

Ieškodami taškų A ir D svorio centro, lygiai taip pat, kaip ką tik darėme, gautume, kad tų taškų svorio centras yra taškas F, turintis ordinatę $y_F = -2$. Tačiau dabar, ieškodami taško F, atstovaujančio taškus A ir D, ir taško B svorio centro, jau nebegalime laikyti, kad taško F svoris ir masė yra lygi taškų A ir D svorių ir masių sumai. Dabar taško F svoris jau būtų lygus tik 2 kG, o todėl taškų F ir B svorio centro koordinatė $y_{F,B}^*$ dabar būtų lygi $y_{F,B}^* = \frac{2 \cdot (-2) + 8 \cdot 8}{2 + 8} = \frac{60}{10} = 6$, t. y. dabar taškų F ir B svorio centras sutaptų su tašku D. Tai reikštų, kad K.I.Valjkovo sistemoje taškų A, D ir B svorio centras, apskaičiuotas, naudojantis formule $(A \times D) \times B$, sutaptų su tašku D.

Apskaičiuosime dabar taškų A, D ir B svorio centrą K.I.Valjkovo sistemoje, naudodamiesi formule $A \times (D \times B)$.

$$\text{Pradžioje surasime } y_{D,B}^* = \frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 8}{6 + 8} = \frac{100}{14} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}. \text{ Dabar surasime taško A ir ką tik surastojo taškų D ir B svorio centro bendrojo svorio centro ordinatę } y_{A,(D,B)}^* = \frac{8 \cdot (-8) + \frac{50}{7} \cdot \frac{50}{7}}{8 + \frac{50}{7}} = \frac{-64 + 100}{22} = -\frac{636}{106 \cdot 7} = -\frac{318}{371}, \text{ kuri skiriasi nuo taško D ordinatės } y_{(A,D),B}^* = 6.$$

Kaip matome, K. I. Valjkovo sukonstruotoje sistemoje $(A \times D) \times B \neq A \times (D \times B)$, t. y. operacija „ $\times$ “ nėra asociatyvi.

O tai reiškia, jog K. I. Valjkovo sistema netenkina aksiomų sistemos Nr.3 antrosios aksiomos reikalavimų, ir todėl neturime teisės reikalauti, kad K. I. Valjkovo sukonstruotoje sistemoje galiojotų visos teoremos, išvestos iš aksiomų sistemos Nr.3. K. I. Valjkovo sukonstruotoje sistemoje galios tik tos iš aksiomų sistemos Nr.3 išvestos teoremos, kurios gautos nesinaudojant antrąja aksioma, teigiančia apie operacijos „ $\times$ “ asociatyvumą.

Knygutėse [266] ir [267] yra ir daugiau įvairių pavyzdžių, kurių paskirtis – parodyti formalių aksiomatinių metodų „bevaisiškumą“ ir „tuštybę“, o taip pat gana daug kandžių, taiklių teisingų ir neteisingų kritinių pastabų formalizavimo ir formalių teorijų atžvilgiu.

Būtų labai naudinga, jeigu šios mokymo priemonės skaitytojais rastų laiko ir noro paanalizuoti šių dviejų gana plonų knygelių turinį, atsijoti pelus nuo grūdų ir įsitikinti, kad K. I. Valjkovo kritika ne tik nesugriauna formalių teorijų, bet padeda tas teorija tik dar labiau sustiprinti. K. I. Valjkovas gerokai persistengė, neigdamas dedukciją ir pripažindamas tik indukciją. **Formalizavimas ir aksiomatinis metodas, jeigu jais naudotis pakankamai preciziškai, visą laiką turint omenyje jų esmę bei ribotumą, lyginant su realiais neišsamiu pasaulio objektais, kaip rodo ilgaamžė praktika, duoda neginčytiną naudą. O dabar, kompiuterinės technikos amžiuje, formalizavimas tampa ypatingai aktualus,** apie ką šioje mokymo priemonėje jau ne kartą buvo kalbėta ir bus kalbama skyrelyje, skirtame dirbtinio intelekto sistemų kūrimui. Tačiau būtų didelė klaida, jei nagrinėdami formalias sistemas ir jų vietą teorijoje ir praktikoje, pamirštume šio skyrelio pirmojoje pusėje, nagrinėjant iš K. I. Valjkovo knygelių paimtą pirmąjį pavyzdėlį, mūsų jau cituotą M. Taubės tezę, jog **formalios procedūros mokslinio pažinimo ir įgytų mokslinių žinių taikymo procesuose yra vis dėl to tik tarpas tarp neformalios pradžios ir neformalios pabaigos.** Todėl natūralu, jog net matematiką nepavyko suvesti į baigtinę formalią uždara sistemą, jau nekalbant apie kitus mokslus. Bet, iš kitos pusės, nederėtų ir nepagrįstai menkinti minėtojo „intarpo“ vaidmenį ir reikšmę, nes tame „intarpe“ telpa didžioji dalis matematikos kartu su kompiuterine technika ir jos programine įranga bei informaciniais bankais, visi dedukciniai metodai. Tą „intarpą“ pačiame pirmajame šios mokymo priemonės paveikslėlyje, patalpintame „Ivade“, vaizduoja antstatas, esantis virš realaus pasaulio ir sąveikaujantis su pastaruoju per tame paveikslėlyje taip pat pavaizduotus formalizavimo ir interpretavimo procesus. Šie procesai, kaip teisingai pastebi M. Taubė, negali būti vien tik formalūs, kai tuo tarpu procesai, vykstantys pačiame „antstate“, kuo toliau, tuo plačiau ir pilniau yra ir bus formalizuojami ir kompiuterizuojami.

Taip pat aktuali indukcinio ir dedukcinio metodų vietos bei vaidmens ir santykių tarp jų mokymosi procese problema. Suvokdami didžiulę dedukcijos reikšmę loginio mastymo ugdyme ir tobulinime, turėtume vis dėl to prisipažinti vertais rimto dėmesio šiuos Getingeno ir Niujorko universitetų profesoriaus, žymaus JAV matematiko R. Kuranto žodžius: „**Dedukcinis metodas, pradedantis nuo aksiomų, kurios iš pirmo žvilgsnio atrodo gana dogmatiškos, leidžia, mokantis matematikos, greitai įsisavinti dideles jos teritorijas. Tačiau konstruktyvusis Sokrato metodas, vedantis nuo konkrečių dalinių atvejų prie jų apibendrinimų ir vengiantis dogmatizmo, nepriklausomai kūrybiškai minčiai grindžia nepalyginimai patikimesnį kelią**“ [275]. Į tuos žodžius derėtų įsiklausyti ir aukštųjų mokyklų matematinių disciplinų dėstytojams, nes pernelyg didelę jų

dalį yra linkusi į sausą dogmatizmą, ne tik neugdanti loginio mastymo, bet net atbukinantį kūrybišką mintį ir atbaidanti nemažą dalį studentų nuo savo kursų, nuo noro į juos gilintis. Manau, kad tikrai vertėtų rimtai įsiklausyti į turinčio didelę matematikos dėstymo Rusijos ir Prancūzijos aukštosiose mokyklose patirtį V. I. Arnoljdo straipsnio „О преподавании математики“ („Успехи математических наук“ т. 53, вып. 1(3/9), 1998 г. январь–февраль, 229-234 с.с.) žodžius, tikrai negailinčius karčios kritikos dideliems aksiomatinių sistemų ir „griežtos dedukcijos“ gerbėjams. Kai kurios V. I. Arnoljdo mintys tikrai susišaukia su K. I. Valjkovo mintimis, ir nors K. I. Valjkovas, pats padaręs nemažai klaidų, gerokai „perlenkė lazda“, tačiau panašių minčių pasirodymas matematinėje literatūroje yra simptominis ir sveikintinas reiškiny, verčiantis pamąstyti ir padaryti atitinkamas išvadas.

Tuo ir baigsiu pirmąją 1.16.1.5.5.7. skyrelio dalį, skirtą formalių teorijų ir aksiomatinio metodo kritikos, pasirodžiusios logikos mokslo raidos šiuolaikiniame etape trečiosios krizės matematikoje ir „Hilberto programos“ nesėkmės pasekoje, apžvalgai bei indukcinio ir dedukcinio metodų vaidmens sisteminei analizei, atsižvelgiant į šiuolaikiniam – penktajam – matematinės logikos raidos etapui būdingas mokslines ir technines sąlygas. **Pereisiu prie pagrindinių krypčių, kuriomis dabar vystosi šiuolaikinė matematinė logika, ir tam vystymuisi būdingų bruožų apžvalgą.**

Pirmasis logikos mokslo raidos penktojo etapo požymis, kaip jau buvo minėta šio skyrelio pradžioje, yra žymiai sumažėjęs straipsnių, skirtų matematikos pagrindų problemoms, skaičius. Matematinė logika, ketvirtajame logikos mokslo raidos etape tarnavusi matematikos pagrindimo reikmėms, penktajame etape vis labiau persiorientuoja į savęs pačios vystymąsi bei taikymus, tame tarpe ir naujose srityse, susiformavusiose ryšium su kompiuterinės technikos atsiradimu ir sparčiais jos tobulėjimo bei taikymo sričių plėtotės tempais.

Šias tendencijas logikos mokslo raidoje galima laikyti pagrindiniu šiuolaikinio jos raidos etapo požymiu. Tokių tendencijų dėka susiformavo eilė neklasikinių logikų, kuriose stengiamasi įveikti klasikinės dvireikšmės logikos ir jos materialinės implikacijos trūkumus, pradėjo intensyviai vystytis modalinės logikos, stipriai išaugo klasikinės logikos matematinio aparato taikymai diskrečių techninių sistemų aprašymui, modeliavimui ir optimizavimui, jų analizės ir sintezės automatizavimui, pradėjo vystytis dirbtinio intelekto sistemų teorija, mokslinius tyrimus loginės sintaktikos srityje papildė moksliniai darbai, skirti loginei semantikai, ryšium su kuo žymiai išsiplėtė ir pagilėjo matematinės logikos ryšiai su semiotika ir matematine lingvistika, tikimybinės logikos atsiradimo ir vystymosi dėka formuojasi bendrasisteminis požiūris į išvadų gavimą indukcinėje ir dedukcinėje logikose, pradėjo formuotis negriežtai apibrėžta logika, negriežtai apibrėžtų aibių teorija ir, bendrai, negriežtai apibrėžtų sistemų bei procesų matematika, kuri, kaip tikimasi, galėtų permesti tiltą tarp tikslųjų ir humanitarinių mokslų, tuo dar labiau išplėsdama matematinės kalbos ir matematinio aparato taikymo „teritoriją“. Ši – **antrąją – matematinės logikos ir „moderniosios matematikos“ raidos požymį galima laikyti pačiu charakteringiausiu ir pačiu svarbiausiu šiuolaikinio – penktojo – etapo požymiu.** Apie čia paminėtas šiandien gana aktualias ir intensyviai vystomas logikos mokslo kryptis bus kalbama tolesniuose šio skyriaus skyreliuose, todėl šiame skyrelyje, skirame to mokslo raidos penktojo etapo trumpai apžvalgai, apsiribosiu tik šiuo čia pateiktu kai kurių svarbesniųjų krypčių išvardijimu.

Galima išskirti dar ir **trečiąją logikos mokslo raidos šiuolaikinio etapo požymį**, nors pastarasis taip tampriai susijęs su antruoju (ir net pirmuoju) požymiu, kad gali būti laikomas antrojo požymio sudėtinė dalimi. Tačiau, atsižvelgiant į šio – trečiojo – požymio bendrasisteminę svarbą, tikslinga šį požymį pažymėti atskirai. Trečiuoju požymiu reikėtų laikyti jau kelis sykius šiame skyrelyje minėtą gilesnio ir visapusiškesnio požiūrio į indukciją ir dedukciją, į jų tarpusavio sąryšį bei indukcinį metodų vietą ir reikšmę susiformavimą. Prie šio – trečiojo – požymio galima priskirti ir atsiradusią galimybę kurti jau minėtąją bendrąją loginio išvedimo teoriją, aprėpiančią ir indukcinį, ir dedukcinį išvadų gavimo procedūras. Gana artimi šiai matematinės logikos vystymosi krypčiai ir bandymai sukonstruoti tokią matematinę loginio išvedimo teoriją, kuri, atsižvelgdama ne tik į sintaktinius, bet ir į semantinius ryšius, sugebėtų išvengti materialiajai implikacijai būdingų trūkumų ir būtų, kiek įmanoma, artimesniu žmogaus loginio mąstymo, naudojančio ne tik dedukciją, bet ir indukciją (o be to – ir analogiją ir intuiciją), matematinio modeliu, galinčiu patenkinti bei sutaikyti ir logicizmo, ir intuicionizmo ir formalizmo atstovus.

Apie tokius bandymus bei jų rezultatus, o taip pat apie eilę kitų šiuolaikinės matematinės logikos vystymosi krypčių bus kalbama skyrelyje, pašvęstam **neklasikinių logikų** apžvalgai, prie kurios dabar ir pereisime. **Modalines logikas, negriežtąją („difuzinę“) L. Zadeh matematiką ir dirbtinio intelekto sistemas** apžvelgsime šiek tiek vėliau, o apie **matematinės logikos praktinius taikymus**, kuriems dėmesys paskutiniame laiku taip pat pradėjo didėti, jau nemažai buvo rašyta šio skyriaus 1.16.1.1.÷1.16.1.4. skyreliuose. Humanitarinius mokslus atstovaujantiems skaitytojams, kuriuos ypatingai domina logikos (ne tik matematinės, o, apskritai, logikos, aprėpiančios matematinę ir nematematinę, dedukcinę ir nededukcinę logikas) taikymai įvairiose žmogaus veiklos srityse,

rekomenduotiau susipažinti su turtinga ir originaliai parašyta V. A. Svetlovo monografija [276]. Dėl autoriaus originalaus ir plataus požiūrio į logiką ši knyga bus įdomi ir naudinga taip pat ir tikslųjų mokslų atstovams.

Nuo pat šiuolaikinio etapo pradžios gana intensyviai vystėsi logikos matematinio aparato techninio taikymo kryptys, nemažai prisidėjusios prie kompiuterinės technikos atsiradimo ir spartaus jos tobulėjimo. Susiformavo net kelios savarankiškos teorinės ir techninės disciplinos, skirtos automatų, automatų kolektyvų ir automatinių sistemų, algoritmų, algoritminių kalbų bei algoritminių sistemų analizei ir projektavimui. Šių specialių disciplinų ir su jomis susijusių specialių klausimų čia nenagrinėsiu, nes tam, kad dženeralistas sugebėtų susikalbėti su šių sričių specialistais, jam pakaks tų žinių, kurias jis gaus įdėmiai išstudijavęs šią mokymo priemonę. O ypatingai besidominantiems **automatų teorija, automatika, techninė kibernetika, algoritmų teorija bei techniniais matematinės logikos aparato taikymais** galima parekomenduoti knygas [50, 52, 64, 101, 102, 105, 110, 112, 121, 126, 127, 209, 210, 211, 249, 277÷288]. Jos parašytos dar tada, kai minėtosios kryptys dar formavosi, todėl viskas dėstoma dar pakankamai elementariai, todėl ir eiliniam skaitytojui viskas bus nesunkiai suprantama. Susipažinus su tomis knygomis, bus galima skaityti ir suprasti jau ir naujesniąją specialiąją literatūrą. Žinoma, daugumai studijuojančių sistemotyra, jei jie nesiruošia specialiai užsiiminti automatų ir algoritmų teorijomis bei dalyvauti kolektyvų, užsiimančių kompiuterių ir kitų diskrečių automatų projektavimu, nėra reikalo skaityti čia mano išvardintas knygas ir kitą specialiąją literatūrą. Tais specialiaisiais klausimais sistemotyros kurse mes neužsiimėsimė, palikdami juos tos srities specialistams. Sistemotyros kursą studijuojantiems pakaks to, kad jie sugebės dalykiškai bendradarbiauti su tais specialistais, pakankamai gerai suprasdami vieni kitus, galėdami būti naudingi vieni kitiems.

O neklasikines ir modalines logikas, L. Zadeh negriežtąją matematiką bei dirbtinio intelekto ir ekspertines sistemas čia šiek tiek panagrinėsimė todėl, kad šių mokslo raidos krypčių ir pagrindinių pasiekimų jose žinojimas reikalingas vystant formaliąją sistemotyros kalbą ir jos matematinį aparatą, kurie, savo eile, reikalingi tam, kad sistemotyra galėtų operuoti ne tik su kiekybiniais, bet ir su lingvistiniais (verbaliniais) ir kitais nekiekybiniais modeliais. Be to tokios žinios labai svarbios ir reikalingos sisteminės pasaulėžiūros ir sisteminio mąstymo ugdymui.

1.16.1.5.6. Neklasikinės logikos

Lygindami logikos ir geometrijos mokslų istorijas, galime pastebėti tam tikrą analogiją, pasireiškusią tuo, kad tie mokslai, pradėję vystytis kaip „vienasisteminiai“, ilgainiui tapo „daugiasisteminiais“. Ilgą laiką buvo manoma, kad geometrija yra ir gali būti tik viena – t. y. tik ta geometrija, kurią mes dabar vadiname Euklido geometrija. Ir tik XIX a. mokslas susidūrė su tuo ir galų gale įsitikino, jog gali egzistuoti ne tik ši bet ir Lobačevskio, Rymano ir kitos geometrijos, turinčios skirtingas aksiomas ir skirtingas teoremas, išreiškiančios skirtingus erdvinius santykius skirtingose erdvėse.

Panašiai atsitiko ir su logikos mokslu. Nors, kaip jau matėme logikos mokslo raidos istorijai skirtame 1.16.1.5.4. skyrelyje, logikos mokslo vystymesi jau nuo pat pradžios dalyvavo įvairios mokyklos, kurių nuomonės ne visada sutapdavo, tačiau visos jos ilgą laiką vystė vieną ir tą patį logikos mokslą, o todėl ir ginčai tarp tų mokyklų vykdavo tik todėl, kad kiekviena mokykla laikydavo savo nuomonę teisingesne negu kitos nuomonės, labiau atitinkančia „tikrąją tiesą“, kurios, nors kartais ir suklysdami, siekė visi ir kuri, kaip visiems atrodė, turėjo būti vienintelė. Tik susidūrus su 1.16.1.5.5.4. skyrelyje aprašytomis antinomijomis, iššaukusiomis matematikos pagrindų krizę, ir bebando ją įveikti, buvo galų gale išsiaiškinta ir įsitikinta, kad **gali egzistuoti ne viena, o daug vidiniai neprieštarinčių logikų, turinčių, nors ir panašias, tačiau nepilnai sutampančias aksiomas, o todėl ir nevienodus iš tų aksiomų išplaukiančių teoremų rinkinius**. Nuo ginčų, kuri iš galimų sistemų yra „adekvatesnė“ tikrovei, ilgainiui buvo pereita prie suvokimo, kad kiekviena neprieštariną loginė sistema gali būti tam tikrų loginių santykių tam tikroje srityje, nagrinėjamoje tam tikru aspektu, modeliu, adekvačiu nagrinėjamai sistemai tam tikrame abstrakcijos lygyje. Kaip teisingai pastebi B. N. Piatnicinas [289] **“... vis daugiau mokslininkų, ir visai ne tik logikų, pradeda vis aiškiau suvokti ne tik tai, kad viena ir ta pati loginė formulė gali būti teiginiu, elektrine schema arba**

neuronų sistema, panašiai kaip tarkime, skaičius gali būti kaina, greičiu arba ilgiu, o abstraktus geometrinis taškas (kaip Hilberto geometrijos objektas) gali būti konkrečiu geometriniu tašku Euklido, Lobačevskio ar Rymano geometrijoje, potencialu arba galų gale, spalva, bet ir tai, kad esminiai skirtingų prigimčių objektams reikalingi ne tik skirtingi matematiniai, bet ir skirtingi loginiai modeliai“.

Todėl dabar jau laikoma visai natūraliu reiškiniu nagrinėti makro– ir mikropasaulių, laiko, erdvės, fizikos, jurisprudencijos ir t. t., o taip pat „virtualių pasaulių“ logikas ir nesistebėti, kad jos gali būti skirtingos, kad tokių logikų gali būti be galo daug.

Visas tas logikas, kurios nėra deduktyviai ekvivalenčios tai dvireikšmei logikai, kuri buvo vystoma iki XX a. pradžios ir kuri dabar vadinama klasikine, priimta vadinti **neklasikinėmis logikomis**. Todėl, norint apibrėžti neklasikinių logikų sąvoką, visų pirma reikia apibrėžti, ką priimta vadinti klasikine matematine logika.

Klasikinę matematinę logiką sudaro dvireikšmių teiginių ir predikatų algebra, kuri buvo nagrinėjama 1.16.1.1.–1.16.1.4. skyreliuose, o taip pat **dvireikšmių teiginių ir predikatų skaičiavimai**, kurių aprašymui buvo skirti 1.16.1.5.2.–1.16.1.5.4. skyreliai.

Reikėtų pažymėti, kad, atsižvelgiant į tą formalią loginę kalbą, kuri naudojama sudėtingų teiginių ir sudėtingų predikatų formaliam aprašymui, galėtų atrodyti, jog egzistuoja ne viena klasikinė matematinė logika, o visa jų aibė. Pavyzdžiui, teiginių skaičiavime, kuris buvo aprašytas 1.16.1.5.2. skyrelyje, sudėtingų teiginių konstravimui iš elementarių teiginių buvo naudojamos loginės jungtys „¬“, „∧“, „∨“ ir „→“, kurios teiginių algebroje interpretuojamos kaip loginis neigimas (inversija), loginė daugyba (konjunkcija), loginė sudėtis (disjunkcija) ir materialioji implikacija. Visos šios keturios loginės operacijos teiginių algebroje aprašomos atitinkamomis tų operacijų operandų ir jų rezultatų loginių reikšmių dvejetainėmis lentelėmis (žiūr. pavyzdžiui, 316-ją lentelę 1.16.1.4.2. skyrelyje bei [51]), kurias galima laikyti eksplisitiniais tų loginių operacijų apibrėžimais. Klasikiniame teiginių skaičiavime, pateiktame 1.16.1.5.2. skyrelyje, šių loginių jungčių implicitiniam (neišreikštiniam) apibrėžimui prireikė 11 aksiomų. Tame pačiame skyrelyje paminėta ir kita klasikinė teiginių skaičiavimo sistema, pavadinta Hilberto–Akermano sistema. Toje sistemoje naudojamosi tik dviejų tipų loginėmis jungtimis – „¬“, ir „∨“. Šių jungčių implicitiniam apibrėžimui prireikė jau tik keturių aksiomų. Knygutėje [81] aprašyta eilė kitų klasikinio teiginių skaičiavimo sistemų (Frėges, Mendelsono, Lukasievičiaus, Čiorčo, Rosero, Niko, Meredito), besiskiriančių nuo jau minėtųjų savo formaliąja kalba ir savo aksiomų sistemomis. Tačiau **tos sistemos, nors ir skiriasi savo aksiomų sistemomis bei vartojama logine kalba, yra klasikinės matematinės logikos skaičiavimo sistemų modifikacijos, nes visos jos yra funkcionaliai ir deduktyviai ekvivalenčios**: visi tose formulėse vaizduojami teiginiai gali turėti tik dvi logines reikšmes, atitinkančias tiesą (1) ir netiesą (0), visos tose formulėse esančios loginės operacijos interpretuojamos vienodai ir išreiškiamos vienos per kitas taip pat vienodai, visos vienodos formulės visose sistemose turi vienodas reikšmes ir nėra tokių formulių, kurios, būdamos išvedamos viename teiginių skaičiavime, pervedus jas į kokią nors kito teiginių skaičiavimo, priklausančio klasikinei logikai, kalbą, nebebūtų išvedamos tame skaičiavime, kaip nėra ir tokių formulių, kurios, būdamos neišvedamos viename klasikinių teiginių skaičiavime, būtų išvedamos kitame klasikiniame teiginių skaičiavime.

Tačiau toje pačioje knygelėje [81] aprašytoji intuicionistinė teiginių skaičiavimo sistema, kuri buvo specialiai suformuota, bandant įveikti matematikos

pagrindų krizę, nors, atrodytų, ir turi tą pačią formaliąją loginę kalbą kaip ir 1.16.1.5.2. skyrelyje aprašytasis klasikinis teiginių skaičiavimas, jau nebepriklauso klasikinei logikai. Iš intuicionistinio teiginių skaičiavimo aksiomų sistemos (pavyzdžiui, iš knygutėje [81] pateiktos Heitingo modifikuoto teiginių skaičiavimo aksiomų sistemos, susidedančios iš 13 aksiomų) jau negali būti išvestos formulės $A \vee \neg A$ ir $\neg \neg A \rightarrow A$, vaizduojančios trečiojo negalimo ir dvigubo neiginio pašalinimo dėsnius, kurie intuicionistinėje logikoje nelaikomi teisingais teiginiais, kai tuo tarpu klasikinėje teiginių algebroje formulės $A \vee \neg A$ ir $\neg \neg A \rightarrow A$ laikomos teiginiais, tapaciai lygiais loginiam vienetui, o klasikiniame teiginių skaičiavime – išvedamomis formulėmis.

Intuicionistinė logika skiriasi nuo klasikinės taip pat dar ir tuo, kad joje naudojamos loginės jungtys, jei jas interpretuotume kaip logines operacijas su teiginiais, negali būti aprašytos ne tik dvireikšmės logikos lentelėmis, bet ir bet kokios daugiareikšmės logikos, kurios teiginiai turi baigtinį reikšmių skaičių, lentelėmis. **Intuicionistinės logikos jungtys gali būti interpretuotos kaip loginės operacijos tik logikoje, kurioje tie teiginiai gali turėti be galo daug loginių reikšmių.** Todėl **implikacija intuicionistinėje logikoje nesutampa su materialiąja implikacija, naudojama klasikinėje logikoje**, ir todėl intuicionistinėje logikoje negalioja tapatybė $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$, galiojanti klasikinėje logikoje.

Ši aplinkybė paaiškina situaciją, su kurią susiduriame, nagrinėdami klasikinę Rosero teiginių skaičiavimo sistemą, ir kuri iš pirmo žvilgsnio atrodo paradoksali: **Rosero teiginių skaičiavimo sistema yra formaliai bei substancionaliai pilna klasikinio teiginių skaičiavimo sistema ir tuo atžvilgiu yra ekvivalenti teiginių skaičiavimui, aprašytam 1.16.1.5.2. skyrelyje, bet tuo pačiu metu visos joje išvedamos formulės gali būti išvestos ir intuicionistiniame teiginių skaičiavime, kuriame negali būti išvesta eilė formulių, išvedamų klasikiniame teiginių skaičiavime, aprašytame 1.16.1.5.2. skyrelyje.**

Iš tikrųjų čia nėra jokio paradokso. Pavyzdžiui, intuicionistiniame teiginių skaičiavime, kaip žinome, formulė $A \vee \neg A$ yra neišvedama. Tokia formulė negali būti išvesta ir Rosero sistemoje, nes tos sistemos formalioje kalboje, turinčioje tik jungtis „ $\wedge$ “ ir „ $\neg$ “, nėra jungties „ $\vee$ “, kurią klasikinėje teiginių algebroje, naudojantis Morgano formules, galima pakeisti jungtimis „ $\wedge$ “ ir „ $\neg$ “, esančiomis Rosero sistemos formalioje kalboje. Vietoj formulės $A \vee \neg A$ Rosero teiginių skaičiavime yra išvedama formulė $\neg(\neg A \wedge A)$, kuri klasikinėje teiginių algebroje yra ekvivalenti formulei $A \vee \neg A$. Formulė $\neg(\neg A \wedge A)$ yra išvedama ir intuicionistiniame teiginių skaičiavime, kurio formalioji kalba turi jungtis „ $\neg$ “, „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “ ir „ $\rightarrow$ “, tačiau tame skaičiavime formulė $\neg(\neg A \wedge A)$ jau nėra ekvivalenti formulei $A \vee \neg A$, kurią tame skaičiavime išvesti neįmanoma. Intuicionistiniame teiginių skaičiavime formulės $A \vee \neg A$ ir $\neg(\neg A \wedge A)$ nėra ekvivalenčios todėl, kad intuicionistinėje logikoje jungtys „ $\vee$ “, „ $\neg$ “, „ $\wedge$ “ ir „ $\rightarrow$ “ reiškia ne visiškai tą patį, ką jos reiškia klasikinėje logikoje. Ir klasikinėje ir intuicionistinėje logikose, jungtis „ $\wedge$ “ interpretuojama kaip konjunkcija, jungtis „ $\vee$ “ – kaip disjunkcija, jungtis „ $\rightarrow$ “ – kaip implikacija, o jungtis „ $\neg$ “ – kaip neigimas, tačiau, pavyzdžiui, neigimas ir implikacija intuicionistinėje logikoje yra ne visiškai toks pat kaip neigimas ir implikacija klasikinėje logikoje. Todėl intuicionistinėje logikoje formulės $A \vee \neg A$ ir $\neg(\neg A \wedge A)$ nėra tapačios, kaip nėra tapačios ir formulės $\neg \neg A \rightarrow A$, $A \vee \neg A$ bei $\neg(A \wedge \neg A)$.

Intuicionistinė logika – tik vienas neklasikinės logikos pavyzdys. Kaip jau žinome iš 1.16.1.5.5.6. skyrelio, intuicionistinė logika susiformavo, bandant įveikti matematikos pagrindų krizę, t. y. bandant sukurti tokią matematiką, kurioje negalėtų atsirasti 1.16.1.5.5.4. skyrelyje aprašytos antinomijos. Ši krizė buvo viena iš neklasikinių logikų atsiradimo priežasčių, tačiau ne vienintelė ir ne pagrindinė.

