.2. Lingvistiniai kintamieji ir lingvistiniai neapibrėžtumai

Lingvistiniais kintamaisiais L. Zadeh vadina kintamuosius, žymimus natūralios kalbos žodžiais bei žodžių grupėmis ir turinčius reikšmes, priklausančias negriežtai apibrėžiamoms aibėms, išreiškiamas žodžiais bei jų grupėmis.

Pavyzdžiui, kintamasis „ūgis“ tuo metu, kai to kintamojo galimos reikšmės imamos iš negriežtai apibrėžiamų aibių ir išreiškiamos žodžiais „aukštas“, „vidutinis“, „žemas“, „labai aukštas“, „labai labai aukštas“, „labai mažas“ ir pan., yra lingvistinis kintamasis.

Lingvistinių kintamųjų aibei priklauso ir kintamasis „amžius“, kai jo reikšmės imamos iš negriežtai apibrėžiamų aibių ir išreiškiamos žodžiais „senas“, „labai senas“, „senyvas“, „vidutinio amžiaus“, „apyjaunis“, „jaunas“, „labai jaunas“ ir pan.

Kai tokių kintamųjų galimos reikšmės imamos iš griežtai apibrėžtų aibių, pavyzdžiui, yra pakankamai tikslių matavimų, išreikštų skaičiais, rezultatai, tai tokie kintamieji jau nebepriskiriami lingvistinių kintamųjų aibei ir laikomi **griežtai apibrėžtais kintamaisiais**, t. y. tradiciniais kintamaisiais, nagrinėjamais tradicinėje matematikoje.

Pavyzdžiui, kintamasis „ūgis x “, kai x priklauso skaičių aibei ($x=185,5$ cm, $x=191$ cm, $x=168,5$ cm ir pan.) jau yra įprastas tradicinis (o ne lingvistinis) kintamasis. Panašiai galima pasakyti ir apie kintamąjį „amžius“ bei kitus kintamuosius, kurie gali būti ir lingvistiniais, ir griežtai apibrėžtais kintamaisiais.

Lingvistinių kintamųjų ir jų reikšmių panaudojimas leidžia kurti sistemų ir procesų modelius tais atvejais, kai griežtai apibrėžto matematinio modelio

sukurti nepavyksta, bei tais atvejais, kai griežtai apibrėžtas matematinis modelis nėra pakankamai adekvatus modeliui negriežtai apibrėžtam procesui ar sistemai.

Natūralu, kad toks kintamasis kaip „kokybė“ priklauso lingvistinių kintamųjų aibei, tačiau ir toks kintamasis kaip „kiekybė“ („kiekis“) gali tapti lingvistiniu kintamuoju, kai jo galimos reikšmės išreiškiamos žodžiais: „daug“, „labai daug“, „visiškai nedaug“, „keli“, „labai labai daug“, „neišpasakytai daug“, „šiek tiek“ ir pan.

Predikatai bei teiginiai, į kurių sudėtį įeina lingvistiniai kintamieji bei jų reikšmės, visada priklauso negriežtai apibrėžtų predikatų ir teiginių klasėms.

Lingvistinių kintamųjų reikšmės, t. y. negriežtai apibrėžiamos aibės, galima modifikuoti, paveikiant jas **lingvistiniais neapibrėžtumais**. Tokio poveikio rezultate gaunamos naujos negriežtai apibrėžtos aibės – naujos galimos lingvistinių kintamųjų reikšmės.

Lingvistinių neapibrėžtumų pavyzdžiai: „labai“, „daugiau-mažiau“, „vosvos“, „silpnai“, „vidutiniškai“, „daugiau“, „labai labai“, „beveik“ ir pan.

Prijungdami lingvistinius neapibrėžtumus prie lingvistinių kintamųjų reikšmių, gauname **modifikuotas jų reikšmes** – naujas negriežtai apibrėžiamas aibės. Pavyzdžiui, lingvistinio kintamojo „amžius“ pagrindines reikšmes: „jaunas“, „senas“, „vidutinio amžiaus“ („nei senas, nei jaunas“), galima modifikuoti ir gauti naujas reikšmes: „labai senas“, „labai labai senas“, „beveik jaunas“, „apyjaunis“ ir t. t.

Predikatai bei teiginiai, į kurių sudėtį įeina lingvistiniai neapibrėžtumai, visada yra negriežtai apibrėžti. Lingvistiniai neapibrėžtumai atlieka vaidmenį, panašų į modalumo operatorių vaidmenį.

