

Išvedamoje formulėje ir jos išvedime, pasinaudosime jau anksčiau minėtu sutrumpintu bet kokios išvedamos formulės žymeniu – simboliu $\mathcal{R}$. Gausime:

1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ {A.I.1};
2. $\vdash \mathcal{R} \rightarrow (A \rightarrow \mathcal{R})$ $\{S_{A,B}^{\mathcal{R},A}[1]\}$;
3. $\vdash A \rightarrow \mathcal{R}$ {MP: $(\mathcal{R}, 2)$ }.

Išvestąją formulę $\vdash A \rightarrow \mathcal{R}$ pavadinsime ketvirtąja teiginių skaičiavimo teorema. Ją sutrumpintai žymėsime T4, arba TST4.

Išvedus pakankamai daug teoremų, galima įrodyti, jog **nagrinėjamos sistemos aksiomomis aprašytos loginės jungtys „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “, „ $\neg$ “ sutampa su mums jau įprastomis konjunkcijos, disjunkcijos, implikacijos ir neigimo operacijomis.** Tai padaryta, pavyzdžiui, jau minėtoje knygelėje [53].

Ten pat įrodyta ir tai, kad nagrinėjamoji aksiomatinė teiginių skaičiavimo sistema yra **neformaliai (substancionaliai) pilna***, nes toje sistemoje gali būti išvestos **visos** tapačiai teisingos **teiginių algebros formulės**.

Nagrinėjamoji aksiomatinė sistema yra ne tik substancionaliai (kontensyviai), bet ir **formaliai pilna***, nes **prie duotųjų 11 aksiomų neįmanoma prijungti nė vienos sudarytos taikant tik logines jungtis „ $\rightarrow$ “, „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “ ir „ $\neg$ “, tačiau neišvedamos iš tų aksiomų formulės kaip papildomos – dvyliktosios – aksiomos, nepaverčiant tos naujos – išplėtos – aksiomatinės sistemos formaliai prieštaringa.**

Pažymėsiu, jog **ne visos substancionaliai pilnos sistemos yra ir formaliai pilnos.** Pavyzdžiui, **aksiomatinė predikatų skaičiavimo sistema**, kurią neužilgo nagrinėsime šiame skyrelyje, kaip įrodyta [54, 251], yra substancionaliai pilna, tačiau nėra formaliai pilna, nes **predikatų skaičiavimo aksiomų sistemą galima papildyti neišvedama iš turimų aksiomų predikatine formule, nepaverčiant aksiomatinę predikatų skaičiavimo sistemą formaliai prieštaringa.** Tokioje išplėstoje sistemoje išvedamos ne tik visos tapačiai teisingos formulės, bet ir kai kurios formulės, kurios nėra visada tapačiai teisingos, bet yra teisingos tam tikroje srityje (pavyzdžiui, srityje, kurioje egzistuoja tik vienas objektas).

Pažymėsime taip pat, kad nors mūsų nagrinėjamoje aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje **galima išvesti be galo daug tapačiai teisingų teiginių skaičiavimo formulių**, tačiau **išvedamos formulės sudaro tik labai nedidelę dalį visų teiginių algebros formulių**, kurias galima sudaryti, naudojantis loginėmis jungtimis „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “ ir „ $\neg$ “.

Tai labai nesunku įrodyti, jei prisiminsime, kad tarp 2^{2^n} **funkcionaliai skirtingų teiginių algebros funkcijų, turinčių n argumentų, tik viena funkcija yra tapačiai lygi 1.** Visos teiginių skaičiavime išvedamos formulės, būdamos tapačiai lygios 1, yra **funkcionaliai ekvivalenčios ir skiriasi viena nuo kitos tik savo struktūra.** Tačiau tos struktūros, būdamos neizomorfiškomis, vis dėl to yra ne bet kokios, o tokios, kad užtikrina išvedamoms formulėms absoliutų teisingumą: esant bet kokioms į tas formules įeinančių elementarių teiginių reikšmėms, tos formulės išlieka teisingos, t. y. jos yra tapačiai lygios loginiam vienetui.

Kitaip tariant, **išvedamos teiginių skaičiavime formulės yra (panašiai kaip ir anksčiau nagrinėtieji silogizmai) tam tikros teisingo mąstymo formulės, t. y. tokios faktų ir elementarių teiginių apie juos jungimo loginėmis jungtimis konstrukcijos, kurios visada išlieka logiškai teisingomis, nepriklausomai nuo to,**

* Formalių teorijų **formalaus ir neformalaus pilnumo** apibrėžimus ir pavyzdžius galima rasti šių eilučių autoriaus knygelėse [53, 54, 55, 56, 65]. Ten pateikti ir atitinkamų metateoremų įrodymai.

kokie tie faktai bebūtų. **Jos yra teisingos dėl to, kad turi tokią struktūrą, kuri užtikrina formulės teisingumą, nepriklausanti nuo formulės semantinio turinio,** kuri galėtume jai suteikti, tą formulę interpretuodami.

Tą patį galima pasakyti ir apie išvedamas predikatų skaičiavimo formules, kurias dar nagrinėsime 1.16.1.5.4. skyrelyje.

Todėl į teiginių ir predikatų skaičiavimo sistemas galima žiūrėti kaip į formalias dedukcines sistemas, skirtas teisingo mąstymo tapachiai teisingų formulių gamybai, kaip į dirbtinio intelekto sudėtinę dalį, leidžiančią formalizuoti ir algoritmizuoti, o po to – ir kompiuterizuoti dedukcinio mąstymo procesus.

Tai ir yra viena iš priežasčių, dėl ko mes gana detalai nagrinėjame tokias sistemas sistemotyros kurse, nors ir neskirdami joms tiek dėmesio, koks joms yra skiriamas specialiuose matematinės logikos kursuose.

Reikia pažymėti, jog klasikiniuose matematinės logikos kursuose teiginių ir predikatų skaičiavimą nagrinėja ne tik ir ne tiek dėl čia ką tik išvardintų priežasčių, t. y. ne tik ir ne tiek kaip viena iš intelekto formalizavimo ir automatizavimo priemonių, o ir kaip **matematikos pagrindų** ir, bendrai, **metamatematikos sudėtinę dalį**, apie ką mes čia dar pakalbėsime, baigdami formaliųjų dedukcinių sistemų apžvalgą.

Nagrinėjamoji aksiomatinė teiginių skaičiavimo sistema nėra vienintelė galima. Dar vienoje šių eilučių autoriaus knygelėje [81] nagrinėjamos kitos aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos, pavadintos knygų, kuriose tos sistemos buvo aprašytos, autorių vardais: Klini sistema, besiskirianti nuo čia nagrinėtos tik kai kurių aksiomų struktūra; Hilberto – Akermano sistema, kurioje naudojamos tik dvi loginės jungtys „ $\vee$ “ ir „ $\neg$ “ ir kurioje dėl to yra tik 4 aksiomos; Rosero sistema, kurioje naudojamos loginės jungtys „ $\wedge$ “ ir „ $\neg$ “ ir yra tik trys aksiomos; Niko (Nikoda) sistema, kurioje naudojama tik viena loginė jungtis „ $\rightarrow$ “ (Šeferio štrichas) ir kurioje todėl yra tik viena aksioma, bei eilė kitų sistemų (Frege, Mendelsono, Čiorčo, Čeredito ir t. t.). Jų tarpe paminėtina ir lenkų logiko Lukasievičiaus sistema, kuri išsiskiria iš kitų naudojama formalia matematinės logikos kalba (ir simbolika, ir sintakse). Lukasievičiaus sistemoje loginės operacijos žymimos didžiosiomis raidėmis (K – konjunkcija, D – disjunkcija, N – neigimas, C – implikacija) ir tie žymėjimai vartojami kaip **loginiai operatoriai**, kurie rašomi **prieš savo operandus** – elementarius teiginius, žymimus mažosiomis lotyniškėmis raidėmis ir rašomus be skliaustelių. Pavyzdžiui, aksioma, kurią mes buvome pažymėję A.I.1, Lukasievičiaus sistemoje atrodytų $\vdash \text{CpCqp}$. Ši formulė reiškia, jog implikaciją, kurią vaizduoja pirmoji C, sudaro du operandai: 1) elementarus teiginys p ir 2) implikacija, žymima antrąja C, jungiančia savo operandus – elementarius teiginius q ir p. Aksioma, pažymėta A.I.2, Lukasievičiaus sistemoje būtų užrašyta formule $\vdash \text{CCpCqCpCqCp}$, aksioma A.II.1 – formule $\vdash \text{CKpqp}$, aksioma A.II.2 – formule $\vdash \text{CKpqq}$, o aksioma A.II.3 – formule $\vdash \text{CCpqCCprCpKqr}$ ir t. t. Kaip matome, naudojama formulių užrašymo sintaksė tikrai leidžia nesinaudoti skliausteliais, kas yra patogu kompiuterizuojant simbolines algebrines sistemas, priklausančias tiek loginei, tiek kiekybinei algebrai. Juk šią formulių formavimo sintaksę galima perkelti iš teiginių algebros į aritmetiką ir į skaičių algebrą. Pavyzdžiui, formulę $((a-b \cdot c) : (c-d+a \cdot b)) \cdot (c-d)$ būtų galima užrašyti be skliaustelių kaip formulę $\cdot :-a \cdot bc + \cdot cd \cdot ab - cd$. Sutikęs tokią formulę ir perskaitęs pirmąjį jos simbolį – daugybos ženklą „ $\cdot$ “, kompiuteris pasiruoštų daugybai ir pradėtų ieškoti tos daugybos operandų. Perskaitęs antrąjį jos simbolį – dalybos ženklą „ $:$ “, kompiuteris nuspręstų, jog pirmąjį daugybos operandą jis galėtų gauti, įvykdęs dalybos operaciją. Todėl jis pradėtų ieškoti pirmojo dalybos operacijos operando. Perskaitęs trečiąjį formulės simbolį – atimties ženklą „ $-$ “, kompiuteris nuspręstų, jog pirmąjį dalybos

operandą jis gautų, įvykdęs atimties operaciją. Todėl jis pradėtų ieškoti atimties operacijos operandų. Perskaitęs ketvirtąjį simbolį – raidę „a“, kompiuteris nuspręstų, jog pirmasis atimties operacijos operandas yra „a“, ir pradėtų ieškoti antrojo tos operacijos operando. Perskaitęs penktąjį simbolį – daugybos ženklą „·“, kompiuteris nuspręstų, jog antrąjį atimties operandą jis gautų, įvykdęs daugybos operaciją, ir todėl pradėtų ieškoti tos operacijos operandų. Perskaitęs šeštąjį simbolį – raidę „b“, kompiuteris nuspręstų, jog pirmasis šios daugybos operacijos operandas yra „b“ ir pradėtų ieškoti antrojo tos operacijos operando. Perskaitęs septintąjį simbolį – raidę „c“, kompiuteris nuspręstų, kad antrasis daugybos operandas yra „c“ ir įvykdytų daugybos operaciją, t. y. gautų antrąjį atimties operacijos operandą. Turėdamas abu atimties operandus, kompiuteris įvykdytų atimtį ir gautų pirmąjį dalybos operandą. Suradęs pirmąjį dalybos operandą, kompiuteris pradėtų ieškoti antrojo tos operacijos operando, t. y. perskaitytų aštuntąjį duotosios formulės simbolį – sudėties ženklą „+“, iš ko nuspręstų, jog antrasis dalybos operandas yra suma. Todėl jis pradėtų ieškoti pirmojo sudėties operacijos operando. Perskaitęs devintąjį formulės simbolį – daugybos ženklą „·“, kompiuteris nuspręstų, jog pirmasis sudėties operacijos operandas yra sandauga. Todėl jis pradėtų ieškoti pirmojo daugybos operacijos operando ir perskaitytų dešimtąjį duotosios formulės simbolį – raidę „c“. Suradęs pirmąjį daugybos operacijos operandą, kompiuteris pradėtų ieškoti antrojo operando ir perskaitytų vienuolikąjį simbolį – raidę „d“. Įvykdęs daugybos operaciją $c \cdot d$, kompiuteris gautų pirmąjį sudėties operacijos operandą ir pradėtų ieškoti antrojo. Perskaitęs dvylikąjį simbolį – daugybos ženklą „·“, kompiuteris nuspręstų, jog antrasis sudėties operandas yra sandauga, ir pradėtų ieškoti daugybos operacijos operandų. Perskaitęs trylikąjį duotosios formulės simbolį – raidę „a“, kompiuteris nuspręstų, jog „a“ yra pirmasis sandaugos operandas, ir pradėtų ieškoti antrojo. Perskaitęs keturiolikąjį simbolį, kompiuteris surastų raidę „b“ ir įvykdytų daugybos operaciją $a \cdot b$, gaudamas antrąjį sudėties operacijos operandą. Įvykdęs sudėties operaciją $cd + ab$, kompiuteris galų gale gautų antrąjį dalybos operacijos operandą ir galėtų įvykdyti šią operaciją. Įvykdęs dalybos operaciją $(a - bc) : (cd + ab)$, kompiuteris gautų pirmąjį daugybos operacijos operandą ir pradėtų ieškoti antrojo jos operando. Perskaitęs penkiolikąjį duotosios formulės simbolį – atimties operacijos ženklą „-“, kompiuteris nuspręstų, jog antrasis daugybos operacijos operandas yra atimties operacijos rezultatas, ir pradėtų ieškoti pirmojo atimties operacijos operando. Perskaitęs šešiolikąjį simbolį – raidę „c“, kompiuteris nuspręstų, jog „c“ – pirmasis atimties operacijos operandas, ir pradėtų ieškoti antrojo. Perskaitęs septyniolikąjį duotosios formulės simbolį – raidę „d“, kompiuteris nuspręstų, jog „d“ – antrasis atimties operacijos operandas, ir įvykdytų operaciją, gaudamas skirtumą $c - d$ – antrąjį daugybos operacijos operandą. Įvykdęs daugybos operaciją, kompiuteris įvykdytų paskutinę duotojoje formulėje užrašytą operaciją (sintaksiškai ji buvo pirmoji) ir gautų galutinį rezultatą $[(a - bc) : (cd + ab)](c - d)$.

Taigi, Lukasievičius **beskliaustelinėje notacijoje** užrašytos formulės, nors ir atrodo mūsų akiai, pripratusiai prie kitoniškos notacijos, gana neįprastai, yra gana patogios, kai jų reikšmes reikia apskaičiuoti kompiuteriu, nes tose formulėse nuosekliai užrašytų simbolių seka vaizduoja nuoseklų informacijos kaupimo (apimant ir informacijos apdorojimą) kompiuteryje algoritmą, kurio veikimo gale, „nešokinėjant“ formule (pirmyn – atgal – ir vėl pirmyn), gaunamas reikiamas rezultatas.

Visos iki šiol čia išvardintos aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos priklauso taip vadinamų **klasikinės logikos formalių dedukcinių sistemų** grupei.

Yra dar ir kita įdomi grupė – **neklasikinių logikų** grupė. Susipažinimui su tokiais logiškais šioje mokymo priemonėje išskirtas specialus – 1.16.1.5.6. – skyrelis. Čia, norėdamas parodyti, jog, **šiek tiek pakeitę aksiomų sistemą, žinomas logines jungtis galime implicitiškai apibrėžti jau visai kitaip negu įprasta klasikinėse logikose**, paminėsiu tik vieną neklasikinių logikų grupę. Ta grupė – **intuicionistinės logikos** sistemų grupė. Ji, būdama formalų dedukcinių sistemų grupę, skiriasi nuo klasikinės logikos formalų sistemų visų pirma tuo, kad **intuicionistinėse formaliose sistemose negali būti išvestos formulės $\vdash A \vee \neg A$ ir $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$** .

Ši intuicionistinių sistemų savybė nėra nepakankamo tų sistemų pilnumo išdava, o specialaus aksiomų sistemos parinkimo rezultatas, nes intuicionistinės logikos pradininkai, suabejoję formulių $A \vee \neg A$ ir $\neg\neg A \rightarrow A$ visuotinu teisingumu, **specialiai parinko tokią aksiomų sistemą**, kad šių formulių išvesti nebūtų galima.

Pažymėtina, jog **intuicionistinės logikos formalios sistemos neturi interpretacijų logikose, turinčiose baigtinį reikšmių skaičių**, kai tuo tarpu visos klasikinės logikos sistemos natūraliai interpretuojamos dvireikšmėje logikoje. Tai reiškia, jog klasikinėse formaliose sistemose vartojamos loginės jungtys „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “, „ $\neg$ “, „ $/$ “ ir pan. gali būti interpretuojamos kaip tais pačiais ženklais žymimos teiginių algebros operacijos: konjunkcija „ $\wedge$ “, disjunkcija „ $\vee$ “, materialioji implikacija „ $\rightarrow$ “, loginis neigimas „ $\neg$ “, Šeferio štrichas „ $/$ “ ir pan., t. y. **ženklai „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “, „ $\neg$ “, „ $/$ “ ir pan. ir klasikinėse formaliose sistemose ir teiginių algebroje, kurios uždavinius mes nagrinėjome 1.16.1.1, 1.16.1.2, 1.16.3 ir 1.16.4 skyreliuose, reiškia tą patį**. Tuo tarpu intuicionistinėse formaliose sistemose vartojami loginių jungčių ženklai „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “, „ $\neg$ “ reiškia visai ką kitą, ne tik nesutampantį su taip pat žymimomis klasikinės teiginių algebros operacijomis, bet ir neturintį jokių interpretacijų logikose, turinčiose baigtinį loginių reikšmių skaičių. Tas intuicionistinių formalų sistemų logines jungtis galima interpretuoti tam tikromis loginėmis operacijomis tik logikose, turinčiose be galo daug loginių reikšmių.

Su viena iš labiausiai populiarių intuicionistinių sistemų skaitytojas gali susipažinti knygelėje [81], o jei jį sudomino, kaip ir kodėl atsirado intuicionistinė logika, – knygoje [253÷255]. Apie intuicionistinę logiką ir jos kilmę bus dar gana plačiai kalbama 1.16.1.5.5.6. skyrelyje.

Klasikinį teiginių skaičiavimą tam tikra prasme galima būtų laikyti intuicionistinio teiginių skaičiavimo plėtinium, nes visos teoremos, kurios išvedamos intuicionistinėje logikoje, yra išvedamos ir klasikinėje logikoje, o šalia to klasikinėse logikose išvedama eilė teoremų, tokių kaip $\vdash A \vee \neg A$, $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ ir pan., kurios nėra išvedamos intuicionistinėje logikoje, tačiau, kaip jau buvo pažymėta, abu tie skaičiavimai turi visiškai skirtingas interpretacijas.

Ir intuicionistinį, ir klasikinį teiginių skaičiavimus galima laikyti skirtingais **minimalaus Johansono–Kolmogorovo teiginių skaičiavimo plėtiniais**. Apie minimalų teiginių skaičiavimą skaitytojas gali pasiskaityti šių eilučių autoriaus knygelėje [81], o taip pat JAV logiko A. Čiorčo (A. Church) knygoje „Introduction to Mathematical Logic“ [256] (yra vertimas į rusų kalbą „Введение в математическую логику“), kur gana sistematizuotai apžvelgiamos įvairios loginės sistemos.

Intarpo 2 į 1300 p. tęsinys 5

1.16.1.5.3. Natūraliosios dedukcijos sistemos

Formalios dedukcinės loginės sistemos (ir klasikinės, ir intuicionistinės) gali būti konstruojamos ne tik kaip aksiomatinės, bet ir kaip taip vadinamos **natūraliosios**

dedukcijos sistemos, kuriose iš viso nėra aksiomų, o tik išvedimo taisyklės. Tokios sistemos pirmą kartą buvo aprašytos 1934 m. Jas nepriklausomai vienas nuo kito pasiūlė lenkų logikas S. Jaskovskis ir vokiečių logikas G. Gentzenas.

Knygelėje [81] aprašyta viena tokių sistemų, kurios autoriai yra lenkų logikai Slupeckis ir Borkovskis. Toje pat knygelėje įrodyta, jog Slupeckio ir Borkovskio **natūraliosios dedukcijos sistema tik savo forma skiriasi nuo mūsų anksčiau nagrinėtosios aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos ir yra ekvivalenti pastarajai**: kiekviena teorema, kuri yra išvedama klasikinėje aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje, yra išvedama ir natūraliosios dedukcijos Slupeckio ir Borkovskio sistemoje, ir atvirkščiai – kiekviena teorema, kuri yra išvedama Slupeckio ir Borkovskio sistemoje, yra išvedama ir klasikinės aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemoje.

Intarpo 2 į 1300 p. tęsinys 5

Prie natūraliosios dedukcijos sistemų priskiriamos ir sistemos, kurios vartoja G. Gentzeno pasiūlytąjį **sekvencijų** aparatą.

Sekvencija vadinama loginių formulių eilutė $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{m-1}, \mathcal{B}_m$, kurioje formulės $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_n$ vadinamos sekvencijos priešakinėmis formulėmis, arba jos **antecedentu**, o formulės $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{m-1}, \mathcal{B}_m$ – užpakalinėmis formulėmis, arba sekvencijos **sukcedentu**.

Užrašas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{m-1}, \mathcal{B}_m$ reiškia formulę (teoremą) $\vdash (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n) \rightarrow (\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \vee \dots \vee \mathcal{B}_m)$.