Kita priežastis, iššaukusi bei skatinusi neklasikinių logikų atsiradimą, buvo **dviejų loginių reikšmių „tiesa“ ir „netiesa“ nepakankamumas** kai kuriose ne taip jau retai pasitaikančiose situacijose. **Kokią, pavyzdžiui, loginę reikšmę, galima suteikti teiginiui „Šis uždavinys neturi sprendinio“ tuo atveju, kai, nežiūrint visų pastangų, nepavyko nei rasti duotojo uždavinio sprendinio, nei įrodyti, kad tas uždavinys iš viso neturi sprendinio, nei įrodyti, kad tas sprendinys vis dėl to turėtų būti? Juk šiuo atveju teiginio „Šis uždavinys neturi sprendinio“ negalima**

laikyti nei teisingu, nei neteisingu, ir todėl šio teiginio loginė reikšmė lieka neapibrėžta. O tai reiškia, kad šiuo atveju jau nebepakanka klasikinės logikos dviejų loginių reikšmių ir reikalinga trečioji jos reikšmė. 1.5. skyriuje mes tokią loginę reikšmę, sekdami A. Zinovjevu, jau buvome pažymėję žymeniu „?“, reiškiančiu, kad teiginio teisingumas ar neteisingumas dar neišaiškintas. Ten buvo išnagrinėti ir keli galimi konjunkcijos apibrėžimai tokioje trireikšmėje logikoje (žiūr. 26., 27. ir 28. lenteles), o taip pat vidinio ir išorinio neigimo operacijų apibrėžimai bei eilė tokios trireikšmės logikos tapatybių, todėl čia viso to nebekartosiu. Pažymėsiu tik tai, kad trireikšmę logiką galima aprašyti ne tik jos operacijų operandų ir tų operacijų rezultatų lentelėmis (taip vadinamuoju matriciniu būdu), bet ir aksiomatiškai, t. y. formuluojant trireikšmės logikos teiginių bei predikatų skaičiavimų aksiomų sistemą ir išvedimo taisykles.

Trireikšmėje logikoje, kurioje galima formaliai išreikšti skirtumą tarp išorinio ir vidinio neigimų „~“ ir „¬“, gana natūraliai išsispindžia ginčas tarp klasikinės ir intuicionistinės logikos atstovų dėl formulės $A \vee \neg A$ teisingumo ar neteisingumo.

Trireikšmėje A. Zinovjevo logikoje formulė $P(a) \vee \sim P(a)$ laikoma visada teisinga ir yra išvedama trireikšmiame loginiame skaičiavime, o formulė $P(a) \vee \neg P(a)$ nelaikoma visada teisinga ir nėra išvedama. Vietoj jos laikoma visada teisinga ir yra išvedama formulė $P(a) \vee \neg P(a) \vee ?P(a)$, kur $?P(a)$ reiškia predikato $P(a)$ loginės reikšmės neapibrėžtumą, kai to predikato subjektas yra a . Teiginį $?P(a)$ galima apibrėžti kaip konjunkciją $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$, t. y. kaip teiginį, aprašantį situaciją, kada turima informacija neleidžia laikyti teisingu nė vieną iš teiginių $P(a)$ ir $\neg P(a)$. Pavyzdžiui, jei „a“ reiškia kokį tai uždavinį, o „P“ – uždavinio savybę turėti sprendinį, tai teiginys $P(a)$ reiškia, jog uždavinys „a“ turi sprendinį; teiginys $\neg P(a)$ – jog tas uždavinys sprendinio neturi; teiginys $\sim P(a)$ reiškia, jog teiginys $P(a)$, teigiantis, kad uždavinys „a“ turi sprendinį, nėra teisingas; teiginys $\sim \neg P(a)$ reiškia teiginį, jog nėra teisingas teiginys $\neg P(a)$, teigiantis, kad uždavinys „a“ neturi sprendinio; teiginys $?P(a)$ reiškia teiginį, jog mes nežinome, ar uždavinys „a“ turi sprendinį, ar neturi jo, ir todėl negalime teigti nei to, kad uždavinys „a“ turi sprendinį, nei to, kad jis jo neturi, o tai ir yra ekvivalentu teiginiui $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$.

Teiginys $\neg P(a)$ yra informatyvesnis ir stipresnis už teiginį $\sim P(a)$, todėl iš teiginio $\neg P(a)$ išplaukia $\sim P(a)$, t. y. teiginio $P(a)$ neteisingumas. Tačiau iš teiginio $\sim P(a)$ dar neišplaukia teiginys $\neg P(a)$, nes tuomet, kai teiginys $\sim P(a)$ yra teisingas, gali būti teisingas arba teiginys $\neg P(a)$ arba teiginys $?P(a)$, t. y. kuris nors vienas iš teiginių $\neg P(a)$ ir $?P(a)$. Iš teiginio $\neg P(a)$ išplaukia ne tik teiginys $\sim P(a)$, bet ir teiginys $\sim ?P(a)$, nes teiginys $\neg P(a)$ yra ekvivalentus konjunkcijai $\sim P(a) \wedge \sim ?P(a)$, arba disjunkcijos $P(a) \vee ?P(a)$ neiginiui $\sim (P(a) \vee ?P(a))$, panašiai kaip teiginys $P(a)$ yra ekvivalentus konjunkcijai $\sim \neg P(a) \wedge \sim ?P(a)$, arba disjunkcijos $\neg P(a) \vee ?P(a)$ neiginiui $\sim (\neg P(a) \vee ?P(a))$, o teiginys $?P(a)$ ekvivalentus konjunkcijai $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$, arba disjunkcijos $P(a) \vee \neg P(a)$ neiginiui $\sim (P(a) \vee \neg P(a))$.

Jau ne kartą mūsų minėtas žymus šiuolaikinės matematinės logikos specialistas A. Zinovjevas savo knygoje [61] teigia, jog **išorinio ir vidinio neigimų neskyrimas dvireikšmėje logikoje, pasireiškęs formulių $\sim P(a)$ ir $\neg P(a)$ sutapatinamu, kaip tik ir privedė prie nepateisinamo logikos taisyklių apribojimo intuicionistinėje logikoje. Juk trečiojo negalimojo dėsnis negaliojantis tik vidiniam neigimui „¬“, tačiau išliekantis galiojančiu išoriniam neigimui „~“, todėl visiškai atmesti trečiojo negalimojo dėsnį nesą nei tikslinga, nei teisinga.**

Panašią pastabą galime padaryti ir dvigubo neiginio atžvilgiu. Teiginys $\sim\!P(a)$ tikrai nėra ekvivalentus teiginiui $P(a)$, nes nors iš teiginio $P(a)$ teisingumo ir išplaukia teiginio $\sim\!P(a)$ teisingumas, bet iš teiginio $\sim\!P(a)$ teisingumo dar negalime padaryti išvados apie teiginio $P(a)$ teisingumą, nes teiginys $\sim\!P(a)$ yra ekvivalentus teiginiui $P(a)\vee?P(a)$. Tačiau dvigubas neiginys $\sim\!P(a)$ ekvivalentus $P(a)$ ir todėl formulės $\sim\!P(a)\rightarrow P(a)$ ir $P(a)\rightarrow\sim\!P(a)$ yra teisingos formulės ir turėtų būti išvedamos teiginių skaičiavime.

Situacija, kada neaišku, kuris iš dviejų teiginių – $P(a)$ ar $\sim\!P(a)$ – yra teisingas ar neteisingas, nėra tokia jau reta, kaip galėtų atrodyti iš pirmo žvilgsnio, ir pasitaiko ne tik nagrinėjant klausimą, ar duotasis uždavinys turi sprendinį ar neturi jo.

Tarkime, kad predikato $P(x)$ subjektas „ x “ yra koks nors konkretus trigeris, kurį pažymėsime žymeniu „ a “, o „ P “ yra to trigerio savybė būti būsenoje „1“. Tuomet $P(a)$ yra teiginys, kuris būna teisingas tada ir tik tada, kai trigeris „ a “ yra būsenoje „1“. Kaip žinome, paveikus trigerio skaitliukinį įėjimą q_s vienetiniu įėjimo signalu, trigeris pereina į priešingą būseną, vadinamą būseną „0“, ir pasilieka joje iki tol, kol koks nors įėjimo signalas neperves trigerio į būseną „1“. Jokių kitų stabilių būsenų trigeris neturi. Tuo metu, kai trigeris „ a “ yra būsenoje „0“, teiginys $P(a)$ yra neteisingas, o teiginiai $\sim\!P(a)$ ir $\neg P(a)$ yra teisingi, nes teiginys $\sim\!P(a)$ teigia, kad nėra teisingas teiginys $P(a)$, o teiginys $\neg P(a)$, kad trigeris „ a “ nėra būsenoje „1“. Kadangi trigeris turi tik dvi stabilias būsenas „0“ ir „1“, tai teiginį $\neg P(a)$ galime laikyti teiginiu, teisingu tada ir tik tada, kai trigeris „ a “ yra būsenoje „0“. Kai trigeris yra kurioje nors vienoje iš dviejų stabilių būsenų, tai teisingos abi disjunkcijos $P(a)\vee\sim\!P(a)$ ir $P(a)\vee\neg P(a)$. Tačiau momentu, kai trigeris pereina iš kurios nors savo būsenos į priešingą, teisinga išlieka tik disjunkcija $P(a)\vee\sim\!P(a)$, o disjunkciją $P(a)\vee\neg P(a)$ jau nebegalima laikyti teisinga, nes perėjimo momentu trigeris „ a “ nėra nei būsenoje „1“, nei būsenoje „0“, ir todėl nėra teisingas nei teiginys $P(a)$, nei teiginys $\neg P(a)$. Tuo tarpu **formulė $P(a)\vee\sim\!P(a)$ negali būti neteisinga, ir tai išplaukia iš išorinio neiginio „ $\sim$ “ ir disjunkcijos „ $\vee$ “ apibrėžimo.** Trigerio perėjimo iš vienos būsenos į kitą momentu, kai nei teiginys $P(a)$, nei teiginys $\neg P(a)$ negali būti teisingais teiginiais, tai išreiškiantys teiginiai $\sim\!P(a)$ ir $\neg\sim\!P(a)$ yra teisingi. Teiginys $\sim\!P(a)$ išlieka teisingas ir tuomet, kai trigeris, perėjęs iš būsenos „1“, patenka į būseną „0“ ir pasilieka joje, o teiginys $\neg\sim\!P(a)$ išlieka teisingas ir tada, kai trigeris perėjęs iš būsenos „0“ patenka į būseną „1“ ir pasilieka joje. **Todėl formulės $P(a)\vee\sim\!P(a)$ ir $\neg P(a)\vee\sim\!P(a)$ išlieka teisingos bet kuriuo momentu ir statikoje ir dinamikoje, o formulė $P(a)\vee\neg P(a)$ būna teisinga tik statikoje ir tinka tik stabilų statinių trigerio būsenų aprašymui.** Bandytas taikyti formulę $P(a)\vee\neg P(a)$ kaip trečiojo negalimojo dėsni dinaminiam perėjimo procesui būtų loginė klaida ir galėtų vesti prie prieštaros gavimo. Ir kaltinti tokiu atveju reikėtų ne logiką ar kokią nors kitą (pavyzdžiui, aibių) teoriją, o logiškai neleistiną formulės $P(a)\vee\neg P(a)$ taikymą ten, kur ji gali būti neteisinga.

Turint tai omenyje, būtų įdomu ir tikslinga panagrinėti mūsų jau ne kartą minėtą garsiąją B. Raselo antinomiją, o taip pat ir kitas panašias antinomijas bei jų atsiradimo priežastis. **Manychiau, kad Raselo antinomijos atsiradimo priežastį galima įžvelgti ne tik impredikatyvių sąvokų vartojime (nors aš ir neneigiu, kad tokių sąvokų vartojimas leidžia sukonstruoti situacijas, kuriose galimos antinomijos), bet ir tame, jog dinaminiam niekada negalinčiame baigtis begalinės visų aibių, nesančių savęs elementais, aibės formavimo procese bandoma taikyti formulę $P(a)\vee\neg P(a)$, kuri net tuo atveju, kai nagrinėjamoje situacijoje galimos tik dvi būsenos P ir $\neg P$, yra teisinga tik statikoje ir ne būtinai teisinga dinamikoje.** Todėl, man atrodo, nereikėtų labai stebėtis ir iš to daryti išvadą, kad aibių teorija yra logiškai prieštaringa, jei gauname, jog nei predikatas $P(a)$, kuriame „ a “ yra ta niekada iki galo nebūsimanti suformuota ir todėl esanti dinaminėje visą laiką besitęsiančio perėjimo būsenoje visų aibių, nesančių savęs elementu, aibė, o „ P “ – tos aibės savybė nebūti savęs pačios elementu, nei predikatas $\neg P(a)$, kur „ $\neg P$ “ – tos aibės savybė būti savęs pačios elementu, negali būti teisingi. Juk tai reiškia tik tai, kad šiuo atveju formulė $P(a)\vee\neg P(a)$ nėra teisinga formulė, ir šis teiginys neveda prie loginio prieštaros, nes formulė $P(a)\vee\neg P(a)$ ne tik šiame, bet ir daugelyje kitų atvejų gali būti neteisingas teiginys.

Prieštara, kuri ir sudaro Raselo antinomijos esmę, mano nuomone, atsirado ne todėl, kad pati aibių teorija yra savo esmėje prieštaringa, o todėl, kad kai kurių filosofų ir matematikų samprotavimuose **logiškai neprieštaringa potencialiosios begalybės sąvoka buvo logiškai nepagrįstai pakeista logiškai prieštaringa aktualiosios begalybės sąvoka, reiškiančia, kad niekada iki galo nesusiformuosiantis begalinis dinaminis objektas pavirto jau galutinai susiformavusiu begaliniu statiniu objektu, galinčiu būti tik vienoje iš dviejų stabilų būsenų P ir $\neg P$, ir jam buvo pritaikyta formulė $P(a) \vee \neg P(a) = 1$, reiškianti, kad bent vienas iš teiginių $P(a)$ arba $\neg P(a)$ turėtų būti teisingas, ko iš tikrųjų kaip tik ir nebuvo gauta, nes pasirodė, jog šiuo atveju nė viena iš formulių $P(a)$ ir $\neg P(a)$ dar negali būti teisinga, kadangi procesas dar neužbaigtas (ir niekada negalės būti užbaigtas).**

Jeigu kiekvieną kartą sugebėtume atskirti vidinį loginį neiginį nuo išorinio ir nevertotume logiškai prieštaringų transformacijų, paverčiančių logiškai neprieštaringą potencialiąją begalybę logiškai prieštaringa aktualiaja begalybe, manau, nesusidurtume su situacijomis, iš kurių galėtume „logiškai pagrįstai išvesti“ išvadą, kad šiuolaikinės matematikos pagrindai yra logiškai prieštaringi. Mano nuomone, laikas nuo laiko atsirandančių prieštarų šaltinis – ne matematikos pagrindų prieštaringumas, o nepakankamai atsargus ir nepakankamai pagrįstas formalių matematinių modelių taikymas situacijose, kurioms tie modeliai netinka, kaip pavyzdžiui, formulės $P(a) \vee \neg P(a) = 1$ taikymas situacijose, kuriose galimi atvejai, kai ir $P(a)$ ir $\neg P(a)$ vienu metu abu gali būti neteisingais teiginiais.

Ar neatsitiko taip, kad 1.16.1.5.5.4. ir 1.16.1.5.5.6. skyreliuose aprašytoji matematikos pagrindų krizė net nebuvo matematikos pagrindų krizė, o tik nepakankamai pagrįstos formalaus operavimo su sudėtingomis sąvokomis bei nepakankamai pagrįsto formalių modelių tuos modelius neatitinkančiose situacijose taikymo rezultatu? Šis klausimas vertas gilesnės ir detalesnės analizės, jau išeinančios už elementaraus matematinės sistemotytros kurso ribų. **Juk savo laiku panašiai jau buvo nutikę, kai nepakankamai atsargus ir nepakankamai pagrįstas begaliniai mažo dydžio sąvokos vartojimas buvo privedęs prie prieštaringų rezultatų matematikoje gavimo, apie ką taip pat jau buvo kalbėta 1.16.1.5.5.5. skyrelyje.** Manychiau, kad perdėtai giliam pesimizmui dėl šiuolaikinės matematikos „rūmo“ ir jo „pamatų“, t. y. dėl matematikos pagrindų pagrįstumo, su kuo kartais tenka susidurti šiuolaikinėje matematinėje ir filosofinėje literatūroje, nėra pakankamai rimto pagrindo, kaip nėra rimto pagrindo ir kartais pasigirstančiai nuomonei, kad mokslas apie bendruosius realių sistemų sandaros ir funkcionavimo dėsnius bei apie bendruosius realių pasaulį ir jo dėsningumus atspindinčio mąstymo dėsnius nėra perspektyvus, kadangi, esą, dar labai abejotina, ar tokie bendrieji dėsniai iš viso egzistuoja. **Matematikos ir logikos mokslų egzistavimas ir tų mokslų taikymo efektyvumas praktinėje žmonių veikloje ir moksliniuose tyrimuose kaip tik ir yra tas rimtas ir įtikinantis (tiesa, ne dedukcinis, o indukcinis) įrodymas, jog tokie bendrieji dėsniai, galiojantys pačios įvairiausios prigimties sistemoms ir bet kokiems teisingo mąstymo procesams, tikrai egzistuoja, ir kad tokių dėsnių žinojimas ir taikymas tikrai gali duoti didelę praktinę naudą, kartais nė kiek ne mažesnę, negu ta nauda, kurią gali duoti siauri specialūs mokslai.** **Formalizavimo ir formalių teorijų bei metodų taikymo ribotumas, su kuo buvo susidurta bandant realizuoti logicizmo ir Hilberto programas, neturėtų būti suvoktas kaip formalių teorijų ir metodų bevertiškumo įrodymas, kaip kartais bando teigti kai kurie į kraštutinumus linkę formalizmo kritikai, o tik kaip tų teorijų ir metodų vaidmens bei galimybių moksle ir praktikoje patikslinimas, leidžiantis, nemenkinant formalių**

teorijų ir metodų vertės, išvengti ir kito kraštutinumo – nepagrįstos euforijos, jog artimiausiu metu visa intelektualinė veikla bus formalizuota ir kompiuterizuota.

Tačiau grįžkime prie neklasikinių daugiareikšmių logikų, apie kurias jau buvome pradėję kalbėti, pažymėdami, kad kai kurie teiginiai gali turėti ne dvi, o tris logines reikšmes, ir ryšium su tuo įsivesdami dvi skirtingas loginio neigimo sąvokas: išorinį ir vidinį loginius neigimus.

Apie tai, kad teiginiai kartais gali turėti ne tik dvi, o ir tris logines reikšmes („teisinga“, „klaidinga“ ir „neapibrėžta“) rašė dar viduramžių logikas V. Okamas, kuris jau sugebėjo naudotis šiomis loginėmis reikšmėmis implikacijos operacijoje, tačiau **trireikšmės matematinės logikos pradininku** laikomas lenkų logikas J. Lukasievičius, 1920 m. aprašęs logikos, turinčios tris reikšmes („teisinga“, „klaidinga“ ir „galima“), sistemą. Pažymėję pirmąją loginę reikšmę „t“, antrąją – „f“ ir trečiąją – „u“, trireikšmės logikos operacijas (loginį neigimą, konjunkciją, disjunkciją ir implikaciją) galima apibrėžti lentelėmis 330÷333.

330. lentelė

p	$\bar{p}$
t	f
f	t
u	u

331. lentelė

$\wedge$	t	f	u
t	t	f	u
f	f	f	f
u	u	f	u

332. lentelė

$\vee$	t	f	u
t	t	t	t
f	t	f	u
u	t	u	u

333. lentelė

$\supset$	t	f	u
t	t	f	u
f	t	t	t
u	t	u	t

Kaip matome iš šių lentelių, **šioje logikos algebroje jau ne visada galioja trečiojo negalimojo dėsnis** $p \vee \bar{p} = t$, nes kai $p=u$, tai gauname, jog $\bar{p}$ – taip pat yra u, ir $p \vee \bar{p} = u \vee u = u$, o ne t.

Tačiau šioje logikoje **galioja ketvirtojo negalimojo dėsnis**: vienu ir tuo pačiu metu bent vienas iš trijų teiginių $p=t$, $p=f$ ir $p=u$ turi būti teisingas.

Nesunku pastebėti, jog šioje loginėje algebroje jau nebegalioja dvireikšmės klasikinės logikos tautologija $(p \supset q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$, nes kai $p=u$ ir $q=u$, gauname, jog $p \supset q = t$, o tuo tarpu $\bar{p} \vee q = u$.

De Morgano dėsniai $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$ ir $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$, galiojantys klasikinėje dvireikšmėje logikoje, kaip nesunku įsitikinti, galioja ir čia nagrinėjamoje trireikšmėje logikoje. Taip pat galioja **distributyvumo dėsniai** $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ ir $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ bei **idempotentiškumo dėsniai** $p \wedge p \Leftrightarrow p$ ir $p \vee p \Leftrightarrow p$.

Nesunku įrodyti, kad šioje **trireikšmėje logikoje ne visada galioja „suklijavimo formulės“** $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})] \Leftrightarrow p$ ir $[(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})] \Leftrightarrow p$, nes kai $p=t$ ir $q=u$, tai gauname, jog $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})]$ yra lygu u, kas nesutampa su $p=t$, o kai $p=f$ ir $q=u$, tai gauname, jog $[(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})]$ yra lygu u, kas taip pat nesutampa su $p=f$.

O tuo tarpu **„absorbcijos formulės“** $[p \vee (p \vee \bar{q})] \Leftrightarrow p$, $[\bar{p} \vee (p \vee \bar{q})] \Leftrightarrow \bar{p}$, $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$ ir $[\bar{p} \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow \bar{p}$ **galioja kaip klasikinėje dvireikšmėje, taip ir šioje trireikšmėje logikoje.**

Panašiai, kaip 1.16.1.5.2. skyrelyje buvo sukonstruotas **aksiomatinis klasikinis teiginių skaičiavimas**, kuriame išvedamos visos teisingos klasikinės dvireikšmės teiginių algebros formulės ir neišvedama nė viena formulė, kuri nėra tapačiai teisinga toje algebroje, galima sukonstruoti **neklasikinį aksiomatinį trireikšmį teiginių skaičiavimą**, kuriame būtų išvedamos visos tapačiai teisingos **trireikšmės teiginių**

algebros formulės ir neišvedama nė viena trireikšmės teiginių algebros formulė, kuri nebūtų tapačiai teisinga.

J. Lukasiševičius šiek tiek vėliau sukonstravo ir **keturiareikšmę bei aštuoniareikšmę teiginių algebras**, kurios buvo panaudotos modalinių logikų konstravimui. Keturiareikšmės logikos, turinčios logines reikšmes 1, 2, 3, 4, kur „1“ atitinka „t“, „4“ – atitinka „f“, o „2“ ir „3“ turėtų reikšti tam tikrus galimybės būti teisingu teiginiu laipsnius, didesnius už „f“ ir mažesnius už „t“, jungtys N, K ir C, atitinkančios loginį neigimą, konjunkciją ir materialiąją implikaciją, aprašomos 334÷336. lentelėmis.

334. lentelė

p	$\bar{p}$
1	4
2	3
3	2
4	1

335. lentelė

K	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

336. lentelė

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

Analogiškai sudaromos **aštuoniareikšmės, šešiolikareikšmės ir, bendrai, 2^n -reikšmės loginės algebros operacijų N, K ir C loginių reikšmių lentelės**. Pavyzdžiui, jei pažymėtume teiginio p loginę reikšmę 2^n -reikšmėje logikoje kur $n=1, 2, 3, \dots$ skaičiumi $\{p\}$, tai to teiginio loginio neiginio $N^{(2^n)}p$ loginę reikšmę $\{N^{(2^n)}p\}$ rastume naudodamiesi formule $\{N^{(2^n)}p\} = 2^n + 1 - \{p\}$.

2^n -reikšmėje logikoje skaičiumi „1“ žymima loginė reikšmė „t“, o skaičiumi 2^n – loginė reikšmė „f“. Visi kiti sveikieji skaičiai, didesni už 1 ir mažesni už 2^n , žymi tarpines logines reikšmes, koku būdu išsidėsčiusias tarp „t“ ir „f“.

Pavyzdžiui, dvireikšmėje logikoje, kai $n=1$, gauname, jog „t“ atitinka „1“, „f“ – „2“ ir jokių tarpinių loginių reikšmių nėra. Tuomet, kai $\{p\}=1$, tai $\{N^{(2)}p\}=2^1+1-\{p\}=3-1=2$, o tuo atveju, kai $\{p\}=2$, tai $\{N^{(2)}p\}=3-2=1$. Konjunkcijos K lentelę dvireikšmėje logikoje galima pamatyti 335-osios lentelės kairiajame „šiauriniame“ kampe, atitinkančiame pirmąją ir antrąją eilutes bei pirmąjį ir antrąjį stulpelius. Kaip matome, operacijos K lentelė dvireikšmėje Lukasievičiaus logikoje visiškai atitiktų konjunkcijos „^“ lentelę klasikinėje dvireikšmėje logikoje, jei „f“ žymėtume ne žymeniu „2“, o žymeniu „0“.

Tą patį galima pasakyti ir apie operacijos C bei apie operacijos N lenteles dvireikšmėje logikoje.

Operacijų K ir C lenteles keturiareikšmėje Lukasievičiaus logikoje galima gauti atitinkamai „dauginant“ (t. y. komponuojant, naudojantis superpozicija) tų operacijų dvireikšmėje logikoje lenteles, o tų operacijų lenteles aštuoniareikšmėje logikoje gautume „sudauginami“ tų operacijų lenteles keturiareikšmėje logikoje su atitinkamų operacijų lentelėmis dvireikšmėje logikoje.

Operacijas N, K ir C aštuonreikšmėje logikoje aprašo 337.÷339. lentelės.

337. lentelė

p	$\bar{p}$
1	8
2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1

338. lentelė

K	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	4	4	6	6	8	8
3	3	4	3	4	7	8	7	8
4	4	4	4	4	8	8	8	8
5	5	6	7	8	5	6	7	8
6	6	6	8	8	6	6	8	8
7	7	8	7	8	7	8	7	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8

339. lentelė

C	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1	3	3	5	5	7	7
3	1	2	1	2	5	6	5	6
4	1	1	1	1	5	5	5	5
5	1	2	3	4	1	2	3	4
6	1	1	3	3	1	1	3	3
7	1	2	1	2	1	2	1	2
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Nagrinėjant 338. ir 339. lenteles, nesunku pastebėti **binarinių operacijų K ir C 2^n -reikšmės logikos algebroje, kai $n>1$, matricų sudarymo taisyklę**: 2^n -reikšmė kokios nors binarinės operacijos matrica **gaunama iš atitinkamos dvireikšmės matricos, vartojamos kaip šablonas**, įstatant į jos langelius 2^{n-1} -reikšmės matricas be pakeitimų, jei atitinkamame dvireikšmės matricos langelyje stovi „1“, ir padidinant kiekvieno įstatomos 2^{n-1} -reikšmės matricos langelio turinį skaičiumi 2^{n-1} , jei atitinkamame dvireikšmės matricos langelyje stovi „2“.

Pavyzdžiui, **keturiareikšmės (2^2) konjunkcijos K matrica** gaunama, įstatant į dvireikšmės konjunkcijos matricos langelius dvireikšmės konjunkcijos matricas: į viršutinį kairįjį langelį, kuriame stovi „1“, įstatoma dvireikšmė konjunkcijos matrica be pakeitimų, o į likusius tris langelius, kuriuose

stovi žymenys „2“, įstatomos dvireikšmės konjunkcijos matricos, padidinus jų elementus skaičiumi „2“. Analogiškai gaunamos keturiareikšmės materialiosios implikacijos C matrica ir aštuoniareikšmės konjunkcijos ir implikacijos matricos. Šis algoritmas taikomas binarinių loginių operacijų matricų gavimui 2^n – reikšmėje loginėje algebroje ir tuo atveju, kai $n > 3$.

Lukasievičiaus 2^n – reikšmės loginės algebros operacijų lentelės, kai $n=2, 3, 4, \dots$, sudaromos gana formaliai, ir jų neįmanoma taip interpretuoti, kad kiekvieną loginės operacijos rezultatą – teiginio p skaitmeninę reikšmę $\{p\}=1, 2, 3, \dots, 2^n$ – atitiktų intuityviai suvokiamas neprieštaringas to teiginio teisingumo galimybės (pavyzdžiui, teiginio p teisingumo tikimybės) laipsnis. Todėl Lukasievičiaus 2^n – reikšmė logika taikoma tik grynai formalių modalinės logikos problemų sprendimui.

Žymiai turiningesnė ir intuityviai suprantamesnė yra **keturiareikšmė loginė algebra**, kurios operacijos aprašomos 340.-343. lentelėmis.

340. lentelė

p	$\bar{p}$
α	β
γ	δ
δ	γ
β	α

341. lentelė

$\wedge$	α	γ	δ	β
α	α	γ	δ	β
γ	γ	γ	δ	β
δ	δ	δ	δ	β
β	β	β	β	β

342. lentelė

$\vee$	α	γ	δ	β
α	α	α	α	α
γ	α	γ	γ	γ
δ	α	γ	δ	δ
β	α	γ	δ	β

343. lentelė

$\supset$	α	γ	δ	β
α	α	β	β	β
γ	α	α	β	β
δ	α	α	α	β
β	α	α	α	α

Šioje keturiareikšmėje loginėje algebroje „ α “ reiškia „t“, „ β “ – „f“, o „ γ “ ir „ δ “ – tokias galimybes (tikimybes), kad nagrinėjamas teiginys yra teisingas, laipsnius, kurie yra mažesni už 1, bet didesni už 0, be to tokie, kad „ γ “ reiškia didesnę teiginio teisingumo tikimybės laipsnį negu „ δ “.

Iš 340-osios lentelės matyti, kad reikšmės „ γ “ ir „ δ “ yra simetriškos: „ γ “ yra „nutolusi“ nuo „ α “ lygiai tiek pat, kiek „ δ “ nuo „ β “.