1.16.2.3. Negriežtai apibrėžiamos funkcijos ir negriežtieji algoritmai

Įsivedę negriežtai apibrėžiamų aibių, predikatų ir teiginių, o taip pat lingvistinių kintamųjų sąvokas, galime įsivesti ir negriežtai apibrėžiamos funkcijos sąvoką.

Negriežtai apibrėžta funkcija plačiąja prasme vadinsime bet kokią kokio tai kintamojo, vadinamo **funkcija**, priklausomybę nuo kitų kintamųjų, vadinamų tos funkcijos **argumentais**, kai ta priklausomybė nėra griežtai apibrėžta, kitaip tariant, kai ta priklausomybė nėra funkcija klasikinės matematikos prasme (klasikinės matematikos funkcijos apibrėžimą žiūr., pavyzdžiui, 1.9.1.5. skyrelyje).

Negriežtai apibrėžtos priklausomybės gali egzistuoti ir tarp kintamųjų, kurių reikšmės priklauso griežtai apibrėžtomis aibėms. Tokios priklausomybės pavyzdžiu gali būti koreliacinis ryšys tarp dviejų atsitiktinių dydžių. Tai reiškia, jog **stochastinius ryšius (stochastines priklausomybes) mes irgi priskirsime prie negriežtai apibrėžiamų funkcijų plačiąja prasme.**

Tačiau tokios priklausomybės yra nagrinėjamos tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje, kurios jau seniai egzistuoja kaip susiformavusios savarakiškos mokslinės disciplinos, nepriklausančios L. Zadeh siūlomai negriežtai apibrėžtai matematikai, atsiradusiai žymiai vėliau.

Todėl tikslinga šiek tiek susiaurinti funkcijos, nagrinėjamos negriežtoje matematikoje, sąvoką ir įsivesti negriežtai apibrėžiamas funkcijas siaurąja prasme – **specifines difuzinės (negriežtai apibrėžtos) matematikos funkcijas.**

Negriežtai apibrėžiama funkcija siaurąja prasme vadinsime negriežtai apibrėžiamo kintamojo, vadinamo funkcija, priklausomybę nuo kitų kintamųjų, vadinamų tos funkcijos argumentais. Negriežtai apibrėžiamų funkcijų siaurąja prasme argumentų reikšmės gali priklausyti bet kokioms aibėms: ir griežtai apibrėžiamoms, ir negriežtai apibrėžiamoms.

Negriežtai apibrėžiamos funkcijos siaurąja prasme pavyzdžiu gali būti priklausomybė tarp kokių nors lingvistinių kintamųjų (na, kad ir tokio lingvistinio kintamojo kaip „žmogaus svoris“, kurio reikšmėmis gali būti žodžiai „labai didelis“, „didelis“, „vidutinis“, „mažas“, „labai mažas“ ir panašiai, priklausomybė nuo jau mūsų nagrinėtųjų lingvistinių kintamųjų „žmogaus ūgis“ ir „žmogaus amžius“; tokia priklausomybė, kaip rodo stebėjimai, tikrai egzistuoja, ir jos aprašymas kaip tik ir bus šios negriežtai apibrėžiamos funkcijos siaurąja prasme „apibrėžimas“).

Skaitytojui gali kilti klausimas, kam tokios funkcijos reikalingos bei kokią naudą iš jų galima gauti. Juk negriežtai apibrėžiamos funkcijos žymiai mažiau informatyvios negu klasikinės matematikos funkcijos.

Galima sutikti, kad negriežtai apibrėžiamų funkcijų tikrai nereikėtų, jei visas mus dominančias priklausomybes sugebėtume išreikšti klasikinės matematikos funkcijų kalba. Tačiau mes ne visada sugebame tai padaryti dabar, o eilėje atvejų to iš viso padaryti neįmanoma. Todėl **visais tokiais atvejais negriežtai apibrėžiamos funkcijos vis dėlto yra geriau negu nieko, nes jos vis dėlto suteikia šiokią tokią informaciją apie nagrinėjamus reiškinius.**

Šiek tiek idėmiau paanalizavę mokslines knygas, nepriklausančias tiksliesiems mokslams, o taip pat mūsų buitinius samprotavimus, mes gana greitai įsitikinsime, jog jau **nuo seniausių laikų žmonės naudojami negriežtai apibrėžiamomis funkcijomis** ir jos nėra L. Zadeh ar kitų mokslininkų išradimas. **L. Zadeh nuopelnas ne tame, kad jis atrado neapibrėžtumo reiškinį, o tame, jog jis atkreipė į juos dėmesį, išskirdamas bei suformuodamas atitinkamas sąvokas ir suteikdamas joms pavadinimus, leidžiančius mums apie tas sąvokas mąstyti, apie jas kalbėti, jomis operuoti.**

Dabar pereisime prie kitos matematikai labai svarbios sąvokos – algoritmo sąvokos.