Skaičiai n ir m sekvencijoje gali turėti bet kokias sveikas neneigiamas reikšmes, tame tarpe gali būti lygūs ir 0.

Kai $n=0$, t. y., kai sekvencijos antecedentas yra tuščias, tai gauname sekvenciją $\vdash \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{m-1}, \mathcal{B}_m$, reiškiančią besąlyginai išvedamą (ir todėl tapatai teisingą) formulę $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \vee \dots \vee \mathcal{B}_m$.

Kai $m=0$, t. y., kai sekvencijos sukcedentas yra tuščias, tai gauname sekvenciją $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_n \vdash$, reiškiančią formulę $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \vdash$, kurią reikia interpretuoti kaip prieštarų (nesuderinamų) prielaidų konjunkciją.

Kai $n=0$ ir $m=0$, gauname „tuščią sekvenciją“, reiškiančią, jog nagrinėjamoje sistemoje be jokių papildomų prielaidų gaunamas prieštaravimas, kitaip tariant, **jei kokioje nors sistemoje galima išvesti tuščią sekvenciją, tai tokia sistema yra vidiniai prieštaringa**.

Naudojantis sekvencijų metodu, formulės išvedamos panašiai kaip ir Slupeckio ir Borkovskio natūraliosios dedukcijos sistemoje, t. y. naudojantis formulių išvedimo taisyklėmis, panašiomis į mums jau žinomą modus ponens. Išvedimo taisyklės pateikiamos kaip išvedimo figūrų schemos, turinčios „trupmenų“ formą.

Išvedimo figūrų schemą (IFS) sudaro:

1) sekvencija (arba dvi sekvencijos) – „trupmenos“ „skaitiklis“, vaizduojantis atitinkamos išvedimo taisyklės „operandą“ („operandus“), t. y. formulę (formules), kuriai (kurioms) taikoma ta išvedimo taisyklė;

2) sekvencija – „trupmenos“ „vardiklis“, vaizduojantis atitinkamos išvedimo taisyklės taikymo „skaitiklio“ sekvencijai (sekvencijoms) rezultatą, t. y. išvestąją formulę, išplaukiančią iš formulių, esančių „trupmenos“ „skaitiklyje“.

Sekvencijose, įeinančiose į išvedimo figūrų schemų „skaitiklius“ ir „vardiklius“ vartojamos ne tik didžiosios gotiškos raidės $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ ir t. t., žyminčios **propozicines formules** (sudėtingus bei elementarius teiginius), bet ir didžiosios

graikiškos raidės $\Delta, \Gamma, \Theta, \Omega, \Lambda, \Sigma, \Pi$ ir t. t., žyminčios tokių **formulių sekas**. Tos sekos gali būti įvairios, tačiau vienoje ir toje pačioje IFS vienodos graikiškos raidės žymi tą pačią propozicinių formulių seką. Formulių sekos gali turėti bet kokių formulių skaičių, gali būti net ir tuščios, nes tos sekos, tai sekos formulių, kurios išvedimų figūrų schemose dalyvauja tik pasyviai, tik savo pasyviu buvimu. Su jomis, pereinant nuo IFS „skaitiklio“ prie IFS „vardiklio“ jokių loginių operacijų ir jokių struktūrinių pertvarkymų nevyksta, todėl toms sekoms priklausančių formulių gali ir nebūti, t. y. tos sekos gali būti ir tuščios. Gotiškos ir graikiškos raidės gali būti be indeksų ir su jais. Formulės ir formulių sekos sekvencijose atskiriamos viena nuo kitos kableliais, o sekvencijos, esančios vienoje „trupmenoje“ – kabliataškiais.

Priklausomai nuo to, kokios propozicinės jungtys bus naudojamos konstruojamoje teiginių skaičiavimo sistemoje, gali būti sukurtos įvairių išvedimo taisyklių – išvedimo figūrų schemų – sistemos, panašiai kaip aksiomatinėse teiginių skaičiavimo sistemose – įvairios aksiomų sistemos. Svarbu tik parinkti tas išvedimo taisykles taip, kad jos leistų išvesti **tik teisingas** propozicines formules, o pilnose sistemose – **visas teisingas** propozicines formules.

Kad skaitytojas galėtų susidaryti bendrą supratimą apie natūraliosios dedukcijos sistemas ir apie sekvencijų metodą, pateiksiu vieną **išvedimo figūrų schemų sistemos** variantą.

Toje sistemoje IFS sugrupuotos į loginių ir struktūrinių IFS grupes. Loginės IFS implicitiškai apibrėžia logines jungtis, klasikiniame teiginių skaičiavime atitinkančias tam tikras logines operacijas, atliekamas su teiginiais, o struktūrinės IFS išreiškia leistinų struktūrinių pertvarkymų sekvencijų antecedentuose ir sukcedentuose taisykles.

Loginių išvedimo figūrų schemos:

- 1) konjunkcijos įvedimo į antecedentą IFS

$$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Theta, \mathcal{B}, \Gamma \vdash \Theta}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \Gamma \vdash \Theta} \text{ (KIA)};$$

- 2) konjunkcijos įvedimo į sukcedentą IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A}; \Gamma \vdash \Theta, \mathcal{B}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}} \text{ (KIS)};$$

- 3) disjunkcijos įvedimo į antecedentą IFS

$$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Theta; \mathcal{B}, \Gamma \vdash \Theta}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \Gamma \vdash \Theta} \text{ (DIA)};$$

- 4) disjunkcijos įvedimo į sukcedentą IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}}, \frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{B}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \text{ (DIS)};$$

- 5) neigimo įvedimo į antecedentą IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A}}{\neg \mathcal{A}, \Gamma \vdash \Theta} \text{ (NIA)};$$

- 6) neigimo įvedimo į sukcedentą IFS

$$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg \mathcal{A}} \text{ (NIS)};$$

- 7) implikacijos įvedimo į antecedentą IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A}; \mathcal{B}, \Delta \vdash \Omega}{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Omega} \text{ (IIA)};$$

- 8) implikacijos įvedimo į sukcedentą IFS

$$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Theta, \mathcal{B}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} \text{ (IIS)};$$

Struktūrinių (struktūrinių pakeitimų) išvedimo figūrų schemos:

- 1) perstatymo antecedente IFS

$$\frac{\Delta, \mathcal{U}, \mathcal{B}, \Gamma \vdash \Theta}{\Delta, \mathcal{B}, \mathcal{U}, \Gamma \vdash \Theta} \text{ (PA)};$$
- 2) perstatymo sukcedente IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{U}, \mathcal{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{B}, \mathcal{U}, \Delta} \text{ (PS)};$$
- 3) absorbcijos (eliminavimo) antecedente IFS

$$\frac{\mathcal{U}, \mathcal{U}, \Gamma \vdash \Theta}{\mathcal{U}, \Gamma \vdash \Theta} \text{ (AA)};$$
- 4) absorbcijos (eliminavimo) sukcedente IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{U}, \mathcal{U}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{U}} \text{ (AS)};$$
- 5) antecedento papildymo IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\mathcal{U}, \Gamma \vdash \Theta} \text{ (AP)};$$
- 6) sukcedento papildymo IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{U}} \text{ (SP)};$$
- 7) pjūvio IFS

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \mathcal{U}; \mathcal{U}, \Delta \vdash \Omega}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Omega} \text{ (P)}.$$

Panašiai kaip ir Slupeckio ir Borkovskio išvedimo taisyklių atveju, taip ir sekvencinių IFS atveju nesunku įsitikinti, jog kiekvienoje iš čia pateiktų IFS iš sekvencijų, vaizduojančių tapačiai teisingas formules, išvedamos tik tapačiai teisingos formules, t. y. kad, **naudodamies šiomis IFS, mes gausime išoriškai (neformaliai) neprieštarinę teiginių skaičiavimo sistemą.**

Taip pat nesunku įsitikinti, jog ši **sistema yra ir vidiniai (formaliai) neprieštaringa**, t. y., kad joje negalima išvesti kokią nors formulę ir jos neiginį.

Kadangi, kaip parodysime vėliau, naudojantis čia pateiktomis IFS, galima išvesti visas (11) 1.16.1.5.2. skyrelyje mūsų jau nagrinėtojo aksiomatinio teiginių skaičiavimo aksiomas, tai iš to išplaukia (kadangi **minėtasis aksiomatinis teiginių skaičiavimas yra substancionaliai pilna sistema**), jog, naudodamiesi čia pateiktomis IFS, mes galime išvesti **visas** tapačiai teisingas propozicines formules, t. y., kad ir **sekvencinis teiginių skaičiavimas yra substancionaliai pilna sistema.**

Tačiau čia pateiktų IFS sistema nėra vienintelė galima. Knygelėje [81] galima susipažinti su kitomis IFS sistemomis: ir klasikinėmis, ir intuicionistinėmis.

Formulių išvedimą, naudojantis sekvencijų metodu, galima pavaizduoti kaip daugiapakopę šakoto medžio formos schemą (figūrą), sudarytą iš IFS, sutapatinant aukščiau esančių IFS „vardiklius“ su tuoju po jų sekančių (žemiau esančių) IFS „skaitikliais“. Tokiu būdu **formulės išvedimą sudaro perėjimai, naudojantis išvedimo taisyklėmis, nuo aukščiau esančių tapačiai teisingų sekvencijų prie žemiau esančių, pradedant nuo vienos ar kelių „pagrindinių sekvencijų“ ir baigiant ta sekvencija, kurią reikėjo išvesti.**

„**Pagrindinės sekvencijos**“, nuo kurių pradedamas bet kurios formulės išvedimas, gali būti loginės ir matematinės.

„**Pagrindinė loginė sekvencija**“ – tai sekvencija, turinti formą $\mathcal{U} \vdash \mathcal{U}$, kur $\mathcal{U}$ – bet kuri propozicinė formulė (paprastas ar sudėtingas teiginys). Tokia sekvencija yra visada teisinga. Naudojantis pagrindinėmis loginėmis sekvencijomis į loginės formulės

išvedimo procesą gali būti įvesti tai formulei išreikšti reikalingi įvairūs teiginiai bei iš jų sudarytos formulės: $A \vdash A$, $B \vdash B$, $A \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ ir t. t.

„**Pagrindinė matematinė sekvencija**“ – tai sekvencija $\vdash \mathcal{B}$, kur $\mathcal{B}$ – kokia nors matematikos aksioma, pavyzdžiui $\vdash a+b=b+a$, $\vdash a \cdot b=b \cdot a$ ir t. t.

Teiginių skaičiavime ir siaurajame predikatų skaičiavime formulių išvedimui naudojamos tik „pagrindinės loginės sekvencijos“. „Pagrindinės matematinės sekvencijos“ naudojamos formalizuojant teoremų išvedimą aksiomatinėje aritmetikoje, geometrijoje ir kitose matematikos dalyse.

Pailiustruosiu kai kurių formulių išvedimo procesą, naudodamasis sekvencijų metodu.

Išvesime formulę $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$, kurią aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje buvome priėmę aksioma A.I.1.

$A \vdash A$ – „pagrindinė loginė sekvencija“ (PLS);

———— – perėjimas, naudojantis AP taisykle;

$B, A \vdash A$ – to perėjimo rezultatas;

———— – perėjimas, naudojantis IĮS taisykle;

$A \vdash B \rightarrow A$ – to perėjimo rezultatas;

———— – perėjimas, naudojantis IĮS taisykle;

$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ – to perėjimo rezultatas – formulė A.I.1.

Toliau išvedimo procesą taip išplėstai nebekomentuosiu, o tik ties „trupmenų“ brūkšneliais rašysiu perėjimui nuo „skaitiklio“ į „vardiklį“ panaudotos IFS santrumpą. Pavyzdžiui, formulės $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ išvedimo procesą vaizduosime taip:

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{B, A \vdash A} \{AP\}}{A \vdash B \rightarrow A} \{IIS\}}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)} \{IIS\}.$$

Išvesime formulę $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$, t. y. A.IV.2:

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash} \{N[A]\}}{A \vdash \neg \neg A} \{N[IS]\}}{\vdash A \rightarrow \neg \neg A} \{IIS\}.$$

Išvesime formulę $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$, t. y. A.IV.3:

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \{N[IS]\}}{\neg \neg A \vdash A} \{N[A]\}}{\vdash \neg \neg A \rightarrow A} \{IIS\}.$$

Išvesime A.II.1, t. y. formulę $\vdash A \wedge B \rightarrow A$:

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A \wedge B \vdash A} \{K[A]\}}{\vdash A \wedge B \rightarrow A} \{IIS\}.$$

Išvesime A.II.2, t. y. formulę $\vdash A \wedge B \rightarrow B$:

$$\frac{\frac{B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \{K[A]\}}{\vdash A \wedge B \rightarrow B} \{IIS\}.$$

Išvesime A.III.1, t. y. formulę $\vdash A \rightarrow A \vee B$:

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B} \{D[IS]\}}{\vdash A \rightarrow A \vee B} \{IIS\}.$$

Išvesime A.III.2, t. y. formulę $\vdash B \rightarrow A \vee B$:

$$\frac{\frac{B \vdash B}{B \vdash A \vee B} \{D[IS]\}}{\vdash B \rightarrow A \vee B} \{IIS\}.$$

Išvesime A.IV.1, t. y. formulę $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$:

$$\begin{array}{l}
\frac{A \vdash A; B \vdash B}{A \rightarrow B, A \vdash B} \quad \{IIA\}; \\
\frac{A \rightarrow B, A \vdash B}{\neg B, A \rightarrow B, A \vdash} \quad \{NIA\}; \\
\frac{\neg B, A \rightarrow B, A \vdash}{A, \neg B, A \rightarrow B \vdash} \quad \{PA\}; \\
\frac{A, \neg B, A \rightarrow B \vdash}{\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A} \quad \{NIS\}; \\
\frac{\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A}{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A} \quad \{IIS\}; \\
\frac{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \quad \{IIS\}.
\end{array}$$

Išvesime A.II.3, t. y. formulę $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$:

$$\begin{array}{l}
\frac{A \vdash A; B \vdash B}{A \rightarrow B, A \vdash B} \quad \{IIA\}; \quad \frac{A \vdash A; C \vdash C}{A \rightarrow C, A \vdash C} \quad \{IIA\}; \\
\frac{A \rightarrow B, A \vdash B}{A \rightarrow C, A \rightarrow B, A \vdash B} \quad \{AP\}; \quad \frac{A \rightarrow C, A \vdash C}{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash C} \quad \{AP\}; \\
\frac{A \rightarrow C, A \rightarrow B, A \vdash B}{A, A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash B} \quad \{PA\}; \quad \frac{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash C}{A, A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash C} \quad \{PA\}; \\
\frac{A, A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash B \wedge C}{A, A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash B \wedge C} \quad \{KIS\}; \\
\frac{A, A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash B \wedge C}{A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \wedge C} \quad \{IIS\}; \\
\frac{A \rightarrow C, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \wedge C}{A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)} \quad \{IIS\}; \\
\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)) \quad \{IIS\}.
\end{array}$$

Išvesime A.III.3, t. y. formulę $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$:

$$\begin{array}{l}
\frac{A \vdash A; C \vdash C}{A \rightarrow C, A \vdash C} \quad \{IIA\}; \quad \frac{B \vdash B; C \vdash C}{B \rightarrow C, B \vdash C} \quad \{IIA\}; \\
\frac{A \rightarrow C, A \vdash C}{B \rightarrow C, A \rightarrow C, A \vdash C} \quad \{AP\}; \quad \frac{B \rightarrow C, B \vdash C}{A \rightarrow C, B \rightarrow C, B \vdash C} \quad \{AP\}; \\
\frac{B \rightarrow C, A \rightarrow C, A \vdash C}{A, B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash C} \quad \{PA\}; \quad \frac{A \rightarrow C, B \rightarrow C, B \vdash C}{B, B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash C} \quad \{PA\}; \\
\frac{A, B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash C}{A \vee B, B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash C} \quad \{DIS\}; \\
\frac{A \vee B, B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash C}{B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C} \quad \{IIS\}; \\
\frac{B \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C}{A \rightarrow C \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)} \quad \{IIS\}; \\
\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)) \quad \{IIS\}.
\end{array}$$

Išvesime A.I.2, t. y. formulę $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$:

$$\begin{array}{l}
\frac{A \vdash A}{A \vdash A, C} \quad \{SP\}; \quad \frac{A \vdash A}{A \vdash A, C} \quad \{SP\}; \quad \frac{B \vdash B}{B \vdash B, A \rightarrow C} \quad \{SP\}; \quad \frac{C \vdash C}{A, C \vdash C} \quad \{AP\}; \\
\frac{A \vdash A, C}{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vdash A, C} \quad \{AP\}; \quad \frac{A \vdash A, C}{\vdash A, A \rightarrow C} \quad \{IIS\}; \quad \frac{B \vdash B, A \rightarrow C}{B \vdash A \rightarrow C, B} \quad \{PS\}; \quad \frac{A, C \vdash C}{C \vdash A \rightarrow C} \quad \{IIS\}; \\
\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vdash A, C}{A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, C} \quad \{PA\}; \quad \frac{\vdash A, A \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C, A} \quad \{PS\}; \quad \frac{B \vdash A \rightarrow C, B}{B \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C} \quad \{AS\}; \\
\frac{A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, C}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, A \rightarrow C} \quad \{IIS\}; \quad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C} \quad \{IIA\}; \\
\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A} \quad \{PS\}; \quad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C}{B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C} \quad \{PA\}; \\
\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A}{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C} \quad \{IIA\}; \\
\frac{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)} \quad \{IIS\}; \\
\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \{IIS\}.
\end{array}$$

Taigi, naudodamiesi sekvenčių metodu, išvedėme visas 1.16.1.5.2. skyrelyje mūsų nagrinėtos aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos aksiomas. Tai reiškia, jog kiekviena teorema, kuri yra išvedama aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje, yra išvedama ir nagrinėjamoje natūraliosios dedukcijos sistemoje, naudojantis sekvenčių metodu.

Pavyzdžiui, išvesime $T1 \vdash A \rightarrow A$:

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A} \quad \{IIS\}.$$

Išvesime $T2 \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$:

$$\begin{array}{l}
\frac{B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \quad \{KIA\}; \quad \frac{A \vdash A}{A \wedge B \vdash A} \quad \{KIA\}; \\
\frac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A} \quad \{KIS\}; \\
\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A \quad \{IIS\}.
\end{array}$$

Kaip nesunku pastebėti, naudojantis sekvenčių metodu, teoremas išvesti yra lengviau ir patys jų išvedimai dažniausiai yra žymiai trumpesni, negu naudojantis aksiomatinio metodu, kuomet kartais būna gana neaišku, net nuo ko pradėti.

Kitaip tariant, **formulių išvedimas, naudojantis sekvencijų metodu, reikalauja žymiai mažiau išradingumo, negu tuo atveju, kai naudojamos aksiomatinis metodu.**

Kad tuo įsitikintume, pakanka palyginti tokių teoremų kaip $\vdash A \vee \neg A$, $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ bei $\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ išvedimą aksiomatinėje sistemoje (žiūr. knygelę [53], kurioje duotas tų formulių išvedimas aksiomatinėje sistemoje, užimantis gana daug vietos ir reikalaujantis nemažo išradingumo) ir naudojantis sekvencijų metodu.

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \{N[S]; \\
 \frac{\vdash A, \neg A}{\vdash A, A \vee \neg A} \{D[S]; \\
 \frac{\vdash A \vee \neg A, A}{\vdash A \vee \neg A, A} \{PS}; \\
 \frac{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}{\vdash A \vee \neg A} \{AS\}; \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{B \vdash B}{A \vdash A; B \vdash \neg A \vee B} \{D[S]; \\
 \frac{A \vdash A; B \vdash \neg A \vee B}{A \rightarrow B; A \vdash \neg A \vee B} \{I[S]; \\
 \frac{A \rightarrow B; A \vdash \neg A \vee B}{A, A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B} \{PA}; \\
 \frac{A, A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B}{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B} \{N[S]; \\
 \frac{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B, \neg A \vee B}{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B} \{D[S]; \\
 \frac{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B}{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B} \{AS}; \\
 \frac{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)} \{I[S]; \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{A \vdash A, B} \{SP}; \\
 \frac{A \vdash A, B}{A \vdash B, A} \{PS}; \\
 \frac{A \vdash B, A}{\neg A, A \vdash B} \{N[A]; \\
 \frac{\neg A, A \vdash B}{A, \neg A \vdash B} \{PA}; \\
 \frac{A, \neg A \vdash B}{\neg A \vdash A \rightarrow B} \{I[S]; \\
 \frac{\neg A \vdash A \rightarrow B}{\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B} \{I[S]; \\
 \frac{\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B}{\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)} \{I[S]; \\
 \end{array}$$

Kadangi sekvencijų metodu galima išvesti bet kurią formulę, išvedamą aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje, kuri yra formaliai ir neformaliai (vidiniai ir išoriškai) pilna, tai ir nagrinėjamoji sekvencinė sistema, turinti 8 logines ir 7 struktūrines IFS, taip pat yra formaliai ir neformaliai pilna (žiūr. [53, 81]).