Iš 341-osios ir 342-osios lentelių matyti, kad operaciją „ $\wedge$ “ galima būtų apibrėžti formule $\{p \wedge q\} = \min(\{p\}, \{q\})$, o operaciją „ $\vee$ “ – formule $\{p \vee q\} = \max(\{p\}, \{q\})$.

Operacijos „ $\supset$ “ rezultatas, kaip matyti iš 343-osios lentelės, priklauso nuo antecedento p ir konsekvento q implikacijoje $p \supset q$ teisingumų tikėtinumo laipsnių $\{p\}$ ir $\{q\}$ santykio: $\{p \supset q\} = \alpha$, kai $\{p\} \leq \{q\}$, t. y. kai konsekvento q teisingumas yra ne mažiau tikėtinas negu antecedento p teisingumas, ir $\{p \supset q\} = \beta$, kai $\{p\} > \{q\}$, t. y., kai laikoma, jog iš labiau tikėtino teiginio p yra išvedamas mažiau tikėtinas teiginys q.

Nesunku įsitikinti, jog šioje keturiareikšmėje logikoje galioja formulės $\overline{(p \wedge q)} = (\bar{p} \vee \bar{q})$, $\overline{(p \vee q)} = (\bar{p} \wedge \bar{q})$, $(p \wedge p) = p$, $(p \vee p) = p$, $[p \wedge (q \vee r)] = [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, $[p \vee (q \wedge r)] = [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$, bet negalioja formulės $(p \vee \bar{p}) = \alpha$ bei $(p \supset q) = (\bar{p} \vee q)$.

Jei priimtume, jog $\gamma = \delta$ ir pažymėtume, jog $\gamma = \delta = u$, tai čia nagrinėjamos keturiareikšmės loginio neigimo, konjunkcijos ir disjunkcijos lentelės (žiūr. 340.-343. lenteles) sutaptų su anksčiau išnagrinėtos trireikšmės loginės algebros atitinkamomis lentelėmis (žiūr. 330.-332. lenteles). Tai reiškia, jog **loginės neigimo, konjunkcijos ir disjunkcijos operacijos abiejose loginėse algebrose (keturiareikšmėje ir trireikšmėje) gali būti interpretuojamos vienodai – taip kaip ir dvireikšmėje logikoje**. Tačiau implikacijos „ $\supset$ “ lentelės (t. y. 333-oji ir 343-oji lentelės) jau nesutaptų. Tai reiškia, jog materialioji implikacija „ $\supset$ “ trireikšmėje ir keturiareikšmėje logikose, aprašytose 330.-333. ir 340.-343. lentelėmis, interpretuojama skirtingai.

Daugiareikšmės logikos, turinčios baigtinį loginių reikšmių skaičių $k \geq 2$ gali būti nagrinėjamos ne tik loginiu aspektu. K–reikšmės loginės algebros gali būti taikomos automatikoje, telemechanikoje, ryšių bei skaičiavimo technikoje ir pan., matematiškai aprašant ir analizuojant k–reikšmių automatų ir iš jų sudarytų sistemų funkcionavimą, o taip pat projektuojant tokius automatus ir jų sistemas.

Kadangi k–reikšmės logikos algebroje galima sudaryti labai didelį ($m = k^{k^n}$) skaičių skirtingų k–reikšmių loginių funkcijų, turinčių po n argumentų, kurių kiekvienas gali turėti po k loginių reikšmių, tai, realizuojant tokias logines funkcijas technikoje, iškyla problema, kaip realizuoti bet kurią iš tų funkcijų, naudojantis pakankamai mažu nesudėtingų standartinių loginių elementų skaičiumi. Pervedę šią problemą iš techninės kalbos į matematinės logikos kalbą, gauname tokią šios

problemos formuluotę: **kaip, naudojantis pakankamai mažu nesudėtingų loginių operacijų (elementarių loginių funkcijų) skaičiumi, išreikšti bet kurią k-reikšmės logikos funkciją.** Ši problema yra aktuali ir dvireikšmei ir daugiareikšmės logikoms.

Dvireikšmės klasikinės logikos algebroje ta problema sprendžiama gana įvairiai ir tokiu būdu gaunamos **įvairios dvireikšmės loginės algebras.**

Kai **bazinėmis operacijomis**, per kurias gali būti išreikštos visos kitos loginės operacijos (visos kitos loginės funkcijos), pasirenkama disjunkcija „ $\vee$ “, konjunkcija „ $\wedge$ “ ir loginis neigimas „ $\neg$ “, tai gauname loginę algebrą, kuri vadinama **Bulio algebra**. Nesunku įrodyti, kad šis bazinių operacijų rinkinys išliks **pilnas**, jei iš jo išmesime disjunkciją arba konjunkciją, palikdami loginį neigimą ir vieną iš operacijų „ $\wedge$ “ ar „ $\vee$ “, nes disjunkcija, naudojantis de Morgano formule, gali būti išreikšta per konjunkciją ir loginį neigimą, o konjunkcija – per disjunkciją ir loginį neigimą.

Postas (E. L. Post) yra įrodęs teoremą (kartais vadinamą Posto ir Jablonskio teorema), kad **dvireikšmės loginės algebras bazinių funkcijų sistemos pilnumui yra būtina ir pakankama, kad į tos sistemos sudėtį įeitų: 1) netiesinė, 2) nemonotoninė, 3) neautoduali, 4) neišsauganti 0 ir 5) neišsauganti 1 loginės funkcijos.**

Nesunku įsitikinti, kad sistema, sudaryta iš loginio neigimo ir disjunkcijos, tenkina visus penkis Posto teoremos reikalavimus: 1) disjunkciją $Y = X_1 \vee X_2$ yra netiesinė funkcija, nes negalima rasti tokių loginių konstantų c_i , kad disjunkciją $X_1 \vee X_2$ būtų galima išreikšti formule $c_0 \oplus (c_1 \wedge X_1) \oplus (c_2 \wedge X_2)$, t. y. tiesiniu „loginiu daugianariu“; 2) loginis neigimas $Y = \neg X$ yra nemonotoninė funkcija, nes padidinus argumento X reikšmę, funkcijos Y reikšmė sumažėja; 3) disjunkcija $Y = X_1 \vee X_2$ yra neautoduali, nes ji netenkina tapatybės $f(X_1, X_2) \equiv \overline{f(\overline{X_1}, \overline{X_2})}$; 4) loginis neigimas $Y = \neg X$ neišsaugo 0, nes netenkina lygybės $f(0) = 0$; 5) loginis neigimas neišsaugo vienetų, nes netenkina lygybės $f(1) = 1$.

Naudojantis Posto teorema ir joje išvardintais požymiais, nesunku įsitikinti, kad disjunkcija $Y = X_1 \vee X_2$ ir materialioji implikacija $Y = X_1 \supset X_2$ dar nesudaro sistemos, kuri būtų pilna dvireikšmėje logikos algebroje, nes tokia sistema savo sudėtyje neturi, pavyzdžiui, funkcijos, neišsaugančios 1, kadangi ir disjunkcija ir implikacija vienetą išsaugo: $1 \vee 1 = 1$, $1 \supset 1 = 1$.

Nesunku įrodyti, kad **Vebo funkcija** $Y = X_1 \circ X_2 = \overline{X_1} \vee X_2 = \overline{X_1} \overline{X_2}$, kartais vadinama **funkcija „arba-ne“**, turi visus Posto teoremoje išvardintus būtinus ir pakankamus loginių funkcijų sistemos pilnumo požymius. Todėl **elementai „arba-ne“**, realizuojantys Vebo funkciją, yra **universalūs elementai** ir, jais naudojantis, galima sukonstruoti loginę schemą, realizuojančią bet kurią dvireikšmės logikos funkciją. O tai gana svarbu technikoje. Kalbant matematine kalba, tai reiškia, jog Vebo funkcijos pagrindu galima sudaryti dvireikšmės logikos algebrą. Tokia algebra vadinama **Vebo algebra**.

Analogiškai gali būti sudaryta **Šeferio algebra**, kurios bazinė operacija – Šeferio operacija („Šeferio štrichas“) $Y = X_1 / X_2 = \overline{X_1} X_2 = \overline{X_1} \vee \overline{X_2}$. Šeferio operaciją realizuojantis elementas taip pat yra universalus ir gana plačiai taikomas technikoje kaip loginių schemų mikromodulis. Šį elementą dažnai vadina **elementu „ir-ne“**.

Techniniai poreikiai, o taip pat **neuronų ir neuroninių tinklų modeliavimo poreikiai stimuliuo ir tokių dvireikšmių loginių algebrų kaip slenkstinė ir mažoritarinė atsiradimą**. Šios algebras sutrumpintai vadinamos **slenkstine ir mažoritarine logikomis**.

Slenkstinės logikos bazinis elementas – **slenkstinis elementas** – yra loginė schema, turinti $n \geq 2$ įėjimų $X_1, X_2, \dots, X_n$, ir vieną išėjimą Y , kurio reikšmės priklausomybę nuo įėjimų reikšmių aprašo

slenkstinė išėjimo funkcija $Y = \text{Sgn} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j X_j - \eta \right)$, tenkinanti sąlygas: 1) $Y \in \{0; 1\}$, 2) $\forall_j (X_j \in \{0; 1\})$,

3) $\eta \in \mathbb{R}$ – koks tai neneigiamas skaičius (dažniausiai – sveikas teigiamas skaičius), vadinamas **slenksčiu**, 4) $\xi_j \in \mathbb{R}$ – kokie tai neneigiami skaičiai (dažniausiai – sveiki neneigiami skaičiai), vadinami

įėjimų svoriais, o Sgn („signum“) – speciali funkcija, apibrėžiama lygybe $\text{Sgn} A = \begin{cases} 0, & \text{kai } A < 0, \\ 1, & \text{kai } A \geq 0. \end{cases}$

Naudojami ir šiek tiek **universalesni slenkstiniai elementai, kurių įėjimų svoriai ξ_j gali būti ne tik neneigiami, bet ir neigiami, o slenkščio dydis η – ne būtinai teigiamas**. Apie tokius slenkstinius elementus ir iš jų sudarytus tinklus pakalbėsime šiek tiek vėliau, o kol kas laikysime, kad $\forall_j (\xi_j \geq 0)$ ir $\eta > 0$.

Slenkstinio elemento struktūrą vienareikšmiškai apibrėžia slenksčio η ir įėjimų svorių dydžiai ξ_j . Pavyzdžiui, jei $n=5$, $\xi_1=5$, $\xi_2=2$, $\xi_3=3$, $\xi_4=1$, $\xi_5=3$ ir $\eta=8$, tai tokio slenkstinio elemento išėjimo Y priklausomybė nuo įėjimų X_1 , X_2 , X_3 , X_4 ir X_5 yra vienareikšmiškai apibrėžta. Ji gali būti aprašyta lentele (žiūr. 344-ją lentelę), o taip pat Bulio algebros funkcija $Y=f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=$

344. lentelė

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\sum_{j=1}^n \xi_j X_j$	Y
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	3	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	4	0
0	0	1	0	0	3	0
0	0	1	0	1	6	0
0	0	1	1	0	4	0
0	0	1	1	1	7	0
0	1	0	0	0	2	0
0	1	0	0	1	5	0
0	1	0	1	0	3	0
0	1	0	1	1	6	0
0	1	1	0	0	5	0
0	1	1	0	1	8	1
0	1	1	1	0	6	0
0	1	1	1	1	9	1
1	0	0	0	0	5	0
1	0	0	0	1	8	1
1	0	0	1	0	6	0
1	0	0	1	1	9	1
1	0	1	0	0	8	1
1	0	1	0	1	11	1
1	0	1	1	0	9	1
1	0	1	1	1	12	1
1	1	0	0	0	7	0
1	1	0	0	1	10	1
1	1	0	1	0	8	1
1	1	0	1	1	11	1
1	1	1	0	0	10	1
1	1	1	0	1	13	1
1	1	1	1	0	11	1
1	1	1	1	1	14	1

$=X_1X_3 \vee X_1X_5 \vee X_1X_2X_4 \vee X_2X_3X_5$, kurią nesunku gauti iš 344-osios lentelės.

Slenkstinėje algebroje (kaip ir Bulio algebroje) gali būti sprendžiami 1.16.1. skyrelyje išvardintų visų keturių klasių uždaviniai. Kadangi slenkstiniai elementai dažniausiai yra taikomi sudarant **logines schemas, modeliuojančias procesus, turinčius slenkstines charakteristikas**, tai pagrindiniai slenkstinės logikos uždaviniai yra slenkstinių elementų ir iš jų sudarytų schemų sintezės ir analizės uždaviniai.

Slenkstinėje sintezėje išskiriami du pagrindiniai uždaviniai: 1) slenkstinio elemento, realizuojančio duotąją loginę algebros funkciją, sintezė; 2) tinklo, sudaryto iš slenkstinių elementų, sintezė.

Slenkstinio elemento, realizuojančio duotąją loginę funkciją, sintezės metu, tos funkcijos argumentų $X_1, X_2, \dots, X_n$ reikšmių rinkinių $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ aibė, turinti 2^n elementų, numeruojamų numeriais $i=0, 1, \dots, 2^n-1$, suskaidoma į du poaibius T_0 ir T_1 . Poaibiui T_0 priskiriami visi tie argumentų reikšmių rinkiniai, kuriuos įstačius į duotosios loginės funkcijos $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ formulę, gaunama funkcijos reikšmė $Y=0$, o poaibiui T_1 – tie argumentų reikšmių rinkiniai, kuriuos atitinka tos funkcijos reikšmė $Y=1$.

Pavyzdžiui, jei mums reikėtų sukonstruoti slenkstinį elementą, realizuojantį funkciją $Y=f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=X_1X_3 \vee X_1X_5 \vee X_1X_2X_4 \vee X_2X_3X_5$, kurią aprašo 344-oji lentelė, tai poaibį T_0 sudarytų 17 rinkinių $\{(0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), \dots, (0,1,1,0,0), (0,1,1,1,0), (1,0,0,0,0), (1,0,0,1,0), (1,1,0,0,0)\}$, o poaibį T_1 – likusieji 15 rinkinių $\{(0,1,1,0,1), (0,1,1,1,1), (1,0,0,0,1), (1,0,0,1,1), \dots, (1,0,1,1,1), (1,1,0,0,1), \dots, (1,1,1,1,1)\}$.

Pažymėję funkcijos $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ argumentų reikšmių α_{ij} rinkinius bendru žymeniu

$\vec{\alpha}_i=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$, kur $i=0, 1, 2, \dots, 2^n-1$, $j=1, 2, \dots, n$, konstruojamo (sintezuojamo, projektuojamo)

slenkstinio elemento struktūrą galėtume aprašyti 2^n tiesinių nelygybių sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \xi_j X_j - \eta \geq 0, \text{ visiems } \vec{X} = \vec{\alpha}_i \in T_1, \\ \sum_{j=1}^n \xi_j X_j - \eta < 0, \text{ visiems } \vec{X} = \vec{\alpha}_i \in T_0. \end{cases}$$

Šioje nelygybių sistemoje duotosios funkcijos $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ argumentų reikšmės laikomos žinomomis (jos imamos iš rinkinių $\vec{\alpha}$), o įėjimų svoriai ξ_j ir slenksčio dydis η – laikomi ieškomais neneigiamais nežinomaisiais ($\xi_j \geq 0, \eta > 0$), kurių reikšmės turi tenkinti šią nelygybių sistemą.

Išsivedę 2^n **papildomų neneigiamų kintamųjų** ir tiek **pagalbinių neneigiamų kintamųjų**, kiek rinkinių $\vec{\alpha}_i=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ pateko į poaibį T_1 , mes nežinomųjų ξ_j ir η paieškos uždavinį galime **suvesti į tiesinio programavimo uždavinį**, minimizuojantį tikslo funkcijos W , lygios visų įsivestų pagalbinių kintamųjų sumai, reikšmę (žiūr. 1.15.2.6. skyrelį). Jei gautume, jog $\min W=0$, tai reikštų, kad duotajai loginei funkcijai galima sukonstruoti ją realizuojantį slenkstinį elementą, t. y. galima rasti

tokias $\xi_j \geq 0$ ir $\eta > 0$ reikšmes, kurios tenkina sudarytąją 2^n nelygybių sistemą. Jei gautume, kad $\min W > 0$, tai reikštų, kad duotajai loginei funkcijai $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ją realizuojanti slenkstinį elementą, turintį neneigiamus įėjimų svorius ξ_j ir teigiamą slenksčio dydį η , sukonstruoti neįmanoma.

Rekomenduojama skaitytojui įsitikinti, kad mūsų nagrinėjama funkcijai $Y = f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = X_1 X_3 \vee X_1 X_5 \vee X_1 X_2 X_4 \vee X_2 X_3 X_5$ galima sukonstruoti daug ją realizuojančių slenkstinių elementų, tarp kurių bus ir elementas, turintis įėjimų svorius $\xi_1=5, \xi_2=2, \xi_3=3, \xi_4=1, \xi_5=3$ ir slenksčio dydį $\eta=8$.

Gavę, jog $\min W=0$, mes gauname vieną iš leistinų sprendinių. Tęsdami simplekso algoritmo taikymo antrąjį etapą (žiūr. 1.15.2.6. skyrelį), mes galime iš leistinų sprendinių aibės pasirinkti tokį, kuris tenkintų mūsų pasirinktą koki nors optimalumo kriterijų. Tokio sprendinio radimui tereiktų sudaryti atitinkamą tikslo funkciją. Pavyzdžiui, galima būtų minimizuoti (ar maksimizuoti) įėjimų svorių sumą $\sum_{j=1}^n \xi_j$ ir pan. Galima būtų pareikalauti, kad slenksčio dydis η ir įėjimų svoriai ξ_j būtų

sveiki skaičiai. Tokio sprendinio radimui galima būtų pasinaudoti sveikaskaitinio programavimo šakų ir ribų algoritmu, aprašytu 1.15.2.5. skyrelyje.

Nesunku įsitikinti, kad daugelio dvireikšmės loginės algebros funkcijų neįmanoma realizuoti viename slenkstiniame elemente, kurio įėjimų svoriai gali būti tik neneigiami dydžiai. Slenkstinais elementais realizuojamų loginių funkcijų skaičių galima žymiai padidinti, apibendrinus slenkstines logines funkcijas ir išvedus **apibendrintus slenkstinius elementus**, kurie gaunami, nuėmus neneigiamumo apribojimą nuo įėjimų svorių ξ_j . Tuomet, pavyzdžiui, jau būtų galima sudaryti slenkstinį elementą, realizuojantį Vebo funkciją $Y = \overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2$, kurią realizuoti slenkstiniu elementu, turinčiu neneigiamus įėjimų svorius, neįmanoma. Tokiu elementu galėtų būti, pavyzdžiui, elementas, turintis įėjimų svorius $\xi_1=-1$ ir $\xi_2=-1$ bei slenksčių $\eta=0$, nes tuomet būtų tenkinamos nelygybės: 1) $\xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 0 \geq \eta$, 2) $\xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 1 < \eta$, 3) $\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 0 < \eta$ 4) $\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 1 < \eta$.

Tačiau ir tokie apibendrinti slenkstiniai elementai nebūtų pajėgūs realizuoti bet kokią loginę funkciją. Pavyzdžiui, neįmanoma sukonstruoti tokį slenkstinį elementą, kuris galėtų realizuoti funkciją $Y = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \vee X_3$, aprašoma 345-ąja lentele.

345. lentelė

X_1	X_2	X_3	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

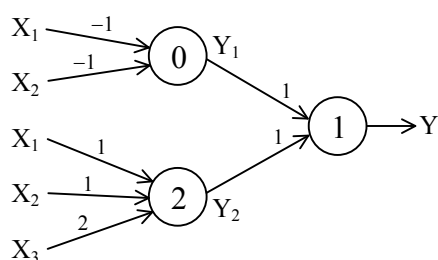
Įrodysime tai, sudarydami nelygybių sistemą, kurią turėtų tenkinti toks slenkstinis elementas:

- 1) $\xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 \cdot 0 \geq \eta$; 2) $\xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 \cdot 1 \geq \eta$; 3) $\xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 1 + \xi_3 \cdot 0 < \eta$; 4) $\xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 1 + \xi_3 \cdot 1 \geq \eta$; 5) $\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 \cdot 0 < \eta$; 6) $\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 \cdot 1 \geq \eta$; 7) $\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 1 + \xi_3 \cdot 0 \geq \eta$; 8) $\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 1 + \xi_3 \cdot 1 \geq \eta$.

Iš pirmosios nelygybės $0 \geq \eta$, matome, jog slenksčio dydis η gali būti tik arba 0 arba neigiamas skaičius. Tarkime, jog $\eta=0$. Tuomet iš antrosios nelygybės, gauname, jog $\xi_3 \geq 0$, o iš trečiosios, jog $\xi_2 < 0$. Analogiškai iš penktosios nelygybės išplaukia, jog ir $\xi_1 < 0$. Tačiau tokios ξ_1 ir ξ_2 reikšmės negali tenkinti 7-sios nelygybės $\xi_1 + \xi_2 \geq 0$. Net jei būtume pasirinkę slenksčio dydį η ir neigiamu, vis tiek, sugretinę trečiąją, penktąją ir septintąją nelygybes bei prisimindami, kad iš pirmosios nelygybės išplaukia, jog $\eta \leq 0$, būtume gavę prieštarą: 1) $\xi_2 < \eta$, t. y. $\xi_2 < 0$ ir $|\xi_2| > |\eta|$; 2) $\xi_1 < \eta$, t. y. $\xi_1 < 0$ ir $|\xi_1| > |\eta|$; 3) $\xi_1 + \xi_2 \geq \eta$, iš kur, atsižvelgiant į tai, kad $\xi_1 < 0$ ir $\xi_2 < 0$, gauname, kad $|\xi_1 + \xi_2| = |\xi_1| + |\xi_2|$, iš kur išplaukia priešara nelygybei $|\xi_1 + \xi_2| \leq |\eta|$. Todėl loginė funkcija $Y = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \vee X_3$ negali būti realizuota vienu slenkstiniu elementu net ir tada, kai jo įėjimų svoriai gali būti bet kokie (ir neigiami ir teigiami) skaičiai.

Tačiau tokią funkciją galime realizuoti, sudarius **slenkstinių elementų tinklą**. Įrodysime tai.

Kaip jau matėme, funkciją $Y_1 = \overline{X}_1 \overline{X}_2$ galima realizuoti vienu slenkstiniu elementu $\xi_1=-1, \xi_2=-1, \eta=0$. Vienu slenkstiniu elementu galima realizuoti ir funkciją $Y_2 = X_1 X_2 \vee X_3$. Tai būtų elementas $\xi_1=1, \xi_2=1, \xi_3=2, \eta=2$. Funkcijų Y_1 ir Y_2 disjunkciją $Y = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee (X_1 X_2 \vee X_3)$, sutampančią su ta



401 pav.

funkcija, kurią kaip ką tik įrodėme, neįmanoma realizuoti vienu slenkstiniu elementu, laikant Y_1 ir Y_2 dar vieno slenkstinio elemento, turinčio išėjimą Y , įėjimais, taip pat gana paprasta realizuoti vienu slenkstiniu elementu $\xi_1=1, \xi_2=1, \eta=1$. Gauname slenkstinių elementų tinklą, pavaizduotą 401 pav., realizuojantį funkciją $Y = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \vee X_3$.

Tinklų, realizuojančių bet kokios (tame tarpe ir nemonotoninės) dvireikšmės loginės algebros funkcijas, sudarymas iš slenkstinių elementų ir yra antrasis

1852

Funkcijos $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **likutine funkcija po superpozicijos** $S_{X_j}^{X_i}[f(X_1, X_2, \dots, X_n)]$

vadinama $f(X_j=X_i)=S_{X_j}^{X_i}[f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_n)]=f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_n)$, kuri gaunama iš funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, pakeitus jos formulėje visus žymenis X_j žymenimis X_i ir tokiu būdu gaunant iš n argumentų funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $n-1$ argumento funkciją, žymimą $f(X_j=X_i)$.

Dabar jau galime suformuluoti teoremą, kuria remiasi minėtasis Lindemano ir Kono metodas:

„Bet kuri dvireikšmės loginės algebros funkcija gali būti išreikšta per bet kuriuos du savo argumentus X_i ir X_j bei jų neiginius ir jų likutines funkcijas bent vienu iš būdų:

- 1) $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = [X_i \# X_j \# f(X_j = \bar{X}_i)] \# [\bar{X}_i \# \bar{X}_j \# f(X_j = \bar{X}_i)] \# f(X_j = X_i)$;
- 2) $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = [X_i \# \bar{X}_j \# f(X_j = X_i)] \# [\bar{X}_i \# X_j \# f(X_j = X_i)] \# f(X_j = \bar{X}_i)$;
- 3) $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = [X_i \# X_j \# f(X_j = \bar{X}_i)] \# [\bar{X}_i \# X_j \# f(X_j = X_i)] \# \bar{X}_j$.

Įsitikinti tuo, kad šios formulės yra teisingos, galima arba sudarant lenteles, panašias į 340-ją lentelę, arba jas išvedant. Šių formulių išvedimui galima pasinaudoti metodu, analogišku metodui, kuriuo naudodamiesi gauname formulę $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = [X_i f(X_i = 1) \vee \bar{X}_i f(X_i = 0)] = [X_i \# \# f(X_i = 1) \# 0] \# [\bar{X}_i \# \# f(X_i = 0) \# 0] \# 1$.

Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti įrodyti ar bent patikrinti **Lindemano ir Kono teoremą**.

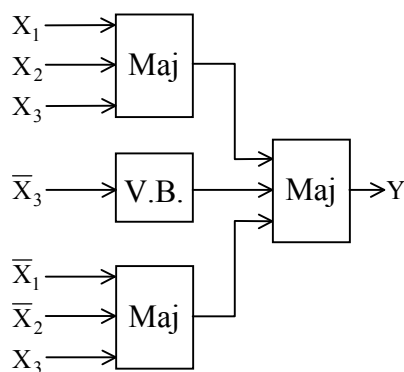
Naudodamiesi šia teorema, mes galime dvireikšmės loginės algebros funkciją $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, turinčią n argumentų, transformuoti į išraišką, mažoritarinės algebros operacijomis „ $\#$ “ jungiančią tos funkcijos argumentus bei juos atitinkančias likutines funkcijas, priklausančias jau nuo $n-1$ argumento. Pakartoję šią procedūrą likutinių funkcijų atžvilgiu, gausime išraišką, į kurią įeis likutinių funkcijų likutinės funkcijos, priklausančios jau tik nuo $n-2$ argumentų. Tęsdami šią procedūrą, pabaigoje gausime išraišką, jungiančią operacijomis „ $\#$ “ pavienius funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ argumentus bei jų neiginius, t. y. gausime funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ išraišką mažoritarinėje algebroje.

Pasinaudodami Lindemano ir Kono metodu, pervesime mūsų jau nagrinėjamą funkciją $f(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$ į mažoritarinės algebros formą.

Pradžioje apskaičiuosime $f(X_3=X_1)$. Gausime, jog $f(X_3=X_1) = X_1 X_2 \bar{X}_1 \vee X_1 \bar{X}_2 X_1 \vee \bar{X}_1 X_2 X_1 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_1 = 0 \vee X_1 \bar{X}_2 \vee 0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 = \bar{X}_2$.

Po to surasime $f(X_3 = \bar{X}_1) = X_1 X_2 \bar{\bar{X}}_1 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{\bar{X}}_1 = X_1 X_2 \vee 0 \vee \vee \bar{X}_1 X_2 \vee 0 = X_2$.

Dabar jau galime pritaikyti formulę $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = [X_i \# X_j \# f(X_j = \bar{X}_i)] \# [\bar{X}_i \# \bar{X}_j \# \# f(X_j = \bar{X}_i)] \# f(X_j = X_i)$. Gauname, jog $f(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \# X_3 \# f(X_3 = \bar{X}_1)] \# [\bar{X}_1 \# \bar{X}_3 \# \# f(X_3 = \bar{X}_1)] \# f(X_3 = X_1) = [X_1 \# X_3 \# X_2] \# [\bar{X}_1 \# \bar{X}_3 \# X_2] \# \bar{X}_2$. Ši išraiška skiriasi nuo anksčiau minėtosios tik tuo, kad jose argumentai X_2 ir X_3 yra pasikeitę vaidmenimis. Abi formos yra funkcionaliai ekvivalenčios, nes nagrinėjamoji funkcija yra simetriška savo argumentų atžvilgiu. Jei kintamuoju X_j būtų pasirinkę ne X_3 , o X_2 , palikdami kintamuoju X_i kintamąjį X_1 , tai būtų gavę anksčiau pateiktą funkcijos $Y=f(X_1, X_2, X_3)$ formą $Y = [X_1 \# X_2 \# X_3] \# [\bar{X}_1 \# \bar{X}_2 \# X_3] \# \bar{X}_3$. Jos realizavimui prireiktų trijų mažoritarinių elementų ir vėlinimo bloko VB (užlaikymo linijos), sujungtų į schemą, pavaizduotą 402 pav.



402 pav.

Gaunamų mažoritarinių tinklų sudėtingumas neretai priklauso nuo to, kokia eilės tvarka eliminuojami kintamieji, sudarant likutines funkcijas. **Varšavskis ir Rozenbliumas pasiūlė euristinį metodą**, padedantį pasirinkti geresnę kintamųjų eliminavimo tvarką, leidžiančią gauti paprastesnę duotosios funkcijos išraišką mažoritarinėje algebroje. Šis metodas remiasi loginės algebros funkcijos dalinės „išvestinės“ ir jos svorio radimu.

Loginės algebros funkcijos dalinė „išvestinė“

$f_{X_i} = \frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i}$ vadinama $n-1$ kintamojo loginė

funkcija $f(X_i=1) \oplus f(X_i=0)$, o tos **išvestinės svorių** $p\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)$ vadinamas tos išvestinės argumentų reikšmių rinkinių, kuriuos įstačius į išvestinę, gaunama jos reikšmė lygi 1, skaičius.