Negriežtai apibrėžiamu (arba tiesiog – negriežtu) algoritmu vadinsime tokią seką instrukcijų, aprašančių, ką, kaip ir kokia tvarka reikia daryti, norint gauti mums reikalingą rezultatą, kurioje bent viena ar kelios instrukcijos yra sudarytos, pasinaudojant negriežtai apibrėžiamais teiginiais.

Negriežtai apibrėžiamo matematinio algoritmo pavyzdžiu gali būti šis lygties $f(x)=0$ kokio nors vieno sprendimo radimo algoritmas:

1. Suraskite du tokius skaičius (taškus) a ir b , tenkinančius sąlygą $a < b$, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės $f(a)$ ir $f(b)$ tuose taškuose turėtų skirtingus ženklus. Jei tokius skaičius a ir b suradote, tai pereikite prie šio algoritmo žingsnio, kuris aprašytas antrojoje šios instrukcijų sekos instrukcijoje. Jei net po gana ilgų ir gana įvairių bandymų tokių skaičių a ir b surasti nepavyko, t. y., jei visuose Jūsų pasirinktuose taškuose funkcijos $f(x)$ reikšmė nelygi 0 ir turi visą laiką vieną ir tą patį ženklą, tai pereikite prie to šio algoritmo žingsnio, kurį aprašo penktoji šios instrukcijų sekos instrukcija.

2. Pasirinkite kokį nors skaičių c_i (kur $i=1,2,3\dots$), tenkinantį nelygybę $a < c_i < b$, ir pereikite prie žingsnio, aprašyto trečiojoje instrukcijoje.

3. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ reikšmę $f(c_i)$ taške $x=c_i$.

Jei $f(c_i)=0$, tai Jūs duotąjį uždavinį jau išsprendėte – suradote vieną galimų lygties $f(x)=0$ sprendinių, būtent sprendinį $x=c_i$, ir galite laikyti, jog algoritmas baigė darbą. Jei $f(c_i) \neq 0$, tai $f(c_i)$ ženklas būtinai sutampa su funkcijos $f(x)$ ženklu viename iš anksčiau pasirinktų taškų a ir b . Pavadinkite tašką c_i vardu to taško (a arba b), kuriame funkcijos $f(x)$ ženklas sutampa su $f(c_i)$ ženklu, ir, gavę naują (jau trumpesnę) atkarpą ($a;b$) su skirtingais funkcijos $f(x)$ ženklais jos galuose, grįžkite prie šio algoritmo

žingsnio, aprašyto antrojoje instrukcijoje, t. y. pereikite prie naujo skaičiaus c_i , kai i padidėjo vienetu, pasirinkimo.

4. Kartokite šio algoritmo žingsnius, aprašytus antrojoje ir trečiojoje instrukcijose, iki tol, kol kokiame nors i -jame cikle ($i=1, 2, 3, \dots$) susidursite su situacija, jog pasirinktasis skaičius c_i arba visiškai tiksliai tenkins lygybę $f(c_i)=0$, arba $f(c_i)$ reikšmė taps pakankamai artima 0.

Pirmuoju atveju $x=c_j$ bus tiksliai lygties $f(x)=0$ sprendiniu, o antruoju – artutiniu. Abiem atvejais algoritmas bus baigęs savo darbą.

5. Kadangi funkcijos $f(x)$ ženklas visuose taškuose x , kuriuos Jūs nagrinėjote, pasirodė vienodas, tai pasirinkite skaičių α , turintį ženklą, sutampantį su $f(x)$ ženklu, ir tokią mažą absoliučią reikšmę $|\alpha|$, kad ją praktiškai galima būtų laikyti beveik lygią 0. Sudarykite naują funkciją $\varphi(x)=f(x)-\alpha$ ir pereikite prie lygties $\varphi(x)=0$ sprendinio paieškos pirmojoje, antrojoje, trečiojoje ir ketvirtojoje instrukcijose aprašytu metodu, t. y. pakartokite pirmąją, antrąją, trečiąją ir ketvirtąją šio algoritmo žingsnius.