Formulių išvedimą, naudojantis sekvencijų metodu, galima atlikti ne tik „nuo viršaus į apačią“, t. y., pradedant nuo „pagrindinių formulių“ ir baigiant išvedamąja formule, bet ir „nuo apačios į viršų“, t. y., pradedant išvedamąja formule ir baigiant „pagrindinėmis formulėmis“.

Išvesime tokiu metodu A.IV.1, t. y. formulę $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

$$\begin{array}{c}
 \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \uparrow \{I[S]; \\
 \frac{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}{\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A} \uparrow \{I[S]; \\
 \frac{\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A}{A, \neg B, A \rightarrow B \vdash} \uparrow \{N[S]; \\
 \frac{A, \neg B, A \rightarrow B \vdash}{\neg B, A \rightarrow B, A \vdash} \uparrow \{PA}; \\
 \frac{\neg B, A \rightarrow B, A \vdash}{A \rightarrow B, A \vdash B} \uparrow \{N[A]; \\
 \frac{A \rightarrow B, A \vdash B}{A \vdash A; B \vdash B} \uparrow \{I[A]; \\
 \end{array}$$

Kaip matome, išvedant formulę sekvencijų metodu „nuo apačios į viršų“, išvedimo kelią nurodo pati išvedamos formulės struktūra. Todėl žymiai sumažėja euristikos vaidmuo formulių išvedimo procese, kas leidžia algoritmizuoti ir net automatizuoti tą procesą.

Šio svarbaus teiginio patvirtinimui pateiksiu konkretų išvedimo „nuo apačios į viršų“ pavyzdį, palygindamas šiek tiek anksčiau gautą aksiomos A.I.2, t. y. formulės $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$, išvedimą „nuo viršaus į apačią“ (kuris, manau, daugeliui skaitytojų galėjo iškelti natūralų klausimą, kaip išvedantysis surado, jog formulės išvedimą reikėjo pradėti ir tęsti būtent taip) su tos pačios formulės išvedimu „nuo apačios į viršų“:

$$\begin{array}{c}
 \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \uparrow \{I[S]; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)}{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)} \uparrow \{AA}; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)}{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C} \uparrow \{I[S]; \\
 \frac{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C}{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C} \uparrow \{AS}; \\
 \frac{A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A; B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C} \uparrow \{I[A]; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C, A; B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, A \rightarrow C} \uparrow \{PS}; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, A \rightarrow C}{A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, C} \uparrow \{I[S]; \\
 \frac{A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A, C}{A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A} \uparrow \{SP}; \\
 \frac{A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A}{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vdash A} \uparrow \{PA}; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vdash A}{A \vdash A} \uparrow \{AP}; \\
 \frac{B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C} \uparrow \{PA}; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C} \uparrow \{AS}; \\
 \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C, A; B \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow C} \uparrow \{I[A]; \\
 \frac{\vdash A \rightarrow C, A; B \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow C}{\vdash A, A \rightarrow C} \uparrow \{PS}; \\
 \frac{\vdash A, A \rightarrow C}{A \vdash A, C} \uparrow \{I[S]; \\
 \frac{A \vdash A, C}{A \vdash A} \uparrow \{SP}; \\
 \frac{B \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow C}{B \vdash A \rightarrow C, B; C \vdash A \rightarrow C} \uparrow \{AS}; \\
 \frac{B \vdash A \rightarrow C, B; C \vdash A \rightarrow C}{B \vdash A \rightarrow C, B; C \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C} \uparrow \{PS}; \\
 \frac{B \vdash A \rightarrow C, B; C \vdash A \rightarrow C, A \rightarrow C}{B \vdash B} \uparrow \{SP}; \\
 \frac{C \vdash A \rightarrow C}{C \vdash C} \uparrow \{AP}; \\
 \end{array}$$

Šis formulės išvedimo metodas, pradedantis formulės išvedimo procesą ne nuo pagrindinių formulių, o nuo pačios išvedamos formulės, skiriasi nuo anksčiau taikyto metodo, pradedančio išvedimo procesą nuo pagrindinių formulių ir baigiančio išvedamąja formule, visų pirma tuo, kad **jis išvedamąją**

formulę ne sintezuoja, o analizuoja ir dėl šios priežasties pati išvedamos formulės struktūra beveik automatiškai veda išvedimo procesą ne atsitiktine kryptimi, o kryptimi, orientuota į tikslą – pagrindinių formulių gavimą kiekvienoje išvedimo „medžio“ „sekoje“.

Jei tokį tikslą pasiekti pavyksta, tai formulė gauna teiginių skaičiavimo teoremos struktūrą, o jei kuri nors „medžio“ „šaka“ baigiasi ne pagrindine formule, tai reiškia, jog ši formulė negali būti išvesta, nes ji nėra tapačiai teisinga formulė. Vadinasi, išvedimo metodas „nuo apačios į viršų“ tinka ne tik teoremų išvedimui, bet ir formulių išvedamumo tikrinimui.

Jei pabandytume išvesti formulę $A \rightarrow (A \wedge \neg A)$, tai gautume:

$$\begin{array}{l} \frac{}{A \rightarrow (A \wedge \neg A)} \uparrow \{IIS\}; \\ \frac{A \vdash A \wedge \neg A}{A \vdash A; A \vdash \neg A} \uparrow \{KIS\}; \\ \frac{}{A \vdash A; A \vdash \neg A} \uparrow \{NIS\}; \\ \frac{A, A \vdash}{A \vdash} \uparrow \{AP\}. \end{array}$$

Gautoji formulė $A \vdash$, kurioje sukcedentas yra tuščias, rodo, jog formulės $A \rightarrow (A \wedge \neg A)$ išvedimo „medžio“ viena iš „šakų“ veda ne prie pagrindinės formulės, o prie prieštaros. Tai rodo, jog formulė $A \rightarrow (A \wedge \neg A)$ negali būti išvesta formaliai neprieštaringoje sistemoje. **INTARPAS 1**

Taigi, naudodamiesi sekvencijų metodu „nuo apačios į viršų“, mes, turėdami duotąją formulę, arba beveik „automatiškai“ surandame jos išvedimo kelią (jei ta formulė gali būti išvesta, t. y. jei ši formulė yra tapačiai teisinga formulė) arba beveik automatiškai gauname kurioje nors išvedimo „medžio“ „šakoje“ **neišvedamą paprastą sekvenciją**, kuri rodo, jog duotoji pradinė formulė negali būti išvesta (nėra tapačiai teisinga formulė).

Tokia šio sekvencijų metodo savybė ir leidžia, kaip jau buvo minėta, sudaryti teiginių skaičiavimo formulių išvedimo algoritmą, kurį galima išreikšti kompiuterinės programos pavidalu. Kitaip tariant, **teiginių skaičiavimo formulių išvedimą, naudojantis sekvencijų metodu, galima kompiuterizuoti.**

INTARPAS 2

Sekvencijų, rezoliucijų ir semantinių lentelių, taip pat ir aksiomatinių sistemų kūrimo metodus galima taikyti ne tik teiginių, bet ir predikatų skaičiavime, prie kurio dabar ir pereisime.

1.16.1.5.4. Predikatų skaičiavimas

Predikatų skaičiavimo sistemos taip pat gali būti klasikinės ir intuicionistinės, aksiomatinės ir natūraliosios dedukcijos sistemos.

Trumpai apžvelgsime vieną iš daugelio klasikinių aksiomatinių predikatų skaičiavimo sistemų, detaliai aprašytą knygelėse [53, 54, 55, 56, 65, 81].

Kadangi teiginius galime interpretuoti kaip predikatus su fiksuotomis objektinių (individinių) kintamųjų reikšmėmis, tai **visos teiginių skaičiavimo aksiomos, išvedimo taisyklės ir visos teiginių skaičiavime išvestos teoremos galioja ir predikatų skaičiavime.**

Todėl **predikatų skaičiavimo aksiomų sistemą galima gauti, išplečiant teiginių skaičiavimo aksiomų sistemą, t. y., pridedant prie pastarosios dvi aksiomas, implicitiškai apibrėžiančias kvantifikavimo operacijas, žymimas žymenimis $\forall x$ ir $\exists x$:**

$$A.V.1. \vdash \forall x_j F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n),$$

$$A.V.2. \vdash F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow \exists x_j (F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)).$$

Žymuo „ $\forall x_j$ “ vadinamas **bendrumo kvantoriumi** ir skaitomas „kiekvienam x_j “ arba „visiems x_j “, nes po šio kvantoriaus sekanti formulė turi būti teisinga visoms x_j reikšmėms. Žymuo „ $\exists x_j$ “ vadinamas **egzistavimo kvantoriumi** ir skaitomas „egzistuoja toks x_j , kad“, nes turi egzistuoti tokia x_j reikšmė, kad po šio kvantoriaus sekanti formulė galėtų būti teisinga.

Žymiai daugiau **tenka išplėsti teiginių skaičiavimo išvedimo taisyklių rinkinį**, norint gauti tokias predikatų skaičiavimo išvedimo taisykles, kad predikatų skaičiavimas būtų neformaliai (substancionaliai) pilna sistema, t. y. kad predikatų skaičiavime būtų galima išvesti kiekvieną tapačiai teisingą predikatų skaičiavimo formulę.

Visų pirma reikia šiek tiek modifikuoti jau mums žinomas teiginių skaičiavimo išvedimo taisykles (modus ponens ir superpozicijos taisyklę), pritaikant jas predikatams, t. y. interpretuojant formules $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ ne tik kaip teiginių skaičiavimo, bet ir kaip predikatų skaičiavimo formules.

Antra, reikia įvesti **laisvųjų** (t. y. nesurištų kvantoriais) **objektinių kintamųjų predikatuose keitimo taisyklę**, leidžiančią tapačiai teisingoje predikatinėje formulėje taip keisti kai kuriuos (ar net visus) laisvus objektinius kintamuosius kitais kintamaisiais (t. y. vienus tokių kintamųjų žymėjimus kitais tų kintamųjų žymėjimais), kad predikatinė formulė visada išliktų tapačiai teisinga. Kad taip atsitiktų, **kiekvienas keičiamas laisvasis objektinis kintamasis visoje predikatinėje formulėje visur turi būti keičiamas vienodai**, t. y. visur tuo pačiu kintamuoju ir, be to, taip, kad po keitimo tas laisvasis kintamasis niekur netaptų surištas koku nors kvantoriumi. Gauname tokią **laisvųjų kintamųjų keitimo taisyklę**: $\frac{\vdash \mathcal{A}(x)}{\vdash S_x^t[\mathcal{A}(x)]}$, kur $\mathcal{A}(x)$ – predikatinė formulė, ku-

rioje kai kurie (ar net visi) predikatai priklauso nuo laisvojo objektinio kintamojo x , o t – objektinis kintamasis, kuris, įstatytas vietoj laisvojo kintamojo x , visur išlieka laisvas.

Trečia, reikia įvesti **surištų objektinių kintamųjų predikatinėse formulėse pervardijimo taisyklę**, leidžiančią pervadinti kai kuriuos (ar net visus) surištus objektinius kintamuosius tapačiai teisingoje predikatinėje formulėje taip, kad ji išliktų tapačiai teisinga. Kad taip atsitiktų kiekvieno kvantoriaus surišti kintamieji turi išlikti to paties kvantoriaus surištais kintamaisiais. Todėl gauname tokią **surištų kintamųjų pervardijimo taisyklę**: $\frac{\vdash \mathcal{A}(x)}{\vdash S_x^y[\mathcal{A}(x)]}$, kur $\mathcal{A}(x)$ – predikatinė formulė, kurios sudėtyje

yra predikatų, priklausančių nuo objektinio kintamojo x , surišto tuose predikatuose koku nors kvantoriumi, y – objektinio kintamojo žymėjimas, kuris, įstatytas vietoj x , tampa taip pat surištas kaip ir x .

Ketvirta, tenka įvesti, **surišimo bendrumo kvantoriumi taisyklę (SBKT)**: $\frac{\vdash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(x)}{\vdash \mathcal{B} \rightarrow \forall_x \mathcal{A}(x)}$.

Ši taisyklė teigia, jog jei yra išvedama formulė $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(x)$, kur $\mathcal{A}(x)$ – bet kokia predikatinė formulė, turinti savo sudėtyje predikatų, priklausančių nuo laisvo objektinio kintamojo x , o $\mathcal{B}$ – bet kokia predikatinė formulė, neturinti savo sudėtyje nė vieno predikato, priklausančio nuo laisvojo kintamojo x , tai išvedama formulė $\mathcal{B} \rightarrow \forall_x \mathcal{A}(x)$. Kitaip tariant, laisvąjį kintamąjį x , esantį tik implikacijos konsekvente, galima surišti bendrumo kvantoriumi, nepažeidžiant formulės išvedamumo.

Penkta, tenka įvesti **surišimo egzistavimo kvantoriumi taisyklę (SEKT)**: $\frac{\vdash \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}}{\vdash \exists_x \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}}$, kur formulės $\mathcal{A}(x)$ ir $\mathcal{B}$ turi tenkinti tuos pačius reikalavimus, kaip ir tos pačios formulės surišimo bendrumo kvantoriumi taisyklėje.

Plačiau apie predikatų skaičiavime naudojamas išvedimo taisykles galima perskaityti šių eilučių autoriaus knygelėje [54]. Ten galima rasti ir tų taisyklių taikymo pavyzdžių, atkreipiančių dėmesį į kai kurias tų taisyklių taikymo subtilybes. Rekomenduočiau panagrinėti tuos pavyzdžius.

Naudojantis predikatų skaičiavimo aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis, galima išvesti bet kokią tapačiai teisingą predikatinę formulę. Išvedant predikatinės formules, galima naudotis ir jau išvestomis teiginių skaičiavimo formulėmis – teiginių skaičiavimo teoremomis (TST) bei jau išvestomis predikatų skaičiavimo formulėmis – predikatų skaičiavimo teoremomis (PST).

Kaip formulių išvedimo predikatų skaičiavime pavyzdį, išvesime formules:

- 1) $\vdash \neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$;
- 2) $\vdash \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$;
- 3) $\vdash \neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$;
- 4) $\vdash \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$.

Iš šių formulių išplaukia formulės $\vdash \neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ ir $\vdash \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$, kuriomis mes jau ne kartą naudojomės (žiūr., pavyzdžiui, 1.5. skyrių).

1. 1. $\vdash \forall x P(x) \rightarrow P(x)$ {A.V.1};

$$2. \vdash (\forall x P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)) \left\{ S_{A,B}^{\forall x P(x), P(x)} [A.IV.1.] \right\};$$

$$3. \vdash \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x) \{MP:(1;2)\};$$

$$4. \vdash \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x) \{SEKT:(3)\}, \text{ nes formulėje } \forall x P(x) \text{ kintamasis } x \text{ yra surištas.}$$

2. 1. $\neg P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$ {A.V.2};

$$2. \vdash (\neg P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)) \rightarrow (\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg P(x)) \left\{ S_{A,B}^{\neg P(x), \exists x \neg P(x)} [A.IV.1] \right\};$$

$$3. \vdash \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg P(x) \{MP:(1;2)\};$$

$$4. \vdash (\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow (\neg \neg P(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow ((\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg P(x)) \rightarrow (\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow P(x))) \left\{ S_{A,B,C}^{\neg \exists x \neg P(x), \neg \neg P(x), P(x)} [A.I.2] \right\};$$

$$5. \vdash \neg \neg P(x) \rightarrow P(x) \{A.IV.3\};$$

$$6. \vdash \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow (\neg \neg P(x) \rightarrow P(x)) \{TST4:(5)\}, \text{ t. y. naudojant teiginių skaičiavimo teorema } \vdash A \rightarrow \mathfrak{R}, \text{ įstatydami vietoj } A \text{ formulę } \neg \exists x \neg P(x), \text{ o formulę } \mathfrak{R} \text{ laikydami penktojoje eilutėje išvestą formulę};$$

$$7. \vdash (\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg P(x)) \rightarrow (\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow P(x)) \{MP:(6;4)\};$$

$$8. \vdash \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow P(x) \{MP:(3;7)\};$$

$$9. \vdash \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \forall x P(x) \{SBKT:(8)\};$$

$$10. \vdash (\neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \rightarrow (\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \neg \exists x \neg P(x)) \left\{ S_{A,B}^{\neg \exists x \neg P(x), \forall x P(x)} [A.IV.1] \right\};$$

$$11. \vdash \neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \neg \exists x \neg P(x) \{MP:(9;10)\};$$

$$12. \vdash (\neg \forall x P(x) \rightarrow (\neg \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))) \rightarrow ((\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \neg \exists x \neg P(x)) \rightarrow (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))) \left\{ S_{A,B,C}^{\neg \forall x P(x), \neg \neg \exists x \neg P(x), \exists x \neg P(x)} [A.I.2] \right\};$$

$$13. \vdash \neg \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x) \{A.IV.3\};$$

$$14. \vdash \neg \forall x P(x) \rightarrow (\neg \neg \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)) \{TST4:(13)\};$$

$$15. \vdash (\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \neg \exists x \neg P(x)) \rightarrow (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)) \{MP:(14;12)\};$$

$$16. \vdash \neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x) \{MP:(11;15)\}.$$

3. 1. $\vdash \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg P(x)$ {A.V.1};

$$2. \vdash (\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)) \left\{ S_{A,B}^{\forall x \neg P(x), \neg P(x)} [A.IV.1] \right\};$$

$$3. \vdash \neg \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x) \{MP:(1;2)\};$$

$$4. \vdash (P(x) \rightarrow (\neg \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x))) \rightarrow ((P(x) \rightarrow \neg \neg P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x))) \left\{ S_{A,B,C}^{P(x), \neg \neg P(x), \neg \forall x \neg P(x)} [A.I.2] \right\};$$

$$5. \vdash P(x) \rightarrow (\neg \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)) \{TST4:(\vdash A \rightarrow R; R=(3))\};$$

$$6. \vdash (P(x) \rightarrow \neg \neg P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)) \{MP:(5;4)\};$$

$$7. \vdash P(x) \rightarrow \neg \neg P(x) \{A.IV.2\};$$

$$8. \vdash P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x) \{MP:(7;6)\};$$

$$9. \vdash \exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x) \{SEKT:(8)\};$$

$$10. \vdash (\exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)) \left\{ S_{A,B}^{\exists x P(x), \neg \forall x \neg P(x)} [A.IV.1] \right\};$$

$$11. \vdash \neg \neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x) \{MP:(9;10)\};$$

12. $\vdash (\forall x \neg P(x) \rightarrow (\neg \neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x))) \rightarrow ((\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \neg P(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)))$ $\{S_{A,B,C}^{\forall x \neg P(x), \neg \neg \forall x \neg P(x), \neg \exists x P(x)} [A.I.2]\}$;
13. $\vdash \forall x \neg P(x) \rightarrow (\neg \neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x))$ $\{TST4: (\neg \neg A \rightarrow R; R=(11))\}$;
14. $\vdash (\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \neg P(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x))$ $\{MP: (13, 12)\}$;
15. $\vdash \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \neg P(x)$ $\{A.IV.2\}$;
16. $\vdash \forall x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$ $\{MP: 15, 14\}$.

4. 1. $\vdash P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ $\{A.V.2\}$;

2. $\vdash (P(x) \rightarrow \exists x P(x)) \rightarrow (\neg \exists x P(x) \rightarrow \neg P(x))$ $\{S_{A,B}^{P(x), \exists x P(x)} [A.IV.1]\}$;

3. $\vdash \neg \exists x P(x) \rightarrow \neg P(x)$ $\{MP: (1;2)\}$;

4. $\vdash \neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ $\{SBKT: (3)\}$.

Pasinaudodami A.II.3 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$,

$\{S_{A,B,C}^{R, \neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x), \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)} [A.II.3]\}$, TST4 ir MP (paskutine pora – 2 kartus), gausime formulę $\vdash (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x))$, t. y. formulę $\vdash \neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$.

Analogiškai, pasinaudodami ta pačia A.II.3 ir pakeisdami superpozicijos metu įstatomas į formulę A.II.3 vietoj A, B ir C formules, gausime formulę $\vdash \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$.

Siūlyčiau skaitytojui pakartoti šių formulių išvedimą savarankiškai, nežiūrint į šioje mokymo priemonėje pateiktą išvedimo tekstą. Tai leistų jam pilniau pajusti formalaus formulių išvedimo specifiką ir pasitikrinti, ar jis pakankamai gerai suprato tokio išvedimo „technologijos“ esmę.

Formulės $\vdash \neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$, $\vdash \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$ predikatų skaičiavimo vadovėliuose išvedamos žymiai paprasčiau ir greičiau, prieš tai išvedant **keitimo pagal ekvivalentumą taisyklę**, leidžiančią bet kurioje formulėje pakeisti bet kurią jos dalį ekvivalenčia formule, (pavyzdžiui, $\neg \neg P(x)$ į $P(x)$, $\neg \neg \forall x P(x)$ į $\forall x P(x)$ ir pan.), o taip pat eilę kitų taisyklių (pavyzdžiui, $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$ ir pan.).