Pavyzdžiui, loginės funkcijos $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 X_4 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4$ išvestinė $\frac{\partial f}{\partial X_1} = (X_2 X_3 \vee 0 \vee 0 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4) \oplus (0 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_3 X_4 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4) = [(X_2 X_3 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4) \wedge (\bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_3 X_4)] \vee [(X_2 X_3 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4) \wedge (X_2 \vee X_3) \wedge (X_3 \vee \bar{X}_4)] \vee [(\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) \wedge (X_2 \vee X_3 \vee \bar{X}_4) \wedge (\bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_3 X_4)] = X_2 X_3 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \vee X_2 \bar{X}_3 X_4$.

Išvestinės $\frac{\partial f}{\partial X_1}$, svoris yra 4, nes ji tampa lygi 1, kai vektoriaus $\bar{X} = (X_2, X_3, X_4)$ koordinatų reikšmės priklauso rinkiniams (1; 1; 0), (1; 1; 1), (0; 0; 0), (1; 0; 1).

Analogiškai randame, kad išvestinės $\frac{\partial f}{\partial X_2}$ svoris $p\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right) = 4$, išvestinės $\frac{\partial f}{\partial X_3}$ svoris $p\left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\right) = 6$ ir išvestinės $\frac{\partial f}{\partial X_4}$ svoris $p\left(\frac{\partial f}{\partial X_4}\right) = 2$.

Varšavskis ir Rozenbliumas teigia, kad daugelyje atvejų pasiteisina tokia kintamųjų eliminavimo tvarka, kuomet pradedama nuo tų kintamųjų, kurių išvestinių svoriai didžiausi. Naudodamiesi ta rekomendacija, kintamųjų eliminavimą turėtume pradėti nuo kintamojo $X_j = X_3$ eliminavimo. Rekomenduojau skaitytojui pabandyti pervesti funkciją $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 X_4 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4$ į mažoritarinę formą (žiūr. 1.16.277. užduotį).

Reikėtų pažymėti, kad čia aprašytasis loginių funkcijų pervedimo į mažoritarinę formą metodas, net naudojantis **Varšavskio ir Rozenbliumo rekomendacija**, negarantuoja, kad bus gauta minimali tos funkcijos mažoritarinė forma, kurios realizavimui prireiks mažiausiai elementarių mažoritarinių elementų, turinčių po tris įėjimus.

Gana dažnai optimalias (ar bent jau artimesnes optimalioms) mažoritarines formas galima gauti naudojantis **funkcijų dekompozicijos metodu**, aprašytu 1.9.2.19. skyrelyje. Dvireikšmės logikos funkcijų pervedimo į mažoritarinę formą pavyzdžių, naudojantis kintamųjų eliminavimo ir funkcijos dekompozicijos metodu, skaitytojas gali rasti knygoje [126].

Mažoritarinė logika įdomi ir vertinga tuo, kad ji, būdama tam tikru slenkstinės logikos daliniu atveju, dar labiau priartina mus prie neuroninių tinklų matematinio modeliavimo. Juk neuroniniuose tinkluose taip pat naudojamosi „daugumos principu“: neuroninėse sistemose, kuriose, kaip ir visose kitose sistemose, gali atsirasti įvairių trikdžių, sprendiniai priimami **„balsavimo metodu“**, t. y. priimamas tas sprendinys, už kurį „balsuoja“ dauguma signalų, atėjusių nerviniai kanalais. **Toks metodas leidžia, kaip yra įrodęs von Neumanas, gauti patikimus sprendinius net ir tada, kada sistemos elementų patikimumas tik šiek tiek viršija 0,5, jei tų elementų pakankamai daug.** Didėjant elementų patikimumui, priimamo sprendinio teisingumo užtikrinimui pakanka vis mažesnio elementų skaičiaus.

Skaitytojui, kurį sudomino šios problemos ir mažoritarinė logika, galima parekomenduoti knygas [102, 105, 126, 280].

Ten galima rasti ir formalių neuronų ir jų tinklų aprašymus.

Formalaus neurono kaip realaus neurono supaprastinto analogo sąvoką įvedė Mak–Kalokas ir Pitsas, o dabar šia sąvoka naudojamosi ne tik **modeliuojant neuronų tinklų funkcionavimą**, bet ir konstruojant schemas, realizuojančias **sprendžiančiosios sistemos R** (žiūr. 1.15.2.1. skyrelį) **mokymosi procesą**, kaupiant patirtį ir adaptuojantis prie esamų ir net besikeičiančių sąlygų.

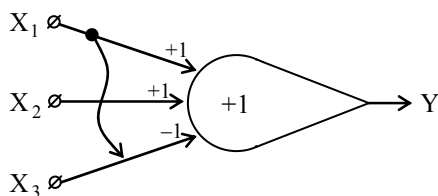
Paprasčiausias neurono modelis yra gana artimas slenkstinio elemento modeliui, nes turi įėjimus, charakterizuojamus svoriais ir jo išėjimo funkcija yra slenkstinė funkcija. Neurono įėjimai skirstomi į dvi grupes: į **aktyvizuojančius** ir į **slopinančius** įėjimus. Aktyvizuojančių įėjimų svoriai yra teigiami, o slopinančiųjų – neigiami. Paprasčiausiame neurono modelyje aktyvizuojančių įėjimų svoriai yra pastovūs ir lygūs +1, o slopinančių įėjimų – taip pat pastovūs ir lygūs, tačiau lygūs –1. **Sudėtingesniuose neuronų modeliuose įėjimų svoriai gali keistis: neuronas, kaupdamas patirtį, gali nuspręsti, kad kai kurių įėjimų signalai yra svarbesni už kitus, todėl gali padidinti jų svorius, o kai kurių įėjimų svorius sumažinti, tokiu būdu keisdamas išėjimo signalo formavimosi sąlygas.** Žinoma, toks neuronas jau turi turėti atmintį ir jo aprašymui jau nebepakanka vien tik išėjimo funkcijos, aprašančios paprasto formalaus neurono, neturinčio atminties ir nekeičiančio savo būsenos, funkcionavimą, bet reikalinga dar ir pėrijimo funkcija, aprašanti būsenos kitimo dėsnį, ir

speciali tikslo funkcija, vertinanti susidarančias situacijas ir naudojanti neurono atmintyje kaupiamą informaciją atitinkamų grįžtamųjų ryšių sudarymui – neurono įėjimų svorių ξ_j ir slenksčio dydžio η tikslingam keitimui. Todėl **neuronai, turintys atmintį, o taip pat gaunamos informacijos bei pokyčių neurone vertinimo mechanizmą ir grįžtamuosius ryšius, įgyja savybę adaptuotis ir mokytis.** Tai – **sisteminė savybė, atsirandanti atitinkamos struktūros sudarymo (susidarymo) dėka, ir šios savybės atsiradimas – dar vienas emerđencijos reiškinio pavyzdys.** Šia savybe galima pasinaudoti, projektuojant ir kuriant sistemas, galinčias ieškoti ir surasti reikalingus (tikslingus) sprendinius tose ar kitose situacijose, o taip pat sistemas, turinčias labilumo savybę bei sistemas, sugebančias adaptuotis ir tobulėti. Apie tokias sistemas mes jau kalbėjome 1.6.4.7. ir 1.6.4.8. skyreliuose, o detaliau jos bus nagrinėjamos antrojoje šios mokymo priemonės dalyje.* Ten bus kalbama ir apie formalųjų neuronų bei jų tinklų panaudojimą besimokančių algoritminių sistemų kūrimo ir apie tokių sistemų taikymą, pasinaudojant statistinės informacijos kaupimu ir jos apdorojimu formaliuose neuronuose, tuo pačiu metu tobulinant tų neuronų ir viso neuroninio tinklo struktūrą, t. y. tobulinant sprendinio paieškos algoritmą. Su tokiais formaliais neuronais – sugebančiais kaupti informaciją ir jos kaupimo eigoje tobulinti savo struktūrą automatais – susidursime ir 1.16.4. skyrelyje, kalbėdami apie dirbtinio intelekto sistemas ir apie tokių slenkstinių elementų tinklą, pritaikytą vaizdų atpažinimo uždavinio sprendimui, kurį jo autorius **F. Rozenblatas pavadino perceptronu.** O šiame skyrelyje apsiribosime susipažinimu su paties paprasčiausio formalaus neurono modeliu, kurio sudarymui ir analizei pakanka dvireikšmės loginės algebros matematinio aparato.

Net ir tokie neuronai, kurių funkcionavimas gali būti pilnai aprašytas slenkstinėmis dvireikšmės logikos funkcijomis, vis dėl to šiek tiek skiriasi nuo mūsų jau nagrinėtų slenkstinių elementų. Tie skirtumai pasireiškia tuo, kad formalųjų neuronų įėjimai skirstomi į dvi klases – į aktyvizuojančius ir slopinančius įėjimus, ir tuo, kad **kai kurie aktyvizuojantys įėjimai turi galimybę paveikti kai kuriuos slopinančius įėjimus,** sustabdydami kuriam laikui („uždrausdami“, „išjungdami“) jų veikimą.

Panagrinėsime tokio paprasto formalaus neurono, turinčio du aktyvizuojančius įėjimus X_1 ir X_2 su vienodais svoriais ξ_1 ir ξ_2 , lygiais $+1$, ir vieną slopinantį įėjimą X_3 su svoriu $\xi_3 = -1$, funkcionavimą, kai to neurono slenksčio dydis η yra lygus $+1$ ir kai pirmasis neurono įėjimas X_1 aktyvizuotoje būsenoje (turėdamas reikšmę $X_1 = 1$) panaikina („uždraudžia“, „išjungia“) slopinančiojo įėjimo X_3 poveikį į neuroną.

Šio neurono schema pavaizduota 403 pav., o jo išėjimo funkcijos informacinis modelis pateiktas 347-ojoje lentelėje.



403 pav.

347. lentelė

X_1	X_2	X_3	Y	X_1	X_2	X_3	Y
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

Išreiškę šio neurono slenkstinę išėjimo funkciją $Y = \text{Sgn}[X_1 + X_2 - X_3(1 - X_1) - 1]$ Bulio algebroje, gauname $Y = \overline{X_1}X_2\overline{X_3} \vee X_1\overline{X_2}\overline{X_3} \vee X_1\overline{X_2}X_3 \vee X_1X_2\overline{X_3} \vee X_1X_2X_3 = X_1 \vee X_2\overline{X_3}$, iš kurios išplaukia, kad pirmasis įėjimas aktyvizuoja neuroną visada, o antrasis – tik tada, kai nėra trečiojo.

Neurono funkcionavimo aprašymui bei jo analizei ir sintezei gana dažnai naudojamos **Veno diagramos** (slenkstinės, taškinės, sutvarkytos eilės tvarka). Formalūs neuronai yra universalūs loginiai elementai: nesunku įrodyti, kad bet kuriai dvireikšmės loginės algebros funkcijai galima sukonstruoti ją realizuojantį formalųjį neuroną. Sintezuojant tokių neuroną, dažniausiai naudojamas **Blumo algoritmu**, leidžiančiu sukonstruoti formalųjį neuroną, turintį duotąją **taškinę diagramą**.

Panašiai kaip ir slenkstinio elemento sintezės uždavinį, formalaus neurono sintezės uždavinį galima suvesti į algebrinių lygčių sistemos, kurioje nežinomųjų yra daugiau negu lygčių, sprendimo uždavinį. Tai leidžia ieškoti ne tik neurono, realizuojančio duotąją loginę funkciją, struktūros, bet ir spręsti optimizacinį uždavinį: rasti tarp daugelio tokių struktūrų, koku tai atžvilgiu optimalią (pavyzdžiui, turinčią minimalų įėjimų skaičių ir pan.). Taigi, **neuronų sintezės uždavinių sprendimui galima pasitelkti optimizavimo metodus**, apie kuriuos buvo kalbama 1.15. skyriuje.

Atsižvelgiant į fizinės formalaus neurono funkcionavimą realizuojančios elektroninės schemos (pavyzdžiui, lazerinio neuristorio) veikimo sąlygas bei technines tokių schemų gamybos sąlygas ne

* Skaitytojams, kurie pageidautų daugiau sužinoti apie formalius neuronus, jų tinklus ir jų taikymus dabar, rekomenduojame knygas [290÷295].

visada tikslinga sudėtingą loginę funkciją realizuoti viename formaliame neurone. Gana dažnai tokių funkcijų realizavimui konstruojami neuroniniai tinklai. Neretai pavyksta sukonstruoti duotąją sudėtingą loginę funkciją realizuojantį neuroninį tinklą, panaudojant mažiau elektrinius ar optinius signalus perduodančių skaidulų („siūlų“, t. y. laidų), negu jų būtų prirėkę, konstruojant vieną neuroną, realizuojantį tą funkciją.

Manau, jog skaitytojui nereikia daug aiškinti apie neuroninių tinklų sintezės ir eksperimentų su jais aktualumą. Paaiškinsiu tik tai, kodėl apie slenkstinę bei mažoritarinę logines algebras bei apie formalius neuronus ir jų tinklus buvo papasakota ne skyreliuose, skirtuose klasikinei logikai, o skyrelyje, skirtame neklasikinės logikos, nors čia aprašytose slenkstinėse, mažoritarinėse ir neuroninėse schemose cirkuliuojantys signalai gali turėti tik dvi reikšmes ir tų schemų funkcionavimas aprašomas dvireikšmės klasikinės logikos algebros kalba.

Tam buvo dvi priežastys. Pirmoji priežastis – istorinė: ir slenkstinė, ir mažoritarinė, ir neuroninė logikos susiformavo ne taip jau seniai – penktajame logikos mokslo etape (žiūr. 1.16.1.5.5.7. skyrelį), sprendžiant ne tiek pačios logikos metodo (ir, aišku, ne matematikos loginio pagrindimo) problemas, o problemas, kurias iškėlė intensyvus kibernetikos ir kompiuterinės technikos vystymasis, būdingas naujesiems – neklasikinių mokslų atsiradimo – laikams. Antroji priežastis: tokios loginės funkcijos kaip Vebo ar Šeferio, o taip pat funkcijos, kurias realizuoja slenkstiniai ir mažoritariniai elementai bei formalūs neuronai, gali būti apibendrintos ir interpretuojamos kaip k -reikšmės logikos funkcijos, kur $k \geq 2$, priskiriamos neklasikinių loginių funkcijų klasei.

Pavyzdžiui, galima įsivesti **k -reikšmę Vebo funkciją**, apibrėžiamą formule $f(X_1, X_2) = [\max(X_1, X_2) + 1] \bmod k$. Kai $k=2$, tai gauname, jog $f(X_1, X_2) = [\max(X_1, X_2) + 1] \bmod 2$, iš kur išplaukia, jog ši funkcija lygi „1“ tik tuo atveju, kai $\max(X_1, X_2) = 0$, t. y., kai $X_1 = X_2 = 0$, o visais kitais atvejais $f(X_1, X_2) = 0$, kas sutampa su mums jau seniai žinoma Vebo funkcija $Y = X_1 \circ X_2 = \overline{X_1} \overline{X_2} = \overline{X_1 \vee X_2}$.

Analogiškai galima įsivesti **apibendrintą slenkstinio elemento apibrėžimą, tinkantį atvejams, kai to elemento įėjimai X_i ir jo išėjimas Y gali turėti $k \geq 2$ reikšmių**. Tokiu pat būdu galima įsivesti **k -reikšmės logikos formalųjį neuroną** (be „atminties“ ir be grįžtamųjų ryšių ir todėl aprašomą k -reikšmės logikos kalba, o taip pat ir su „atmintimi“, kurioje informacija koduojama k -reikšmio kodo simboliais, ir su grįžtamaisiais ryšiais – t. y. k -reikšmi loginį automata) bei **k -reikšmę mažoritarinę loginę algebrą** ir pan. Visos tokios funkcijos ir jas realizuojančios schemos būtų aprašomos **diskrečiosios matematikos kalba**, kuri paskutiniu laiku labai sparčiai vystosi, papildydama klasikinę tolydžiąją matematiką ir jos aparatą. **Interpretuojant logikos mokslo matematinį aparatą kaip diskrečiosios matematikos plačiąją prasmę matematinio aparato dalį, visiškai logiška priskirti slenkstinę, mažoritarinę ir neuroninę k -reikšmės logikas (tame tarpe ir dvireikšmes) prie neklasikinės matematikos**, o kartu – ir prie neklasikinių logikų. Minėtosios dvi priežastys ir apsprendė tai, kad slenkstinės, mažoritarinės ir neuroninės logikų aprašymai atsidūrė 1.16.1.5.6. skyrelyje kartu su k -reikšmių logikų aprašymu, prie kurio dabar ir grįšime.

K -reikšmėse loginėse algebrose loginių funkcijų (loginių operacijų) pilnumo problema bendruoju atveju iki galo dar neišspręsta, nes dar nesuformuluotas ir neįrodytas Posto – Jablonskio teoremos analogas apie būtinus ir pakankamus bazinių loginių funkcijų sistemų pilnumo k -reikšmėje loginėje algebroje, kai $k > 3$, požymius. Įrodyta tik **Jablonskio teorema trireikšmei logikai**, o atvejams, kai $k > 3$, egzistuoja tik eilė loginių funkcijų rinkinių, kurių pilnumas k -reikšmėje loginėje algebroje jau yra įrodytas.

Kad galėtume apibūdinti tokias sistemas, įsivesime kai kurias k -reikšmės loginės algebros funkcijas, kurios galėtų pretenduoti į funkcijų, patenkančių į **k -reikšmės logikos bazinių funkcijų sąrašą**, vaidmenį.

Viena tokių funkcijų – **k -reikšmę Vebo funkcija**, kurią mes jau esame apibrėžę formule $f(X_1, X_2) = X_1 ! X_2 = [\max(X_1, X_2) + 1] \bmod k$, apibendrindami dvireikšmę Vebo funkciją $Y = X_1 \circ X_2 = \overline{X_1} \overline{X_2} = \overline{X_1 \vee X_2}$, esančią k -reikšmės Vebo funkcijos daliniu atveju.

Pavyzdžiui, **trireikšmę Vebo funkciją**, kurioje ir argumentai X_i ir pati funkcija Y gali turėti tris ir tik tris reikšmes, pažymėtas skaičiais 0, 1 ir 2, aprašo 348-jį lentelę, o keturreikšmę – 349-jį lentelę.

348. lentelė

X_1	X_2	Y
0	0	1
0	1	2
0	2	0
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

349. lentelė

X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y
0	0	1	2	0	3
0	1	2	2	1	3
0	2	3	2	2	3
0	3	0	2	3	0
1	0	2	3	0	0
1	1	2	3	1	0
1	2	3	3	2	0
1	3	0	3	3	0

K-reikšmė disjunkcija k -reikšmėje loginėje algebroje apibrėžiama formule $X_1 @ X_2 = \max(X_1, X_2)$, o **k-reikšmė konjunkcija** – formule $X_1 \# X_2 = \min(X_1, X_2)$. Dažniausiai operatoriai „ $\vee$ “ ir „ $\wedge$ “ vartojami be raidžių „ k “. **Funkcija $(X_1 + X_2) \bmod k$** ir **funkcija $(X_1 \times X_2) \bmod k$** taip pat gali tapti bazinėmis k -reikšmės logikose, kai $k \geq 2$ yra koks tai pirminis skaičius. Pavyzdžiui, kai $k=2$, tai $(X_1 + X_2) \bmod 2 = X_1 \oplus X_2$ ir $(X_1 \times X_2) \bmod 2 = X_1 \wedge X_2$. Tuomet, turėdami funkciją – loginę konstantą $Y \equiv 1$, iš funkcijos $Y = X \oplus 1$ gauname funkciją $Y = \bar{X}$, kuri kartu su funkcija $Y = X_1 \wedge X_2$ sudaro pilną loginių funkcijų sistemą dvireikšmėje logikoje. Rekomenduojau skaitytojui pabandyti įrodyti, jog turėdami šias modulinės funkcijas ir funkciją $Y=1$, galime per jas išreikšti bet kurią trireikšmės logikos funkciją.

Apibendrinami loginio neigimo funkciją $Y = \bar{X}$, gauname k -reikšmę **inversijos** funkciją $Y = f(X) = k - 1 - X$. Kai $k=2$, tai inversija sutampa su loginiu neigimu: kintamojo $X=1$ inversija yra lygi $2-1-1=0$, t. y. $\bar{X}$, o kai $\bar{X}=0$, tai jo inversija $2-1-0=1$ sutampa su $\bar{\bar{X}} = \bar{0}$. Trireikšmėje logikoje 0 inversija lygi $3-1-0=2$, vieneto inversija lygi $3-1-1=1$, o dvejetainio inversija $3-1-2=0$.

350. lentelė

X	$3-1-X$	$(X+1) \bmod 3$
0	2	1
1	1	2
2	0	0

Kita svarbi k -reikšmių logikų monarinė funkcija yra **ciklinio neigimo funkcija** $f(X) = (X+1) \bmod k$. Kai $k=2$, tai funkcija $(X+1) \bmod 2$ sutampa su $\bar{X}$, t. y. su loginiu neigimu dvireikšmėje logikoje, kuris kartu yra ir inversijos funkcija. Tačiau kai $k=3$, tai tokio loginės inversijos ir ciklinio neigimo funkcijų sutapimo, jau nebėra, ką vaizduoja 350-oji lentelė.

Nesunku pastebėti, kad ciklinio neigimo funkcijos lentelėje funkcijos Y reikšmių stulpelis gaunamas, pridėdant prie argumentų reikšmių stulpelio elementų po vieną ir tokiu būdu lyg ir kartojant tą stulpelį su postūmiu žemyn per vieną langelį, dėl ko ir atsiranda cikliškumas.

Svarbiomis monarinėmis k -reikšmių logikų funkcijomis yra ir taip vadinamos **charakteristinės funkcijos** $Y_i = \varphi_i(X) = \begin{cases} k-1, & \text{kai } X = i, \\ 0, & \text{kai } X \neq i, \end{cases}$ kur $i=0, 1, 2, \dots, k-1$. Tų funkcijų reikšmių Y_i stulpeliams būdinga, jog jų visose eilutėse, išskyrus i -ją, stovi nuliai, o i -joje eilutėje – skaičius $k-1$.

Dabar jau galime nurodyti **keletą pilnų k -reikšmės loginės algebras funkcijų sistemų**:

1) **Vebo sistema**, kurią sudaro k -reikšmė Vebo funkcija $Y = f(X_1, X_2) = [\max(X_1, X_2) + 1] \bmod k$;

2) **Rosero ir Tjuketo sistema**, kurią sudaro k -reikšmės logikos charakteristinės funkcijos $\varphi_i (i=0, 1, 2, \dots, k-1)$, k -reikšmė disjunkcija, k -reikšmė konjunkcija ir funkcijos – loginės konstantos;

3) **Posto sistema**, kurią sudaro k -reikšmės disjunkcija ir ciklinio neigimo funkcija;

4) **Aizenbergo ir Rabinovičiaus sistema**, kurią sudaro ciklinio neigimo

$$\text{funkcija ir funkcijos } \psi \text{ ir } \mu: \psi(X_1, X_2) = \begin{cases} X_1, & \text{kai } X_2 = 1, \\ X_2, & \text{kai } X_1 = 1, \\ 0, & \text{kai } X_1 \neq 1 \text{ ir } X_2 \neq 1, \end{cases}$$

$$\mu(X_1, X_2) = \begin{cases} X_1, & \text{kai } X_2 = 0, \\ X_2, & \text{kai } X_1 = 0, \\ \min(X_1, X_2), & \text{kai } X_1 \neq 0 \text{ ir } X_2 \neq 0. \end{cases}$$

Egzistuoja eilė kitų pilnų k -reikšmės loginės algebros funkcijų sistemų, kurių tarpe ir jau minėtoji **modulinė logika**, į kurios bazinių funkcijų sudėtį įeina funkcijos $(X_1+X_2) \bmod k$, ir $(X_1 \times X_2) \bmod k$ ir loginės konstantos.

Jei k -reikšmės logikose apsiribotume tik vieno kintamojo loginėmis funkcijomis, kurių skaičius yra lygus k^k , tai tokios sistemos pilnumo būtiną ir pakankamą požymį yra nustatęs jau minėtasis Jablonskis, įrodydamas teoremą, kad visos vieno argumento k -reikšmės logikos funkcijas galima gauti iš vienos loginės funkcijos, esminiai priklausančios daugiau negu nuo vieno argumento ir galinčios turėti kiekvieną iš galimų k reikšmių.

Nagrinėdamas k -reikšmės vieno argumento logines funkcijas, Pikaras nustatė, kad visos tas funkcijas galima gauti, naudojantis kompozicija šių trijų funkcijų:

$$1) \varphi(X) = (X-1) \bmod k, \quad 2) g(X) = \begin{cases} X, & \text{kai } 0 \leq X \leq k-3, \\ k-1, & \text{kai } X = k-2, \\ k-2, & \text{kai } X = k-1, \end{cases} \quad 3) h(X) = \begin{cases} 1, & \text{kai } X = 0, \\ X, & \text{kai } X \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Palikus funkciją } h(X) = \begin{cases} 1, & \text{kai } X = 0, \\ X, & \text{kai } X \neq 0. \end{cases}, \text{ o funkcijas } \varphi(X) \text{ ir } g(X) \text{ pakeitus}$$

funkcijų $f_i(X)$ (kur $i=0, 1, 2, \dots, k-1$) rinkiniu, gaunamu iš formulės

$$f_i(X) = \begin{cases} i, & \text{kai } X = 0, \\ 0, & \text{kai } X = i, \\ X, & \text{kai } (X \neq 0) \wedge (X \neq i), \end{cases} \text{ taip pat gaunama loginių vieno argumento funkcijų}$$

sistema, kuria naudojantis galima gauti bet kurią vieno argumento k -reikšmės loginės algebros funkciją.

Naudodamiesi charakteristinėmis k -reikšmės loginės algebros funkcijomis, kiekvieną n argumentų k -reikšmės loginės algebros funkciją $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ galima išreikšti formoje, analogiškoje tobulajai DNF dvireikšmėje logikoje ir vadinamoje k -reikšme TDNF (kTDNF).

Sudarant kTDNF, vieneto konstituentų $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$, kurių disjunkcija ir sudaro dvireikšmės loginės algebros n -argumentų funkcijos TDNF, vaidmenį vaidina **charakteristinės konjunkcijos**, sudarytos iš charakteristinių funkcijų, būtent, konjunkcijos $\varphi_{\alpha_1}(X_1) \varphi_{\alpha_2}(X_2) \dots \varphi_{\alpha_n}(X_n)$, kuriose $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – bet kokios k -reikšmės loginės algebros konstantos, galinčios turėti reikšmes iš aibės $\{0; 1; 2; \dots; k-1\}$. Kadangi galima sudaryti k^n skirtingų rinkinių $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, tai ir skirtingų galimų konjunkcijų $\varphi_{\alpha_1}(X_1) \varphi_{\alpha_2}(X_2) \dots \varphi_{\alpha_n}(X_n)$ skaičius yra lygus k^n . Visas charakteristines konjunkcijas galima sunumeruoti numeriais j , sutampančiais su rinkinių $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ numeriais, besikeičiančiais nuo 0 iki k^n-1 , pažymint tas konjunkcijas žymenimis F_j .

Nesunku įsitikinti, kad konjunkcija $F_j = \varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2)\dots\varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)$ visoms vektoriaus $\vec{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ koordinačių $X_1, X_2, \dots, X_n$ reikšmėms $(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \dots, \alpha_{n,s})$, kai $s \neq j$, bus lygi 0, ir tik vienu atveju, kai $s=j$, t. y., kai $X_1=\alpha_{1,j}, X_2=\alpha_{2,j}, \dots, X_n=\alpha_{n,j}$, turėsime, kad $\varphi_{\alpha_{1,j}}(\alpha_{1,j}) = k-1, \varphi_{\alpha_{2,j}}(\alpha_{2,j}) = k-1, \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(\alpha_{n,j}) = k-1$, ir todėl $F_j = \varphi_{\alpha_{1,j}}(\alpha_{1,j})\varphi_{\alpha_{2,j}}(\alpha_{2,j})\dots\varphi_{\alpha_{n,j}}(\alpha_{n,j}) = \min[\varphi_{\alpha_{1,j}}(\alpha_{1,j})\varphi_{\alpha_{2,j}}(\alpha_{2,j})\dots\varphi_{\alpha_{n,j}}(\alpha_{n,j})] = k-1$.

Todėl galioja tapatybė $f(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \bigvee_{j=0}^{k^n-1} [F_j \wedge f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})] \equiv \bigvee_{j=0}^{k^n-1} f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2), \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)$, nes, įstatę į $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kokias nors kintamųjų $X_1, X_2, \dots, X_n$ reikšmes, pavyzdžiui, $X_1=\alpha_{1,t}, X_2=\alpha_{2,t}, \dots, X_n=\alpha_{n,t}$, paimtas iš rinkinio $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, turinčio numerį t , gautume, jog tuomet visos konjunkcijos F_j , išskyrus konjunkciją F_t , būtų lygios 0 ir tik konjunkcija F_t būtų lygi $k-1$. Todėl gautume, jog $f(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{n,t}) = \max_j [F_j \wedge f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})] = F_t \wedge f(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{n,t}) = \min[F_t, f(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{n,t})] = \min[k-1, f(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{n,t})] = f(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{n,t})$, t. y. gautume, kad konjunkcijų disjunkcija $\bigvee_{j=0}^{k^n-1} [F_j \wedge f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})]$ visada lygi funkcijai $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Šią konjunkcijų $f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2), \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)$ disjunkciją $\bigvee_{j=0}^{k^n-1} [f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2), \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)]$ ir vadina **k-reikšme TDNF**.