Jei, sprendžiant lygtį $\varphi(x)=0$, pirmajame aukščiau aprašyto algoritmo žingsnyje Jums ir po gana įvairių bandymų nepavyks rasti tokių a ir b , kad $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, tai reikš, kad funkcijos $y=f(x)$ grafikas ne tik nekerta abscisių ašies, bet neturi ir lietimosi su ja taškų, t. y. reikš, kad lygtis $f(x)=0$ neturi sprendinio, o kartu – ir algoritmo darbo pabaigą.

Jei tokius a ir b , kad $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, surasti pavyks, tai, pasinaudodami procedūromis, aprašytais antrojoje, trečiojoje ir ketvirtojoje šio algoritmo instrukcijose, būtinai galėsite surasti tikslų ar artutinį lygties $\varphi(x)=0$ sprendinį. Jį galima laikyti artutiniu lygties $f(x)=0$ sprendiniu ir tuo baigti algoritmo darbą.

Tačiau norint surasti tašką x dar artimesnį taškui, kuriame funkcijos $y=f(x)$ grafikas liečia ar beveik liečia abscisių ašį, algoritmo darbą galima pratęsti. Galima pasinaudoti tuo, kad šiuo atveju lygties $\varphi(x)=0$ sprendiniai yra išsidėstę poromis taškuose, tarp kurių funkcijos $f(x)$ reikšmė gali būti dar artimesnė nuliui negu taškuose, kuriuose $\varphi(x)=0$. Todėl suradę anksčiau aprašytu būdu nors vieną lygties $\varphi(x)=0$ sprendinį, mes, judėdami pakankamai mažais žingsneliais abscisių ašimi nuo to sprendinio į tą pusę, kurioje $f(x)\cdot\varphi(x)<0$, tol, kol mažėjanti $|f(x)|$ reikšmė nepradės didėti, galime surasti x reikšmę, gana artimą abscisei to taško, kuriame funkcijos $y=f(x)$ grafikas liečia arba praktiškai beveik liečia abscisių ašį.“

Lygindamas šį negriežtą algoritmą su atkarpos dalinimo pusiau ar Niutono stygų ir liestinių algoritmu, skaitytojas gali pakankamai gerai išsiaiškinti, kuo skiriasi negriežti algoritmai nuo griežtai apibrėžtų.

Griežtai apibrėžti algoritmai būdingi mokslams, kuriuos vadina „tiksliaisiais“, o kituose moksluose ir praktinėje veikloje žmonės gana dažnai naudojami negriežtais algoritmais.

Daug negriežtų algoritmų pavyzdžių galima rasti, skaitant kulinarijos receptus, kuriuose kartu su griežtai apibrėžtomis galima aptikti ir negriežtai apibrėžtų instrukcijų, tokių kaip, pavyzdžiui: 1. „Sumuškite porą ar trejetą kiaušinių ir atskirkite trynius nuo baltymo. Baltymą suplakite, plakdami iki tol, kol jis pavirs balta putota mase“. 2. „Įberkite druskos pagal skonį ir gerai išmaišykite“. 3. „Kepsnį įdėkite į orkaitę ir kepkite prie temperatūros apie 120° – 130°C apie 20–30 minučių, kol kepsnio paviršius gražiai paruduos. Po to išimkite kepsnį iš orkaitės ir, gražiai papuošę žalumynais, paduokite į stalą“.

Palieku skaitytojui nustatyti, kiek neapibrėžtumų galima surasti čia pateiktose trijose instrukcijose. Tačiau, naudojantis tokiomis instrukcijomis, vis dėlto pavyksta pagaminti kulinarijos knygoje aprašytus patiekalus. O tai, kad kulinarijos knygos yra

masiškai perkamos, įrodo, jog ir **negriežti algoritmai gali duoti mums naudingos informacijos, padedančios pasiekti pageidautinus tikslus.**

Taip atsitinka dėl dviejų priežasčių: 1) gana dažnai žmogaus tikslas nėra tik griežtai apibrėžtas „taškas“, o yra tą tašką supanti gana nemaža negriežtai apibrėžta „sritis“; 2) ta nepilna informacija, kurią žmogus randa negriežtame algoritme, papildo informacija, anksčiau sukaupta žmogaus atmintyje jo patirties dėka, ir tokios jungtinės informacijos gana dažnai jau pakanka, kad žmogus, ją atitinkamai apdorojęs, galėtų pradėti tikslingai veikti ir, stebėdamas savo veiklos rezultatus bei tą veiklą atitinkamai koreguodamas, pasiektų pageidaujamą tikslą.