Tačiau ekvivalentumo ir kitų taisyklių išvedimas pareikalautų nemažai vietos ir didžiosios dalies predikatų bei teiginių skaičiavimų teorijos išdėstymo, o ne tik apžvalginio susipažinimo su jomis, ko sistemotyrų pilnai pakanka, kad dženeralistai galėtų susikalbėti su matematinės logikos specialistais ir kad jie vieni kitus suprastų. Todėl šioje mokymo priemonėje ir buvo pasirinktas čia pateiktas formulių $\vdash \neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$, $\vdash \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$ išvedimo būdas, leidžiantis „apeiti“ minėtųjų sudėtingų taisyklių išvedimą. Skaitytojams, norintiems pilniau ir detaliau susipažinti su predikatų skaičiavimu, rekomenduočiau knygeles [54, 55, 56, 65].

Predikatų skaičiavimas (kaip ir anksčiau aprašytas teiginių skaičiavimas) yra neformaliai (substancionaliai) pilna sistema. Su tai teigiančios teoremos, kurią suformulavo ir įrodė žymus austrų matematikas K. Godelis, modernizuotu įrodymu skaitytojas gali susipažinti šios mokymo priemonės autoriaus knygelėje [65].

Nesunku įrodyti, kad predikatų skaičiavimas (skirtingai nuo teiginių skaičiavimo) nėra formaliai pilna sistema. Pavyzdžiui, prie predikatų skaičiavimo trylikos aksiomų galima pridėti kaip papildomą aksiomą formulę $\exists x P(x) \rightarrow P(x)$, kuri nėra išvedama predikatų skaičiavime, ir gauti formaliai neprieštarinę sistemą, turinčią keturiolika aksiomų ir galiojančią sistemose, sudarytose iš vieno objekto.

Kad formulė $\exists x P(x) \rightarrow P(x)$ nėra išvedama predikatų skaičiavime, išplaukia iš to, kad ši formulė bendrojoje klasikinėje predikatų algebroje nėra tapačiai teisinga sistemose, turinčiose daugiau nei vieną objektą, žymimus objektinio kintamojo x reikšmėmis. Pavyzdžiui, kai predikatas $P(x)$ yra $x > 5$, tai gauname formulę $\exists x (x > 5) \rightarrow (x > 5)$, kuri nėra teisinga, kai laisvasis kintamasis x tenkina sąlygą $x \leq 5$ (pavyzdžiui, kai $x = 3$, tai $\exists x (x > 5) \rightarrow (3 > 5) = 0$). Tokia formulė negali būti išvesta predikatų skaičiavime todėl, kad predikatų skaičiavime gali būti išvestos tik tapačiai teisingos formulės, o išvedimo taisyklės, pritaikytos tapačiai teisingoms formulėms, leidžia gauti tik tapačiai teisingas formules.

Kad formulė $\exists x P(x) \rightarrow P(x)$, pridėta prie predikatų skaičiavimo aksiomų kaip papildoma aksioma, negali paversti gaunamos sistemos į formaliai prieštarinę, išplaukia jau iš to, kad formulė $\exists x P(x) \rightarrow P(x)$ pati nėra formaliai prieštaringa, nes

ta formulė gali būti tapaciai teisinga virtualiame pasaulyje, kuriame egzistuoja tik vienas objektas x , t. y., kai predikato $P(x)$ objektinis kintamasis x gali turėti tik vieną reikšmę. O toks virtualus pasaulis nėra logiškai prieštaringas.

Griežtą ir pilną įrodymą, kad predikatų skaičiavimas yra formaliai nepilna sistema, skaitytojas gali rasti šios mokymo priemonės autoriaus knygelėje [54].

Baigiant predikatų skaičiavimo apžvalgą, belieka parodyti, kaip predikatų skaičiavime gali būti išvestos formulės, atitinkančios paprastojo kategoriškojo silogizmo modusus. To pakaks, kad sistemotyrą studijuojantis skaitytojas suvoktų, kas yra predikatų skaičiavimo sistema ir kaip joje išvedamos teoremos. Tiems skaitytojams, kuriems pasirodys, jog čia pateiktų žinių nepakanka, rekomenduoju jau minėtąsias knygeles [54, 55, 56, 65]. Jose jis ras daugelio predikatų skaičiavimo teoremų išvedimą ir svarbiausiųjų metateoremų apie predikatų skaičiavimą įrodymą.

Norėdami sutrumpinti išvedimo procedūrą, pasinaudosime kai kuriomis teiginių skaičiavimo teoremomis bei išvestinėmis išvedimo taisyklėmis, čia jų neišvedinėdami.

Pavyzdžiui, išvesdami formulę $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow \forall x(S(x) \rightarrow P(x))$, atitinkančią pirmosios silogizmo figūros pirmąjį modusą Barbara $\begin{matrix} \text{MaP} \\ \text{SaM} \\ \hline \text{SaP} \end{matrix}$, mes pasinaudosime teiginių

skaičiavimo teoremomis $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ir $\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ bei iš jų išplaukiančiomis išvestinėmis išvedimo taisyklėmis $\frac{A \rightarrow B}{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)}$, $\frac{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)}{A \rightarrow C}$ ir $\frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)}{A \rightarrow C}$.

1. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow \forall x(S(x) \rightarrow M(x))$
 $\left\{ S_{A,B}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)), \forall x(S(x) \rightarrow M(x))} [A.II.2] \right\};$
2. $\vdash \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow M(x))$ {A.V.1};
3. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow M(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)), \forall x(S(x) \rightarrow M(x)), S(x) \rightarrow M(x)} \left[\frac{\vdash (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)}{\vdash (A \rightarrow C)} \right] \right\};$
4. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow \forall x(M(x) \rightarrow P(x))$ {A.II.1};
5. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))$ {A.V.1};
6. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)), \forall x(M(x) \rightarrow P(x)), M(x) \rightarrow P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] \right\};$
7. $\vdash (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow M(x))) \rightarrow ((\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x))))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)), S(x) \rightarrow M(x), M(x) \rightarrow P(x)} [A.II.3] \right\};$
8. $\vdash (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x)))$ {MP: (3;7)};
9. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x))$ {MP: (6;8)};
10. $\vdash (S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow P(x))$ {S[(A → B) ∧ (B → C) → (A → C)]
 $\begin{matrix} S(x), M(x), P(x) \\ A, B, C \end{matrix}}$ };
11. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)), (S(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x)), S(x) \rightarrow P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(9), (10)}{(11)} \right\};$
12. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow \forall x(S(x) \rightarrow P(x))$ {SBKT: (11)}.

Gautoji formulė kaip tik ir įrodo, jog modusas Barbara yra išvedamas predikatų skaičiavime, t. y., jog formulė $(MaP) \wedge (SaM) \rightarrow (SaP)$ yra tapaciai teisinga kaip ir kiekviena kita predikatų skaičiavimo teorema.

Analogiškai galima išvesti ir visas kitas formules, atitinkančias dar keturiolika paprastojo kategoriškojo silogizmo stipriųjų modusus, neturinčių savo pavadinimuose raidės „p“.

Keturis modusus, turinčius savo pavadinimuose raidę „p“ (Darapti, Felapton, Bramalip, Ferapo), atitinkančios predikatų skaičiavimo formulės

- 1) $\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$,
- 2) $\forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$,
- 3) $\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$,
- 4) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ nėra išvedamos predikatų skaičiavimo, nes nėra tapačiai teisingos formulės.

Tuo įsitikinti galima, priėmus, jog klasės S, M ir P yra tuščios, t. y. priėmus, jog $\exists xS(x)=0$, $\exists xM(x)=0$ ir $\exists xP(x)=0$. Tuomet $\exists x(S(x) \wedge P(x))=0$, $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))=0$, $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))=1$, $\forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x))=1$, $\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x))=1$, $\forall x(P(x) \rightarrow M(x))=1$, iš kur išplaukia, jog tuomet formulės (1÷4) yra neteisingos.

Taip atsitinka todėl, kad iš šių silogizmų prielaidų konjunkcijų deduktyviai neišplaukia tų silogizmų išvados.

Tas išvadas būtų galima gauti iš duotųjų prielaidų, pridėjus prie jų papildomą prielaidą, jog nagrinėjamos objektų klasės P, M ir S nėra tuščios.

Įrodysime šį teiginį, pasinaudodami jau mums žinomomis teiginių skaičiavimo teoremais bei teoremais apie prielaidų loginę daugybą ir perstatomumą: $\vdash(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$, $\vdash(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$, $\vdash(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$, $\vdash(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$. Šios teoremos dažnai užrašomos ir naudojamos taip pat išvestinių teiginių skaičiavimo formulių išvedimo taisyklių forma:

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C}, \frac{A \wedge B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}, \frac{A \rightarrow B, A \rightarrow C}{A \rightarrow B \wedge C}, \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}.$$

Šios taisyklės teigia, jog iš prielaidų, esančių taisyklės „skaitiklyje“, išplaukia išvada, esanti taisyklės „vardiklyje“: $A(B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$, $A \wedge B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow B \wedge C$, $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$. Čia nereikalaujama „skaitiklio“ ir „vardiklio“ išvedamumo atskirai, nes pakanka, kad būtų išvedama implikacija $\vdash(\text{„skaitiklis“}) \rightarrow (\text{„vardiklis“})$ (pavyzdžiui, $\vdash(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ ir pan.), tačiau tos taisyklės tuo labiau galioja ir jų silpnesnėje formoje, kurioje ir „skaitiklis“ ir „vardiklis“ – išvedamos teiginių skaičiavimo formulės: $\frac{\vdash \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})}{\vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$,

$$\frac{\vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}{\vdash \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})}, \frac{\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}}{\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}}, \frac{\vdash \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})}{\vdash \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})}, \text{ kur } \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} - \text{kokios tai teiginių}$$

skaičiavimo formulės.

Būtų naudinga, jei skaitytojas tai patikrintų ir įsitikintų, jog visos čia pateiktos teoremos – tapačiai teisingos formulės, bei pabandytų išvesti vieną – kitą iš šių teiginių skaičiavimo teoremų, pabandydamas patikrinti save, ar jis pakankamai gerai suvokia formulių išvedimo procesą ir ar moka pasinaudoti aksiomomis, išvedimo taisyklėmis ir jau išvestomis formulėmis naujų formulių išvedimui.

O mes vėl sugrįšime į predikatų skaičiavimą ir išvesime predikatų skaičiavimo formulę, pilnai atitinkančią modusą Darapti, kurio prielaidos yra MaP ir MaS, t. y. formulės $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$.

1. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ {A.II.2};
2. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x))$ {A.V.1};
3. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x))$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x) \rightarrow S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(1), (2)}{(3)} \right\};$$

4. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \forall x(M(x) \rightarrow P(x))$ {A.II.1};
5. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))$ {A.V.1};
6. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), \forall x(M(x) \rightarrow P(x)), M(x) \rightarrow P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(4), (5)}{(6)} \right\};$$

7. $\vdash (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x))) \rightarrow ((\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x))))$ {A.II.3};
8. $\vdash (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x)))$ {MP: (3; 7)};

9. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x))$
 $\{MP : (6,8)\};$
10. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x))$
 $\{S_{A,B,C}^{M(x),S(x),P(x)} [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)]\};$
11. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), (M(x) \rightarrow S(x)) \wedge (M(x) \rightarrow P(x)), M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(9),(10)}{(11)} \right\};$
12. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(x) \rightarrow S(x) \wedge P(x)$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x), S(x) \wedge P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(11)}{(12)} \right\};$
13. $\vdash S(x) \wedge P(x) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x)) \{A.V.2\};$
14. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(x) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(x), S(x) \wedge P(x), \exists x(S(x) \wedge P(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(12),(13)}{(14)} \right\};$
15. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x)))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x), \exists x(S(x) \wedge P(x))} \left[\frac{\vdash A \wedge B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \right] = \frac{(14)}{(15)} \right\};$
16. $\vdash M(x) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x)))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x), \exists x(S(x) \wedge P(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)} \right] = \frac{(15)}{(16)} \right\};$
17. $\exists x M(x) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))) \{SEKT: (16)\};$
18. $\vdash \exists x M(x) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\exists x M(x), \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), \exists x(S(x) \wedge P(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(17)}{(18)} \right\}.$

Gavome, jog moduso Darapti išvadą SiP, t. y. formulė $\exists x(S(x) \wedge P(x))$ yra išvedama iš jo prielaidų MaP ir MaS, t. y. iš formulių $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ tik tuomet, kai prie jų prijungiama papildoma prielaida $\exists x M(x)$, reiškianti, kad objektų x klasė M yra netuščia, t. y., kai priimama papildoma prielaida, kad $\exists x M(x)=1$.

Nesunku įrodyti, jog tuomet bus netuščios ir klasės P ir S, t. y., jog $\exists x P(x)=1$ ir $\exists x S(x)=1$.

Tikrai:

1. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow P(x)) \{A.V.1\};$
2. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x) \wedge M(x) \rightarrow P(x)) \left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)), M(x), P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(1)}{(2)} \right\};$
3. $\vdash P(x) \rightarrow \exists x P(x) \{A.V.2\};$
4. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge (M(x) \rightarrow \exists x P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge M(x), P(x), \exists x P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(2),(3)}{(4)} \right\};$
5. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \exists x P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)), M(x), \exists x P(x)} \left[\frac{\vdash A \wedge B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \right] = \frac{(4)}{(5)} \right\};$
6. $\vdash M(x) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \exists x P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(M(x) \rightarrow P(x)), M(x), \exists x P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)} \right] = \frac{(5)}{(6)} \right\};$
7. $\vdash \exists x M(x) \rightarrow (\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \exists x P(x)) \{SEKT: (6)\};$
8. $\vdash \exists x M(x) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \exists x P(x)$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\exists x M(x), \forall x(M(x) \rightarrow P(x)), \exists x P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(7)}{(8)} \right\}.$

Gautoji formulė (8) rodo, jog iš formulių $\exists xM(x)$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$ išvedama formulė $\exists xP(x)$, t. y. iš sąlygos $\exists xM(x)=1$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))=1$ išplaukia, kad $\exists xP(x)=1$.

Analogiškai galime išvesti formulę $\vdash \exists xM(x) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists xS(x)$, iš kurios išplaukia, jog ir klasė S turi būti netuščia.

Pakartoję aštuoniolika analogiškų žingsnių, kuriuos padarėme išvesdami moduso Darapti formulę $\vdash \exists xM(x) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x))$, galime išvesti ir moduso Felapton formulę $\vdash \exists xM(x) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ bei padaryti išvadą, kad šiuo atveju klasės M, $\neg P$ ir S turėtų būti netuščios.

Nagrinėdami modusą Bramalip ir bandydami išvesti iš prielaidų $\forall x(P(x) \rightarrow M(x))$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ išplaukiančią išvadą, devintajame žingsnyje gautume formulę:

$$9. \vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x)).$$

Tęsdami išvedimo procedūrą, gautume (kaip ir išvedant formulę modusui Barbara):

$$10. \vdash (P(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{P(x),M(x),S(x)} [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)] \right\};$$

$$11. \vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow S(x))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), (P(x) \rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x)), P(x) \rightarrow S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(9), (10)}{(11)} \right\}.$$

Iš formulės (11), kaip ir išvedant formulę modusui Barbara, galėtume, pasinaudodami SBKT, gauti formulę $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow S(x))$, t. y. gauti modusą (PaM) $\wedge$ (MaS) $\rightarrow \rightarrow$ (PaS).

Tačiau mums reikalinga ne tipo P-S, o tipo S-P formulė, todėl tęsime tokios formulės išvedimą, pasielgdami šiek tiek kitaip, negu išvedant formulę modusui Barbara.

$$12. \vdash (P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow ((P(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x) \wedge S(x))) \left\{ S_{A,B,C}^{P(x),P(x),S(x)} [A.II.3] \right\};$$

$$13. \vdash (P(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x) \wedge S(x)) \{MP: (TST1; 12)\};$$

$$14. \vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x) \wedge S(x))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), (P(x) \rightarrow S(x)), P(x) \rightarrow P(x) \wedge S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(11), (13)}{(14)} \right\};$$

$$15. \vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge P(x) \rightarrow P(x) \wedge S(x)$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), P(x), P(x) \wedge S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(14)}{(15)} \right\};$$

$$16. \vdash P(x) \wedge S(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)) \{A.V.2\};$$

$$17. \vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge P(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge P(x), P(x) \wedge S(x), \exists x(P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(15), (16)}{(17)} \right\};$$

$$18. \vdash \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), P(x), \exists x(P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \wedge B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \right] = \frac{(17)}{(18)} \right\};$$

$$19. \vdash P(x) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), P(x), \exists x(P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)} \right] = \frac{(18)}{(19)} \right\};$$

$$20. \vdash \exists xP(x) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x))) \{SEKT: (19)\};$$

$$21. \vdash \exists xP(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\exists xP(x), \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), \exists x(P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(20)}{(21)} \right\}.$$

Kaip matome iš formulės (21), norėdami gauti moduso Bramalip išvadą SiP, turėtume prie jo prielaidų $\forall x(P(x) \rightarrow M(x))$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ pridėti dar ir papildomą prielaidą $\exists xP(x)$, reiškiančią, jog objektų x klasė P yra netuščia.

Iš prielaidų $\exists xP(x)=1$ ir $\forall x(p(x) \rightarrow M(x))=1$ jau anksčiau demonstruotu būdu gausime išvadą $\exists xM(x)=1$, o po to – iš prielaidų $\exists xM(x)=1$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))=1$ – išvadą $\exists xS(x)=1$, t. y. gausime, jog visos trys klasės – P, M ir S – turi būti netuščios.

Belieka išvesti predikatų skaičiavimo formulę, atitinkančią modusą Fesapo, t. y. išvesti išvadą, išplaukiančią iš to moduso prielaidų $\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x))$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$.

1. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x))$ {A.II.1};
2. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \neg M(x))$ {A.V.1};
3. $\vdash (P(x) \rightarrow \neg M(x)) \rightarrow (\neg \neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$ $\left\{ S_{A,B,C}^{P(x), \neg M(x)} [A.IV.1] \right\}$;
4. $\vdash (M(x) \rightarrow \neg \neg M(x)) \rightarrow ((\neg \neg M(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x)))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{M(x), \neg \neg M(x), \neg P(x)} [\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))] \right\}$;
5. $\vdash M(x) \rightarrow \neg \neg M(x)$ {A.IV.2};
6. $\vdash (\neg \neg M(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x))$ {MP: (5; 4)};
7. $\vdash P(x) \rightarrow \neg M(x) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)), P(x) \rightarrow \neg M(x), M(x) \rightarrow \neg P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] \right\}$;
8. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)), P(x) \rightarrow \neg M(x), M(x) \rightarrow \neg P(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] \right\}$;
9. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(1),(8)}{(9)} \right\}$;
10. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ {A.II.2};
11. $\vdash \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x))$ {A.V.1};
12. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow S(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x) \rightarrow S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(10),(11)}{(12)} \right\}$;
13. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x) \wedge (M(x) \rightarrow S(x)))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x) \rightarrow \neg P(x), M(x) \rightarrow S(x)} \left[\frac{?A \rightarrow B, ?A \rightarrow C}{?A \rightarrow B \wedge C} \right] = \frac{(9),(12)}{(13)} \right\}$;
14. $\vdash (M(x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge M(x) \rightarrow S(x) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x) \wedge S(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{M(x), \neg P(x), S(x)} [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)] \right\}$;
15. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \neg P(x) \wedge S(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), (M(x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge (M(x) \rightarrow S(x)), M(x) \rightarrow \neg P(x) \wedge S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(13),(14)}{(15)} \right\}$;
16. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(x) \rightarrow \neg P(x) \wedge S(x)$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x), \neg P(x) \wedge S(x)} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(15)}{(16)} \right\}$;
17. $\vdash \neg P(x) \wedge S(x) \rightarrow \exists x(\neg P(x) \wedge S(x))$ {A.V.2};
18. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(x) \rightarrow \exists x(\neg P(x) \wedge S(x))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(x), \neg P(x) \wedge S(x), \exists x(\neg P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \right] = \frac{(16),(17)}{(18)} \right\}$;
19. $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (M(x) \rightarrow \exists x(\neg P(x) \wedge S(x)))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x), \exists x(\neg P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \wedge B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)} \right] = \frac{(18)}{(19)} \right\}$;
20. $\vdash M(x) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(\neg P(x) \wedge S(x)))$
 $\left\{ S_{A,B,C}^{\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)), M(x), \exists x(\neg P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)} \right] = \frac{(19)}{(20)} \right\}$;
21. $\vdash \exists x M(x) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(\neg P(x) \wedge S(x)))$ {SEKT: (20)};

$$22. \vdash \exists x M(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x (M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x (\neg P(x) \wedge S(x))$$

$$\left\{ S_{A,B,C}^{\exists x M(x), \forall x (P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x (M(x) \rightarrow S(x)), \exists x (\neg P(x) \wedge S(x))} \left[\frac{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\vdash A \wedge B \rightarrow C} \right] = \frac{(21)}{(22)} \right\}.$$

Formulė (22) rodo, jog moduso Fesapo išvadą SoP, t. y. formulę $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$, sutampančią (ką nesunku įrodyti) su formule $\exists x(\neg P(x) \wedge S(x))$, galima išvesti iš to moduso prielaidų PeM ir MaS tik pridėjus prie jų dar vieną papildomą prielaidą $\exists x M(x)$, reiškiančią, kad objektų x klasė M yra netuščia.