Analogiškai, kaip buvo išvesta charakteristinė konjunkcija $F_j = \varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1) \times \varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2), \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)$, sudaryta iš k -reikšmės logikos charakteristinių funkcijų $\varphi_i(X)$, iš tų funkcijų inversijų $\overline{\varphi_i(X)} = k-1 - \varphi_i(X)$ galima sudaryti **charakteristines disjunkcijas** $\Phi_j = \overline{\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)} \vee \overline{\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2)} \vee \dots \vee \overline{\varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)}$. Nesunku įrodyti, kad charakteristinė disjunkcija Φ_j , įstačius į ją vietoj argumentų $X_1, X_2, \dots, X_n$, bet kurių jų reikšmių rinkinį $(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \dots, \alpha_{n,s})$, turintį numerį $s \in (0, 1, 2, \dots, k^n-1)$, nesutampantį su j , tampa lygi $k-1$, o įstačius vietoj $\vec{X}$ jo koordinačių reikšmių rinkinį, turintį numerį j , charakteristinė disjunkcija Φ_j tampa lygi 0. Iš šios charakteristinių disjunkcijų savybės, o taip pat iš disjunkcijos ir konjunkcijos apibrėžimų $X_i \vee X_j = \max(X_i, X_j)$ ir $(X_i \wedge X_j) = \min(X_i, X_j)$ išplaukia formulė $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigwedge_{j=0}^{k^n-1} [\Phi_j \vee f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})] = \bigwedge_{j=0}^{k^n-1} [f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j}) \vee \overline{\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)} \vee \overline{\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2)} \vee \dots \vee \overline{\varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)}]$, vadinama k -reikšmės loginės funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ išreiškimo **k-reikšmėje tobulojoje konjunkcinėje normalioje formoje (kTKNF)** formule.

Taigi, **panašiai, kaip bet kuri dvireikšmė loginė funkcija gali būti išreikšta TDNF arba TKNF, taip ir k-reikšmėje logikoje, kai $k \geq 2$, bet kuri loginė funkcija gali būti išreikšta kTDNF arba kTKNF**.

Daugiareikšmės logikos funkcijų pervedimą į normaliąją formą pailiustruosiu konkrečiais pavyzdžiais.

Tarkime, jog turime trireikšmės loginės algebros funkciją $Y=f(X_1, X_2)$, kurios informacinis modelis yra 351-oji lentelė. Išreikšime šią funkciją 3TDNF.

351. lentelė

X_1	X_2	Y
0	0	2
0	1	0
0	2	0
1	0	0
1	1	1
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	2

Ši funkcija turi $k^n=3^2=9$ charakteristines konjunkcijas, sudarytas iš vienargumentinių charakteristinių funkcijų $\varphi_p(X_1)$ ir $\varphi_r(X_2)$, kuriose indeksai p ir r gali turėti reikšmes iš aibės $\{0; 1; \dots; k-1\}$, t. y. iš aibės $\{0; 1; 2\}$. Kaip tai išplaukia iš charakteristinių funkcijų apibrėžimo, funkcija $\varphi_p(X_1)$ lygi 0 visoms X_1 reikšmėms, išskyrus reikšmę $X_1=p$, kuomet $\varphi_p(p)=k-1$. Analogiškai, funkcija $\varphi_r(X_2)$ yra lygi 0, kai X_2 turi reikšmę, nelygią r , ir $\varphi_r(r)=k-1$. Todėl charakteringoji konjunkcija $F_0=\varphi_0(X_1)\varphi_0(X_2)$ yra lygi $k-1=3-1=2$ tik tuo atveju, kai $X_1=0$ ir $X_2=0$, o visais kitais likusiais $k^n-1=8$ atvejais $F_0=0$. Analogiškai gauname, kad $F_1=\varphi_0(X_1)\varphi_1(X_2)=2$ tik tuo atveju, kai $X_1=0$ ir $X_2=1$. Visais kitais aštuoniais atvejais ši charakteristinė konjunkcija F_1 yra lygi 0. Tęsdami šį samprotavimą, gauname, kad kiekvieną 345-osios lentelės eilutę atitinka viena ir tik viena nelygi nuliui charakteristinė konjunkcija F_j , kurios numeris j sutampa su eilutės numeriu j .

Pavyzdžiui, nulinę 351-sios lentelės eilutę, kurioje $X_1=0$ ir $X_2=0$, atitinka charakteristinė konjunkcija $F_0=\varphi_0(X_1)\varphi_0(X_2)$, turinti nenulinę reikšmę tik toje eilutėje, o penktąją eilutę, kurioje $X_1=1$ ir $X_2=2$, atitinka charakteristinė konjunkcija $F_5=\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)$, kurios reikšmė yra lygi 0 visose kitose eilutėse ir tik penktojoje eilutėje $F_5=2$.

Kadangi nagrinėjamoji funkcija $f(X_1, X_2)$ nelygi 0 tik nulinėje, ketvirtojoje ir aštuntojoje eilutėse, tai visose kitose šešiose eilutėse konjunkcijos $F_j \wedge f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j})$ bus lygios 0, nes bus lygios 0 funkcijos $f(X_1, X_2)$ reikšmės $f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j})$. Todėl gausime, jog $f(X_1, X_2)=[F_0 \wedge f(0,0)] \vee [F_4 \wedge f(1,1)] \vee [F_8 \wedge f(2,2)] = \varphi_0(X_1)\varphi_0(X_2)2 \vee \varphi_1(X_1)\varphi_1(X_2)1 \vee \varphi_2(X_1)\varphi_2(X_2)2$.

Šią formulę galima dar supaprastinti, nerašant funkcijos $f(X_1, X_2)$ reikšmių, lygių $k-1=2$, nes konjunkcija $\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1) \wedge \varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n) \wedge k-1 = \min[\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1), \varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2), \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n), k-1] = \min[\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1), \varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2), \dots, \varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)]$, kadangi nei viena iš charakteringųjų funkcijų negali turėti loginės reikšmės, didesnės už $k-1$, kuri yra pati didžiausia loginė reikšmė k -reikšmėje logikoje.

Todėl galutinai gauname, jog $f(X_1, X_2) = \varphi_0(X_1)\varphi_0(X_2)1 \vee \varphi_1(X_1)\varphi_1(X_2)1 \vee \varphi_2(X_1)\varphi_2(X_2)2$. Svarbu atkreipti skaitytojo dėmesį, kad skaičiaus „1“ šioje formulėje nerašyti negalima, nes be jo konjunkcija

352. lentelė

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	3	4
0	4	3	0	4	4
1	0	1	1	0	4
2	4	4	4	4	1
3	4	0	4	4	3
4	4	4	4	1	4

$\varphi_1(X_1)\varphi_1(X_2)1$ negalėtų tapti lygi 1, o būtų arba 0 arba 2, kadangi charakteristinė konjunkcija $F_4=\varphi_1(X_1)\varphi_1(X_2)$, kai $X_1=1$ ir $X_2=1$, yra lygi $k-1=2$, o visais kitais atvejais – lygi 0. Ir tik esant trečiajam konjunkcijos $\varphi_1(X_1)\varphi_1(X_2)f(1,1)=\varphi_1(X_1)\wedge\varphi_1(X_2)\wedge 1$ nariui $f(1,1)$, lygiam 1, konjunkcija $F_4 \wedge f(1,1)$ gali tapti lygi $f(1,1)$, t. y. 1.

Palikdamas pačiam skaitytojui surasti funkcijos, aprašytos 351-oje lentelėje, 3TKNF (žiūr. 1.16.281. užduotį), surasiu šiek tiek sudėtingesnės 5-reikšmės loginės funkcijos $f(X_1, X_2)$, kurios išėjimo Y priklausomybę nuo įėjimų X_1 ir X_2 aprašo 352-oji lentelė, 5TKNF.

Pasinaudodsiu anksčiau išvestąja funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ pervedimo į kTKNF formulę

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigwedge_{j=0}^{k^n-1} [\Phi_j \vee f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})] = \bigwedge_{j=0}^{k^n-1} [\overline{\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)} \vee \overline{\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2)} \vee \dots \vee \overline{\varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)} \vee$$

$\wedge f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})]$, kurioje bet kuri charakteristinė disjunkcija Φ_j 352-ojoje lentelėje pateiktos matricos langeliuose, turinčiuose numerius, nesutampančius su j , priima reikšmes, lygias $k-1=4$, o j -jame langelyje – reikšmę, lygią 0.

Todėl disjunkcija $\Phi_j \vee f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})$ visuose minėtosios matricos langeliuose, turinčiuose numerius, nesutampančius su j , turi reikšmę, lygią $k-1=4$, o langelyje, turinčiame numerį j , – reikšmę lygią $f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})$, t. y. lygią skaičiui, įrašytam į tą langelį. Kadangi k -reikšmėje logikoje loginė „daugyba“ (konjunkcija) iš $k-1$ nieko nekeičia (panašiai, kaip dvireikšmėje logikoje nieko nekeičia loginė „daugyba“ iš vieneto) ir kadangi disjunkcija $\Phi_j \vee (k-1)$ visada lygi $k-1$, tai konjunkcijoje

$$\bigwedge_{j=0}^{k^n-1} [\Phi_j \vee f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})] \text{ tų disjunkcijų } \Phi_j \vee f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j}), \text{ kuriose } f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})=k-1,$$

galima ir nerašyti, o disjunkcijas $\Phi_j \vee f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})$, kuriose $f(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})=0$, galima pakeisti disjunkcijomis $\Phi_j = \overline{\varphi_{\alpha_{1,j}}(X_1)} \vee \overline{\varphi_{\alpha_{2,j}}(X_2)} \vee \dots \vee \overline{\varphi_{\alpha_{n,j}}(X_n)}$. Atsižvelgdami į visą tai, gauname, kad

346-ojoje lentelėje pavaizduotos funkcijos $f(X_1, X_2)$ tobuloji konjunkcinė normalioji forma 5TKNF yra
$$[\overline{\varphi_0(X_1)} \vee \overline{\varphi_1(X_2)} \vee 3] \wedge [\overline{\varphi_0(X_1)} \vee \overline{\varphi_2(X_2)}] \wedge [\overline{\varphi_1(X_1)} \vee \overline{\varphi_0(X_2)}] \wedge [\overline{\varphi_1(X_1)} \vee \overline{\varphi_1(X_2)} \vee 1] \wedge$$

$$\wedge [\overline{\varphi_1(X_1)} \vee \overline{\varphi_2(X_2)} \vee 1] \wedge [\overline{\varphi_1(X_1)} \vee \overline{\varphi_3(X_2)}] \wedge [\overline{\varphi_2(X_1)} \vee \overline{\varphi_4(X_2)} \vee 1] \wedge [\overline{\varphi_3(X_1)} \vee \overline{\varphi_1(X_2)}] \wedge$$

$$\wedge [\overline{\varphi_3(X_1)} \vee \overline{\varphi_4(X_2)} \vee 3] \wedge [\overline{\varphi_4(X_1)} \vee \overline{\varphi_3(X_2)} \vee 1].$$

Galimybė išreikšti kiekvieną k -reikšmės loginės algebros funkciją kTDNF arba kTKNF kaip tik ir įrodo Rosero ir Tjuketo sistemos pilnumą.

Skaitytojui gali kilti klausimas, o kam reikalingas loginių funkcijų išreiškimas tokiose formose kaip kTDNF arba kTKNF. Atsakymas į šį klausimą gana paprastas: naudodamiesi šiomis formulėmis, mes kiekvieną k -reikšmės loginės algebros funkciją, priklausančią nuo bet kokio baigtinio skaičiaus n argumentų $X_1, X_2, \dots, X_n$, galima **išreikšti per standartines tai loginei algebrai vieno argumento funkcijas** – charakteristines funkcijas $\varphi_i(X)$ – ir logines konstantas, sudarydami tų funkcijų ir loginių konstantų konjunkcijas ir tų konjunkcijų disjunkcijas arba sudarydami charakteristinių funkcijų inversijų ir loginių konstantų disjunkcijas ir tų disjunkcijų konjunkcijas. Tai leidžia **iš paprastų standartinių modulių standartiniu būdu konstruoti bet kurias k -reikšmės loginės algebros funkcijas realizuojančias schemas**.

Naudojantis įvairiomis tapatybėmis, išvedamomis k -reikšmėje loginėje algebroje, tokias **schemas galima minimizuoti**, kaip tai buvo daroma dvireikšmėje loginėje algebroje (žiūr. 1.16.1.4. skyrelį), tokiu būdu sutaupant loginius elementus.

Tapatybių, įrodomų k -reikšmėje loginėje algebroje, pavyzdžiai: $\overline{\overline{X}} \equiv X$; $X \wedge 0 \equiv 0$; $X \wedge (k-1) \equiv X$; $X \wedge X \equiv X$; $X \vee 0 \equiv X$; $X \vee (k-1) \equiv k-1$; $X \vee X \equiv X$; $X \oplus \overline{X} = k-1$; $\overline{X_1 \wedge X_2} = \overline{X_1} \vee \overline{X_2}$; $\overline{X_1 \vee X_2} = \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}$. Rekomenduočiau skaitytojui paieškoti daugiau tokių tapatybių (žiūr. 1.16.303. užduotį).

Nors k -reikšmėje logikoje loginė reikšmė $k-1$ vaidina analogišką vaidmenį kaip 1 dvireikšmėje logikoje, o loginės reikšmės 0 vaidmenys ir dvireikšmėje ir k -reikšmėje logikose yra analogiški, tačiau tuo atveju, kai $k > 2$, jau nebegalioja tapatybės $X \wedge \overline{X} \equiv 0$ ir $X \vee \overline{X} \equiv k-1$, nes, pavyzdžiui, kai $k=5$, tai konjunkcija $X \wedge \overline{X} = \min(X, k-1-X)$ bus lygi 0 tik dviem atvejais: 1) kai $X=0$ ir 2) kai $X=k-1=4$. Visoms kitoms X reikšmėms konjunkcija $X \wedge \overline{X}$ jau nėra lygi 0. Pavyzdžiui, kai $X=1$, tai gauname, kad $X \wedge \overline{X}=1$, kai $X=2$, tai $X \wedge \overline{X}=2$, kai $X=3$, tai $X \wedge \overline{X}=1$. Analogiškai galima įrodyti, kad disjunkcija $X \vee \overline{X}$ yra lygi $k-1$ tik tuomet, kai $X=0$ arba $X=k-1$, o visais kitais atvejais ši disjunkcija jau nelygi $k-1$. Nesunku įrodyti, kad k -reikšmės logikos algebroje, kai $k \geq 2$, visada galioja nelygybės $0 \leq X \wedge \overline{X} \leq \frac{k-1}{2}$ ir $\frac{k-1}{2} \leq X \vee \overline{X} \leq k-1$. Iš šių nelygybių, kai $k=2$, išplaukia lygybės $X \wedge \overline{X} \equiv 0$ ir $X \vee \overline{X} \equiv 1$.

Kai $k=3$, gauname nelygybes $0 \leq X \wedge \overline{X} \leq 1$ ir $1 \leq X \vee \overline{X} \leq 2$, o kai $k=4$ – nelygybes $0 \leq X \wedge \overline{X} \leq 1$ ir $2 \leq X \vee \overline{X} \leq 3$.

k -reikšmės logikos algebroje, kai $k > 2$, negalioja ne tik tapatybės $X \wedge \overline{X} \equiv 0$ ir $X \vee \overline{X} \equiv 1$, bet ir „suklijavimo“ formulės $X_i X_j \vee X_i \overline{X_j} \equiv X_i$ ir $\overline{X_i} X_j \vee \overline{X_i} \overline{X_j} \equiv \overline{X_i}$, tačiau galioja absorbcijos formulės $X_i \vee X_i X_j \equiv X_i$, $X_i \vee X_i \overline{X_j} \equiv X_i$, $\overline{X_i} \vee \overline{X_i} X_j \equiv \overline{X_i}$ ir $\overline{X_i} \vee \overline{X_i} \overline{X_j} \equiv \overline{X_i}$. Lygybė $X_i \vee \overline{X_i} X_j \equiv X_i \vee X_j$ galioja jau ne visada. Pavyzdžiui, trireikšmėje logikoje, kai $X_i=1$, $X_j=2$, gauname $\overline{X_i}=1$, $\overline{X_i} X_j=1$, $X_i \vee \overline{X_i} X_j=1$, kai tuo tarpu $X_i \vee X_j=2$.

Idomius dėsningumus galime pastebėti, operuodami su charakteristinėmis funkcijomis $\varphi_i(X) = \begin{cases} 0, & \text{kai } X \neq i, \\ k-1, & \text{kai } X = i. \end{cases}$ Pavyzdžiui, visoms i ir X reikšmėms galioja tapatybės $\varphi_i(X) \wedge \overline{\varphi_i(X)} \equiv 0$ ir $\varphi_i(X) \vee \overline{\varphi_i(X)} \equiv k-1$, analogiškos atitinkamoms

tapatybėms dvireikšmės logikos algebroje. Nesunku įsitikinti, kad $\varphi_i(X) \wedge \varphi_j(X) =$
 $= \begin{cases} 0, & \text{kai } i \neq j, \\ \varphi_i(X), & \text{kai } i = j, \end{cases}$ o taip pat, kad $\overline{\varphi_i(X)} \vee \overline{\varphi_j(X)} = \begin{cases} k-1, & \text{kai } i \neq j, \\ \overline{\varphi_i(X)}, & \text{kai } i = j. \end{cases}$ Konjunkcija

$$\varphi_i(X_1) \wedge \varphi_j(X_2) = \begin{cases} \varphi_i(X_1), & \text{kai } X_2 = j, \\ \varphi_j(X_2), & \text{kai } X_1 = i, \\ k-1, & \text{kai } (X_1 = i) \wedge (X_2 = j), \\ 0, & \text{kai } (X_1 \neq i) \vee (X_2 \neq j). \end{cases} \quad \text{Analogiškai gauname, kad}$$

$$\varphi_i(X_1) \vee \varphi_j(X_2) = \begin{cases} \varphi_i(X_1), & \text{kai } X_2 \neq j, \\ \varphi_j(X_2), & \text{kai } X_1 \neq i, \\ 0, & \text{kai } (X_1 \neq i) \wedge (X_2 \neq j), \\ k-1, & \text{kai } (X_1 = i) \vee (X_2 = j). \end{cases}$$

Techniniu požiūriu tarp k -reikšmių logikų, kai $k > 2$, svarbiausios yra trireikšmė ir dešimtareikšmė logikos.

Trireikšmė logika techniniu požiūriu yra svarbi ir įdomi visų pirma todėl, kad joje operuojama su trejetainės sistemos skaičiais, o trejetainės sistemos pagrindas $k=3$ yra tas sveikas skaičius, kuris yra arčiausiai natūrinių logaritmų pagrindo e , ir todėl, kaip tai galima įrodyti, ši sistema yra **ekonomiškiausia informacijos kodavimo ir atvaizdavimo atžvilgiu**. Be to, trejetainės sistemos skaitmenis gana paprasta vaizduoti impulsinėse schemose, pasirenkant teigiamą impulsą vieno skaitmens žymeniu, neigiamą impulsą – kito skaitmens ir nulinį lygį (jokių impulsų nebuvimą) – trečiojo skaitmens žymeniu.

Dešimtareikšmė logika techniniu požiūriu yra reikšminga tuo, kad joje vartojami loginių reikšmių lygiai atitinka dešimtainės sistemos skaitmenis, o dešimtainė skaičiavimo sistema išvirtino visame pasaulyje jau nuo gana senų laikų todėl, kad žmogaus rankų pirštų yra 10. **Net ir dabar, kai daugumoje kompiuterių vidinė skaičiavimo sistema yra dvejetainė, pasižyminti dideliu atvaizdavimo patikimumu, kas yra labai svarbu ilguose skaičiavimuose, žmonija tebesinaudoja dešimtaine skaičiavimo sistema ir nesiruošia jos keisti.**

Trireikšmės logikos algebroje dažniausiai vartojamos 5 vieno argumento ir 5 dviejų argumentų loginės funkcijos: 3 **charakteristinės funkcijos** $Y=\varphi_0(X)$, $Y=\varphi_1(X)$ ir $Y=\varphi_2(X)$, apibrėžiamos formule $\varphi_i(X) = \begin{cases} 0, & \text{kai } X \neq i, \\ 2, & \text{kai } X = i, \end{cases}$ **inversija** $Y = \overline{X}$,

apibrėžiama formule $\overline{X} = 2 - X$, **ciklas** $Y = \tilde{X}$, apibrėžiamas formule $\tilde{X} = (X+1) \bmod 3$, **vebo funkcija** $Y = X_1 \circ X_2 = [\max(X_1, X_2) + 1] \bmod 3$, **konjunkcija** $Y = X_1 \wedge X_2 = \min(X_1, X_2)$, **disjunkcija** $Y = X_1 \vee X_2 = \max(X_1, X_2)$, **modulinė sudėtis** $Y = X_1 \oplus X_2 = (X_1 + X_2) \bmod 3$ ir modulinė daugyba $Y = X_1 \otimes X_2 = (X_1 \cdot X_2) \bmod 3$.

Nesunku įsitikinti, kad trireikšmėje logikoje galioja tapatybės $\overline{\overline{X}} \equiv X$; $X \wedge X \equiv X$; $X \vee X \equiv X$; $X \oplus 0 \equiv X$; $X \wedge 0 \equiv 0$; $X \vee 0 \equiv X$; $X \wedge 2 \equiv X$; $X \vee 2 \equiv 2$; $X \otimes 0 \equiv 0$; $X \otimes 1 \equiv X$; $\tilde{\tilde{X}} \equiv X$; $\varphi_0(X) \equiv \sim (X \vee \tilde{X})$; $\varphi_1(X) \equiv \sim (X \vee \tilde{\tilde{X}})$; $\varphi_2(X) \equiv \sim (\tilde{X} \vee \tilde{\tilde{X}})$; $X \vee \tilde{X} \vee \tilde{\tilde{X}} \equiv 2$; $X \circ X \equiv \tilde{X}$; $X \oplus 1 \equiv \tilde{X}$; $\approx (X_1 \circ X_2) \equiv X_1 \vee X_2$; $\overline{X} \equiv \sim (X \vee \tilde{X}) \vee \approx (\tilde{X} \vee \tilde{\tilde{X}})$. Rekomenduoju skaitytojui tuo įsitikinti (žiūr. 1.16.306-ąją užduotį).

Naudojantis šiomis tapatybėmis, nesunku įrodyti **teoremas**:

1) turėdami tik Vebo funkcijas realizuojančias schemas, galime sukonstruoti schemą, realizuojančią bet kurią duotąją trireikšmės logikos funkciją, t. y. Vebo funkcija sudaro pilną loginių funkcijų sistemą trireikšmėje logikoje;

2) turėdami tik disjunkciją ir ciklinį neigimą realizuojančias schemas, galime sukonstruoti schemą, realizuojančią bet kurią trireikšmės logikos funkciją, t. y. disjunkcija ir ciklinis neigimas sudaro pilną loginių funkcijų sistemą trireikšmėje logikoje;

3) turėdami funkcijas $Y_1=(X_1\oplus X_2)\bmod 3$, $Y_2=(X_1\otimes X_2)\bmod 3$ ir $Y_3=1$ realizuojančias schemas, galime sukonstruoti schemą, realizuojančią bet kurią trireikšmės logikos funkciją, t. y. šios trys funkcijos sudaro pilną trireikšmės logikos funkcijų sistemą.

Naudojantis funkcijomis $Y_1=(X_1\oplus X_2)\bmod 3$, $Y_2=(X_1\otimes X_2)\bmod 3$ ir $Y_3=1$ sudarytoji trireikšmė loginė sistema vadinama **trireikšme moduline logika**, kurioje loginės funkcijos vaizduojamos **loginiais polinomais**. Reikia pažymėti, jog loginiai polinamai taikomi ir dvireikšmės logikose. Pavyzdys – **žegalkino polinomai**.

Galima sudaryti daug loginių funkcijų sistemų, pilnų trireikšmėje logikoje. Jau minėtasis Jablonskis yra suradęs būtinus ir pakankamus požymius, kuriuos turi tenkinti loginių funkcijų sistema, kad būtų pilna trireikšmėje logikoje. Norint suformuluoti ir įrodyti Jablonskio teoremą, atitinkančią Posto teoremą dvireikšmės logikos algebroje, tektų įsivesti jau ne penkias, o 18 loginių funkcijų klasių. Tų klasių apibrėžimus ir loginių funkcijų sistemos pilnumo trireikšmėje logikoje kriterijaus formuluotę skaitytojas gali rasti knygoje [126]. Ten pateikti ir elektroninių schemų, realizuojančių eilę trireikšmės logikos funkcijų, pavyzdžiai, o taip pat funkcijų minimizavimo trireikšmės logikos algebroje pavyzdžiai.

K-reikšmės logikos, kai $k=10$, čia jau nebenagrinėsiu, nes tam prireiktų nemažai vietos ir specialių žinių, kurios sistemų teorijos požiūriu nėra svarbios. Paminėsiu tik tai, kad elektros įtampos impulsų skaičiavimui dešimtainėje sistemoje yra sukurti specialūs prietaisai – **dekatronai**, nors, žinoma, skaičiavimus dešimtainėje sistemoje galima realizuoti ir trigeriniais skaitliukais, sudarytais iš trigerių, turinčių tik dvi būsenas ir todėl esančiais elementariais dvejetainiais automatais.

Kaip jau buvo kelis sykius minėta, daugiareikšmių logikų tarpe yra ir tokių, kuriose teiginiai gali turėti **be galo daug reikšmių**. Tokių logikų pavyzdžiais gali būti intuicionistinė ir tikimybinė logikos.

Intuicionistinė logika, kaip jau buvo rašyta 1.16.1.5.5.6. skyrelyje, buvo sukonstruota specialiai ir skiriasi nuo dvireikšmės klasikinės logikos ne tik tuo, kad gali būti interpretuota tik matricomis, turinčiomis be galo daug reikšmių, bet ir tuo, kad joje neišvedamos formulės $p\vee\neg p$ ir $\neg\neg p\rightarrow p$, o **tikimybinę logiką galima laikyti klasikinės dvireikšmės logikos apibendrinimu**, nes joje galioja visos klasikinėje logikoje galiojančios formulės, išreiškiančios klasikinės logikos dėsnius, ir dar eilė specifinių tikimybinės logikos formulių, kurios lyg ir **permeta tiltą tarp logikos ir aritmetikos bei tikimybių teorijos, t. y. tarp loginių ir kiekybinių modelių**.

Savo eile, **dvireikšmę klasikinę logiką galima laikyti daliniu tikimybinės logikos atveju**, gaunamu iš tikimybinės logikos, kai nagrinėjamų teiginių teisingumo tikimybės gali būti lygios tik 1 ir 0, t. y., kai nagrinėjami teiginiai gali būti tik arba absoliučiai teisingi arba absoliučiai neteisingi.

Tačiau tikimybinės logikos vaidmuo moksle (ir ypač sistemotyros moksle) neapsiriboja vien tik tuo, kad **tikimybinė logika, apibendrindama klasikinę matematinę logiką, sujungia ją su tikimybių teorija**, tokiu būdu sukurdamą **matematinį aparatą, leidžiantį sujungti į vieną visumą ir kartu nagrinėti loginius ir kiekybinius modelius, kas yra ypač aktualu ir naudinga mokslų ir jų**

metodų sintezėje, t. y., siekiant vieno pagrindinių sistemotyros tikslų. Labai svarbu suvokti dar ir tai, kad **tikimybinis požiūris į teiginių teisingumo laipsnio įvertinimą sudaro galimybę bandymams jungti iki šiol atskirai egzistavusius tradiciniame logikos moksle ir tradiciniame loginiame mąstyme indukcinis ir dedukcinis metodus į vieningą visumą, kurioje tie metodai ne tik neprieštarautų vieni kitiems, bet ir papildytų vieni kitus: tikimybės logikos matematinis aparatas galėtų tikti ir indukcijos ir dedukcijos dėsnių matematiniam išreiškimui bei indukcijos ir dedukcijos metodų taikymui matematinėje logikoje. Tai labai svarbu ir aktualu ne tik logikai, bet ir sistemotyrai.**

Tikimybės logikos taikymo galimybė ir tikslingumas, formalizuojant indukcinę logiką, išplaukia iš tos aplinkybės, kad tos **loginės išvados, kurios gaunamos naudojantis indukcijos metodu, jei tas išvadas vertintume grynai formaliai, kaip tai yra būdinga, vertinant išvadas, gautas naudojantis dedukcijos metodu, niekada neįgyja teisės būti laikomomis absoliučiai teisingomis, o įgyja tik tam tikrą tikėtino tų išvadų teisingumu laipsnį, kuris negali būti išreikštas klasikinėje dvireikšmėje logikoje, tačiau galėtų būti atvaizduotas tikimybės logikoje**, nes indukcinis išvadų teisingumo tikimybė, teoriškai niekada nebūdama lygi loginiam vienetui, praktiškai gali būti išreikšta skaičiumi, paimtu iš segmento $[0; 1]$, tame tarpe ir skaičiumi labai artimu „1“, kai mes turime labai daug faktų, patvirtinančių atitinkamos indukcinės išvados teisingumą, ir per visą laiką nesame suradę nė vieno fakto, kuris tiesiogiai ar netiesiogiai verstų suabejoti jos teisingumu. Taigi, **tikimybės logikos konceptualinis ir matematinis aparatas tinka indukcinis išvadų teisingumo tikimybiniam įvertinimui bei loginiam operavimui su tomis teiginių teisingumo tikimybių įvertinimo kiekybinėmis reikšmėmis**, tame tarpe ir tais atvejais, kai tie įvertinimai yra sąlyginiai, teisingi tik esant tam tikroms sąlygoms ir tik su tam tikrais dažniais, ir tais „ribiniais atvejais“, kai tuos vertinimus praktiškai galima laikyti besąlygiškai teisingais, nors, griežtai kalbant, **bet kokia indukcinė išvada (išskyrus, žinoma, išvadas, gautas, naudojantis mūsų jau aprašytąja matematine, arba pilnąją indukcija) visada yra logiškai nepilnai pagrįsta ir sąlyginė.**

Iš kitos pusės, tikimybės logika tais atvejais, kai priimama, jog nagrinėjamų teiginių teisingumo tikimybės gali būti lygios tik arba loginiam vienetui arba loginiam nuliui, tampa klasikinės dedukcinės logikos matematiniu aparatu – klasikine logine algebra.