Daug negriežtų algoritmų galima aptikti ir įvairių gamybinių procesų bei paslaugų technologijos aprašymuose, įvairiuose metodiniuose nurodymuose bei patarimuose (pavyzdžiui, kaip elgtis, pastebėjus pirmuosius tos ar kitos ligos simptomus, kaip auklėti vaikus, kaip išvengti konfliktų šeimoje bei darbo kolektyve ir pan.). Gana populiarios ir tokios knygos kaip Deilo Karnegio „Kaip įsigyti draugų ir paveikti žmones“. Šioje knygoje galima rasti daug negriežtų instrukcijų, ir aš labai rekomenduočiau ją perskaityti būsimiems dženeralistams, nes jiems tikrai bus labai naudingas bendravimo meno pagrindų, aprašytų šioje knygoje, žinojimas.

Dauguma žmonių negriežtai apibrėžtais algoritmais naudojasi netgi dažniau negu griežtai apibrėžtais. **L. Zadeh kaip tik ir siūlo pabandyti formalizuoti ir matematizuoti tą gana plačią žmonių veiklos ir gyvenimo sritį, kurioje iki šiol matematinė kalba ir matematiniai metodai nebuvo ar beveik nebuvo taikomi.**

Skaitytojui gali kilti klausimas, kam tokio matematizavimo reikia, o taip pat abejonė, ar iš jo galima gauti kokią nors apčiuopiamą praktinę naudą. Juk iki šiol žmonės gyveno, netaikydami matematikos daugelyje savo veiklos ir gyvenimo sričių, ir nejautė tam reikiamybės, neretai ir be matematikos pasiekdami gana aukšto meistriškumo. Ar sugebės pakelti jo lygį matematikos taikymas? Ar „negriežtoji matematika“ nėra tik savotiškas žaidimas, bandant „matematizuoti“ tai, kas iš viso nematematizuojama? Juk, kaip jau buvo rašyta 1.16.1.5.5.6. skyrelyje, ne viską galima formalizuoti, o be to juk ne visada formalizuotų metodų taikymas yra pranašesnis už intuiciją.

Čia pateiktuose samprotavimuose gana daug tiesos, todėl abejonės negriežtosios matematikos reikalingumu ir jos taikymų efektyvumu nėra tokios jau beprasmiškos. Tačiau **„negriežtosios matematikos“ vystymo ir taikymo šalininkai juk ir nebando paneigti intuicijos svarbos bei atmesti visus iki šiol naudotus bei naudojamus nematematinius žmogaus mąstymo metodus, teigdami, jog visi jie gali būti pakeisti matematiniais metodais ir kad visada matematiniai metodai yra efektyvesni už nematematinius.** Jie, neatmesdami nematematinio mąstymo ir nematematinio tyrimo metodų, tik teigia, jog gali egzistuoti tokios sritys, kuriose negriežtosios matematikos formalizuota kalba ir matematinis aparatas gali būti naudingi. Norėdamas įrodyti šio negriežtosios matematikos šalininkų teiginio teisingumą, nurodysiu vieną tokių sričių – **robotų, sugebančių pavaduoti žmogų gamyboje ir buityje, kūrimas, jų bendravimo su žmonėmis tobulinimas bei supaprastinimas, o taip pat ir eilės kitų dirbtinio intelekto sistemų kūrimo problemų sprendimas.** Juk, norėdami sukurti pakankamai tobulus ir pakankamai patogius (bendravimo su jais prasme) robotus, mes privalome „išmokyti“ juos veikti, naudojantis ne tik griežtomis (vienareikšmiškai apibrėžtomis), bet ir negriežtai apibrėžtomis komandomis, instrukcijomis bei programomis, „išmokyti“ juos suprasti mus, taip sakant, „iš pusės žodžio“, kaip tai sugeba daryti žmonės. **O viso to negalima pasiekti, neišsiaiškinus, kaip vyksta informacijos priėmimo, kaupimo, apdorojimo ir panaudojimo kokios nors sistemos valdyme procesai, kai informacija tai**

sistemai teikiama negriežtai apibrėžtais sakiniiais (teiginiais, komandomis, instrukcijomis), nesukūrus negriežtosios matematikos formalizuotos kalbos ir jos matematizuoto loginio aparato.