Iš prielaidų $\exists x M(x)=1$ ir $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))=1$, kaip jau anksčiau matėme, išplaukia $\exists x S(x)=1$, t. y., kad ir klasė S taip pat turi būti netuščia, o iš prielaidų $\exists x M(x)=1$ ir $\forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x))=1$ – išvada, kad $\exists x \neg P(x)=1$, t. y. kad ir klasė $\neg P$ turi būti netuščia.

Galima įrodyti, kad Aristotelio paprastų kategoriškų silogizmų modusus galima išvesti predikatų skaičiavime (arba, kaip kartais rašoma logikų straipsniuose, Aristotelio silogistiką galima „panardinti“ į predikatų skaičiavimą), ir šiek tiek sudėtingiau išreiškiant teiginius SaP, SeP, SiP ir SoP predikatų skaičiavimo kalboje. Vienas iš tokių išraiškos būdų atrodo taip: 1) teiginys SaP vaizduojamas formule $\exists x S(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x (S(x) \supset P(x))$, t. y. mūsų jau vartota formule $\forall x (S(x) \supset P(x))$, papildyta reikalavimu, kad aibė S ir aibės $\neg P$ papildinys P būtų netuščios aibės; 2) teiginys SeP vaizduojamas formule $\exists x S(x) \wedge \exists x P(x) \wedge \forall x (S(x) \supset \neg P(x))$, t. y. mūsų jau vartota formulė, papildyta reikalavimu, kad aibės S ir P būtų netuščios; 3) teiginys SiP vaizduojamas formule $\exists x \neg S(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \exists x (S(x) \wedge P(x))$, t. y. mūsų jau vartota formulė $\exists x (S(x) \wedge P(x))$, papildyta reikalavimu, kad ne tik aibės S ir P , bet ir jų papildiniai būtų netuščios aibės; 4) teiginys SoP vaizduojamas, formule $\exists x \neg S(x) \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$, t. y., mūsų jau vartota formulė, papildyta reikalavimu, kad aibė P ir aibės S papildinys būtų netuščios aibės.

Įdomu pažymėti, kad iš Aristotelio silogistikos tiesiogiai išplaukia formulių $[(SaP) \vee (SoP)]$, $[(SeP) \vee (SiP)]$, $[(SiP) \vee (SoP)]$, išreiškiančių **trečiojo negalimojo dėsnį silogistikoje**, teisingumas, į ką buvo atkreipęs dėmesį dar J. Lukasičius [254]. Tai ypač įdomu ryšium su ta polemika dėl trečiojo negalimojo dėsnio, kilusia XX-jo amžiaus pradžioje ir iššaukusia intuicionistinės logikos atsiradimą. Galima įrodyti, kad, interpretuojant teiginius SaP, SeP, SiP ir SoP čia kaip tik nurodytu būdu, gaunamos tokios predikatų skaičiavimo formulės, jog „silogistinės formos“ trečiojo negalimojo dėsnis išlieka neišvedamu ir „panardintoje“ į predikatų skaičiavimą silogistikoje. Tuo tarpu, pakeičiant formules SaP, SeP, SiP ir SoP mūsų pradžioje vartotu būdu, t. y. SaP į $\forall x (S(x) \supset P(x))$, SeP į $\forall x (S(x) \supset \neg P(x))$, SiP į $\exists x (S(x) \wedge P(x))$ ir SoP į $\exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$, formulės $[(SaP) \vee (SoP)]$, $[(SeP) \vee (SiP)]$ ir $[(SiP) \vee (SoP)]$, vaizduojančios „silogistinį“ trečiojo negalimojo dėsnį, tampa išvedamais predikatų skaičiavime kartu su formule $P(x) \vee \neg P(x)$, vaizduojančia trečiojo negalimojo dėsnį įprastoje klasikiniame predikatų skaičiavime formoje.

Iš tikrųjų, formulė $[(SaP) \vee (SoP)]$ tuomet tampa formule $\forall x (S(x) \supset P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$, ekvivalenčia formulei $\neg \neg \forall x (\neg S(x) \vee P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$, t. y. formulei $\neg \exists x (S(x) \wedge \neg P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$, kuri klasikiniame predikatų algebroje yra tapachiai lygi loginiam vienetui ir todėl, kadangi klasikinis predikatų skaičiavimas yra substancionaliai (neformaliai, išoriškai) pilna sistema, yra išvedama klasikiniame predikatų skaičiavime.

Analogiškai gauname, jog formulė $[(SeP) \vee (SiP)]$, užrašyta predikatų skaičiavimo kalba kaip formulė $\forall x (S(x) \supset \neg P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge P(x))$, kuri klasikiniame predikatų skaičiavime yra ekvivalenti formulei $\neg \exists x (S(x) \wedge P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge P(x))$, yra tapachiai lygi loginiam vienetui ir todėl yra išvedama klasikiniame predikatų skaičiavime.

Priėmę prielaidą, kad aibė S yra netuščia, t. y., kad $\exists x S(x)=1$, nesunkiai įrodome, jog formulę $[(SiP) \vee (SoP)]$ atitinkanti formulė $\exists x (S(x) \wedge P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$ taip pat yra išvedama taip papildytame klasikiniame predikatų skaičiavime, nes formulė $\exists x (S(x) \wedge P(x)) \vee \exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$ yra ekvivalenti formulei $\exists x [(S(x) \wedge P(x)) \vee (S(x) \wedge \neg P(x))]$, kuri savo ruožtu yra ekvivalenti formulei $\exists x S(x)$, o ši, kaip jau esame priėmę, yra lygi loginiam vienetui, kai aibė S yra netuščia.

Predikatų skaičiavimą, panašiai kaip teiginių skaičiavimą, galima konstruoti ne tik aksiomatinėje, bet ir **natūraliosios dedukcijos formoje**. Tai galima padaryti, pavyzdžiui, naudojantis sekvencijomis. Norint gauti **sekvencinį predikatų skaičiavimą**, pakanka jau mums žinomų teiginių skaičiavimo išvedimo figūrinių schemų (IFS) sąrašą papildyti kvantorių įvedimo į išvedamas formules taisyklėmis, pateiktomis išvedimo figūrų schemų (IFS) formoje, o taip pat ir kitomis IFS, atitinkančiomis kitas mūsų nagrinėtas predikatų skaičiavimo formulių išvedimo

taisykles bei penktosios grupės aksiomas A.V.1. $\vdash \forall x_j \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ir A.V.2. $\vdash \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow \exists x_j \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$.

Turėdami tokį papildytą IFS rinkinį ir naudodamiesi sekvencijų metodu panašiai kaip 1.16.1.5.3. skyrelyje, galėsime išvesti visas predikatų skaičiavimo teoremas, kurias išvedėme 1.16.1.5.4. skyrelyje, naudodamiesi aksiomatinio metodu. Palieku patiems skaitytojams atlikti šį sekvencijų metodo taikymo pratimą.

Kaip jau buvo minėta 1.16.1.5.3. skyrelyje, predikatų skaičiavime ir predikatų logikoje (predikatų logikos algebroje) gali būti taikomi ir rezoliucijų bei semantinių lentelių metodai.

1.16.1.5.5. Logikos raidos ir formalizavimo etapai. Metamatematika

Kaip jau buvo minėta 1.16.1.5.2. skyrelyje, **teiginių ir predikatų skaičiavimai kaip formalios sistemos buvo sukurti, vadovaujantis ne tiek logikos kiek matematikos, jos loginio pagrindimo poreikiais**. Tie poreikiai ypatingai sustiprėjo, klasikinei aibių teorijai susidūrus su paradoksis, pavadintais **antinomijomis**.

Kad suprastume, kaip ir kodėl taip atsitiko, jog iškilo reikiamybė peržiūrėti ir stiprinti matematikos rūmų pagrindus, ir kodėl tam prireikė kurti formalias logines sistemas, teks padaryti trumpą ekskursiją į matematikos ir logikos istoriją.

Ta ekskursija studijuojantiems sistemotyra bus naudinga ne tik tuo, kad išplės jų matematinę akiratį bei pakels matematinės kultūros lygį, bet ir tuo, kad padės sisteminio mąstymo ugdymui, parodydama, **kaip gali būti sprendžiamos sistemotyros mokslo vystymuisi labai aktualios filosofinės indukcinio ir dedukcinio metodų sąveikavimo ir loginių sistemų kūrimo bei jų jungimo problemos**.

Apžvelgdami logikos mokslo raidos (tame tarpe ir logikos formalizavimo bei sąveikavimo su matematika) istoriją, patogumo dėlei sąlyginai išskirsime tokius tos istorijos etapus:

- 1) neformaliosios logikos formavimosi etapą,
- 2) logikos formalizavimo etapą,
- 3) logikos matematizavimo etapą,
- 4) formalų dedukcinių sistemų formavimo ir jų taikymo matematikos pagrindų peržiūrai ir pertvarkymui etapą,
- 5) šiuolaikinę matematinės logikos raidos etapą.

Knygoje, skirtose logikos istorijai ([246, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263] ir kt.), išskiriama žymiai daugiau ir smulkesnių logikos mokslo raidos etapų, tačiau mūsų reikmėms pakaks tokio sustambinto tos raidos periodizavimo.

1.16.1.5.5.1. Neformaliosios logikos formavimosi etapas

Žmonija teisingo mąstymo dėsniais pradėjo intuityviai naudotis žymiai anksčiau, negu tuos dėsnius išreiškė raštu ir suformulavo kaip logikos mokslo dėsnius. Tie intuityviai suvokiami „sveiko proto“ dėsniai stichiškai kristalizavosi žmonių sąmonėje kaip pavienių žmonių ir jų bendrijų patirties apibendrinimai, fiksuojami šnekamojoje, o vėliau – ir rašytinėje kalboje, kurie, perduodant tą patirtį iš kartos į kartą, turtėjo ir tobulėjo. **Logikos mokslo priešistorėi buvo būdinga tai, kad žmonės, intuityviai suvokdami, kada mąstoma teisingai, kada – ne, jokios specialiai suformuluotų ir išreikštų raštu teisingo mąstymo taisyklių sistemos dar neturėjo, ir sąvoka „taisyklingas mąstymas“, jei tuo metu tokia sąvoka ir būtų atsiradusi, būtų reiškusi lygiai tą patį, ką ir sąvoka „teisingas mąstymas“.**

Tačiau ilgainiui, pradėjus formuotis mokslams apie pasaulį ir jame vykstančius įvairius reiškinius, žmonės pradėjo tirti ir pasaulio pažinimo priemones, tame tarpe – žmogaus mąstymą. Tai ir buvo logikos mokslo pradžia.

Kiek žinoma iš mus pasiekusių istorinių šaltinių, **logika buvo savarankiškai kuriama bent jau trijose šalyse – Kinijoje, Indijoje ir Graikijoje.**

Kinijoje logika atsirado jau VI a. prieš Kristaus gimimą, kai politinių ir teisinių ginčų įtakoje buvo pradėta tikslinti ginčų terminologiją ir nustatinėti vienų teiginių išvedimo iš kitų teiginių taisyklės.

Labiau negu Kinijoje logika išsivystė senovės Indijoje, kurioje, kaip ir kitose šalyse, logika atsirado mokslų vystymosi ir viešųjų diskusijų bei filosofijos įtakoje. IV–V mūsų eros amžiais Indijoje jau ima formuotis logikos teorijos, loginės mokyklos. Nors teiginių logikos indų logikai nesukūrė, tačiau kai kuriuos teiginių logikos dėsningumus žinojo: buvo sukurta neiginio teorija, nustatytas dvigubo neigimo dėsnis. **Susiformavo klasių ir predikatų logikos užuomazgos, buvo sukurta penkianario samprotavimo teorija**, pagal kurią samprotavimą turėtų sudaryti šios dalys: 1) tezė, kurią reikia įrodyti; 2) tezės pagrindimas; 3) pavyzdys; 4) pavyzdžio pritaikymas; 5) išvada.

Indų logikoje galima rasti ir **loginių santykių teorijos užuomazgą bei formaliosios implikacijos teorijos užuomazgą**. Tačiau mąstymas buvo tiriamas daugiau turinio, o ne formos atžvilgiu, todėl kintamieji dydžiai nebuvo vartojami ir **logika Indijoje nepasiekė formaliosios logikos lygio.**

Perėmę kai kuriuos Egipto, Babilonijos, Persijos ir kitų senovės Rytų šalių mokslo pasiekimus, senovės graikai vystė gamtos mokslus, filosofiją, kūrė logikos teoriją. Logiką jie laikė pažinimo, tiesos gavimo priemone. Visi mokslai, tame tarpe ir logika, buvo apjungti vienu pavadinimu „filosofija“.

Vieni pirmųjų logikos problemas iškėlė **Elėjos mokyklos** atstovai, kuri veikė VI a. pabaigoje – Va. pradžioje prieš Kristaus gimimą. Žymiausias tos mokyklos atstovas – **Zenonas Elėjietis** (apie 490–430 m. prieš Kristaus gimimą). Jis sukūrė savo garsiasias **aporijas** („Dichotomija“, „Achilas ir vėžlys“, „Strėlė“ ir kt.), kurias jis laikė neišsprendžiamais mąstymo prieštaravimais.

Logikos problemas nagrinėjo ir atomistinės teorijos kūrėjas **Demokritas** (apie 460–370 m.m. prieš Kristaus gimimą). Jis tyrė **indukciją, analogiją, hipotezę, suformulavo pakankamo pagrindo principą**.

Logiką kaip įrodymo meną, tuo metu vadinamą **dialektika**, vystė **Sokratas** (469–399 m.m. prieš Kristaus gimimą). Jis gimė ir gyveno Atėnuose, kuriuose tuo metu buvo labai paplitusi **sofistika**. Sofistų mokyklose buvo mokoma iškaltos meno – retorikos, meno išradingai vesti ginčą – euristikos, mokėjimo įrodyti savo teiginius – dialektikos, be to – dar etikos, filosofijos. Tam tikra sofistų grupė iškėlė sau uždavinį – sukurti teoriją, galinčią įrodyti bet kurį teiginį. Tokie „įrodymai“, kuriuose vienoje prielaidoje sąvokos buvo vartojamos viena prasme, kitoje prielaidoje – kita prasme, dar ir dabar vadinami **sofizmais**. Sokratas susižavėjo filosofija ir, nepritardamas sofistų pažiūroms, ėmė kurti ir skelbti savo teoriją. Kiekvieną dieną jis traukdavo į turgaus aikštę ir diskutuodavo su kiekvienu, panorėjusiu ginčytis. Sokrato pažiūros nesiderino su tradicinėmis atėniečių pažiūromis į žmogaus ir dievybės santykį, ir jis, būdamas 70 metų, buvo nuteistas mirti už atėniečių papročių negerbimą. Sokratas nieko neparašė, savo pažiūras dėstė gyvu žodžiu. Jas užrašė jo mokiniai, daugiausia **Platonas**, kuris vėliau įsteigė savo mokyklą – Akademiją.

Toje mokykloje 20 metų mokėsi ir vienas žymiausių Antikos laikų mąstytojas – Aristotelis, kuris laikomas **logikos mokslo formalizavimo pradininku**.

1.16.1.5.5.2. Logikos formalizavimo etapas: nuo Aristotelio iki Dekarto ir Leibnico

Aristotelis (384–322 m.m. prieš Kristaus gimimą) gimė Trakijoje, Stagiro mieste, todėl dažnai vadinamas Stagiritu (t. y. stagiriečiu). Jo tėvas buvo žymus to meto gydytojas ir galėjo leisti savo sūnų į Platono Akademiją. Platonui mirus, Aristotelis pasitraukė iš Akademijos ir pradėjo auklėti Makedonijos karalius sūnų Aleksandrą Makedonietį. Kai Aleksandras tapo valdovu, Aristotelis grįžo į Atėnus ir įsteigė savo mokyklą – Likėjų, davusią vardą šiuolaikiniams licėjams.

Aristotelis parašė daug veikalų iš įvairių mokslo sričių, sukurdamas enciklopedinę žinių sistemą. Veikalus, skirtus logikai, vėlesnieji Aristotelio komentatoriai apjungė bendru pavadinimu **„Organonas“ („Pažinimo įrankis“)**. „Organoną“ sudaro šie veikalai: „Kategorijos“, „Pirmoji analitika“, „Antroji analitika“, „Topika“, „Sofistinių argumentų paneigimas“. Logikos problemų nagrinėjimo pasitaiko ir kituose Aristotelio veikuose, ypač vienoje svarbiausių jo knygų – „Metafizikoje“.

Žymiausioji Aristotelio logikos mokslo, kuri jis vadino „analitika“, dalis yra **silogistika**. Apie ją mes jau esame kalbėję 1.16.1.5.1. skyrelyje. Tiesa, ten silogistika pateikta šiek tiek moderniau, negu tai darė Aristotelis (silogizmų modusus suteikti vardai, nagrinėjamos keturios paprasto kategoriško silogizmo figūros, kai Aristotelis mini tik tris, nors ir vartojo ketvirtosios figūros silogizmus Fesapo ir Fresison, ir t. t.), tačiau pagrindinės silogistikos idėjos, kurias suformulavo Aristotelis, išliko iki mūsų laikų ir pateko į šiuolaikinius logikos vadovėlius.

Svarbu pažymėti, kad **Aristotelio silogistika buvo sudaryta deduktyviai – aksiomatiškai**: keturi pirmosios figūros modusai, dabar vadinami Barbara, Celarent, Darii ir Ferio, buvo laikomi lyg ir aksiomomis šiuolaikine prasme, o iš jų pagal tam tikras taisykles buvo išvedinėjami visi kiti modusai. Vėlesnieji Aristotelio pasekėjai visų jo idėjų iškart pilnai suprasti nepajėgė ir net patį silogozmą aiškino šiek tiek kitaip negu Aristotelis. **Stagiritas kaip deduktyvaus aksiomatinio metodo kūrėjas buvo suprastas ir įvertintas tik mūsų laikais.**

Aristotelis kūrė ir **modalinės logikos pradmenis**, nagrinėdamas teiginius, kuriuose vartojami terminai „būtina“, „galima“ bei jų neiginiai. Modalinę logiką jis taip pat kūrė silogizmų pagrindu ir nustatė gana daug **modalinių silogizmų**.*

Aristotelis pradėjo vartoti logikoje ir kintamuosius dydžius bei jų žymėjimus raidėmis. „Iš tikrųjų, jei A priskiriamas visiems B, o B priskiriamas visiems C, tai A būtinai priskiriamas visiems C“, – rašė Aristotelis. Todėl **Aristotelis laikomas formalizavimo logikos moksle pradininku: jis pirmasis pradėjo naudoti formalius žymėjimus ir kurti formalių mąstymo taisyklių – naujų teisingų teiginių išvedimo iš turimųjų teisingų teiginių taisyklių – sistemą**. Taigi, Aristotelis teisingame mąstyme išvēlė tam tikrus dėsningumus ir pabandė juos formalizuoti, formuluodamas teisingo mąstymo taisykles.

Aristotelis suformulavo **tapatybės, neprieštaravimo ir negalimo trečiojo dėsnius, nustatė, kad, naudojantis taisyklingo mąstymo taisyklėmis, iš teisingų prielaidų išplaukia tik teisingos išvados**. Tiesa, **Aristotelis nesukūrė teiginių logikos**, nors ir žinojo bei naudojo **tos logikos jungtis – neigimą, konjunkciją, disjunkciją, implikaciją**. Pagrindinė to priežastis buvo visų teiginių aiškinimas subjektinės – predikatinės struktūros požiūriu ir visų samprotavimų suvedimas į silogizmus, kas šiek tiek susiaurino Aristotelio požiūrį į logiką.

Tačiau ir ta formaliosios logikos sistema, kurią sukūrė Aristotelis, buvo grandiozinis dalykas tiems laikams, nes iki tol logikos istorijoje nieko panašaus nebuvo buvę. Aristotelio sukurtoji sistema turėjo didžiulę įtaką vėlesniems laikams: jis buvo laikomas didžiausiu mokslo autoritetu ir Antikos laikais ir viduramžiais.

Teiginių logikos pagrindus sukūrė megariečių – stoikų mokyklos atstovai, skelbę Megaros ir stoikų mokyklose vystomas idėjas.

Megaros mokykla atsirado elėjiečių ir Sokrato idėjų įtakoje. Ją įkūrė **Euklidas Megarietis** (apie 450–380 m.m. prieš Kristaus gimimą), kilęs iš Megaros miesto. Kiti žymesni tos mokyklos atstovai – Eubulidas ir Filonas Megarietis.

Panašias idėjas logikoje tuomet vystė ir kita filosofinė mokykla – **stoikai**. Tą mokyklą įkūrė **Zenonas Stoikas**, kuris pradžioje mokėsi Megaros mokykloje, o po to – platonikų Akademijoje ir apie 300 m. prieš Kristaus gimimą įkūrė savo mokyklą – Stoją. Jo pažiūras susistemino ir toliau išvystė **Chrizipas** (apie 280–206 m. prieš Kristaus gimimą).