Iš pirmo žvilgsnio galėtų pasirodyti, kad **įsivedę ženklelį „F“, reiškiantį indukcinę loginę išvadą** (analogiškai, kaip ženklelis „+“ reiškia dedukcinę loginę išvadą), ir suradę būdą, kaip išmatuoti teiginių $x=y$ teisingumo tikimybes, mes galėtume gana natūraliai visą indukcinę logiką „suvesti“ į tikimybės logiką, sujungdami dedukcinę ir indukcinę logiką į vientisą logikos mokslą. Tačiau šiek tiek įsigilinę į tradicinės indukcinės logikos esmę, pastebėtume, jog situacija yra žymiai sudėtingesnė, negu atrodė iš pirmo žvilgsnio. Jei **tikimybės logika, kurios pradmenys išdėstyti 1.16.1.1. ir 1.16.1.2. skyreliuose, pilnai padengia klasikinę dedukcinę logiką**, kaip savo dalinį atvejį, sujungdama dvireikšmę dedukcinę logiką ir tikimybių teoriją, tai **tikimybės ir tradicinės indukcinės logikos santykis yra žymiai sudėtingesnis: tos logikos turi bendrą sąlyčio tašką (ir net sričių), tačiau nė viena iš jų pilnai nepadengia kitos ir nėra pilnai suderinamos.**

Pailiustruosiu tai konkrečiu pavyzdžiu. Įsivesime teiginį $x=$ „Duotasis sveikas teigiamas skaičius n yra nelyginis“, o kartu ir teiginį $y=$ „Tas duotasis skaičius n yra lygus kažkokio sveiko skaičiaus a dvigubo kvadrato a^2 ir kažkokio pirminio skaičiaus p sumai $2a^2+p$ “. Savo laiku dar L. Oileris pastebėjo dėsningumą, kad pirmiesiems 1250 sveikų teigiamų nelyginių skaičių $n=2m+1$ (kur $m=1, 2, \dots, 1250$ yra natūriniai skaičiai) galioja formulė $n=2a^2+p$, t. y. iš teiginio x teisingumo išplaukia teiginio

y teisingumas. L. Oileris išsakė hipotezę, kad galbūt ir visiems kitiems nelyginiam skaičiams $n=2m+1$, kur m – bet koks natūrinis skaičius, šis dėsningumas išliks galiojantis.

Nors tai pareikalautų nemažai laiko, tačiau nesunku įsitikinti, kad Oilerio pastebėtasis dėsningumas išliktų galiojantis ir tuo atveju, jei mes pirmųjų nelyginių skaičių aibę padvigubintume, imdami m ne tik iš segmento nuo 1 iki 1250, bet ir iki 2500: $3=2 \cdot 1^2+1$; $5=2 \cdot 1^2+3$; $7=2 \cdot 1^2+5$; $9=2 \cdot 2^2+1$; $11=2 \cdot 2^2+3$; $13=2 \cdot 2^2+5$; $15=2 \cdot 2^2+7$; $17=2 \cdot 4^2+1$; $19=2 \cdot 3^2+1$; $21=2 \cdot 3^2+3$; $23=2 \cdot 3^2+5$;...; $5001=2 \cdot 50^2+1$.

Natūralu, kad, didinant m ir kiekvieną kartą įsitikinant, jog Oilerio hipotezė išlieka teisinga, bei negaunant ją paneigiančio rezultato, mūsų įsitikinimas, jog ši hipotezė gali išlikti teisinga ir toliau, palaipsniui stiprėja, nors mes ir neturime jos teisingumo dedukcinio įrodymo, išplaukiančio iš dedukcinės logikos dėsnų ir iš aksiomų, laikomų absoliučiai teisingomis. Jei ir toliau, didindami m (o kartu – ir n), negautume tą hipotezę paneigiančio rezultato (pavyzdžiui: $5003=2 \cdot 50^2+3$; $5005=2 \cdot 50^2+5$; $5007=2 \cdot 50^2+7$; $5009=2 \cdot 48^2+401$; $5011=2 \cdot 50^2+11$; $5013=2 \cdot 50^2+13$; $5015=2 \cdot 42^2+1487$; $5017=2 \cdot 50^2+17$; ...), tai su vis labiau didėjančia tikimybe galėtume tikėtis, jog teiginys $x=y$ yra teisingas. Pavyzdžiui, jei užsibrėžtume atlikti 4500 tą hipotezę patikrinančių eksperimentų, tai pasiekę skaičių 5017 ir įsitikinę, kad iki šio skaičiaus visi nelyginiai skaičiai tenkina Oilerio hipotezę, galėtume teigti, jog, įvykdę visus

4500 eksperimentų, gausime, kad su dažniu, ne mažesniu kaip $\frac{2508}{4500} > 0,5$, Oilerio hipotezė tuose

eksperimentuose pasitvirtins. Šią dažnį galėtume laikyti teiginio $x=y$ teisingumo tikimybės vykdomuose eksperimentuose mažiausiu galimu įverčiu, t. y. teigti, kad šiuose eksperimentuose su ribotu jų skaičiumi $N \leq 4500$ tikimybė α , kad Oilerio hipotezė juose pasitvirtins, yra jokių būdu ne mažesnė už

$$\frac{2508}{4500}.$$

Pratęsę eksperimentus ir įsitikinę, kad $5019=2 \cdot 50^2+19$ ir $5021=2 \cdot 45^2+971$, kur 971 – pirminis skaičius, galėtume teigti, jog minėtosios tikimybės α žemutinis įvertis padidėjo ir dabar tapo jau ne

$$\text{mažesnis už } \frac{2510}{4500} = \frac{251}{450} > \frac{5}{9}.$$

Iš šių eksperimentų galime padaryti išvadą, kad kol kas **indukcinės išvados teisingumo tikimybės intuityvus suvokimas** beveik sutampa su teiginio teisingumo tikimybės sąvoka tikimybiniėje logikoje, bent jau neprieštarauja jai. Iš tikrųjų, galima įrodyti, jog didėjant teiginio $x=y$ teisingumo tikimybei, t. y. didėjant sąlyginei tikimybei y_x , reiškiančiai teiginio y teisingumo tikimybę tais atvejais, kai teiginys x yra teisingas, didėja ir tikimybiniės logikos teiginio $x \supset y$ teisingumo tikimybė, o taip pat ir atvirkščiai: didėjant teiginio $x \supset y$ teisingumo tikimybei, didėja ir teiginio y_x , o kartu ir teiginio $x=y$, teisingumo tikimybė. Įrodysime tai.

Teiginio $x \supset y$ teisingumo tikimybė $[x \supset y] = [\bar{x} \vee y] = 1 - x + y - [\bar{x} \wedge y]$. Kadangi $(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$, ir $[(\bar{x} \wedge y) \wedge (x \wedge y)] = 0$, tai $[(\bar{x} \wedge y)] = y - [x \wedge y] = y - x \cdot y_x$, iš kur gauname, jog $[x \supset y] = 1 - x + y - y \cdot x \cdot y_x = 1 - x + x y_x$. Ši formulė rodo, jog didėjant y_x didėja ir teiginio $x \supset y$ teisingumo tikimybė $[x \supset y]$. Kadangi iš formulės $[x \supset y] = 1 - x + x y_x$ išplaukia, jog $y_x = 1 - \frac{1 - [x \supset y]}{x}$, tai gauname, jog teisingas ir atvirkštinis teiginys,

kurį reikėjo įrodyti: didėjant tikimybei $[x \supset y]$, didėja ir tikimybė y_x , t. y. ir teiginio $x=y$ teisingumo tikimybė. Tikimybė y_x priklauso ir nuo x , ir, kai $x=1$, ji tampa lygi $[x \supset y]$.

Tačiau (ką nesunku įrodyti, ir todėl tą įrodymą palieku skaitytojui kaip užduotį 1.16.233.), nors teiginys $x \supset y$ ir ekvivalentus teiginiui $x \Leftrightarrow (x \wedge y)$ kaip klasikinėje, taip ir tikimybiniėje teiginių algebrose, iš kur išplaukia, kad teiginio $x \supset y$ teisingumo tikimybė yra lygi sudėtingo teiginio, jog elementaraus teiginio x teisingumas sutampa su teiginio $x \wedge y$ teisingumu, teisingumo tikimybei, ir nors teiginių $x=y$ ir $x \supset y$ teisingumo tikimybės, kaip ką tik buvo įrodyta, yra priklausomos, nes, didėjant vienai iš jų, didėja ir kita, vis dėlto teiginiai $x=y$ ir $x \supset y$ nėra ekvivalentūs, ir galima įrodyti, jog 1.16.1.1. ir 1.16.1.2. skyreliuose aprašytoje tikimybiniėje logikoje neįmanoma sukonstruoti formulės, kuri būtų ekvivalenti formulėi $x=y$. Įrodysiu tai, pradžioje įrodymas formulių $x \supset y$ ir $x=y$ neekvivalentumą.

Tarkime, jog teiginio $x \supset y$ loginio neiginio $\bar{x} \supset y$ teisingumo tikimybė lygi kažkokiam mažam dydžiui β , t. y. tarkime, jog $[\bar{x} \supset y] = [\bar{x} \vee y] = [\bar{x} \wedge \bar{y}] = x - [x \wedge y] = x - x \cdot y_x = \beta$. Tuomet teiginio $x \supset y$ teisingumo tikimybė $[x \supset y] = 1 - x + x y_x$ turės būti lygi $1 - \beta$, t. y. dydžiui, artimam 1, kai β – mažas dydis.

Todėl, kai įvykdę visus numatytus 4500 Oilerio hipotezės tikrinimo eksperimentus, gausime, jog tarp visų patikrintų nelyginių skaičių egzistuoja du ir tik du tokie „**neoileriniai**“ skaičiai (būtent skaičiai 5779 ir 5993), kuriems negalioja Oilerio hipotezė, tai, apskaičiavę tikimybines logikos teiginio

$$x \supset y \text{ teisingumo tikimybę minėtoje eksperimentų serijoje, gausime, kad } [x \supset y] = 1 - \frac{2}{4500} = \frac{2249}{2250}.$$

Kadangi, kaip rodo, įvykdytų eksperimentų rezultatai, Oilerio hipotezė nėra teisinga, tai indukcinės išvados $x \neq y$ teisingumas tradiciškai priimamas lygiu 0, kas nesutampa su tuose eksperimentuose nustatytu tikimybinės logikos teiginio $x \supset y$ teisingumu, o taip pat ir su tikimybe y_x , kuri, kai $x=1$, yra lygi $[x \supset y]$.

Nesunku įsitikinti, kad **1.161.1. ir 1.16.1.2. skyreliuose aprašytoje tikimybinėje algebroje neįmanoma sukonstruoti formulės, kuri būtų pilnai ekvivalenti formulei $x \neq y$, t. y. tokios formulės, kurios teisingumo tikimybė, kol $x \Leftrightarrow (x \wedge y)$ (t. y. kol $[x \wedge y] = x$), tolydžiai didėtų, tolydžiai didėjant tikimybei y_x , ir staiga kristų iki 0, paaiškęjus, jog vis dėl to $\bar{y}_x > 0$, t. y., paaiškęjus, kad $[x \wedge y] < x$.**

Tai ir įrodo, jog **indukcinė logika toje tradicinėje formoje, kokioje ji formavosi nuo Aristotelio laikų ir kurią, kaip jau buvo minėta 1.16.1.5.5.2. skyrelyje, labai išpopuliarino ir išvystė F.Bekonas bei Dž.S.Milis, negali būti pilnai „suvesta“ į tikimybinę logiką.**

Tačiau tai yra, **greičiau, ne tikimybinės logikos, o tradicinės indukcinės logikos trūkumas**, nes, atrodo, **ne visada yra tikslinga visiškai atmesti hipotezę $x \neq y$, prilyginant jos loginę reikšmę 0, kaip daroma dabartinėje indukcinėje logikoje, kai surandamas nors vienas tą hipotezę paneigiantis atvejis. Juk, visiškai atmesdami hipotezę $x \neq y$ tuo atveju, kai ji pasitvirtina daugumoje atvejų ir nepasitvirtina tik nedidelėje dalyje visų galimų atvejų, mes prarandame naudingą informaciją, kuria būtų galima ir naudinga pasinaudoti praktinėje veikloje. Žymiai tikslingiau būtų indukcinių hipotezių $x \neq y$ teisingumą vertinti tikimybiškai visais atvejais, tame tarpe ir atvejais, kai hipotezė $x \neq y$ pasitvirtina nepilnai. Tuomet taip modifikuotą indukcinę logiką galima būtų „suvesti“ į tikimybinę logiką ir sukurti vieningą logikos sistemą, jungiančią klasikinę dedukcinę ir indukcinę logikas, o taip pat ir tikimybių teorijos loginį aparatą, t. y. sukurti matematinę tikimybinę logiką plačiąja prasme.**

Toks klasikinės dedukcinės ir indukcinės logikų sujungimas tikimybinės logikos rėmuose **logikos plačiąja prasme moksle dar nerealizuotas, tačiau jau dedamos pastangos sukurti formalią indukcinės logikos teoriją.** Šioje srityje paminėtini 1.14.12.2. skyrelyje jau minėto Keinso, Džefersono, Reichenbacho, Karnapo, Martino, Rešerio, Hempelio, Kemenio, Ruzavino, Piatnicino ir kitų logikų darbai, vystantys **dar Leibnico išsakytą mintį apie tikimybinių loginių išvadų pobūdį.** Galima tikėtis, kad ilgainiui pavyks pakankamai adekvačiai **formalizuoti indukcinės logikos dėsnius, sukuriant jos matematinį aparatą, turintį išvystymo lygį, panašų į tą, kurį turi dedukcinė logika.** Tai būtų labai reikšmingas neklasikinių logikų vystymo pasiekimas, tame tarpe ir loginės semantikos srityje, nes **įvertinti konkrečių lokalių teiginių teisingumo tikimybes, neatsižvelgiant į jų semantiką, o apsiribojant vien tik jų sintaktika, kaip tai daroma dedukciniuose teiginių ir predikatų skaičiavimuose, daugelyje atvejų nėra įmanoma.**

Tikimybinė logikos algebra, su kuria susipažinome 1.16.1.1. ir 1.16.1.2. skyreliuose vis dėlto turi ir vieną gana didelį trūkumą: **jį nepajėgi aprėpti neklasikinę trireikšmę logiką su vidinio ir išorinio neigimo operacijomis**, apie kurią buvo kalbama 1.5. skyriuje ir kuri leidžia, kaip jau buvo minėta šiame skyrelyje, gana natūraliai išspręsti problemas, išskylančias taikant trečiojo negalimojo ir dvigubo neigimo dėsnius. Iš pirmo žvilgsnio galėtų atrodyti, kad trireikšmę logiką, kurioje teiginiai gali turėti tris logines reikšmes („t“ – tiesa, „f“ – netiesa ir „?“ – neapibrėžta), galėtume gauti iš tikimybinės logikos kaip jos dalinį atvejį, kai teiginių teisingumo tikimybės galėtų turėti tik tris reikšmes: 1, 0 ir 0,5. Tačiau to, pasirodo, nepakanka, nes, pavyzdžiui, apskaičiuodami dviejų neapibrėžtų nepriklausomų teiginių konjunkcijos reikšmę trireikšmėje logikoje gautume rezultatą „?“, kurio teisingumo tikimybę vertintume kaip 0,5, kai tuo tarpu tikimybinėje logikoje, naudodamiesi formule $[A \wedge B] = A \cdot B$, šiuo atveju gautume, kad $[A \wedge B] = 0,25$. **Todėl tikimybinė logika,**

kurioje galioja formulės $[X_1 \vee X_2] = [X_1] + [X_2] - [X_1 \wedge X_2]$, $[X_1 \wedge X_2] = [X_1] \cdot [X_2 / X_1] = [X_2] \cdot [X_1 / X_2]$ ir $[\bar{X}] = 1 - [X]$, **negali aprėpti ne tik Zinovjevo trireikšmės logikos su vidiniu ir išoriniu loginiais neiginiais, bet ir šiame skyrelyje aprašytos Lukasevičiaus trireikšmės logikos, turinčios tik vieną loginio neigimo operaciją.**

Tiesa, pakeitus ką tik išvardintas formules formulėmis $[X_1 \vee X_2] = \max([X_1], [X_2])$, $[X_1 \wedge X_2] = \min([X_1], [X_2])$ ir $[\bar{X}] = 1 - [X]$, galima gauti tikimybinės logikos algebrą, kuri aprėptų Lukasevičiaus trireikšmę logiką kaip savo dalinį atvejį, tačiau tokia tikimybinės logikos algebra jau nebegalėtų aprėpti klasikinės dvireikšmės logikos. Pavyzdžiui, tokioje tikimybinėje algebroje jau nebegalėtų klasikinės loginės algebros formulė $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2) = X_1$, nes, kai, pavyzdžiui $[X_1] = 0,8$, $[X_2] = 0,3$, tai, naudodamiesi formule $[(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2)] = \max(\min([X_1], [X_2]), \min([X_1], 1 - [X_2]))$, gautume ne 0,8, o 0,7. Be to, tokia tikimybinės logikos algebra vis tiek nesugebėtų aprėpti A. Zinovjevo trireikšmės logikos su dviem loginio neigimo operacijomis. Kad tuo įsitikintumėte, pabandykite patikrinti toje trireikšmėje logikoje absoliučiai teisingą formulę $P(x) \leftrightarrow \neg(\neg P(x) \vee P(x))$, apskaičiuodami jos teisingumo tikimybę. Manau, jog gana greitai įsitikinsite, kad ši formulė negalėtų būti teisinga nei toje tikimybinėje logikoje, kurios daliniu atveju yra klasikinė dvireikšmė logika, nei toje tikimybinėje logikoje, kurios daliniu atveju yra trireikšmė Lukasevičiaus logika. Todėl A. Zinovjevas savo knygoje [249] bando konstruoti dar vieną tikimybinės logikos variantą, naudodamasis modalumo operatoriais, apie kuriuos bus kalbama 1.16.1.5.7. skyrelyje. Panašių bandymų yra ir daugiau.

Visa tai rodo, kad ir šioje logikos mokslo srityje dar yra daug problemų, kurias reikia spręsti, vystant neklasikines logikas ir bandant sukurti suderintą loginių sistemų sistemą. Apie indukcinę ir tikimybinę logikas naudingos informacijos skaitytojas gali rasti jau minėtose knygose [249, 276], taip pat B. N. Piatnicino straipsniuose knygose [289, 296]. Knygoje [296] skaitytojas ras ir įvairių straipsnių, papildančių jo žinias apie neklasikines logikas.

Dar viena svarbi **neklasikinių logikų vystymosi kryptis** yra surišta su bandymais įveikti **priežastinių loginių ryšių formalaus aprašymo ir kauzaliai pagrįstų loginių išvadų gavimo sunkumus, atsirandančius matematinėje logikoje dėl materialiajai implikacijai būdingų paradoksų**, apie kuriuos jau buvo rašyta 1.16.1. skyrelio pradžioje. Ten buvo taip pat paminėta, kad tos problemos nepavyko patenkinamai išspręsti, nei įvedant griežtąją Ljuiso bei stipriąją Akermano implikacijas, nei kauzalinės implikacijos sąvoką, ir buvo pažymėta, jog arčiausiai prie užsibrėžto tikslo pavyko priartėti A. Zinovjevui ir jo bendradarbiams, pasiūliusiems eilę loginio išvedimo sistemų (stipriąją, susilpnintąją, maksimaliąją, konversinę, išsigimusiąją, kvaziišvedimo) bei bendrąją dedukcijos teoriją taip vadinamuose „klasikiniame“ ir „neklasikiniame“ variantuose (žiūr., pavyzdžiui, [249]).

Trumpai apibūdinsiu kai kurias A. Zinovjevo ir jo bendradarbių pasiūlytų loginio išvedimo sistemų klases.

Stipriojo išvedimo sistemose (S^1 , S_1 ir kitose), kurias A. Zinovjevas žymi bendru žymeniu S^s , loginės operacijos ir jas implicitiškai apibrėžiančios aksiomos bei loginio išvedimo taisyklės specialiai parenkamos taip, kad tose sistemose būtų išvedamos tik tokios tapačiai teisingos loginės formulės $x \vdash y$ (čia simbolis „ $\vdash$ “ yra dedukcinio loginio išvedimo bei dedukcinio loginio išvedamumo ženklas), kuriose į išvedamojo teiginio y sudėtį gali įeiti tik tokie elementarūs teiginiai, kurie įeina į teiginio x sudėtį (tačiau nebūtinai visi elementarūs teiginiai, įeinantys į teiginio x sudėtį, privalo patekti į išvados y sudėtį). Toks loginių išvadų gavimo proceso apribojimas leidžia išvesti tik neparadoksalias formules, o tokios paradoksalias formules kaip $x \vdash y \supset x$, $x \vdash \bar{x} \supset y$, $x \vdash y \vee \bar{y}$, $x \vdash y \wedge \bar{y}$, $(x \wedge \bar{x}) \vdash y$, $x \vdash y \oplus \bar{y}$, $x \vdash (\bar{x} \vdash y)$, $x \vdash (y \vdash x)$, kuriose x ir y – nepriklausomi teiginiai, nėra išvedamos sistemose S^1 ir S_1 , nors klasikinėje dvireikšmėje logikoje jos laikomos tapačiai teisingomis formulėmis ir yra išvedamos. Įrodyta, kad

sistemos S^1 ir S_1 yra ne tik neparadoksalios, bet ir neprieštaringos bei yra pilnos pasirinktų loginių kalbų ribose.

Stipriojo išvedimo sistemose išvedamos formulės $x \vdash x \vee \bar{x}$, $(x \wedge \bar{x}) \vdash x$, $x \vdash x \oplus \bar{x}$ bei kitos panašios formulės, kurios kai kam iš pirmo žvilgsnio galėtų pasirodyti paradoksalios, tačiau iš tikrųjų nėra paradoksalios, nes jos neprieštarauja intuityviam loginio išvedimo suvokimui.

Susilpnintojo išvedimo sistemose (S^2 , S_2 ir kitose), kurias A. Zinovjevas žymi bendru žymeniu S^o , loginės operacijos ir jas implicitiškai aprašančios aksiomos bei loginio išvedimo taisyklės specialiai parenkamos taip, kad tose sistemose būtų išvedamos tik tokios tapachiai teisingos loginės formulės $x \vdash y$, kuriose teiginiai y ir x savo sudėtyse turi bent po vieną bendrą elementarų teiginį. Taigi, susilpnintojo išvedimo sistemose, lyginant jas su stipriojo išvedimo sistemomis, reikalavimai išvedamoms formulėms $x \vdash y$ yra žymiai susilpninti: į išvados y sudėtį jau gali įeiti ir teiginiai, neįeinantys į prielaidos x sudėtį, nes pakanka, kad x ir y turėtų bent po vieną bendrą elementarų teiginį. Tačiau ir tokio žymiai susilpninto reikalavimo, pasirodo, pakanka, kad klasės S^o loginės sistemos, būdamos neprieštaringos ir pilnomis, būtų ir neparadoksalios.

Trumpai tariant, sistemose, priklausančiose klasei S^o , formulė $x \vdash y$ yra išvedama tada ir tik tada, kai klasikinėje dvireikšmėje logikoje yra išvedama formulė $x \supset y$ ir teiginiai x ir y turi bent po vieną bendrą elementarų teiginį.

Analogiškai gali būti apibrėžtas ir formulės išvedamumas sistemose, priklausančiose jau minėtai klasei S^s : formulė $x \vdash y$ yra išvedama loginio išvedimo sistemose, priklausančiose stipriojo išvedimo klasei S^s , tada ir tik tada, kai klasikinėje logikoje yra išvedama formulė $x \supset y$ ir teiginio y sudėtyje nėra elementarių teiginių, kurių nebūtų teiginio x sudėtyje, t. y., kai teiginio y sudėtyje yra tik tokie elementarūs teiginiai, kuriuos galime rasti teiginio x sudėtyje.

Dar griežtesni reikalavimai negu klasėje S^s keliama formulėms, išvedamoms sistemose, priklausančiose klasei S^m (pavyzdžiui, sistemoms S^3 , S_3 ir kitoms), vadinamai **maksimalaus išvedamumo sistemų klase**: formulė $x \vdash y$ yra išvedama klasės S^m sistemose tada ir tik tada, kada klasikinėje logikoje yra išvedama formulė $x \supset y$ ir kada elementarių teiginių rinkiniai, įeinantys į teiginių x ir y sudėtį sutampa, t. y., kai išvados y sudėtį sudaro tie patys elementarūs teiginiai, kurie sudaro prielaidos x sudėtį. Kitaip tariant, šiuo atveju teiginiai y ir x gali skirtis tik savo struktūra. Savaimė suprantama, kad formulės $x \vdash y$, kurios yra išvedamos sistemose, priklausančiose klasei S^m , yra išvedamos sistemose, priklausančiose klasei S^s , ir tuo labiau – sistemose, priklausančiose klasei S^o .

Sistemose, priklausančiose klasei S^m , išvedamos ir tos formulės $x \vdash y$, kurios išvedamos loginio išvedimo sistemose priklausančiose taip vadinamai **konversinio loginio išvedimo sistemų klasei** S^c (pavyzdžiui, sistemose S^4 , S_4 ir kitose), kai tuo tarpu kai kurios formulės, kurios išvedamos sistemose, priklausančiose klasėms S^s , S^o ir S^c , gali būti neišvedamomis klasėje S^m .

Formulė $x \vdash y$ yra išvedama loginio išvedimo sistemose, priklausančiose klasei S^c , tada ir tik tada, kada klasikinėje logikoje yra išvedama formulė $x \supset y$ ir į teiginio x sudėtį neįeina elementarūs teiginiai, neįeinantys į išvados y sudėtį, t. y., kai į prielaidos x sudėtį įeina tik tie elementarūs teiginiai, kurie įeina į išvados y sudėtį. Kaip matome iš šio formulės $x \vdash y$ loginio išvedamumo klasės S^c sistemose apibrėžimo, konversinio loginio išvedamumo klasė S^c yra lyg ir „atvirkštinė“ stipriojo loginio išvedamumo klasei S^s . Iš čia ir kilęs tos klasės pavadinimas – „konversinė“. Įrodyta, jog sistemos S^4 ir S_4 , priklausančios klasei S^s , yra neprieštaringos, pilnos ir neparadoksalios.

Iš klasės S^s sistemų, papildžius jų aksiomų ir išvedimo taisyklių sistemas, gali būti gautos ir sistemos S^5 ir S^6 , atstovaujančios išsigimusio loginio išvedimo ir **kvaziišvedimo klases**, kuriose išvedamos tokios ir tik tokios formulės $x \vdash y$, kurios atitinka klasikinėje logikoje išvedamas formules $x \supset y$.

Čia išvardintos loginio išvedimo sistemos S^5 ir S^6 bei sistemos, priklausančios klasėms S^s , S^o , S^m ir S^c , sudaro formalios loginio išvedimo teorijos, kurią A. Zinovjevas pavadino **bendraja dedukcijos teorija**, turinį.

Įvedę dvi loginio neigimo operacijas $\sim$ ir $\neg$ bei neapibrėžtumo operatorių? ir priėmę, kad teiginiai gali turėti tris logines reikšmes t , f ir?, reiškiančias tiesą, netiesą ir neapibrėžtumą, o taip pat papildę sistemų, priklausančių klasėms S^s , S^o , S^m ir S^c , aksiomų sistemas aksiomomis

$A^{n1}. \sim X \vdash \neg X \vee ?X,$

$A^{n2}. \neg X \vee ?X \vdash \sim X,$

$A^{n3}. \sim \neg X \vdash X \vee ?X,$

$A^{n4}. X \vee ?X \vdash \sim \neg X,$

$A^5. \sim?X \vdash X \vee \neg X,$

$A^6. X \vee \neg X \vdash \sim?X,$ implicitiškai apibrėžiančioms operatorius $\sim, \neg$ ir $?$, gauname loginio išvedimo sistemas, priklausančias klasėms S_n^s, S_n^o, S_n^m ir S_n^c ir sudarančias **bendrosios dedukcijos teorijos „neklasikinio varianto“** turinį, kai tuo tarpu loginio išvedimo sistemos S^5 ir S^6 bei sistemos, priklausančios klasėms S^s, S^o, S^m ir S^c , sudaro **tos teorijos „klasikinio varianto“** turinį.

Bendrosios dedukcijos teorijos „klasikinį“ ir „neklasikinį“ variantus galima plėsti, įvedant sąlyginius teiginius ir predikatus, kvantorius, modalumo operatorius bei kitus kvalifikatorius ir ryšium su tuo papildant aksiomų ir išvedimo taisyklių sistemas. Tokią išplėstą loginę sistemą A. Zinovjevas pavadino **kompleksine logika**. Jos pagrindai išdėstyti knygoje [249], su kuria skaitytojui, besidominčiam priežastinių loginių ryšių matematiniu modeliavimu, rekomenduočiau susipažinti.

Naudojantis į kompleksinės logikos sudėtį įeinančiomis loginio išvedimo sistemomis ($S^s, S^o, S^m, S^c, S_n^s, S_n^o, S_n^m, S_n^c$ ir kitoms), jau **galima išvengti klasikinei matematinei logikai būdingų materialiosios implikacijos paradoksų** atsiradimo. Sistemos S^s, S^o, S^m, S^c leidžia išvengti tokių paradoksų „klasikiniu“ atveju, t. y. kai naudojamosi dvireikšme matematine logika, o sistemos S_n^s, S_n^o, S_n^m ir S_n^c – „neklasikiniu“ atveju, kai naudojamosi trireikšme matematine logika su dviem loginio neigimo operacijomis: vidiniu ir išoriniu neigimu.

Tačiau tokių loginio išvedimo sistemų sukonstravimas vis dėl to dar neišsprendžia visų **matematinės logikos formalizuotos kalbos nepakankamumo problemų**, kurios iškyla bandant formaliai aprašyti priežastinius loginius ryšius.