Žiūrint iš bendrasisteminių pozicijų, negriežtosios matematikos atsiradimas ir formavimasis yra dar vienas kokybinis šuolis matematikos mokslo raidoje.

Aritmetika ir algebra, o vėliau ir matematinė analizė formavosi ir vystėsi, formalizuojant griežtai apibrėžtų kiekybių ir galimų determinuotų operacijų su jomis aprašymo kalbą ir ta kalba išreiškiant bei po to panaudojant tų operacijų logikos dėsningumus.

Geometrija, o vėliau ir diferencialinė geometrija bei topologija formavosi ir vystėsi formalizuojant griežtai apibrėžtų struktūrų ir galimų determinuotų operacijų su jomis aprašymo kalbą ir ta kalba išreiškiant bei po to panaudojant tų operacijų logikos dėsningumus.

Abi šios šakos – kiekybinė ir struktūrinė – jau nuo pat pradžių sąveikavo tarpusavyje, turtindamos vieną kita ir skatindamos tokių matematinių disciplinų kaip analizinė geometrija, vektorinė analizė (o vėliau ir ją apibendrinanti tenzorinė analizė) ir pan. susiformavimą ir vystymąsi.

Tikimybių teorija ir matematinė statistika papildė determinuotų operacijų su griežtai apibrėžtomis kiekybėmis bei struktūromis matematiką, įvesdamos formalizuotą nedeterminuotų – stochastinių – procesų su griežtai apibrėžtomis esybėmis bei tų procesų kiekybinių charakteristikų aprašymo kalbą ir išreiškdamos ta kalba tų procesų logikos dėsningumus bei po to juos panaudodamos.

Negriežtoji matematika dabar bando papildyti iki šiol egzistavusią matematiką, įvesdama negriežtai apibrėžtų kiekybių ir struktūrų bei nestruktūrizuotų kokybių, o taip pat įvairių procesų (determinuotų, stochastinių, negriežtai apibrėžtų) su jomis aprašymo formalizuotą kalbą ir bandydama surasti ir išreikšti ta kalba tų procesų logikos dėsningumus, kad po to jais būtų galima pasinaudoti.

Norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį į du bruožus, būdingus bet kuriai matematinei disciplinai bet kurioje jos raidos stadijoje: 1) esybių (su jų savybėmis bei santykiais tarp jų) ir procesų (operacijų) su jomis aprašymo formalizuota kalba; 2) nagrinėjamų operacijų rezultatų apskaičiavimo (išvadų gavimo) formalizuotas aparatas – formalizuota kalba išreikšti tų operacijų logikos dėsningumai, sujungti į atitinkamą sistemą, ir jų pagrindu sukurti atitinkami algoritmai.

Plečiant nagrinėjamų esybių ir operacijų su jomis ratą, plečiasi ir matematinė kalba ir jos loginis aparatas, aprėpdami vis platesnę sritį, kurioje galimi matematikos taikymai.

Žiūrint į matematiką iš čia išsakytų bendrasisteminių pozicijų, tampa beprasmybėmis visi kartais vis dar kylantys ginčai dėl to, laikyti ar nelaikyti matematinę logiką matematikos dalimi ir atvirkščiai (žiūr., pavyzdžiui, [303, 304]). Juk matematika, kokioje savo raidos stadijoje ji bebūtų, užsiima, remdamasi bendraisiais (bendrasisteminiiais) logikos dėsniais, ne kuo kitu, o tik tam tikrą laiką nuo laiko besiplečiančios būdingos šiai stadijai sferos specifinių procesų logikos dėsnų nustatymu, formalizavimu ir panaudojimu. Todėl matematinė logika, kai ji traktuojam pačia plačiaja prasme, aprėpia visą matematiką, susiliedama su ja, nes negali būti matematikos be logikos ir matematinės logikos be formalizuotos matematinės kalbos ir matematizuoto išvadų gavimo aparato.