Kadangi megariečiai ir stoikai vystė panašias idėjas, o be to stoikai kai kurias idėjas perėmė iš megariečių ir toliau tęsė jų vystymą, kai Megaros mokykla užsidarė (III a. prieš Kristų pabaigoje), tai logikos istorijoje dažnai vartojamas jungtinis terminas – **megariečių – stoikų mokykla**. Šiai mokyklai priskiriamas dar ir kitas nuopelnas – **logikos antinomijų** atskleidimas ir tyrimas. Antinomijas pirmieji atskleidė megariečiai: Eubulidui priskiriama „Melagio“ antinomijos formuluotė, o stoikui Chrizipui – šios antinomijos sprendimas, artimas tos antinomijos sprendimui šiuolaikinėje logikoje. Antikos logikas – Filitas iš Koso, sprenddamas „Melagio“ antinomiją, net numirė. Ant jo kapo akmenis užrašyta: „Keleivi, aš esu Filitas, mane numarino „Melagio“ argumentas ir gilūs naktiniai apmąstymai“.

Stoikai pirmieji pavartojo ir terminą „logika“ (Aristotelis, kaip jau buvo minėta, savo veikaluose logiką vadino „analitika“).

Po Aristotelio ir megariečių – stoikų keletą šimtmečių (nuo II a. prieš Kristų iki VI a. po Kristaus gimimo) tęsėsi taip vadinamasis **komentatorių ir vadovėlių laikotarpis**, kurio metu buvo studijuojami bei komentuojami Aristotelio ir megariečių – stoikų darbai, nekeliant ir nesprendžiant naujų problemų, nekuriant naujų metodų. Tiesa, Porfirijus antrojo mūsų eros amžiaus pabaigoje suformulavo tris klausimus apie **universalijas** (gimines ir rūšis), dėl kurių vėliau – viduramžiais – buvo ginčijamasi ištisus šimtmečius: 1) kaip egzistuoja giminės ir rūšys (t. y. giminės ir rūšies sąvokos) – savarankiškai ar tik mintyse; 2) jei jos egzistuoja, tai ar jos yra kūniškos, ar nekūniškos; 3) ar giminės ir rūšys egzistuoja savarankiškai, ar jutimiškai pažįstamuose daiktuose ir kartu su jais.

Didelių kokybinių pokyčių logikoje neįvyko ir viduramžiais, kuriems buvo būdinga taip vadinamoji **scholastinė logika**. Jos pavadinimas kilęs iš žodžio „schola“, reiškiančio mokyklą, kadangi tuo metu Aristotelio sukurtos logikos pagrindai buvo dėstomi mokyklose (tiesa, gana dogmatiškai).

Viduramžių logiką priimta skirstyti į tris laikotarpius: 1) „senąją logiką“ („logica vetus“), 2) „naująją logiką“ („logica nova“) ir 3) „moderniąją logiką“ („logica modernorum“).

* Apie modalines logikas mes dar kalbėsime 1.16.1.5.7. skyrelyje.

Senosios logikos laikotarpis tęsėsi nuo VIII a. iki XII a. vidurio. Jame pagrindinis dėmesys buvo skiriamas filosofinėms problemoms: jau minėtajai universalijų problemai ir logikos santykio su teologija klausimams.

Sprendami universalijų problema, vieni scholastai teigė, kad universalijos kaip abstrakčios esybės egzistuoja realiai, ir todėl buvo vadinami **realistais**. Žymiausias senųjų realistų atstovas – **Anselmas Kenterberietis** (1033–1109).

Realistų oponentai teigė, kad universalijos tėra vardai, sąlyginiai pavadinimai. Todėl šie scholastai buvo vadinami **nominalistais** (nuo žodžio „nomos“, reiškiančio vardą). Vienu žymiausių senojo nominalizmo atstovu buvo prancūzas **J. Roscelinas** (apie 1050–1112). Jo mokinys – nuosekliojo nominalizmo atstovas – **Pjeras Abeljaras** (1079–1142) – teigė, kad universalijos nėra šiaip sau žodžiai, o mąstymo produktai – konceptai (t. y. sąvokos). Ši pažiūra buvo pavadinta **konceptualizmu**.

Sprendžiant logikos ir teologijos santykio klausimus, scholastai taip pat pasidalino į dvi grupes – dialektikus ir antidialektikus. **Dialektikai** (jų tarpe ir Pjeras Abeljaras) svarbiausiu autoritetu laikė ne tikėjimo dogmas, o žmogaus protą, jo mąstymo logiką, ir teigė, jog logika turi teisę kritikuoti abejotinas tikėjimo dogmas. **Antidialektikai** tam prieštaravo, teigdami, kad logika neturi teisės aiškinti tikėjimo paslapčių, nes žmogaus protas esąs tam per silpnas.

Naujosios logikos laikotarpis tęsėsi nuo XII a. vidurio iki XIII a. pabaigos. Šiuo laikotarpiu buvo imtasi **teiginių logikos tolimesnio plėtojimo**, nustatomi nauji logikos dėsniai – **tautologijos**. Atsirado ir buvo vystoma **supozicijos teorija**, nagrinėjanti termino ir tuo terminu žymimo objekto santykį. Žymiausieji viduramžių naujosios logikos atstovai – **Petras Ispanas** (1224–1277), vėliau tapęs popiežium Jonu XXI, ir Dunsas Skotas (apie 1265–1308) – Oksfordo, Paryžiaus ir Kelno universitetų profesorius, kurio raštai sudarė 12 didžiulių foliantų. Taisyklę, kad **iš klaidingo teiginio gali būti išvestas bet koks teiginys**, dažnai dar ir dabar vadina ją pirmą kartą nustačiusio Dunso Skoto vardu.

Baigiantis naujosios logikos laikotarpiui, pradėjo formuotis ir moderniosios viduramžių logikos idėjos, tame tarpe ir **mąstymo proceso mašinizavimo idėjos**. Buvo sukurta **pirmoji loginė mašina**. Jos autorius – Katalonijos poetas, mokslininkas ir misionierius **Raimondas Lulijus** (apie 1235–1315). Sukant koncentriškus tos mašinos skritulius, buvo galima gauti tam tikrus taisyklingus silogizmus.

Trečiasis viduramžių logikos laikotarpis – modernioji logika – tęsėsi nuo XIV a. pradžios iki viduramžių pabaigos. Jo metu buvo toliau vystoma teiginių logika, vienų teiginių išvedimo iš kitų teorija, buvo tęsiama modalinės logikos plėtotė, kuriama **semantinių antinomijų teorija**. Žymiausi to laikotarpio filosofai, pasižymėję logikoje: **Vilhelmas Okamas** (apie 1300–1350), **Žanas Buridas** (apie 1300–1358), **Albertas Saksonietis** (1316–1390).

Po viduramžių prasidėjusiems **naujesiems laikams buvo būdingas mokslo autoriteto augimas**. Atmesdami scholastinę filosofiją ir dogmatinį mąstymą, kai kurie naujųjų laikų mokslininkai atmetė ir viduramžių logiką, neretai net pakankamai neišgilinę į ją ir neišvertinę nemažų jos pasiekimų. Naujos progresyvios idėjos nustelbdavo senąsias, kartais net išstumdavo jas, ir tai vykdavo ne visada sugebant pasisavinti vertingą senųjų idėjų palikimo dalį. Tai būdinga ne tik šiam laikotarpiui.

Pavyzdžiui, žymus anglų filosofas – materialistas **Frensis Bekonas** (1561–1626) iškėlė naują ir progresyvią idėją, kad **mokslo pagrindu turi būti eksperimentas**, žmonių praktinėje veikloje atsirandantis gamtos dėsnių pažinimas, o **mokslinio mąstymo pagrindu turi būti indukcija**. Laikydamas Aristotelio dedukcinę logiką beverte moksliniu atžvilgiu, F.Bekonas parašė „**Naująjį organoną**“, kuris, autoriaus nuomone, turėjo pakeisti Aristotelio „Organoną“. Taigi, F.Bekonas, iškeldamas naują progresyvią idėją ir modernizuodamas logiką (vėliau, jau XIX a. kitas anglų filosofas ir logikas D.S. Milis sistematizavo F.Bekono tyrimus **induktyviosios logikos*** srityje, ir nuo to laiko **indukcijos metodas tapo būtinaja sudėtine logikos dalimi**), nesugebėjo įvertinti dedukcinio metodo ir suprasti **indukcinio ir dedukcinio metodų sintezės naudą**.

Naujaisiais laikais **pradėjo formuotis ir kitos progresyvios idėjos, būdingos naujam – jau trečiajam – logikos mokslo raidos etapui**. Pavyzdžiui, garsus prancūzų mokslininkas **Renė Dekartas** (1596–1650), lotyniškoje literatūroje vadinamas dar ir **Kartezijum** (Renatus Cartesius), panašiai kaip ir F. Bekonas kūrė naujo mąstymo metodą, tačiau jis, suprasdamas indukcijos metodo reikšmę, neatmetė dedukcijos, o suvokė gilų abipusį abiejų šių metodų ryšį ir savo veikaluose „**Vadovavimo protui taisyklės**“ ir „**Samprotavimai apie metodą**“ išsakė eilę vertingų naujojo mąstymo ir sudėtingų problemų sprendimo, naudojantis matematiniais metodais, taisyklių. Jis, siekdamas, kad „**mintyse būtų tokia pati tvarka kaip ir skaičiuose**“, iškėlė idėją apie visuotinio loginio – matematinio metodo

* Apie induktyviąją logiką ir jos ryšį su tikimybine logika dar bus kalbama 1.16.1.5.5.7. ir 1.16.1.5.6. skyreliuose.

mokslinėms problemoms spręsti sukūrimą ir net buvo **pradėjęs praktiškai kurti atitinkamą matematizuotą kalbą**, kurioje būtų galima taikyti matematinį aparatą.

Panašias idėjas išsakė ir žymusis vokiečių matematikas bei filosofas **Gotfridas Vilhelmas Leibnicas** (1646–1716), pasižymėjęs enciklopediniu talentu. Jis ne tik nepriklausomai nuo Niutono sukūrė diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pagrindus, bet ir, išvelgęs panašumą tarp matematikos ir logikos, **išsakė mintį apie matematinės simbolikos įvedimo į formaliąją logiką galimybę bei tikslingumą** ir net bandė kurti **ne tik skaičiavimo, bet ir „loginę mašiną“**, teigdamas, jog ateityje įvairius ginčus bus galima spręsti tiksliais skaičiavimais.

Nors dabar įrodyta, kad tokią visuotinę formalizuotą teoriją, apie kurią rašė Leibnicas, sukurti neįmanoma, tačiau vėliau atsiradusios **simbolinės logikos platus taikymas technikoje ir įvairiuose moksluose** rodo didžiojo vokiečių mokslininko išvalgumą bei jo idėjų progresyvumą ir gilumą. Jo **idėjos apie logikos matematizavimą ir loginių skaičiavimo sistemų kūrimą** vėliau pilnai pasitvirtino. Žymus XVIII a. prancūzų enciklopedistas D.Didro yra pažymėjęs, kad Leibnicas net kai kuriuose savo paskelbtuose parodė daugiau genialumo, negu kiti, atskleisdami tas ar kitas tiesas.

1.16.1.5.5.3. Logikos matematizavimo etapas

Leibnico idėja apie logikos matematizavimą buvo įgyvendinta tik devynioliktojo amžiaus viduryje, kai anglų matematikas **Dž.Bulis** (1815–1864) **įvedė į formaliąją logiką algebros elementus ir davė pradžią matematinei logikai** teiginių algebros, kurią mes dabar vadiname **Bulio algebra**, pavidale. Didelį įnašą į formaliosios logikos matematizavimą įnešė ir **O.Morganas** (1806–1871), **W.S.Dževonsas** (1835–1882), **E.Šrederis** (1841–1902) bei kiti matematinės logikos kūrėjai. Jų dėka buvo sukurti **klasikinės teiginių ir predikatų algebros**, kuriai skirti šios mokymo priemonės 1.16.1.1.–1.16.1.4. skyreliai, pagrindai

Trečiajam logikos raidos etapui buvo būdinga tai, kad **logikos poreikiams buvo stengiamasi panaudoti matematikos aparatą, t. y. į pagalbą logikai buvo pasitelkta algebra**.

Devynioliktojo amžiaus pabaigoje Jenos universiteto matematikas **Gotlobas Frėgė** (1848–1925) pateikė matematinės logikos sistemą, susidedančią iš aksiomatinės teiginių logikos ir predikatų logikos, kuri buvo jau labai artima šiuolaikinei matematinei logikai (t. y. šiuolaikiniams klasikiniams **teiginių ir predikatų skaičiavimams**, aprašytiems šios mokymo priemonės 1.16.1.5.2. ir 1.16.1.5.4. skyreliuose) ir skyrėsi nuo jos tik savo neįprasta ir gana sudėtinga simbolika. Pakeitus tą simboliką ir patobulinus aksiomatiką, beliko tik vienas žingsnis iki 1910–1913 mm. išleistų Bertrano Raselo ir Alfredo Vaithedo garsiųjų „Principia Mathematica“. Tačiau tai – jau naujas etapas matematinės logikos (o kartu – ir matematikos) raidoje.

1.16.1.5.5.4. Antinomijų atradimas aibių teorijoje. Ketvirtąjo logikos raidos etapo pradžia

Devynioliktojo ir dvidešimtojo mūsų eros amžių sandūroje **matematika susidūrė su matematikos mokslo pagrindimo problemomis**, kurias iššaukė paradoksų, pavadintų **antinomijomis**, klasikinėje aibių teorijoje, sudarančioje klasikinės matematikos pagrindą, atradimas.

Kaip pavyzdį pateiksiu jau minėtojo anglų matematiko ir logiko **B. Raselo (B. Russell, 1872–1970) loginę antinomiją**, kurią jis atrado 1902 m.

Nagrinėsime visas tas aibes A, kurios turi savybę D nebūti savęs pačios elementais. Dauguma konkrečių aibių turi tokią savybę. Pavyzdžiui, visų žvaigždžių aibė, kurios elementai yra atskiros žvaigždės, nėra savęs pačios elementas, nes visų žvaigždžių aibė nėra žvaigždė. Analogiškai gauname, kad tokią savybę turi ir visų žmonių aibė, visų natūraliųjų skaičių aibė ir t. t. Sudarysime visų tokių ir tik tokių aibių A aibę T ir iškelsime klausimą, ar aibė T turi savybę D ar ne, t. y. ar $T \in T$, ar $T \notin T$?

Jei aibė T turi savybę D, t. y. jei aibė T nėra savęs pačios elementas, tai ji turėtų priklausyti aibei T kaip visų aibių, turinčių savybę D, aibei. Kitaip tariant, iš $T \notin T$ išplaukia $T \in T$, t. y. gauname prieštarą.

Jei aibė T neturi savybės D, t. y. priklauso tokių aibių grupei, kurios yra pačių savęs elementai (kaip, pavyzdžiui, visų aibių aibė yra aibė ir todėl yra savęs pačios elementas), tai $T \in T$. Bet juk aibę T sudaro tik tokios aibės A, kurios turi savybę D, t. y. nėra savęs pačios elementais. Todėl, jei $T \in T$, tai $T \notin T$, t. y. vėl gauname prieštarą.

■ Apie R.Dekarto idėjas, o taip pat apie dedukciją ir indukciją matematikoje įdomiai ir giliai yra pasakiusi S.A.Janovskaja. Jos straipsnį „Apie matematinio griežtumo vaidmenį matematikos kūrybiškos raidos istorijoje ir specialiai apie Dekarto „Geometriją“, patalpintą knygoje [170], labai rekomenduočiau perskaityti.

Formaliai Raselo antinomiją galima išreikšti taip: $(A \in T) \Leftrightarrow (A \notin A)$, iš kur, kai A sutampa su T, gauname $(T \in T) \Leftrightarrow (T \notin T)$, t. y. prieštarą.

Raselo antinomija nėra vienintelė **loginė aibių teorijos antinomija**. Dar 1897m. pirmąją tokią antinomiją buvo atradęs italų matematikas Burali–Forti (C.Burali–Forti), nagrinėdamas visų ordinaliųjų skaičių klasę, o 1899m. panašią antinomiją surado ir pats klasikinės aibių teorijos (kurią dabar gana dažnai vadina „naiviaja“) kūrėjas G.Kantoras (G.Cantor). Nagrinėdamas visų aibių aibę M ir visų jos poaibių aibę P(M), Kantoras gavo, jog iš aibės M apibrėžimo išplaukia, kad $P(M) \in M$, kas prieštarauja to paties Kantoro įrodytai teoremai, jog bet kurios aibės A visų poaibių aibės P(A) galia yra didesnė už aibės A galia.

Aibių teorijos semantinės antinomijos pavyzdžiu gali būti Rišaro (J.Richard) antinomija, kurią pateiksiu taip, kaip ją 1906m. suformulavo Beris (G.D.W.Berry).

Nagrinėsime tokią natūraliųjų skaičių aibę, kurią sudaro visi tie ir tik tie natūralieji skaičiai, kurių kiekvieno apibrėžimui pakanka ne daugiau kaip tūkstančio žodžių prasmingo teksto. Aišku, kad tokių skaičių aibė yra baigtinė. Kadangi natūraliųjų skaičių aibė yra begalinė, tai turėtų egzistuoti natūralūs skaičiai, neįeinantys į aukščiau minėtąją baigtinę natūraliųjų skaičių aibę. Išrinksime iš tų skaičių patį mažiausiąjį. Tokio skaičiaus kaip mažiausiojo natūralaus skaičiaus, neįeinančio į minėtąją aibę, apibrėžimui, kaip ką tik matėme, pakanka mažiau kaip tūkstančio žodžių prasmingo teksto. Todėl toks skaičius turėtų priklausyti minėtajai natūraliųjų skaičių aibe, iš kur išplaukia prieštarą, nes šis skaičius – mažiausias natūralus skaičius, nepriklausantis natūraliųjų skaičių aibe, kurios kiekvienas skaičius apibrėžiamas prasmingu tekstu, turinčiu ne daugiau tūkstančio žodžių.

Kaip susidoro ti su tokiais paradokais? Iš kur ir kodėl jie atsiranda? Kokias išvadas reikėtų padaryti iš šių ir kitų antinomijų?

Pirmoji išvada: antinomijų buvimas kelia didelę grėsmę šiuolaikinės matematikos mokslo, besiremiančio aibių teorija, pamatams, nes susidaro situacijos, kada negalima garantuoti to mokslo neprieštarinumo. Todėl labai svarbu surasti antinomijų atsiradimo priežastis, surasti būdus, kaip tų antinomijų išvengti, ir sukurti tokius matematikos mokslo pagrindus, kuriuose nebūtų jokių antinomijų bei kitokių prieštarų.

Antroji išvada teigia, kad daugelio antinomijų priežastis yra impredikatyvinių apibrėžimų vartojimas. Impredikatyviniais apibrėžimais vadinami tokie apibrėžimai, kuriuose kokios nors aibės S elementas a apibrėžiamas taip, kad jo apibrėžime dalyvauja tos aibės S sąvoka, dėl ko susidaro savo rūšies ydingasis ratas. Tą aibių elementų apibrėžimų impredikatyvumą nesunku pastebėti ir Rišaro, ir Raselo antinomijose. Vadovaudamasis šia nuomone apie antinomijų atsiradimo priežastis, kurią vienas iš pirmųjų išsakė prancūzų matematikas A.Puankarė (A.Poincaré), jau minėtasis B.Raselas suformulavo „Ydingojo rato principą“, kuriuo susiaurino G.Kantoro įvestąją aibės sąvoką: „Jokia aibė S negali turėti savo sudėtyje elementų m, kurie būtų apibrėžti tik tos aibės S terminais, o taip pat elementų m, kurių apibrėžimuose tiesiogiai ar netiesiogiai būtų vartojama tos aibės S sąvoka“.

Laikantis šio principo galima būtų išvengti loginių ir semantinių antinomijų aibių teorijoje, tačiau tuo pačiu tektų atsisakyti tokių sąvokų, be kurių sunku įsivaizduoti šiuolaikinės matematikos rūmą. Pavyzdžiui, tektų atsisakyti tokios sąvokos kaip duotosios realiųjų skaičių aibės tikslusis viršutinis rėžis (supremumas) ir eilės kitų panašių sąvokų, kurių apibrėžimai yra impredikatyvūs, tačiau be kurių šiuolaikinėje matematikoje būtų labai sunku ar beveik neįmanoma išsiversti.

Paradoksai, operuojant su aibėmis, gali atsirasti ir kai kuriais atvejais, kai, **sumaišę potencialiosios ir aktualiosios begalybių sąvokas, mes su begalinėmis aibėmis pradedame operuoti taip kaip su baigtinėmis**. Pailiustruosiu tai pavyzdžiais.

Tarkime, jog mes norime apskaičiuoti sumos $S=1-1+1-1+1-1+...$, turinčios begalinį dėmenų skaičių, reikšmę.