Klasikinėje matematinėje logikoje, formaliai aprašant loginius ryšius, **atsižvelgiama tik į teiginių bei predikatų struktūrą (sintaktiką)**. Kompleksinė logika leidžia struktūrinių ryšių sąrašą papildyti kai kuriais loginiais ryšiais, atsirandančiais dėl sudėtingų teiginių bei sudėtingų predikatų sudėčių bendrumo, nes kompleksinės logikos sudėtyje esančiose loginio išvedimo sistemose, išvedant išvadas iš prielaidų, atsižvelgiama ne tik į jų struktūras, bet ir į teiginių bei predikatų sudėties bendrumą elementarių teiginių bei elementarių predikatų ir jų objektinių kintamųjų stratoje. Tačiau **nei klasikinė, nei kompleksinė matematinė logika neturi pakankamai priemonių, kad galėtų formaliai išreikšti visus semantinius (t. y. prasminius) ryšius**, egzistuojančius tarp sąvokų (terminų), teiginių ir predikatų prasmų ir nesusivedančius į struktūrinius ryšius bei formalius ryšius tarp teiginių ir predikatų sudėčių.

Todėl, toliau vystant logikos mokslą (tame tarpe – ir neklasikinės logikas), yra labai aktualu vystyti ne tik **sintaktiką** (mokslą apie formalių kalbų gramatikos dėsningumus, tų kalbų sintaksės taisykles), bet ir kitas **semiotikos** (mokslo apie žymėjimo ženklais taisykles ir įvairių ženklų sistemas) sritis: **pragmatiką** (mokslą apie ženklų sistemų praktinį vaidmenį, jų praktinį taikymą) ir, ypatingai, **semantiką** bei jos sudėtinę dalį – **loginę semantiką** (mokslą, nagrinėjantį formalias logines kalbas jų ir jų sudėtinių dalių prasmės aspektu).

Loginės semantikos sudėtyje galima išskirti **referencijos** (žymėjimo taisyklių) bei ženklų ir iš jų sudarytų loginių konstrukcijų **prasmės teorijas**, kurioms šiuo metu logikos, filosofijos ir matematinės lingvistikos mokslų atstovai skiria nemažai dėmesio ir kur (ypatingai – prasmės teorijoje) susiduriama su nelengvomis problemomis.

Semiotikos pradininkais laikomi Č. Pirsas ir F. Sosiuras, kurie pirmieji iškėlė mintį, kad reikalingas specialus mokslas apie ženklus ir jų sistemas. Č. Pirsas pavadino tą mokslą semiotika, o F. Sosiuras – semiologija. Dažniau naudojamosi Č. Pirsio pasiūlytuju terminu.

Loginės semantikos pradininkais laikomi tas pats Č. Pirsas ir jau ne kartą minėtasis G. Frègè, kuris, kurdamas formalią aksiomatinę loginę sistemą, jau tada skyrė nemažai dėmesio ne tik tos sistemos formalios kalbos sintaktikai ir sudėtingo **teiginio loginės reikšmės (Bedeutung)** nustatymo taisyklėms, bet ir **teiginių prasmei (Sinn)**, į ką klasikinėje matematinėje logikoje nėra atsižvelgiama. Dar gana trumpoje loginės semantikos vystymosi istorijoje paminėtini A. Čiorčo, B. Raselo, A. Tarskio, P. Karnapo, Dž. Kemenio, V. Kvaino, R. Martino ir kitų logikų bei filosofų darbai, tačiau didžioji dalis loginės semantikos (o ypačiai prasmės teorijos) problemų dar neišspręsta. Su kai kuriomis iš jų bei su kai kuriais semantiniais paradokais skaitytojas susidurs, atlikdamas šioje mokymo priemonėje pateiktas užduotis, pažymėtas numeriais 1.16.240÷1.16.250, o žingeidesnieji – ir skaitydami ką tik išvardintų autorių knygas bei straipsnius ir kitą specialią literatūrą.

Mes čia tų problemų jau nebenagrinėsime, nes tuomet tektų gilintis į **pažinimo procesų** esmę, t. y. bandyti išsiaiškinti, kaip „fiziniai“ **aplinkos poveikiai** į **pažinimo subjektą** (žmogų, beždžionę, katę, pelę ar kitą aktyvų subjektą) per tame subjekte esančius **receptorius** tampa besąlyginiais biofiziniais bei biocheminiais **informaciniais signalais**, iššaukiančiais pažinimo subjekte tuos ar kitus **pojūčius**, kaip tie pirminiai signalai **fiksuojasi subjekto atmintyje**, kaip toje atmintyje kaupiama **informacija struktūrizuojasi, atspindėdama sąryšius**, egzistuojančius tarp **pirminių besąlyginių signalų**, kaip atsiranda **antrinė sąlyginė informacija**, suteikianti pirminiams signalams **papildomas antrines reikšmes (prasmes)**, kaip pradeda formuotis pažinimo subjektą supančių objektų ir procesų **konceptiniai modeliai**, kaip tai, kas formuojasi pažinimo procese žmogaus sąmonėje ir sąmonėje, **atspindima žodžiais ir sakiniiais** natūraliose kalbose, kaip **formuojasi tų kalbų gramatikos taisyklės, o kartu ir samprotavimų logikos taisyklės**, kaip konceptiniai modeliai tampa **verbaliniais modeliais**, o pereinant į tokią formalizuotą kalbą kaip matematinė kalba, gali tapti ir **matematiniais modeliais**. Visa tai pareikalautų labai daug vietos, o be to ir specialiųjų tyrimų, nes šioje įdomioje ir labai svarbioje logikai, psichologijai, filosofijai ir sistemotyrai srityje dar labai daug kas neišaišku. Todėl šioje mokymo priemonėje apsiribosime tik tuo, kas šia tema pasakyta šiame, o taip pat ir 1.4. bei 1.5. skyriuose, atkreipdami skaitytojo dėmesį į tai, kad **pažinimo proceso labai apibendrintu formaliu modeliu galima laikyti perėjimą nuo uždarų prie atvirų TSF, reiškiantį perėjimą nuo esybių, jų savybių ir santykių tarp jų prie minčių ir teiginių apie tas savybes, jų savybes bei santykius tarp jų**, kitaip tariant, perėjimą nuo to, kas yra realiame pasaulyje, prie to, kaip tai atsispindi mūsų sąmonėje ir išreiškiama tose ar kitose kalbose (natūraliose ir formaliose).

Jei žiūrėtume į semantiką pačia siaurąja prasme, tai galėtume teigti, **jog loginės semantikos tikslas yra išsiaiškinti, kaip tą prasmę, kurią turi natūralių kalbų konstrukcijos (jų struktūra ir turinys) kuo adekviačiau (t. y. kuo pilniau ir kuo tiksliau) išreikšti formalių kalbų priemonėmis bei konstrukcijomis.**

Jei traktuotume semantiką šiek tiek plačiau, tai sakytume, kad **semantika siekia išsiaiškinti tai, kaip tą intuityvią prasmę, kurią turi žmonių galvose besiformuojantys konceptiniai modeliai, kuo adekviačiau išreikšti išorinėmis priemonėmis, tų ar kitų ženklų sistemomis, pavyzdžiui, tomis ar kitomis kalbomis: ne tik natūraliomis, bet ir formaliomis, vartojamomis dirbtinio intelekto sistemose.**

Traktuodami semiotiką ir jos pagrindinę sudedamąją dalį – semantiką – pačia plačiaja prasme, galėtume teigti, jog **semiotikos tikslas yra išsiaiškinti, kaip konstruoti tokias ženklų sistemas, kurios būtų pajėgios pakankamai adekviačiai išreikšti visą tą informaciją, kurią mes galime gauti, stebėdami mus supantį pasaulį ir pačius save, savo vidinę (tame tarpe – ir dvasinę) būseną.**

Baigiant neklasikinių logikų apžvalgą, reikėtų pažymėti dar vieną neklasikinių logikų grupę, kurią būtų galima pavadinti „**specialiųjų logikų**“ grupe, nes tos grupės logikos specialiai konstruojamos taip, kad jas būtų galima taikyti specialioms sritims, atsižvelgiant į tų sričių specifiką.

Prie tokių neklasikinių logikų galima priskirti **laiko logiką, veiksmų logiką, mikropasaulio logiką** ir t. t.

Šias logikos daugelis logikų priskiria prie **modalinių logikų**, priskirdami, savo eile, modalias logikas prie neklasikinių logikų. Šioje mokymo priemonėje modalinėms logikoms išskiriamas atskiras skyrelis.

Laiko logikos vystymąsi, kuriant logines laiko funkcijas ir formalias laiko logikos sistemas, skatina dvi grupės poreikių.

Pirmoji grupė – tai **diskrečių daugiataakčių schemų funkcionavimo aprašymo, jų analizės ir sintezės (projektavimo) poreikiai**. Tie poreikiai iššaukė **loginių laiko funkcijų, rekurentinių loginių funkcijų ir baigtinių automatų su atmintimi teorijos susiformavimą** ir skatina tolimesnį šių teorijų vystymąsi.

Logine laiko funkcija $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$ vadinama loginė funkcija, išreiškianti loginio kintamojo Y priklausomybę nuo loginių kintamųjų $X_1, X_2, \dots, X_n$ ir nuo diskretaus kiekybinio kintamojo t , vadinamo laiku ir galinčio turėti reikšmes 0, 1, 2, 3, 4, 5 ir t. t. Kintamojo t įvedimas **statinę logiką** paverčia **dinamine logika**, nes leidžia parodyti, kaip keičiasi loginių funkcijų reikšmė laikui bėgant.

Nesunku įrodyti, jog tuo atveju, kai kintamasis t gali keistis ribotame segmente $[0; s-1]$, t. y. gali turėti s reikšmių, o loginiai kintamieji $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra dvireikšmės logikos kintamieji (klasikinės teiginių algebros nepriklausomų teiginių galimos reikšmės), tai skirtingų loginių laiko funkcijų, kurios tokiomis sąlygomis galėtų būti sudarytos, skaičius yra lygus $2^{s \cdot 2^n}$.

Loginė laiko funkcijos konkrečiu pavyzdžiu gali būti funkcija $Y = \varphi(X_1, X_0, t)$, kai $s=3$, kurią vaizduoja 353-oji lentelė.

353. lentelė

X_1	X_0	t	Y
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1
0	0	2	0
0	1	2	1
1	0	2	1
1	1	2	1

Loginės laiko funkcijos, kai $t = \alpha = \text{const}$, tampa paprastomis teiginių algebros funkcijomis, kurias žymėsime φ_α , t. y. priimsime, jog $\varphi_\alpha = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha)$. Funkcijas φ_α vadinsime **loginės laiko funkcijos „dalinėmis funkcijomis“**.

Mūsų nagrinėjamos laiko logikos funkcijos, kurią aprašo 353-oji lentelė, „dalinės funkcijos“ yra: $\varphi_0 = X_1 \wedge X_0$, $\varphi_1 = \overline{X_1} \overline{X_0} \vee X_1 X_0$, $\varphi_2 = X_1 \vee X_0$.

Išvedę loginį kintamąjį $\tau_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{kai } t \neq \alpha, \\ 1, & \text{kai } t = \alpha, \end{cases}$ loginę laiko

funkciją $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$ galime išreikšti per paprastas teiginių algebros funkcijas: $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t) = \bigvee_{\alpha=0}^{s-1} (\varphi_\alpha \wedge \tau_\alpha)$.

Mūsų nagrinėtajame pavyzdyje, kuri vaizduoja 353-oji lentelė, $Y = \varphi(X_1, X_0, t) = \varphi_0 \tau_0 \vee \varphi_1 \tau_1 \vee \varphi_2 \tau_2 = X_1 X_0 \tau_0 \vee (\overline{X_1} \overline{X_0} \vee X_1 X_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2$.

Išreiškę funkcijas φ_α tobulojoje DNF ar tobulojoje KNF, gausime **loginės laiko funkcijos TDNF ir TKNF**.

Pavyzdžiui, mūsų nagrinėtosios funkcijos TDNF yra $Y = X_1 X_0 \tau_0 \vee (\overline{X_1} \overline{X_0} \vee X_1 X_0) \tau_1 \vee (\overline{X_1} X_0 \vee X_1 \overline{X_0} \vee X_1 X_0) \tau_2$, o jos TKNF – $Y = (X_1 \vee X_0)(X_1 \vee \overline{X_0})(\overline{X_1} \vee \vee X_0) \tau_0 \vee (\overline{X_1} \vee X_0)(X_1 \vee \overline{X_0}) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2$.

Minimizuodami logines laiko funkcijas, galime minimizuoti kiekvieną iš funkcijų φ_α atskirai, sudarydami tų funkcijų MDNF bei MKNF ir pasirinkdami tas formas, kurios sudarytos iš mažesnio raidžių skaičiaus. Tokių loginių laiko funkcijų minimizavimą vadina **nepilnu**, nes, pilnai minimizuojant logines laiko funkcijas, galima pasinaudoti dar ir tuo, kad kai kurios iš funkcijų φ_α gali turėti bendrų dalių ir tai

kartais leidžia dar labiau supaprastinti formulę, vaizduojančią duotąją laiko funkciją. Pilnai minimizuojant laiko logikos funkciją, kartais pavyksta išskirti ir tokią jos dalį, kuri nepriklauso nuo laiko.

Pavyzdžiui, minimizuodami mūsų nagrinėjamos loginės laiko funkcijos „dalines funkcijas“ φ_α atskirai, mes gauname, jog $Y = X_1 X_0 \tau_0 \vee (X_1 \vee \bar{X}_0)(\bar{X}_1 \vee X_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2$, arba $Y = X_1 X_0 \tau_0 \vee (\bar{X}_1 \bar{X}_0 \vee X_1 X_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_2) \tau_2$. Tačiau nesunku pastebėti, kad tuo atveju, kai $X_1=1$ ir $X_0=1$, ši loginė laiko funkcija nepriklauso nuo laiko t visame laiko segmente $t=0, 1, \dots, s-1$, kur $s=3$, ir visada lygi 1. Todėl, kaip nesunku įsitikinti (žiūr. 1.16.318. užduotį), šią funkciją galima aprašyti ir formulę $Y = X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0 \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2$, kurios sudėtį sudaro mažiau raidžių ir kurią galima realizuoti paprastesne schema. Šioje formulėje konjunkcija $X_1 X_0$ nepriklauso nuo laiko, nes yra bendra visoms dalinėms funkcijos φ_α .

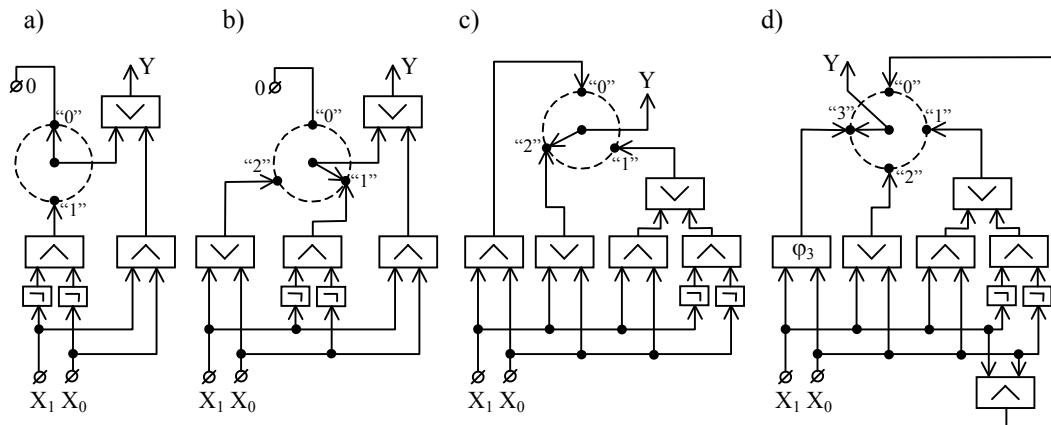
Nagrinėdami logines schemas gana dažnai sutinkame tokias, kurių funkcionavimas aprašomas **periodinėmis loginėmis laiko funkcijomis** $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t+kT) = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$, kur T – funkcijos periodas, k – bet koks sveikas skaičius.

Kiekvieną neperiodinę loginę laiko funkciją $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$, apibrėžtą laiko segmente $0 \leq t \leq s-1$, kur s – baigtinis sveikas teigiamas skaičius, galima apibrėžti kaip periodinę loginę laiko funkciją, papildant funkcijos $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$ apibrėžimą lygybe $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t+ks) = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$, kurioje $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Kartais pavyksta rasti periodą T ir mažesnę už s . Pavyzdžiui, jei mūsų nagrinėtajame pavyzdyje „dalinė funkcija“ φ_2 būtų buvusi ne $X_1 \vee X_0$, o $X_1 \wedge X_0$, tai tokią funkciją galima buvo pavaizduoti ne tik kaip periodinę loginę laiko funkciją, turinčią periodą $T=3$, bet ir kaip periodinę periodo $T=2$ loginę laiko funkciją $Y = \varphi(X_1, X_0, t+2k) = \varphi(X_1, X_0, t) = X_1 X_0 \tau_0 \vee (X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0) \tau_1 = X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0 \tau_1$, kur kintamasis t , prabėgdamas reikšmes $0; 1; 2; 3; 4; \dots$, perveda žingsninį perjungėją iš būsenos $\tau_0=1$ į būseną $\tau_1=1$, po to vėl į būseną $\tau_0=1$ ir t. t.

Pridėjus prie funkcijos $Y = X_1 X_0 \tau_0 \vee (X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2$ dar vieną taktą $t=3$, atitinkantį $\tau_3=1$ ir kokią tai „dalinę funkciją“ $\varphi_3(X_1, X_0)$, galėjome sukonstruoti periodinę loginę laiko funkciją $Y = \varphi(X_1, X_0, t)$, turinčią periodą $T=4$. Tokią funkciją galima būtų apibrėžti formule $Y = \varphi(X_1, X_0, t+4k) = \varphi(X_1, X_0, t) = X_1 X_0 \tau_0 \vee (X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2 \vee \varphi_3(X_1, X_0) \tau_3$.

Schema, realizuojančią periodinę loginę laiko funkciją $Y = \varphi(X_1, X_0, t+2k) = \varphi(X_1, X_0, t) = X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0 \tau_1$, vaizduoja 404^a pav. Ši schema turi taktų perjungėją, turintį tik dvi būsenas, į kurias jis perveda schemas išėjimą, pervesdamas perjungėjo kontaktą į padėtis „0“; „1“; „0“; „1“ ir t. t. Schema, realizuojančią funkciją $Y = \varphi(X_1, X_0, t+3k) = \varphi(X_1, X_0, t) = X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0 \tau_1 \vee (X_1 \vee X_2) \tau_2$, vaizduoja 404^b pav., o schema, kuri realizuoja funkciją $Y = \varphi(X_1, X_0, t+3k) = X_1 X_0 \tau_0 \vee (X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2 - 404^c pav. Ten pat (žiūr. 404^d pav.) pavaizduota ir funkciją $Y = \varphi(X_1, X_0, t+4k) = \varphi(X_1, X_0, t) = X_1 X_0 \tau_0 \vee (X_1 X_0 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_0) \tau_1 \vee (X_1 \vee X_0) \tau_2 \vee \varphi_3(X_1, X_0) \tau_3$ realizuojanti schema.$



404 pav.

Periodinės loginės laiko funkcijos $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t + sk) = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$ realizavimui pririnktų žingsninio taktų perjungėjo, turinčio s padėčių, atitinkančių loginių kintamųjų τ_α (kur, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, s-1$) vienetines reikšmes.

404 pav. vaizdumo dėlei parodyti mechaniniai taktų perjungėjai. Tačiau šiuolaikinėse elektroninėse schemose, realizuojančiose logines laiko funkcijas ir labai plačiai taikomose sudėtingų procesų automatinio ir automatizuoto valdymo įrenginiuose, vietoj mechaninių vartojami **elektroniniai taktų perjungėjai, kurie konstruojami, naudojantis elektroniniais taktų generatoriais, triggeriniais taktų skaitliukais ir elektroniniais ventiliais**. Tokias elektronines schemas, realizuojančias logines laiko funkcijas ir tuo pačiu metu modeliuojančias diskrečius daugiatakčius (tame tarpe – ir periodinius) procesus, mes nagrinėsime antrojoje šios mokymo priemonės dalyje.

Loginės laiko funkcijos taikomos įvairių **daugiatakčių schemų sintezėje (projektavime) ir analizėje**, pavyzdžiui, konstruojant kompiuterius ir įvairius kitokius automatus bei automatinio valdymo įrenginius, o taip pat analizuojant įvairių daugiatakčių įrenginių funkcionavimą bei kitus diskrečius daugiatakčius procesus.

Realizuojant logines laiko funkcijas, elektroninėse schemose naudojamos potencialiniai ir impulsiniai kodai. Ryšium su tuo ir pačios schemos skirstomos į potencialines, impulsines ir mišrias.

Potencialinėse schemose loginiai nuliai vaizduojami „žemu“ potencialu (dažniausiai potencialu, laikomu lygiu 0), o loginiai vienetai – „aukštu“ potencialu, kurį, net atsirandant įvairiems triukšmams bei kitiems dažnai pasitaikantiems trikdžiams, visada galima patikimai atskirti nuo potencialo, vaizduojančio loginį nulį. **Potencialinio kodo** panaudojimo pavyzdžiu gali būti diferencijavimo grandelės įėjimo trajektorijos $x(t)$ grafikas, pavaizduotas 1.4.3. skyrelyje 21 pav. viršutinėje dalyje.

Gali būti naudojami teigiamas (tiesioginis) ir neigiamas (atvirkštinis) potencialiniai kodai, priklausomai nuo to, kokio tipo tranzistoriai (p–n–p ar n–p–n) vartojami elektroninėse schemose. **Teigiamame potencialiniame kode** loginiai vienetai vaizduojami teigiamu potencialu, reikšmingai aukštesniu už loginio nulio potencialą, o **neigiamame potencialiniame kode** loginiai vienetai vaizduojami neigiamu potencialu, reikšmingai žemesniu už loginio nulio potencialą.

Impulsinėse schemose loginės reikšmės vaizduojamos **impulsiniais kodais**: loginiai vienetai vaizduojami teigiamais ar neigiamais elektriniais impulsais (todėl galimi **teigiami ir neigiami impulsiniai kodai**), o loginiai nuliai – impulsų nebuvimu. Impulsinio kodo pavyzdys – 21 pav. pavaizduotas išėjimo $y(t)$ grafikas. Žinoma, galima teigiamais impulsais žymėti loginius vienetus, o neigiamais – loginius nulius (ar atvirkščiai) bei panaudoti impulsines schemas trireikšmės logikos funkcijų

realizavimui. Potencialinės schemos gali būti panaudotos ir keturiareikšmės logikos kai kurių funkcijų vaizdavimui ir atvirkščiai: naudojantis keturiareikšme logika galima aprašyti kai kurių schemų funkcionavimą, atsižvelgiant ne tik į potencialų lygius, bet ir į perėjimus nuo vieno lygio prie kito.

Mišrioje diskrečiose elektroninėse schemose gali būti naudojami ir potencialiniai ir impulsiniai kodai. Tokiose schemose naudojami specialūs blokai – pertvarkytojai (diferenciatoriai ir integratoriai), pervedantys elektros potencialuose bei impulsuose užkoduotą loginę informaciją iš potencialinio kodo į impulsinį ir iš impulsinio į potencialinį. Pavedimui iš teigiamo (tiesioginio) kodo į neigiamą (atvirkštinį) ir atgal vartojami invertoriai, realizuojantys loginio neigimo operaciją.

Potencialinės elektroninės schemos, realizuojančios bei vaizduojančios logines funkcijas gali būti **statinės ir dinaminės**. Statinėse schemose loginiai vienetai vaizduojami tam tikro pastovaus elektros potencialo lygio buvimu, o dinaminėse – tam tikros pastovios amplitudės aukšto dažnio svyravimų tame takte, kuriame laiko logikos funkcija turėtų būti lygi vienetui, buvimu. Tuose laiko taktuose, kuriuose laiko logikos funkcija turi būti lygi nuliui, minėtųjų aukšto dažnio svyravimų tuomet nebūna.

Naudojantis **diferenciatoriais** (diferencijavimo grandelėmis, idealiais diferenciatoriais, žiūr. 1.4. ir 1.11. šios mokymo priemonės skyrius), logines funkcijas (tame tarpe ir logines laiko funkcijas), realizuojamas potencialinėmis schemomis, galima **diferencijuoti argumentų ir laiko atžvilgiu**, gaunant tokiu būdu iš potencialinio impulsinį kodą (žiūr. 21 pav., kuriame viršutiniame grafike pavaizduota diferencijavimo grandelės įėjimo trajektorija $x(t)$ potencialiniame kode, o žemutiniame grafike – tos grandelės išėjimo trajektorija $y(t)$ impulsiniame kode).

Naudojantis **integratoriais** (integravimo grandele, idealiu integratoriumi, žiūr. 1.11. skyrių), galima įvykdyti atvirkštinį procesą – elektrinius signalus iš impulsinio kodo pervesti į potencialinį.

Įsivesime specialų žymenį $dX(t)$, kurį pavadinsime **loginio kintamojo $X(t)$ diferencialu momentu t** ir apibrėšime kaip to kintamojo loginės reikšmės teigiamą prieauglį* momentu t , t. y. formule $dX(t) = \bar{X}(t-0) \wedge X(t+0)$. Kitaip tariant, laikysime, kad $dX(t) = \begin{cases} 1, & \text{tada ir tik tada, kada } \bar{X}(t-0) \wedge X(t+0) = 1, \\ 0 & - \text{visais kitais atvejais.} \end{cases}$

Iš šio apibrėžimo išplaukia, jog $d\bar{X}(t) = X(t-0) \wedge \bar{X}(t+0)$, t. y., jog $d\bar{X}(t) = 1$ tada ir tik tada, kada kintamojo $X(t)$ reikšmė keičiasi iš loginio vieneto į loginį nulį, ir $d\bar{X}(t) = 0$ visais kitais momentais t . Nesunku įsitikinti, kad **$d\bar{X}(t)$ ir $dX(t)$ nesutampa, nes $d\bar{X}(t)$ tais momentais, kai $X(t)$ keičia savo loginę reikšmę iš 0 į 1 yra lygus 0, o loginiam vienetui – visais kitais momentais, kai tuo tarpu $d\bar{X}(t)$ lygus loginiam vienetui tik tais momentais, kai $X(t)$ keičia savo reikšmę iš 1 į 0 ir yra lygus loginiam nuliui visais kitais momentais.**

Taip pat nesunku įsitikinti, kad $d[X_1(t) \wedge X_2(t)] \Leftrightarrow [X_1(t) \wedge dX_2(t)] \vee [X_2(t) \wedge dX_1(t)] \vee dX_1(t) \wedge dX_2(t) \Leftrightarrow X_1(t) dX_2(t) \vee X_2(t) dX_1(t) \vee dX_1(t) dX_2(t)$ ir $d[X_1(t) \vee X_2(t)] \Leftrightarrow \bar{X}_1 dX_2(t) \vee \bar{X}_2 dX_1(t) \vee dX_1(t) dX_2(t)$.

Įrodysiu pirmąjį ekvivalentumą (tautologiją):

$$d[X_1(t) \wedge X_2(t)] \Leftrightarrow \{[\bar{X}_1(t-0) \wedge X_2(t-0)] \vee [X_1(t-0) \wedge \bar{X}_2(t-0)] \vee [\bar{X}_1(t-0) \wedge \bar{X}_2(t-0)]\} \wedge [X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)] \Leftrightarrow [\bar{X}_1(t-0) \wedge X_2(t-0) \wedge X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)] \vee [X_1(t-0) \wedge \bar{X}_2(t-0) \wedge X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)] \vee [\bar{X}_1(t-0) \wedge \bar{X}_2(t-0) \wedge X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)]$$

* Kai kuriose knygose (žiūr., pavyzdžiui, [126]) dX ir $d\bar{X}$ apibrėžiami atvirkščiai: dX laikomas lygiu vienetui, kai X ilygia neigiamą prieauglį, o $d\bar{X} = 1$, kai X ilygia teigiamą prieauglį.

$\wedge \bar{X}_2(t-0) \wedge X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)] \vee [\bar{X}_1(t-0) \wedge \bar{X}_2(t-0) \wedge X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)] \Leftrightarrow [X_2(t) \wedge dX_1(t)] \vee [X_1(t) \wedge dX_2(t)] \vee [dX_1(t) \wedge dX_2(t)] \Leftrightarrow X_2(t)dX_1(t) \vee X_1(t)dX_2(t) \vee dX_1(t)dX_2(t)$, ką ir reikėjo įrodyti.

Antrojo ekvivalentumo įrodymą palieku pačiam skaitytojui, atkreipdamas jo dėmesį, kad $d[X_1(t) \vee X_2(t)] \Leftrightarrow [\bar{X}_1(t-0) \wedge \bar{X}_2(t-0)] \wedge \{[X_1(t+0) \wedge \bar{X}_2(t+0)] \vee [\bar{X}_1(t+0) \wedge X_2(t+0)] \vee [X_1(t+0) \wedge X_2(t+0)]\}$.

Kai tenkinama sąlyga, kad kintamųjų $X_1(t)$ ir $X_2(t)$ reikšmės vienu ir tuo pačiu momentu t kartu keistis negali, tai gauname, jog $dX_1(t) \wedge dX_2(t) \Leftrightarrow 0$, iš kur išplaukia paprastesnės diferencialų $d[X_1(t) \wedge X_2(t)]$ ir $d[X_1(t) \vee X_2(t)]$ apskaičiavimo formulės.

Pavyzdžiui, jei žinoma, kad loginiai kintamieji $X_1(t)$, $X_2(t)$ ir $X_3(t)$ nei visi trys kartu nei poromis negali vienu metu keisti savo reikšmių, tai diferencijuodami potencialinę loginę funkciją $Y=f(X_1, X_2, X_3)=X_1 \vee \bar{X}_2 X_3$, gautume impulsinę loginę funkciją $dY = \bar{X}_1 d(\bar{X}_2 X_3) \vee \bar{X}_2 X_3 dX_1 = \bar{X}_1 (\bar{X}_2 dX_3 \vee X_3 d\bar{X}_2) \vee (X_2 \vee \bar{X}_3) dX_1 = (X_2 \vee \bar{X}_3) dX_1 \vee \bar{X}_1 X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 dX_3$.