Prisimenant 1.6.4.14. ir 1.16.1.5.5.7. skyreliuose minėtą ryšį tarp bendrasisteminių ir matematinių dėsnų, galima teigti, jog ateityje formalizuota

bendroji sistemų teorija, tapusi matematine (plačiąja prasme) sistemų teorija, logika (tame tarpe – ir matematinė logika) bei matematika turėtų taip tarpusavyje persipinti, kad susiliėtų į vieną formalizuotą mokslą apie bendruosius (galiojančius visoms sistemoms, nepriklausomai nuo jų substrato) dėsningumus, o to mokslo taikymo sritis turėtų aprėpti visas sistemas, nepriklausomai nuo jų struktūrų sudėtingumo bei jų apibrėžtumo lygio.

1.16.2.4. Neapibrėžtiniai sisteminiai ir optimizaciniai modeliai.

Lošimų teorijos metodų taikymai

Negriežtai apibrėžtais (neapibrėžtiniais) sisteminiais modeliais vadinsime tokius išorinius ir vidinius sistemų modelius, kurie sudaryti, naudojantis ne tik griežtai apibrėžtais, bet ir negriežtais teiginiais bei predikatais. Kad kokį nors modelį laikytume neapibrėžtu, pakanka, jog jo sudėtyje būtų bent vienas nepakankamai griežtai apibrėžtas teiginys ar predikatas. Modeliai, kuriuose kai kurie kintamieji gali turėti negriežtai apibrėžtas reikšmes, taip pat laikomi negriežtai apibrėžtais modeliais. Tokie modeliai gali būti ir analiziniai, ir imitaciniai. Kai imitacinis modelis imituoja negriežtai apibrėžtą kokios nors sistemos funkcionavimo algoritmą, tai toks modelis vadinamas **negriežtai apibrėžtu sisteminiu imitaciniu modeliu**.

Neapibrėžtiniai sisteminiai deskriptiniai modeliai gaunami, aprašant objektus ir sistemas, kurių (bei jų elementų) įėjimų, išėjimų ar būsenų vektorių nors vienės koordinatės reikšmės priklauso (ar dėl mūsų nepakankamo informuotumo yra priskiriamos) negriežtai apibrėžiamai aibei, o taip pat objektus ir sistemas, kurių (ar kurių elementų) išėjimų ar perėjimų funkcijos (bent viena iš tų funkcijų) priklauso ne tik griežtai apibrėžtos, bet ir negriežtai apibrėžtos matematikos funkcijų aibei.

Negriežtai apibrėžtais gali būti ne tik deskriptiniai, bet ir **normatyviniai sisteminiai modeliai**. Juk ne visuomet įmanoma (o neretai – net ir netikslinga) griežtai vienareikšmiškai suformuluoti reikalavimus, kuriuos turėtų tenkinti projektuojamoji ar tobulinamoji sistema, tuo labiau, kad ne visuomet galima iš anksto tiksliai numatyti, kaip pasikeis ta išorinė aplinka, kurioje tai sistemai teks funkcionuoti.

Griežtai apibrėžti deskriptiniai ir normatyviniai modeliai, kurie sudaromi naudojantis griežtai apibrėžta matematine kalba, yra tik tam tikros idealizacijos, kurios su mums pakankamu tikslumu turėtų atvaizduoti tai, ką mes turime bei ko norime. Tikrovė, kurioje mes gyvename, nėra tokia griežtai apibrėžta kaip klasikinė matematika, todėl būna atvejų, kada **negriežtai apibrėžti sisteminiai modeliai yra net adekvatesni tai tikrovei už „absoliučiai tikslūs“ griežtai apibrėžtus klasikinius matematinius modelius**. Apie tai jau buvo kalbėta šio skyriaus pradžioje.

Priežastys, iššaukiančios normatyvinių sisteminių modelių neapibrėžtumą, gali iššaukti ir optimizacinių modelių neapibrėžtumą. **Neapibrėžtiniais optimizaciniais modeliais** vadinami tokie optimizaciniai modeliai, kurių aprašymo sudėtyje galime rasti nors vieną negriežtai apibrėžtą (nevienareikšmiškai interpretuojamą) teiginį bei predikatą. Tas nevienareikšmiškumas gali pasireikšti, formuluojant optimizacinio modelio tikslo funkciją (parenkant optimalumo rodiklio priklausomybę nuo valdomųjų kintamųjų bei nuo nevaldomųjų faktorių), nustatant apribojimus, kuriuos turėtų tenkinti valdomieji kintamieji, bei parenkant pačius valdomuosius kintamuosius ir nustatant jų bei modelio parametrų reikšmes.