Pritaikę tos sumos apskaičiavimui asociatyvumo dėsnį, galiojantį sumoms, turinčioms baigtinį dėmenų skaičių, gauname atvejus:

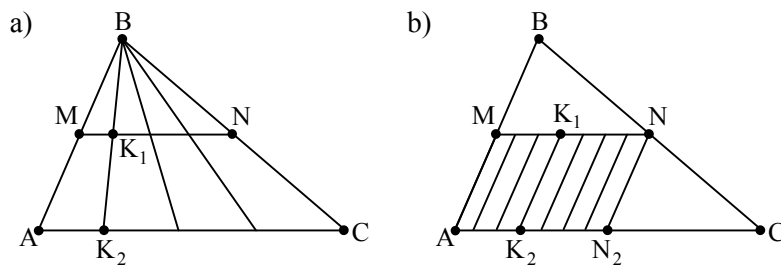
$$1) \quad S=1-1+1-1+...=(1-1)+(1-1)+(1-1)+...=0+0+0+...=0;$$

$$2) \quad S=1-1+1-1+...=1-(1-1)-(1-1)-...=1-0-0-...=1;$$

$$3) \quad S=1-1+1-1+...=1-(1-1+1-1+...)=1-S, \text{ iš kur gauname, jog } 2S=1, \text{ t. y., jog } S=\frac{1}{2}.$$

Koks gi iš tikrųjų sumos S dydis? O gal ši eilutė $S=1-1+1-1+...$ iš viso neturi jokios sumos? Palieku šiuos klausimus skaitytojo pamąstymams.

Pateiksiu dar vieną pavyzdėlį. Tarkime, jog turime trikampį ABC, pavaizduotą 397^a pav.



397 pav.

Per kraštinių AB ir BC vidurio taškus M ir N pravesime to trikampio vidurio liniją MN. Trikampio pagrinde AC paimsime bet kokį tašką K_2 ir sujungsime jį su trikampio viršūne B. Atkarpa BK_2 būtinai kirs vidurio liniją MN kokiame nors viename ir tik viename taške, kurį pažymėsime K_1 . Imdami trikampio pagrinde AC įvairius taškus K_2 , panašiu būdu vidurio linijoje MN gausime taškus K_1 , t. y. gausime, kad vidurio linija MN turi ne mažiau taškų negu atkarpa AC.

Galima įvykdyti ir atvirkštinę procedūrą: atkarpoje MN imti taškus K_1 , sujunginėti juos tiesėmis su trikampio viršūne B ir fiksuoti tų tiesių susikirtimo su atkarpa AC taškus K_2 . Kadangi kiekvieną atkarpos MN tašką K_1 visada atitiks vienas ir tik vienas atkarpos AC taškas K_2 , tai iš to išplaukia, kad atkarpa AC turi ne mažiau taškų negu atkarpa MN.

Sujungdami abi išvadas, gauname jog egzistuoja abipusė vienareikšmė atitiktis tarp atkarpų AC ir MN taškų K_2 ir K_1 , t. y., kad tos atkarpos turi vienodą taškų skaičių.

Dabar pereisime prie 397^b pav., vaizduojančio tą patį trikampį ABC su ta pačia vidurio linija MN. Pravesime tame trikampyje dar vieną vidurio liniją NN_2 , lygiagrečią trikampio kraštinei AB. Imdami atkarpoje MN taškus K_1 ir praveddami per juos tieses, lygiagrečias tiesei AB (ir vidurio linijai NN_2), gausime tų lygiagrečių susikirtimo taškus K_2 atkarpoje AN_2 , turinčioji tą patį ilgį, kaip ir atkarpa N_2C . Kadangi kiekviename atkarpos MN taškui K_1 gausime vieną ir tik vieną atkarpos AN_2 tašką K_2 , t. y. gausime, jog atkarpa AN_2 turi ne mažiau taškų negu atkarpa MN.

Imdami taškus K_2 atkarpoje AN_2 ir praveddami per juos tieses, lygiagrečias AB, analogiškai gausime tų tiesių susikirtimo taškus K_1 su atkarpa MN ir įrodysime, kad atkarpa MN turi ne mažiau taškų negu atkarpa AN_2 .

Sujungdami abi išvadas, gausime, jog atkarpos AN_2 ir MN turi vienodą taškų skaičių.

Prisimindami išvadą, gautą nagrinėjant 397^a pav., ir pažymėdami atkarpos MN taškų skaičių žymeniu x , gauname, jog atkarpa AC turi ir x ir $2x$ taškų, t. y., jog $x=2x$, iš kur gauname, kad $x=0$. Taigi, gauname, jog prieštaros nebūtų, jei atkarpos MN, AN_2 , N_2C ir AC neturėtų nė vieno taško! Tačiau taip nėra, nes kiekviena iš tų atkarpų, turi po be galo daug taškų. Taigi, vėl priešara!

Panašių pavyzdžių, rodančių, kad su begalinėmis aibėmis ne visada galima operuoti taip, kaip su baigtinėmis aibėmis, galima pateikti labai daug.

Operacijų su begalinėmis aibėmis analizė parodė, jog reikia skirti dvi begalybės sąvokas: 1) potencialiąją begalybę ir 2) aktualiąją begalybę.

Potencialiosios begalybės sąvoka vartojame tada, kada kalbame apie sekas, procesus ir pan., kurie gali tęstis kiek nori ilgai, t. y., be galo, ir kurių todėl niekada nelaikome užbaigtais, o tik be galo besitęsiančiais ir niekada negalinčiais tapti užbaigtais.

Aktualiosios begalybės sąvoką vartojame tada, kada operuojame su begalinėmis aibėmis, su begalinėmis sekomis ir pan. kaip su pilnai duotais mums objektais, kaip su pilnai užbaigtais procesais. Pavyzdžiui, samprotaudami: „Imame begalinę natūrinių skaičių aibę $\mathbb{N}$ ir padaliname ją į du poaibius: 1) lyginių natūrinių skaičių aibę A ir 2) nelyginių natūrinių skaičių aibę B. Imame aibės A elementus, t. y. lyginius skaičius 2, 4, 6, 8, ..., ir, kiekvieną jų dalindami pusiau (t. y. sumažindami du kartus ir paversdami skaičiais 1, 2, 3, 4, ...), sudarome aibę C. Aibė C, turėdama tiek pat elementų kaip ir aibė A, iš kurios ji buvo gauta, tuo pačiu metu turės tuos pačius elementus kaip ir aibė N, t. y. aibės N tikrinis poaibis A turės tiek pat elementų, kiek ir pati aibė N“, mes operuojame su begalinėmis aibėmis kaip su aktualiosiomis begalybėmis. Aktualiosios begalybės sąvoka yra vidiniai prieštaringa, nes jos denotatas – proceso, kuris negali niekada baigtis, baigimo rezultatas.

Tokios vidinės prieštaros neturi potencialiosios begalybės sąvoka. Todėl nenuostabu, jog buvo nustatyta, kad operuojant su potencialiosiomis begalybėmis niekuomet neiškyla jokių paradoksų bei prieštarų, kai operuojant su aktualiosiomis begalybėmis neretai susiduriama su įvairiais paradokais bei prieštaromis.

Atrodytų, kad paprasčiausiai būtų visiškai atsakyti aktualiosios begalybės sąvokos vartojimo ir operuoti tik su potencialiomis begalybėmis, tačiau tai padaryti nėra taip jau paprasta, nes šiuolaikinėje matematikoje pilna samprotavimų, kuriuose naudojamos ne tik potencialiosios, bet ir aktualiosios begalybės sąvokomis. Atsisakius aktualiosios begalybės sąvokos vartojimo, didelę dalį teoremų

matematikoje tektų įrodinėti iš naujo, o kai kurių iš viso nepavyktų įrodyti. Be to ne taip jau paprasta užsitikrinti, kad aktualiosios begalybės sąvoka nepastebimai „nepraslystų“ į mūsų samprotavimus.

Taigi ir su aktualiosios begalybės vartojimo atsisakymu surišta panaši situacija kaip ir su impredikatyviai apibrėžiamų sąvokų vartojimo atsisakymu: atsisakant tokių sąvokų vartojimo daugelio teoremų įrodymas tampa žymiai sudėtingesnis, o neretai tenka atsisakyti ir nemažos dalies matematikos mokslo pasiekimų, kurie laikomi teisingais ir labai naudingais, nors ir buvo gauti naudojantis metodais ir sąvokomis, dėl kurių patikimumo ir vartojimo leistinumo dabar mums kyla abejonių.

Iš to, kas buvo pasakyta apie antinomijas ir kitus paradoksus aibių teorijoje bei būdus to išvengti, išplaukia, jog **devynioliktojo ir dvidešimtojo amžių sandūroje matematika susidūrė su rimta krize, iššaukusia naują etapą matematikos ir logikos mokslų istorijoje.**

1.16.1.5.5.5. Apie matematikos krizes ir jų pasekmes

Ši krizė matematikoje nebuvo pirmoji. Jų būta ir anksčiau. Su **pirmąja krize** buvo susidurta dar Antikos laikais – Va. prieš Kristaus gimimą. Įvairios krizės ištikdavo matematiką ir vėliau. Trumpai apžvelgsime svarbiausias matematikos krizes bei situacijas, panašias į krizines, ir padarysime išvadas, išplaukiančias iš tų krizių įveikimo patirties.

Matematika savo raidos pradžioje buvo empirinis mokslas, tačiau jau VIa. prieš Kristų Pitagoro ir jo mokinių darbuose matematika pradėjo vystytis kaip dedukcinis mokslas: remiantis nedideliu skaičiumi neabejotinai teisingų pradinį teiginių, vadinamų aksiomomis, ir loginiais samprotavimais, kurie atrodė neabejotinai teisingi, buvo pradėta išvedinėti naujus teisingus teiginius – teoremas. Vienų iš tokių pradinių teiginių, kuriuo rėmėsi ankstyvoji Antikos matematika, buvo teiginys apie **bendrojo mato egzistavimą** visiems vienaarūšiams geometriniams dydžiams (atkarpų ilgiams, paviršių plotams, kūnų tūriams). Buvo manoma, kad, matuojant kelis tokius vienaarūšius dydžius, visada galima rasti tokį pakankamai mažą dydį – bendrąjį jų matą, kuriuo naudojantis, visus tuos matuojamus dydžius galima tiksliai išreikšti sveikais skaičiais. Remiantis teiginiu apie bendrojo mato egzistavimą, buvo įrodyta eilė teoremų apie figūrų plotą bei kūnų tūrį, kuriomis buvo naudojamosi praktinėje veikloje.

V a. prieš Kristų **pitagoriečiai susidūrė su nelauktu faktu: kvadrato įstrižainė pasirodė neturinti bendrojo mato su to kvadrato kraštine. Paaiškėjo, kad teiginys apie bendrojo mato egzistavimą yra klaidingas. Tai buvo stiprus smūgis to meto dedukcinės matematikos pagrindams, iššaukęs pirmąją jos krizę.** Krizinė būsena antikinėje matematikoje tęsėsi gana ilgai, ir ją pavyko įveikti tik apie 370m. prieš Kristų, kai Eudoksas sukūrė naują dydžių matavimo teoriją, kuri buvo gana artima R.Dedekind 1872m. sukurtai šiuolaikinei iracionaliųjų skaičių teorijai.

Taigi, galima teigti, jog **pirmoji matematikos mokslo krizė buvo įveikta, papildžius racionaliųjų skaičių aibę iracionaliaisiais skaičiais ir įvedus ribos sąvoką.**

Su reiškiniais, panašiais į krizę, nors ir nereiškusio matematikos pagrindų krizės, buvo susidurta ir XVIa., kai italų matematikai N.Tartalijs ir J.Kardanas surado ir paskelbė kubinių lygčių sprendimo formules, kuriose buvo operuojama su kvadratinėmis šaknimis iš neigiamų skaičių. Tos formulės daugumai to meto matematikų atrodė nepriimtinos, kadangi joks realus skaičius – teigiamas ar neigiamas, racionalus ar iracionalus, pakeltas kvadratu, negali duoti rezultato, kuris būtų neigiamas. Tai reikšė, jog Kardano formulėse operuojama su skaičiais, kurie negali egzistuoti. Šis reiškinys, kaip jau buvo minėta, nebuvo matematikos pagrindų krizė, nes kubinių lygčių sprendimui buvo galima ir nesinaudoti Kardano formulėmis, o ieškoti kitų tokių lygčių sprendimo būdų, ir nuo to nieko blogo matematikai neatsitiktų. Tačiau **tai buvo vis dėlto paradoksali situacija: operuojant skaičiais, kurie, atrodė, negali egzistuoti, gaunami teisingi lygčių sprendimai.** Ir tai negalėjo būti atsitiktinumas, nes nebuvo pastebėta atvejų, kad, naudojantis Kardano formulėmis, būtų gauti neteisingi atsakymai.

Reikėjo nemažai laiko, kol buvo suvokta, kad to meto matematikai buvo teisūs, teigdami, jog tokių skaičių nėra realių skaičių tiesėje, tačiau tai dar nereiškė, jog tokių „keistų“ skaičių negali atsirasti, išplėtus erdvės matavimų skaičių ir perėjus į plokštumą.

Taip **atsirado menamieji ir kompleksiniai skaičiai**, ir dabartinių matematikų jau nebešokiruoja tokios formulės kaip $e^{i\pi} = -1$, kurioje susiduria menamasis vienetas $i = \sqrt{-1}$, neigiamas vienetas -1 ir du ypatingieji iracionalūs skaičiai π ir e . Sistemotyriminkui, linkusiam pastebėti įvairius ypatingus atvejus ir ieškančiam bendrų dėsningumų, būtų naudinga pasistengti suvokti tą formulę ne tik „matematiškai“, bet ir „fiziškai“. Reiktų pamąstyti ir apie tai, kodėl įvairiose sudėtingose formulėse (pavyzdžiui, Stirlingo formulėje $n!$ reikšmės apskaičiavimui, normalaus skirstinio tankio formulėje ir t. t.) skaičiai π ir e gana dažnai atsiranda greta. Ar tai tik atsitiktinumas? Ar turi tam reikšmės tai, kad skaičius π charakterizuoja racionaliausią uždaro plokščios kreivės formą, pasižyminčią tuo, kad, apjuosiant tą kreivę duotąjį plotą, reikia mažiausio to kreivės ilgio, o skaičius e charakterizuoja racionaliausią pozicinės skaičiavimo sistemos pagrindą, kuriam esant, bet kokio skaičiaus

pavaizdavimui bei perdavimui ryšių kanalais reiktų mažiausiai bitų ir laiko? **Ar atsitiktinumas tai, kad eilė matematikos bei hidromechanikos ir elektrotechnikos bei elektronikos uždavinių, naudojantis kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, sprendžiasi žymiai paprasčiau, negu naudojantis tik realaus kintamojo funkcijomis?** Būtų naudinga, jei skaitytojas dabar dar kartą peržvelgtų šios mokymo priemonės 1.11.5.–1.11.12. skyrelius ir pabandytų įvertinti, kokią vaidmenį tuose skyreliuose vaidina kompleksiniai dydžiai ir kompleksinio kintamojo funkcijos.

Krizinė situacija buvo susidariusi matematinėje analizėje ir dėl pernelyg laisvo šiek tiek miglotos begaliniai mažo dydžio sąvokos vartojimo. Kai kurie matematikos istorikai šią situaciją vadina **antrąja matematikos krize**, todėl verta ties ją šiek tiek sustoti.

Niutono ir Leibnico pasekėjai, taikydami šių savo pirmtakų sukurtąjį diferencialinio ir integralinio skaičiavimo metodą ir gaudami vis naujus didelę praktinę reikšmę turinčius rezultatus matematikoje, mechanikoje, elektrotechnikoje ir kitose fizikos srityse, mažai tesirūpino matematinės analizės loginių pamatų stiprinimu ir daromų išvadų įrodymų griežtumu: **gaunamų rezultatų teisingumas nebuvo grindžiamas griežtais įrodymais, o atvirkščiai, gaunamų rezultatų patvirtinimas praktikoje stiprino įsitikinimą teisingumu tų prielaidų ir samprotavimų, kurie atvedė prie tų rezultatų.**

Tačiau, laikui bėgant, įvairių paradoksų ir prieštaravimų matematinėje analizėje prisirinko tiek daug, kad tapo aišku, jog krizė matematinėje analizėje, jos teoriniuose pagrinduose – realus faktas.

XIX a. pirmojoje pusėje prancūzų matematikas O. Koši (O. L. Cauchy, 1789–1857) pabandė įveikti šią krizę, **pakeisdamas begaliniai mažų dydžių metodą griežta ribų teorija**. Ši krizė buvo galutinai įveikta, kai, remdamasis šia teorija, vokiečių matematikas K. Vejerštrasas (K. Weierstraß, 1815–1897) **arimetizavo matematinę analizę**, sukurdamas tvirtą teorinį jos pagrindą.

Dar vienas reiškinys, kuris savo laiku net tokiems matematikams kaip K. Gausas (K. F. Gauss, 1777–1855) atrodė paradoksaliu, buvo surištas su penktuoju Euklido postulatu, teigiančiu, kad per tašką, negulintį duotoje tiesėje, tos tiesės ir to taško plokštumoje visuomet galima praveisti vieną ir tik vieną tiesę, kuri, būdama vienoje plokštumoje su duotąja tiese, niekada nekirstų pastarosios.

Šis postulatas, lyginant jį su pirmaisiais keturiais Euklido postulatais, daugeliui matematikų atrodė mažiau tinkamas geometrijos pagrinduose, nes jo teisingumo nebuvo galima taip akivaizdžiai pademonstruoti kaip pirmųjų keturių. Juk, pratęsus dvi lygiagrečias tieses ir joms nesusikirtus, visuomet buvo galima paprieštarauti penktajam postulatui, teigiant: „Taip, šios tiesės iki šiol tikrai nesusikirto. Tačiau kodėl jos negalėtų susikirsti vėliau, pratęsus tas tieses pakankamai toli?“

Todėl buvo nemažai bandymų konstruoti dedukcinę geometrijos teoriją, pakeičiant šį postulatą akivaizdesniu, bei bandant jį įrodyti kaip geometrijos teoremą. Tačiau visi tie bandymai ilgą laiką buvo nesėkmingi, kol rusų matematikui N. Lobačevskiui ir vengrų matematikui J. Bojajui beveik vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito nekilo mintis įrodyti penktąjį Euklido postulatą, pakeičiant jį priešingu ir tikintis gauti prieštarą, t. y. naudojantis „suvedimo į absurdą metodu“.

Didelei šių matematikų nuostabai jie, **naudodamiesi penktojo postulato neiginiu kartu su visais kitais Euklido postulatais, jokios prieštaros negavo, o sukūrė naujas geometrijas, skirtingas nuo Euklido geometrijos.**

Pradžioje labai paradoksaliu pasirodė tai, jog gali egzistuoti kelios skirtingos neprieštaringos geometrijos, nes iki tol atrodė, kad Euklido geometrija yra vienintelė galima teisinga geometrija. Tas įsitikinimas atrodė toks natūralus ir neabejotinas (kaip ankstyvosios Antikos laikais natūraliu ir neabejotinu atrodė bendrojo mato egzistavimas), kad net didysis Gausas, dar ankščiau už N. Lobačevskį ir J. Bojajų gavęs panašius rezultatus, neišdrįso jų skelbti. Pastarieji gi, būdami jaunesni ir mažiau garsūs, tai padaryti išdrįso, tačiau tas jų atradimas ne iškart buvo priimtas. Tuo labiau neiškart buvo suprasta to atradimo revoliucinė reikšmė dedukciniam mokslui.

Buvo bandoma patikrinti šį atradimą praktiškai: net pats N. Lobačevskis geodeziniais ir astronominiais matavimais bandė išsiaiškinti, ar trikampio kampų suma visada yra tiksliai lygi 180° , kaip teigia Euklido geometrija, ar gali šiek tiek skirtis nuo 180° , kaip jis buvo gavęs savo naujojoje geometrijoje. Tačiau dėl matavimo prietaisų nepakankamo tikslumo jam taip ir nepavyko tokiu būdu nustatyti, kuri iš geometrijų yra teisinga.

Reikėjo laiko, reikėjo tokio matematikos autoriteto, koku buvo B. Rymanas (B. Riemann, 1826–1866), reikėjo jo mokslinės drąsos ir minties gilumo, kad pagaliau būtų suprasta, jog **gali egzistuoti ne viena, o kelios geometrijos, kurių kiekviena gali būti teisinga savo erdvėje, galinčioje skirtis nuo kitų erdvių savo kreivumo koeficientu.**

Reikėjo A. Einšteino (A. Einstein, 1879–1955) reliatyvumo teorijos (specialiosios ir bendrosios, dėl kurių dar iki šiol tebesiginčijama), reikėjo teorijų apie kosmologinius reiškinius ir apie reiškinius mikrodalelių pasaulyje bei kitų panašių teorijų atsiradimo, kad būtų suvokta, jog **neeuclidinės geometrijos ir neeuclidinės erdvės gali egzistuoti ir egzistuoja ne tik virtualiai kaip loginė galimybė, bet ir fiziškai.**

Dabar neeuclidinės geometrijos jau nebestebina nei matematikų, nei fizikų ir neatrodo jiems paradoksaliomis ir nenatūraliomis. Dabar stebina kas kita: kodėl pradžioje daugeliui mokslininkų jos atrodė nenatūraliomis, kai jau tada buvo naudojamos gaubliais, kuriuose dienovidžio linijos, būdamos lygiagrečiomis pusiaujiųje (ekvatoriuje), kertasi ašigaliuose (poliuose). Juk sferine trigonometrija ir jos formulėmis buvo naudojamos jau tada.