Jei tokio apribojimo nebūtų, tai gautume žymiai sudėtingesnę impulsinės funkcijos išraišką $dY = \bar{X}_1 d(\bar{X}_2 X_3) \vee (X_2 \vee \bar{X}_3) dX_1 \vee dX_1 d(\bar{X}_2 X_3) = \bar{X}_1 (X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 dX_3 \vee d\bar{X}_2 dX_3) \vee (X_2 \vee \bar{X}_3) dX_1 \vee dX_1 (\bar{X}_2 dX_3 \vee X_3 d\bar{X}_2 \vee d\bar{X}_2 dX_3) = (X_2 \vee \bar{X}_3) dX_1 \vee \bar{X}_1 X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 dX_3 \vee X_3 dX_1 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 dX_1 dX_3 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_2 dX_3 \vee dX_1 d\bar{X}_2 dX_3$.

Iš šios formulės išplaukia ankstesnė formulė kaip dalinis atvejis, kai priimama sąlyga, kad loginių kintamųjų diferencialų sandaugos yra lygios nuliui.

Naudotis sąlyginai teisingomis formulėmis $d[X_1(t) \wedge X_2(t)] = X_1(t)dX_2(t) \vee X_2(t)dX_1(t)$ ir $d[X_1(t) \vee X_2(t)] = \bar{X}_1(t)dX_2(t) \vee \bar{X}_2(t)dX_1(t)$ reikia apdairiai, kad būtų išvengta klaidų, panašių į tą, kurią dabar pailiustruosiu.

Tarkime, mes diferencijuojame loginę funkciją $F = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 = \bar{X}_1 (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3)$, naudodamiesi ką tik minėtomis sąlyginai teisingomis formulėmis.

Diferencijuodami funkciją F formoje $F = \bar{X}_1 (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3)$, gauname $dF = \bar{X}_1 d(\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) \vee (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1 = \bar{X}_1 X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2 d\bar{X}_3 \vee (X_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1$.

Diferencijuodami tą pačią funkciją F formoje $F = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3$, gauname $dF = \bar{X}_1 \bar{X}_2 d(\bar{X}_1 \bar{X}_3) \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 d(\bar{X}_1 \bar{X}_2) = (X_1 \vee X_2) (\bar{X}_3 d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_3) \vee (X_1 \vee X_3) (\bar{X}_2 d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_2) = (X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \vee X_3 \bar{X}_2) d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2 d\bar{X}_3 = (X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 X_3) d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2 d\bar{X}_3$.

Kaip matome, diferencijavimo rezultatai nesutampa, nes $X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 X_3 \neq \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3$. Tokio nesutapimo neturėtų būti ir jo atsiradimas rodo, kad padaryta klaida. Tą klaidą surasime, naudodamiesi besąlyginėmis formulėmis ir tik galutiniame rezultate atmesdami impulsų konjunkcijas.

$d[\bar{X}_1 (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3)] = (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 d(\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1 d(\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) = (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 (X_3 d\bar{X}_2 \vee X_2 d\bar{X}_3 \vee d\bar{X}_2 d\bar{X}_3) \vee d\bar{X}_1 (X_3 d\bar{X}_2 \vee X_2 d\bar{X}_3 \vee d\bar{X}_2 d\bar{X}_3) = (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 X_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2 d\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_2 d\bar{X}_3 \vee X_3 d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 \vee X_2 d\bar{X}_1 d\bar{X}_3 \vee d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 d\bar{X}_3$.

Atmetę impulsų konjunkcijas, t. y. priėmę sąlygą, kad dviejų ar daugiau impulsų atsiradimo lygiai tuo pačiu momentu t tikimybė praktiškai lygi 0, gauname, jog tokiu atveju $dF = (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2 d\bar{X}_3$. Šis rezultatas sutampa su anksčiau gautu rezultatu $dF = d[\bar{X}_1 (\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3)]$ ir nesutampa su rezultatu gautu, diferencijuojant formą $F = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3$, naudojantis sąlyginai teisingomis formulėmis. Tai reiškia, jog diferencijuojant formą $F = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3$ padaryta klaida. Ji atsirado todėl, kad dėmenys $\bar{X}_1 \bar{X}_2$ ir $\bar{X}_1 \bar{X}_3$ yra priklausomi, dėl ko formulėje $d(\bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3) = (X_1 \vee X_2) d(\bar{X}_1 \bar{X}_3) \vee (X_1 \vee X_3) d(\bar{X}_1 \bar{X}_2) \vee d(\bar{X}_1 \bar{X}_2) d(\bar{X}_1 \bar{X}_3)$ mes neturėjome teisės iškart atmesti konjunkciją $d(\bar{X}_1 \bar{X}_2) d(\bar{X}_1 \bar{X}_3)$, kurios „dauginamieji“ priklauso nuo to paties kintamojo $\bar{X}_1$. Juk $d(\bar{X}_1 \bar{X}_2) d(\bar{X}_1 \bar{X}_3) = (\bar{X}_2 d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_2 \vee d\bar{X}_1 d\bar{X}_2) \wedge (\bar{X}_3 d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_3 \vee d\bar{X}_1 d\bar{X}_3) = \bar{X}_1 \bar{X}_3 d\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 d\bar{X}_3 \bar{X}_1 \bar{X}_2 d\bar{X}_1 d\bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 d\bar{X}_1 d\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3 d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_2 d\bar{X}_3 \vee \bar{X}_3 d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 d\bar{X}_1 d\bar{X}_3 \vee d\bar{X}_1 d\bar{X}_2 d\bar{X}_3$ ir mes, atmesdami konjunkciją $d(\bar{X}_1 \bar{X}_2) d(\bar{X}_1 \bar{X}_3)$, atmetėme

ir disjunkcijos narį $\overline{X_1}\overline{X_3}d\overline{X_1}$, kurio atmesti neturėjome teisės. Prijungę tą narį prie anksčiau gauto rezultato $(\overline{X_1}\overline{X_3} \vee X_2\overline{X_3} \vee \overline{X_2}X_3)d\overline{X_1} \vee \overline{X_1}\overline{X_3}d\overline{X_2} \vee X_1\overline{X_2}d\overline{X_3}$, būtume gavę teisingą rezultatą $dF = (X_1\overline{X_3} \vee X_2\overline{X_3} \vee \overline{X_2}X_3 \vee \overline{X_1}\overline{X_3})d\overline{X_1} \vee \overline{X_1}X_3d\overline{X_2} \vee X_1\overline{X_2}d\overline{X_3} = (\overline{X_2} \vee \overline{X_3})dX_1 \vee \overline{X_1}X_3d\overline{X_2} \vee X_1\overline{X_2}d\overline{X_3}$, sutampantį su formule $dF = d[\overline{X_1}(\overline{X_2} \vee \overline{X_3})]$.

Šis pavyzdėlis ne tik iliustruoja galimas klaidas, kurios gali atsirasti neapdairiai naudojantis sąlyginai teisingomis formulėmis, bet ir atskleidžia tų klaidų atsiradimo priežastis.

Naudodamiesi integratoriais, galime pereiti nuo impulsinio loginių funkcijų aprašymo prie potencialinio. Palieku skaitytojui bandymą sukonstruoti tokio perėjimo matematinį aprašymą (žiūr., pavyzdžiui, [126]) ir pabandyti integruoti impulsinę funkciją $dY = d\overline{X_1} \vee \overline{X_2}d\overline{X_3} \vee X_1d\overline{X_2} \vee X_3dX_1 \vee X_1dX_3 \vee \overline{X_1}d\overline{X_3} \vee X_3dX_2 \vee X_3d\overline{X_2}$, išitiki-
nant, kad šiuo atveju funkciją dY galima integruoti tik dalimis, išreiškiant ją kaip funkciją $dY = dF_1 \vee dF_2$, kur $F_1 = \overline{X_1}\overline{X_3} \vee X_1\overline{X_2}X_3 \vee \overline{X_1}X_2$, o $F_2 = \overline{X_2}\overline{X_3} \vee \overline{X_1}\overline{X_3} \vee \overline{X_1}\overline{X_2} \vee X_1X_2X_3$ (žiūr. užduotį 1.16.328.). Reikia pažymėti, kad kai kurios impulsinės funkcijos yra absoliučiai integruojamos, kai kurios integruojamos tik dalimis, o kai kurios – iš viso neintegruojamos (žiūr. [126]).

Antroji grupė poreikių, kurie paskatino laiko logikos atsiradimą ir skatina tolesnį jos vystymąsi, yra pačios logikos mokslo, o taip pat filosofijos mokslo, besistengiančių išsiaiškinti laiko sąvoką ir jos esmines savybes, poreikiai. Kad laiko sąvoka nėra tokia jau paprasta, kaip galėtų atrodyti iš pirmo žvilgsnio, liudija ir toks faktas, jog vienas pagrindinių Niutono ir Einšteino mechanikų skirtumų yra skirtingas požiūris į laiką (žiūr. 1.1. skyrelio pradžią).

Minėtųjų logikos ir filosofijos bei fizikos mokslų poreikių dėka susiformavo ir vystosi aksiomatinio ir sekvenčinio formalizuoto loginio skaičiavimo sistemų rūšis, vadinama **laiko logika** (kartais – dar ir **temporaline** bei **chronologine logika**, o taip pat dar ir **formaliąja chronologija**), kurią galima laikyti ir tam tikra **modalinės logikos plačiąja prasme sistemų rūšimi** (žiūr. 1.16.1.5.7. skyrelį).

Šią matematinės logikos šaką atstovauja R. Karnapo (R. Carnap), D. Vudžero (J. H. Woodger), Z. Mano (Z. Mann), R. Martino (R. M. Martin), J. Hintikos (J. Hintikka), G. Raito (G. H. Wright), Dž. Findlėjo (J. N. Findley), A. Pnuelio (A. Pnuel), A. Praioro (A. N. Prior), A. Zinovjevo (A. A. Zinowjew), S. Širaiši (S. Shiraishi) ir kitų logikų darbai. XX a. paskutiniame ketvirtyje laiko logikos pradėtos taikyti kompiuterinių programų specifیکavimui ir verifikavimui. Tai nauja laiko logikų taikymo kryptis. Jos aktualumas ypač padidėja, kai buvo pradėtos kurti lygiagretaus programavimo sistemos, kuriose modeliuojant lygiagrečiau vykstančius procesus, modeliuojamo laiko tėkmė lyg ir „išsišakojo“ ir iškilo modeliuojamų procesų suderinimo ir sąveikavimo laike problema. Šioje srityje paminėtini E. M. Klarko (E. M. Clarke), E. A. Emersono (E. A. Emerson), C. Štirlingo (C. Stirling) darbai.

Laiko logika yra palyginti dar jaunas mokslas: pagrindiniai šios mokslo srities darbai priklauso antrajai XX a. pusei ir tik R. Karnapo „Abriss der Logistic“ datuojamas 1929 m. Todėl laiko logikos terminologija dar nėra pilnai nusistovėjusi. Pavyzdžiui, **net tokią sąvoką kaip „anksčiau“ skirtingi autoriai traktuoja ne visada vienodai**, apibrėždami skirtingomis formulėmis. Pažymėję raidėmis p, q, r ir t. t. teiginius, kurie priklauso nuo laiko t ir skirtingais laiko momentais gali būti teisingi ar neteisingi, o santykį „anksčiau“ – raide A, galime gauti tokius šiek tiek skirtingus to santykio implicitinius apibrėžimus: 1) $pAq \equiv (p \wedge \neg q)A(\neg p \wedge q)$, 2) $pAq \equiv (p \wedge \neg q)Aq$, 3) $pAq \equiv pA(\neg p \wedge q)$. **Skirtingai gali būti apibrėžtos ir sąvokos „vėliau“, „bus“, „buvo“ ir t. t.**

Todėl tenka įsivedinėti ir skirti vienas nuo kito griežtus, susilpnintus ir pan. tokių sąvokų apibrėžimus.

Pavyzdžiui, sakoma, kad nagrinėjamoji sistema buvo **būsenoje p** (t. y. būsenoje, kada teiginys p buvo teisingas) **griežtai anksčiau** negu būsenoje q, tada ir tik tada, kai kiekvienas laiko momentas, kada teiginys p yra teisingas, yra anksčiau kiekvieno laiko momento, kada yra teisingas teiginys q.

Laiko logikos sistemose, kurios remiasi tokiu griežtu sąvokos „anksčiau“ apibrėžimu, **būtina skirti momentinius įvykius nuo įvykių, laikomų procesais**, t. y. nuo įvykių, turinčių ilgesnę už nulį trukmę, nes iš to, kad procesas įvyko griežtai anksčiau už kitą procesą, išplaukia, jog pirmojo proceso visi momentiniai įvykiai įvyko griežtai anksčiau už antrojo proceso bet kurį momentinį įvykį, o atvirkštinis teiginys gali būti ir teisingas ir neteisingas: iš kai kurių įvykių įvykimo griežtai anksčiau ne būtinai išplaukia atitinkamų procesų įvykimas griežtai anksčiau.

Gana dažnai naudojamas ir **susilpninta (silpnąja) santykio „anksčiau“ sąvoka**: laikoma, jog **p buvo silpnai anksčiau už q** tada ir tik tada, kada egzistuoja tokie du skirtingi laiko momentai t_1 ir t_2 , jog momentui t_1 , kuris laikomas ankstesniu už momentą t_2 , būdinga kad p yra teisingas teiginys, o momentui t_2 , kuris laikomas vėlesniu, būdinga tai, kad yra teisingas teiginys q. Toks (**susilpnintas**) sąvokos „anksčiau“ apibrėžimas vienodai tinka visiems atvejams: ir kai kintamieji p ir q ir momentinės laiko funkcijos, aprašančios momentinius įvykius, ir kai kintamieji p ir q – intervalinės laiko funkcijos, aprašančios procesus, turinčius ilgesnę už nulį trukmę.

Laiko logikoje konstruojamos ir nagrinėjamos įvairios formalios loginės sistemos, šiek tiek besiskiriančios viena nuo kitos savo pagrindinių sąvokų („anksčiau“, „vėliau“, „buvo“, „yra“, „bus“, „visada buvo“, „visada bus“ ir t. t.) apibrėžimais, o taip pat tuo, ar laikas jose kinta tolydžiai ar diskrečiai, ar jose nagrinėjami procesai turi pradžią ir pabaigą, ar, atvirkščiai, – egzistuoja procesai, neturintys pradžios ar/ir pabaigos, ar laikas slenka „tiesiškai“, ar „šakojasi“. Egzistuoja laiko logikos sistemos, kuriose laikas nėra metrizuotas, tačiau yra sukonstruotos ir tokios sistemos, kuriose laikas laikomas kiekybine kategorija ir yra matuojamas, naudojantis tam tikromis taisyklėmis ir laiko matavimo vienetais bei atskaitos taškais – atitinkamomis datomis. Yra sukurta jau nemažai aksiomatinių laiko logikos sistemų ir jau bandoma jas stratifikuoti, imant pagrindu kokią tai **minimalią sistemą** ir po to ją papildant naujomis aksiomomis, išreiškiančiomis galimas papildomas laiko savybes, į kurias nebuvo atsižvelgta minimalioje sistemoje.

Pateiksiu keletą **laiko logikos sistemų** pavyzdžių.

1955 m. A. Praioras, bandydamas rekonstruoti megariečio Diodoro (žiūr. 1.16.1.5.5.2. skyrelį apie Megaro mokyklą) požiūrį į tokias modalinės logikos sąvokas kaip **galimybė** ir **būtinybė**, sukonstravo taip vadinamą **F logikos sistemą**, turinčią du būsimojo laiko operatorius F ir G. Tos sistemos pagrindą sudarė 1.16.1.5.2. skyrelyje aprašytasis klasikinis teiginių skaičiavimas su savo aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis bei dvi papildomos aksiomos ir dvi papildomos išvedimo taisyklės, apibrėžiančios jau minėtuosius modalinius operatorius F ir G. Kadangi A. Praioro 1957 m. sukonstruotoji laiko logikos sistema buvo pirmoji laiko logikos sistema, tai priimta A. Praiorą laikyti laiko logikų kūrimo pradininku. Pažymėtina, jog A. Praioro darbas „Past, Present and Future“, pasirodęs 1967 m., davė pradžią ir taip vadinamoms **hibridinėms logikoms**, apie kurias pakalbėsime 1.16.1.5.7. skyrelyje.

Operatorius F – tai silpnasis būsimojo laiko operatorius. Paveikę juo teiginį p, gauname teiginį Fp , reiškiantį, jog ateityje bus toks atvejis (tokia situacija), kad teiginys p bus teisingas teiginys. Operatorius G vadinamas **stipriuoju būsimojo laiko operatoriumi**. Paveikę juo teiginį p, gauname teiginį Gp , reiškiantį, kad teiginys p ateityje bus teisingas visuomet. Operatorių G galima išreikšti per operatorių F: $Gp \stackrel{\text{def}}{=} \neg F\neg p$, nes teiginys Gp , teigiantis, jog teiginys p visuomet bus teisingas, reiškia tą patį, ką ir teiginys $\neg F\neg p$, teigiantis, jog nebus taip, kad teiginys $\neg p$ būtų teisingas. Iš šio apibrėžimo be kita ko išplaukia, jog F logikos teiginiai gali turėti tik dvi logines reikšmes ir todėl joms gali būti taikomas klasikinio teiginių skaičiavimo matematinis aparatas – jo aksiomos ir išvedimo taisyklės bei iš jų išplaukiančios klasikinio teiginių skaičiavimo teoremos. Operatorių F ir G, kurių nebuvo klasikiniame teiginių skaičiavime, savybes aprašo jau minėtosios dvi papildomos aksiomos

$$A1. \vdash F(p \vee q) \Leftrightarrow Fp \vee Fq,$$

$$A2. \vdash FFp \supset Fp$$

ir dvi papildomos išvedimo taisyklės R1. $\vdash A \rightarrow \vdash GA$ ir R2. $\vdash (A \Leftrightarrow B) \rightarrow \vdash (FA \Leftrightarrow FB)$, kur A ir B – kokios nors teiginių skaičiavimo bei F logikos formulės, ženklelis „ $\vdash$ “ – formulės išvedamumo F logikoje ženklelis, ženklelis „ $\vee$ “ – disjunkcijos ženklas, „ $\supset$ “ – materialiosios implikacijos ženklas, ženklelis „ $\Leftrightarrow$ “ – ekvivalentumo ženklas, reiškiantis, jog $A \Leftrightarrow B$ ekvivalentu $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$, o ženklelis „ $\rightarrow$ “ čia reiškia „logiškai išplaukia“. Taisyklės R1. ir R2. galiama užrašyti ir formoje: R1. $\frac{?A}{?GA}$, R2. $\frac{?(A \Leftrightarrow B)}{?(FA \Leftrightarrow FB)}$.

Šios formulės reiškia, jog iš „skaitikliuose“ pateiktų formulių teisingumo logiškai išplaukia „vardikliuose“ pateiktų formulių teisingumas.

Jau minėtasis Diodoras galimu laikė tai, kas gali būti teisinga dabar ar ateityje, negalimu tai, kas nėra teisinga dabar ir niekada negalės būti teisinga, o būtinu tai, kas yra teisinga dabar ir ateityje bus visada teisinga. Todėl Diodoro suformuluoti galimybės $\Diamond$ ir būtinybės H apibrėžimai, naudojantis F logikos kalba, gali būti išreikšti taip: $\overset{\text{def}}{\Diamond} p \equiv p \vee Fp$, $\overset{\text{def}}{H} p \equiv p \wedge Gp$, kur „ $\Diamond$ “ ir „ H “ – **galimybės ir būtinybės modaliniai operatoriai**.

A. Praioras įrodė, kad aletinė sistema, kuri gaunama papildžius F logiką čia ką tik pateiktais galimybės ir būtinybės operatorių apibrėžimais, formaliai aprašančiais Diodoro apibrėžimus, yra stipresnė už Ljuiso modalinės logikos sistemą S4, tačiau šiek tiek silpnesnė už sistemą S5 (apie tas sistemas mes dar kalbėsime 1.16.1.5.7. skyrelyje). Todėl teoremos, kurios išvedamos sistemoje S4, yra išvedamos ir F logikoje, papildytoje minėtais galimybės ir būtinybės apibrėžimais.

Analogiškai, kaip buvo sukonstruota F logika, skirtingai įvykių formalizuotam aprašymui bei analizei, galima sukonstruoti ir taip vadinamąją **P logiką su jos operatoriais P ir H**, reiškiančiais silpnąją ir stipriąją praeitį, kur Pp reiškia teiginį, jog praeityje buvo atvejį, kada p buvo teisingas teiginys, o Hp – teiginį, jog teiginys p praeityje visada buvo teisingas. Operatorius H gali būti išreikštas per operatorių P: $\overset{\text{def}}{H} p \equiv \neg P\neg p$. Kaip matome, P logika yra simetriška F logikai.

P logikos išvedimo aparatas gaunamas analogiškai, kaip ir F logikos išvedimo aparatas, klasikinio teiginių skaičiavimo išvedimo aparatą (aksiomas ir išvedimo taisykles) papildžius aksiomomis

$$A1. \vdash P(p \vee q) \Leftrightarrow Pp \vee Pq,$$

$$A2. \vdash PPp \supset Pp$$

bei išvedimo taisyklėmis R1. $\vdash A \rightarrow \vdash HA$ ir R2. $\vdash (A \Leftrightarrow B) \rightarrow \vdash (PA \Leftrightarrow PB)$.

Sujungus F logiką ir P logiką bei naudojantis žymėjimu p, reiškiančiu teiginio p teisingumo reikšmę dabar, t. y. tuo momentu, nuo kurio skaičiuojama praeitis ir ateitis, galima sukonstruoti **apibendrintą laiko logikos sistemą** ir tokius **apibendrintus galimybės ir būtinybės modalinių operatorių $\Diamond$ ir H apibrėžimus**:

$$\overset{\text{def}}{\Diamond} p \equiv Pp \vee p \vee Fp,$$

$$\overset{\text{def}}{H} p \equiv Hp \wedge p \wedge Gp.$$

Metrizuotos laiko logikos sistemos pavyzdžiu paimsime sistemą P4, kurią jau minėtasis A. Praioras sukonstravo 1957 m.

Toje sistemoje ateities operatorius F yra jau dviargumentis: jis priklauso nuo argumento, vaizduojančio laiko intervalo trukmę ir žymimo m, n ir t. t. (tame tarpe ir 0, kai ta trukmė lygi 0), ir nuo antrojo argumento – teiginio (žymimo raidėmis p, q ir t. t. elementaraus teiginio bei iš jų ir klasikinės logikos operatorių sudarytos taisyklingos loginės formulės, reiškiančios sudėtingą teiginį). Pavyzdžiui, teiginys Fnp reiškia teiginį, kad praėjus n laiko vienetų nuo momento, reiškiančio dabartį, teiginys p bus teisingas, o teiginys $F0\neg p$ reiškia, kad teiginys p yra neteisingas dabar.

Šios loginės sistemos išvedimo aparato pagrindą sudaro:

1) klasikinio predikatų skaičiavimo aksiomos (žiūr. 1.16.1.5.4. skyrelį);

2) šešios papildomos aksiomos, apibūdinančios operatoriaus F savybes:

$$A1. \vdash Fn\neg p \supset \neg Fnp,$$

$$A2. \vdash \neg Fnp \supset Fn\neg p,$$

$$A3. \vdash Fn(p \supset q) \supset (Fnp \supset Fnq),$$

$$A4. \vdash F0p \supset p,$$

$$A5. \vdash FmFnp \supset F(m+n)p,$$

$$A6. \vdash Fm(\exists n)Fnp \supset (\exists n)FmFnp;$$

3) penkios išvedimo taisyklės (žiūr. 1.16.1.5.4. skyrelį):

a) superpozicijos,

b) atskyrimo (modus ponens),

c) bendrumo kvantoriaus įvedimo,

d) egzistavimo kvantoriaus įvedimo,

$$e) \vdash A \rightarrow \vdash FmA, \text{ t. y. } \frac{?A}{?FmA}.$$

A. Praioras parodė, kad ši loginė sistema yra modalinė sistema ir, kad, papildomai priėmus modalumo operatorių $\Diamond$ ir $\Box$ apibrėžimus $\Diamond p \equiv \exists n Fnp$ ir $\Box p \equiv \forall n Fnp$, gaunama sistema, kurioje yra išvedamos visos modalinės Ljuiso sistemos S4 teoremos (žiūr. 1.16.1.5.7. skyrelį).

Pakeitus operatorius F operatoriais P iš čia aprašytos metrizuotos būsimojo laiko loginės sistemos galima gauti jai simetrišką **metrizuotą praėjusiojo laiko loginę sistemą**, kurioje, įvedus atitinkamus operatorių $\Diamond$ ir $\Box$ apibrėžimus, galima išvesti bet kurią Ljuiso modalinės sistemos S4 teoremą.

Metrizuotos laiko logikos sistemos kalboje, kurioje figūruoja duargumentiniai operatoriai F ir P , galima apibrėžti ir aukščiau nagrinėtos nemetrizuotos laiko logikos vienaargumentinius operatorius F ir P : $Fp \equiv \exists n Fnp$, $Pp \equiv \exists n Pnp$. Teiginį „Nebus ne p “, t. y. teiginį $\neg F\neg p$, metrizuotos laiko logikos kalboje galima aprašyti formule „ $\neg \exists n F\neg p$ “, kuri, kaip tai išplaukia iš metrizuotos laiko logikos aksiomų, yra ekvivalenti formulei „ $\neg \exists n \neg Fnp$ “, o ši – savo ruožtu, kaip tai išplaukia iš teoremų apie kvantorius, yra ekvivalenti formulei „ $\forall n Fnp$ “.

Kaip pratimą, reikalaujantį tam tikro išigilinimo į čia pateiktų apibrėžimų esmę, siūlyčiau skaitytojui pabandyti nustatyti, kuo skiriasi galimybės ir būtinybės modalinių operatorių $\Diamond$ ir $\Box$ apibrėžimai nemetrizuotoje ir metrizuotoje laiko logikoje, o taip pat išsiaiškinti, ar apibrėžimuose $Fp \equiv \exists n Fnp$ ir $Pp \equiv \exists n Pnp$ laiko intervalo n trukmė gali būti lygi nuliui.

Čia aprašytos metrizuotos laiko logikos sistemos nebuvo pririštos prie kokios nors konkrečios datos: laiko intervalų trukmės m , n ir t . Jose matuojamos nuo „dabartinio momento“, kuris gali būti bet kuriuo iš anksto nefiksuotu momentu, t. y. „nepririštu“ prie kokios nors konkrečios datos.

Laiko logikos sistemos, kurioje nurodomos įvykių įvykimo (ar procesų stebėjimo) datos t , pavyzdžiu gali būti sistema P5. Šioje sistemoje kintamųjų t , t' , t'' ir t . t., reiškiančių datas, reikšmės gali būti ir teigiami ir neigiami skaičiai, o teiginys „momentu, kurio data yra t , teiginys p yra teisingas“ sutrumpintai žymimas Utp . Santrumpą „ Utp “ galima skaityti ir kaip „ p momentu t “.

Sistemos P5 išvedimo aparato pagrindą sudaro:

- 1) klasikinio predikatų skaičiavimo aksiomos;
- 2) penkios papildomos aksiomos, apibrėžiančios operatorių Ut :
 - A1. $\vdash Ut\neg p \supset \neg Utp$,
 - A2. $\vdash \neg Utp \supset Ut\neg p$,
 - A3. $\vdash Ut(p \supset q) \supset (Utp \supset Utq)$,
 - A4. $\vdash \forall t Utp \supset p$,
 - A5. $\vdash Ut'Utp \supset Utp$;
- 3) išvedimo taisyklės:
 - a) superpozicijos,
 - b) atskyrimo (modus ponens),
 - c) bendrumo kvantoriaus įvedimo,
 - d) egzistavimo kvantoriaus įvedimo,
 - e) $\frac{?A}{?UtA}$.

Papildžius sistemos P5 išvedimo aparatą apibrėžimais $\Diamond p \equiv \exists t Utp$ ir $\Box p \equiv \forall t Utp$, gaunama modalinės logikos sistema, kurioje išvedamos visos tos teoremos, kurios išvedamos Ljuiso modalinės logikos sistemoje S4.

Lygindami sistemos P5 aksiomą $\vdash Ut'Utp \supset Utp$ su anksčiau nagrinėtosios sistemos P4 aksioma $\vdash FmFnp \supset F(m+n)p$, matome, kad sistemos P4 ir P5 skiriasi ne tik tuo, kad operatorius Ut su teigiamomis ir neigiamomis kintamojo t reikšmėmis gali vaidinti operatorių F_n ir P_n vaidmenį, bet ir laiko skaičiavimo taisyklėmis: pakartotinai naudojantis operatoriais F_n ir P_n , laiko intervalų trukmės sumuojasi, o pakartotinai naudojantis operatoriumi Ut – nesisumuoja. Kitaip tariant, sistemoje P_5 įvykio p įvykimo data t , būdama fiksuota, išlieka ta pati, t. y. nepriklauso nuo datos t' , kuomet nagrinėjamas teiginys Utp . Pavyzdžiui, teiginys, išsakytas 2000-aisiais metais, kad „Lietuva bus priimta į ES po 4 metų“, priklauso teiginių Fnp tipui, o teiginys „Lietuva bus priimta į ES 2004-aisiais metais“ – teiginių Utp tipui. Pirmuoju atveju svarbu, kada buvo išsakytas teiginys Fnp , o antruoju – nesvarbu, nes teiginio Utp teisingumas (o kartu ir teiginio $Ut'Utp$ teisingumas) nepriklauso nuo datos t' , kada išsakytas tas teiginys, teigiantis, jog įvykimo data yra t .