Neeuclidinių geometrijų atradimo revoliucinė reikšmė formalių dedukcinių sistemų teorijai buvo (ir išlieka) tame, jog buvo suvokta, kad tokias sistemas galima kurti dviem būdais (žiūr. 398 pav.):

a) nagrinėti realų pasaulį, ieškoti jame dėsningumų, stengiantis apibendrinti juos, ir gautus dėsnius formalizuoti į aksiomas, o po to sudarytos aksiomų sistemos pagrindu kurti formalią dedukcinę sistemą (formalią teoriją) ir, interpretuojant iš jos išplaukiančias išvadas, taikyti tą teoriją moksle ir praktikoje;

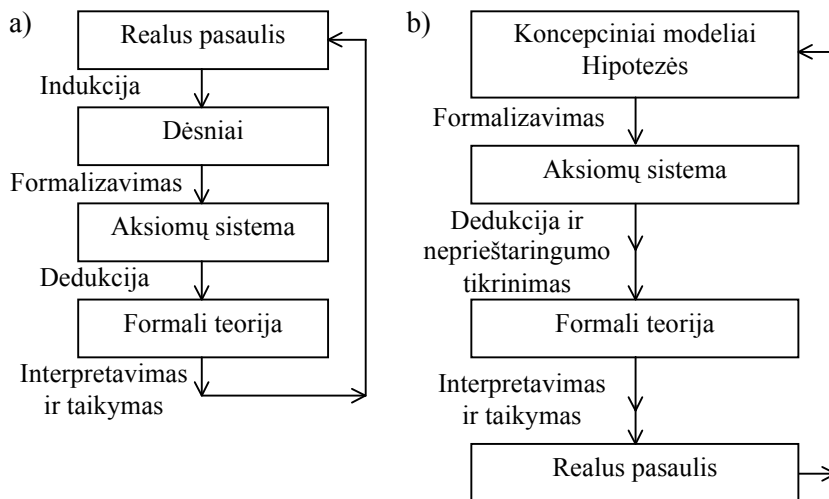
b) kurti logiškai galimus koncepcinius modelius ir kelti logiškai neprieštaringas hipotezes, formalizuoti jas ir jungti į neprieštaringą aksiomų sistemą, kurios pagrindu kurti formalią dedukcinę sistemą (formalią teoriją) ir, interpretuojant formalius modelius bei iš tos teorijos išplaukiančias išvadas, ieškoti tų modelių ir išvadų taikymo sričių moksle ir praktikoje.

Einant keliu „a“, buvo sukurta Euklido geometrija ir atsirado dauguma šiuolaikinių mokslų. Kelią „b“ atvėrė neeuclidinių geometrijų atradimas. Einant tuo keliu buvo sukurta kristalų simetrijos teorija ir nemaža dalis kvantinės mechanikos, dabar kuriami įvairių virtualių sistemų modeliai, ypatingai paplitę šiuolaikinėje mokslinėje fantastikoje, o taip pat bandoma konstruoti įvairius nežemiškų civilizacijų modelius.

Kad kelias „b“ technikoje ir įvairiuose gamtos moksluose gali būti efektyvus, rodo kad ir toks 1.14.12.3.2. skyrelyje jau minėtas istorinis pavyzdėlis.

Dvidešimtojo amžiaus pradžioje tuomet dar jaunas rusų mokslininkas S. Čiaplyginas, vėliau su kitu rusų mokslininku N. Žukovskiu pagarsėjęs savo darbais aerodinamikoje, gynė daktarinę disertaciją apie sroves dujose, kurioje išnagrinėjo ir dujų judėjimą greičiu, viršijančiu garso greitį. Gynimo metu disertantas gavo pastabą, kam jis nagrinėjęs tokį atvejį, kuris, nors ir būdamas teoriškai galimas, nėra fiziškai aktualus, nes garso greitis dujose – tai slėgio jėgos impulso sklaidimo greitis jose, todėl, esą, dujos negali judėti greičiau, negu tą judėjimą iššaukiantis jėgos impulsas.

Praejo trys dešimtys metų, atsirado pirmieji lėktuvai, galintys išvystyti greitį, viršijantį garso greitį, ir buvo susidurta su tuolaikinėje aerodinamikoje nepaaiškinamu reiškiniu – lėktuvo, skrendančio viršgarsiniu greičiu, vibracija ir subyrėjimu ore. Tuomet ir paaiškėjo, jog Čiaplygino sukurta teorija apie dujų judėjimą greičiu, viršijančiu garso greitį, turi ir praktinę reikšmę.



398 pav.

Apibendrinant panašius pavyzdžius (o dabar jų susikaupė tikrai nemažai), galima padaryti **išvadą apie ne tik pirmojo, bet ir antrojo kelio vaisingumą gamtos moksluose ir technikoje.**

Šiek tiek abejotinai atrodo antrojo kelio tiesmukiško taikymo efektyvumas humanitariniuose moksluose, nes humanitarinės sistemos:

a) gana sudėtingos ir todėl jų galimų variantų skaičius, kaip tai išplaukia iš kombinatorikos dėsnių, yra tiesiog neapėriamai didelis ir, didėjant sudėtingumui, auga milžiniškais tempais;

b) humanitarinių sistemų susikūrimo ir kūrimo istorija, palyginti, dar labai trumpa ir todėl egzistuojančių bei egzistavusių tokių sistemų, o taip pat tokių, kurios apžvelgiamame istoriniame

laikotarpyje galėtų atsirasti ir egzistuoti, skaičius, lyginant su humanitarinių sistemų visų galimų variantų skaičiumi, yra, galima sakyti, „be galo mažas dydis“.

Todėl, be atrankos manipuliuojant įvairiomis galimomis hipotezėmis ir tokiu būdu konstruojant galimų humanitarinių sistemų variantus, bus sukonstruota labai daug šiuo metu nerealizuojamo „balasto“, o tikimybė, kad tarp to „balasto“ pasitaikys šiandien praktiškai vertingas variantas, – labai maža. Iš viso to išplaukia išvada, kad **humanitariniuose moksluose šalia pirmojo tikslinga taikyti tik modifikuotą antrąjį formalių sistemų konstravimo kelią**: formuluoti ne bet kokias logiškai galimas hipotezes, o tik tokias, kurios galėtų būti realizuotos dabar bei netolimoje ateityje.

Kas kita – gamtos moksluose, kur dauguma galimybių, matyt, vienokiu ar kitokiu būdu jau realizavosi „fiziškai“, nes gamtos istorija jau gana ilga ir, matyt, dauguma sistemų, kurios galėjo susikurti, jau susikūrė, užimdamos gamtoje tą ar kitą „nišą“: atomai – periodinių cheminių elementų lentelėje, augalai ir gyvūnai – augalų ir gyvūnų sistematikoje ir pan. Todėl tikimybė, kad sukonstruotas, einant antruoju keliu, modelis gali rasti savo pritaikymą bei interpretaciją realiaame pasaulyje, yra gana didelė.

Tiesa, antrasis kelias turi ir savo pavojų: neatsargiai manipuliuojant, pavyzdžiui, genų inžinerijoje, galima „prigaminti“ įvairių „monstrų“ ir net labai pavojingų „konstrukcijų“, kurioms „ištrūkusi“ už laboratorijos sienų, galima susilaukti nemažų nemalonumų, o kartais – ir situacijų, grėsmingų ir net pražūtingų visai žmonijai.

Antrasis formalių teorijų kūrimo kelias taip pat gali būti efektyvus technikoje, nes, juo einant, gali būti „generuojamos“ visiškai naujos techninės idėjos ir surasti „nelaukti“ (t. y. netikėti), bet pakankamai efektyvūs techninių problemų sprendimai, kurie, tradiciškiau mąstant, kažkodėl „neateina į galvą“ kaip tik dėl savo neįprastumo.

Atidesnis skaitytojas, matyt, jau pastebėjo, kad 398 pav. pavaizduotieji **du formalių dedukcinių teorijų formavimo keliai taikomi ir sistemos tyros mokslo teorinės dalies formavimui** (žiūr. „Įvado“ penktąjį skyrelį, kuriame kalbama apie sistemos tyros mokslo formavimosi kelius).

Abu šie keliai ne tik neprieštarauja vienas kitam, bet ir papildo vienas kitą, todėl, vadovaujantis sisteminė metodologija, tikslinga užsiimti abiejų šių kelių sinteze, apie ką taip pat buvo kalbama jau minėtajame „Įvado“ skyrelyje. **Šių kelių ir jų sintezės aktualumas sistemų teorijai** kaip tik ir buvo dar viena iš priežasčių, paskatinusių šių eilučių autorių skirti šioje mokymo priemonėje keliolika puslapių formalioms dedukcinėms sistemoms, jose išplaukiančioms problemoms bei jų sprendimo istorijai.

Kita – dar svarbesnė – priežastis – šios mokymo priemonės autoriaus įsitikinimas, jog **gilus ir teisingas šiame skyrelyje nagrinėjamos problematikos suvokimas yra labai svarbus ir reikalingas moksliškai pagrįsto sisteminio mąstymo ugdymui**.

Kadangi tradiciniuose matematikos ir matematinės logikos kursuose ką tik išvardintiems klausimams kažkodėl neskiriama reikiamo dėmesio, tai tenka juos bent trumpai apžvelgti matematinės sistemos tyros kurse, tuo pačiu ugdant ir sisteminį mąstymą, ir studentų matematinę kultūrą.

Tuo ir baigsiu iki XIX a. pradžios buvusių matematikos krizių bei paradoksų ir tų krizių įveikimo istorijos apžvalgą, padarydamas apibendrinančią išvadą: **laikas nuo laiko išskylančios krizės bei krizinių situacijos matematikoje ne tik nesugriovė dar nuo Antikos laikų statomo didingo „matematikos rūmo“, bet, iššaukdamas tų krizių bei krizinių situacijų įveikimui reikalingą kokybinį šuolį matematikos moksle, tą „rūmą“ kas kart plėtė, tobulino ir tvirtino**.

Grįšime dabar prie (daugelio matematikų nuomone) dar galutinai neįveiktos krizės matematikoje, kilusios devynioliktojo ir dvidešimtojo amžių sandūroje ryšium su antinomijų klasikinėje aibių teorijoje atradimu. Tą krizę kai kurie matematikos istorikai vadina **trečiąja matematikos pagrindų krize** (nors ją, kaip ką tik matėme, buvo galima pavadinti ir penktąja), laikydami ją bene didžiausia, nes, nagrinėjant tas antinomijas ir jų atsiradimo priežastis, paaiškėjo tikrai nemalonūs matematikai dalykai: **kai kurių svarbių matematikos teoremų įrodymuose esama samprotavimų, kurių pagrįstumas dėl nepakankamai atsargaus aktualiosios begalybės, trečiojo negalimo bei dvigubo neigimo dėsnių ir impredikatyvių sąvokų vartojimo negali būti laikomas absoliučiai neabejotinu**. Pasirodė, kad tas matematinis ir loginis griežtumas, kuris, atrodė, buvo pasiektas aibių teorijos pagrindu aritmetizuojant matematinę analizę, kas buvo padaryta, įveikiant antrąją matematikos krizę, ir kuo taip didžiavosi XIX a. matematikai (prisiminkime, kad ir garsiąją D.Hilberto frazę apie matematinį rojų, į kurį matematikus, esą, atvedęs G.Kantoras, sukurdamas aibių teoriją, ir iš kurio matematikai jau niekada nebeišeisą), **yra šiek tiek iliuzorinis, negalintis apsaugoti matematikos mokslo nuo paradoksų, neturinčių būti nuoseklioje neprieštaringoje dedukcinėje teorijoje**.

Visa tai sukėlė grėsmę matematikos – kaip dedukcinio mokslo – pamatams, ir todėl iškilo problema, kaip išvengti abejotino pagrįstumo samprotavimų, impredikatyvių sąvokų ir

aktualiosios begalybės neleistino vartojimo atvejų patekimo į matematinius įrodymus ir kaip sukurti neprieštarigus matematikos pagrindus.

Bandyams spręsti trečiosios matematinės krizės problemas ir tapo skirtas ketvirtasis logikos raidos ir jos sąveikavimo su matematika etapas.

1.16.1.5.5.6. Ketvirtasis logikos raidos etapas. Cermelo aksiomų sistema. Logicizmas, intuicionizmas ir formalizmas

Vieną iš būdų, kaip išvengti matematikoje loginių ir semantinių antinomijų, pasiūlė vokiečių matematikas E. Cermelas (E. Zermelo, 1871–1953). Jis pertvarkė aibių teoriją ir parinko tokia jos aksiomatiką, kuria naudojantis nė viena iš XIX a. pabaigoje ir XX a. pradžioje atrastų antinomijų jau nebegalėjo atsirasti. Cermelo sistemą vėliau patobulino eilė kitų žymių matematikų: Frenkelis (Fraenkel, 1922, 1925), Skolemas (Skolem, 1922, 1929), fon Noimanas (fon Neumann, 1925, 1928), Bernaisas (P. Bernays, 1937–1948) ir kiti.

Ši trečiosios matematinės krizės iškeltų problemų sprendimo būdą dar negalima laikyti pilnai patenkinamu: leisdamas išvengti jau žinomų paradoksų aibių teorijoje, jis nepaaiškina jų atsiradimo priežasčių bei sąlygų ir negarantuoja, kad pasiūlytoje naujoje aibių teorijoje ateityje neatsiras naujų, dabar mums dar nežinomų paradoksų.

Todėl eilė kitų matematikų bei logikų nusprendė užsiimti gilesne antinomijų atsiradimo priežasčių analize ir paieškoti kardinalesnių iškilusių problemų sprendimo būdų. Buvo įvairių bandymų spręsti aibių teorijoje atrastų antinomijų sukeltas problemas. Tuose bandymuose galima pastebėti **tris pagrindines kryptis: logicizmą, intuicionizmą ir formalizmą**. Visos kitos kryptys buvo arba šių pagrindinių krypčių modifikacijos arba jų kombinacijos.

1. Logicizmas atsirado kaip natūralus matematikos ir logikos vystymosi tendencijų tęsinys, kaip pastebėtų analogijų tarp logikos ir matematikos filosofinio apibendrinimo rezultatas. Sprendžiant antrosios matematinės krizės problemas, matematinė analizė buvo aritmetizuota, remiantis realiųjų skaičių teorija, kitaip tariant, matematinės analizės metodų pagrindimas buvo suvestas į aritmetinius veiksmus su realiais skaičiais. Realiųjų skaičių teoriją, savo ruožtu, buvo galima suvesti į natūraliųjų skaičių teoriją, o šią – į aibių teoriją. Traktuodami aibių teoriją kaip matematikos pagrindą ir kaip matematinės logikos dalį, logistai suformulavo idėją, kurią galima pavadinti **pagrindine logicizmo teze: matematiką galima traktuoti kaip logikos dalį ir todėl matematikos kaip dedukcinio mokslo pagrindų kūrimą reikia pradėti nuo logikos formalizavimo, o po to jį tęsti, loginėmis priemonėmis konstruojant matematinės sąvokas ir išvedant matematikos teoremas**.

Logicizmas turi gana galias istorines šaknis. Dar 1666 m. Leibnicas buvo pareiškęs, kad logika yra tas mokslas, kurio pagrindiniai principai ir idėjos sudaro visų kitų mokslų pagrindą. Jis net buvo išsakęs mintį apie tokio visuotinio mokslo sukūrimą, kuris leistų visus ginčus spręsti loginiais skaičiavimais. Praėjus daugiau nei 200 metų, 1888 m. Dedekindui ir 1884–1903 m. Frėgei pavyksta eilę svarbių matematinių sąvokų išreikšti loginėmis priemonėmis, o 1889–1908 m. Peanas (Dž. Peano) aptinka, kad simbolinė matematinės logikos kalba yra labai patogi matematikos teoremų formulavimui. Todėl Leibnicą, Dedekindą, Frėgę ir Peaną galima laikyti logicizmo idėjų pirmtakais.

Tačiau logicizmo kaip tam tikros matematinės mokyklos, tam tikros jau gana apibrėžtos filosofinės krypties matematikoje ir logikoje susiformavimas siejamas su B. Raselo (B. Russell) ir A. Vaithedo (A. Whitehead) „**Matematikos principų**“ („Principia mathematica“) pasirodymu (1910–1913 m.m.). Tuose principuose jau minėtoji **pagrindinė logicizmo tezė ne tik išsakoma, bet ir bandoma ją realizuoti: pradedant nuo matematinės logikos bandoma kurti visą matematiką kaip dedukcinę sistemą**.

„Matematikos principuose“ įvedamos „pradinės idėjos“ ir „pradiniai teiginiai“, atitinkantys „neapibrėžiamus terminus“ ir „aksiomas“, reikalingus dedukcinės sistemos kūrimo pradžiai. Priimama, kad tie terminai intuityviai suprantami, o aksiomos – intuityviai atrodo teisingomis, kadangi neprieštarauja žmonijos sukauptai patirčiai. Ryšium su tuo nekeliami tų aksiomų sistemos neprieštaringumo įrodymo problema, kuri, kaip vėliau pamatysime, neišvengiamai iškyla formalizmo mokyklos kuriamose formaliose dedukcinėse sistemose ir iššaukia daug sunkumų.

Remiantis šia pradine baze, „Matematikos principuose“ sukuriamas teiginių skaičiavimas, po to – klasių ir santykių skaičiavimai, atitinkantys predikatų skaičiavimą, o jau po to – ir natūraliųjų skaičių sistema su visomis iš jos išplaukiančiomis išvadomis. „Matematikos principuose“ sukonstruotoje natūraliųjų skaičių sistemoje tie skaičiai apibrėžiami kaip bet kokie objektai (mes dabar pasakytume: bet kokios esybės), tenkinantys tam tikrus reikalavimus, išplaukiančius iš priimtų aksiomų. Svarbu pažymėti, kad tokiu būdu sukonstruota natūraliųjų skaičių sistema visomis savo savybėmis visiškai tiksliai atitinka jau nuo seno visiems žinomą natūraliųjų skaičių sistemą, kurią, kaip vėliau pamatysime, intuicionistai ima savo konstruojamos sistemos pagrindu.

Siekiant išvengti impredikatyvių apibrėžimų ir aibių teorijos antinomijų, „Matematikos principuose“ kuriama „**tipų teorija**“. Priimama, kad pradiniai elementai, kurie jau neskaidomi į smulkesnius, turi tipą, lygų 0. Tokių elementų aibėms priskiriamas tipas, lygus 1. Aibėms, sudarytoms iš elementų, priklausančių pirmajam ir tik pirmajam tipui, priskiriamas tipas, lygus 2 ir t. t. Priimama taip pat, kad teisingai sudarytomis aibėmis, kuriomis leidžiama naudotis konstruojamoje dedukcinėje sistemoje, yra tik tokios aibės, kurios sudarytos iš elementų, turinčių vienodus tipus. Jungti į aibes elementus, priklausančius skirtingiems tipams, neleidžiama. Tai užkerta galimybę konstruoti impredikatyvius apibrėžimus ir leidžia išvengti antinomijų.

Logicizmo idėjų įgyvendinimo darbo pradžia buvo gana sėkminga, tačiau, kurdami matematinę analizę, „Principų“ autoriai susidūrė su sunkumais, nes, **nesinaudojant impredikatyviais apibrėžimais, nepavyko įvesti eilę matematinės analizės matematinio aparato sukūrimui ir jos teoremų įrodymui reikalingų sąvokų**. Todėl B. Raselas ir A. Vaithedas buvo priversti papildomai įvesti specialią „**suvedimo aksiomą**“. Ši aksioma, nebūdama tokia natūrali ir nesudėtinga kaip ankščiau minėtos pradinės aksiomos, sulaukė rimtos oponentų kritikos. Todėl vėliau logistai stengėsi kurti tokį dedukcinį aparatą, kuriame nebūtų reikalo naudotis suvedimo aksioma.

Vaithedo ir Raselo idėjas ir jų pradėtą logicistinę sistemos kūrimo darbą toliau tęsė Vitgenšteinas (Wittgenstein, 1922), Chvistekas (Chwistek, 1924, 1925), Ramsėjus (Ramsey, 1926), Langfordas (Langford, 1927), Karnapas (Carnap, 1931), Kvainas (Quine, 1940) ir kiti matematikai bei logikai.

Logicistų pasiekimai šiandien vertinami įvairiai. Vieni laiko jų programą patenkinančia, kiti išsako eilę priekaištų. Vieno tokių priekaištų esmė yra tame, kad logicistai, kurdami loginį matematikos pagrindą, naudojami kai kuriomis matematinėmis idėjomis, neišplaukiančiomis iš logikos (pavyzdžiui, kuriant tipų teoriją, naudojamas iteracija, kuri negali būti apibrėžta logikos terminais, o gali būti apibrėžta tik matematikos terminais ir pan.). Taigi, **dar negalima teigti, kad logicistams pilnai pavyko rasti tokį trečiosios krizės matematikoje sprendimą, kuris tenkintų visus matematikus**. Kai kurie jų net nelaiko logicizmo šiuolaikine savarankiška kryptimi.

2. Intuicionizmo pradininku laikomas olandų matematikas L. E. Braueris (L. E. J. Brouwer, 1908), nors intuicionizmo idėjas L. Kronekeris (L. Kronecker) kėlė dar XIX a. pabaigoje, o H. Puankarė (H. Poincaré) – 1902÷1906 mm.

Pagrindinė intuicionizmo tezė – „matematikos rūšis“ turi būti statomas, remiantis natūraliųjų skaičių sistema, kuri laikoma intuityviai suprantama pirmine sistema, ir tik finitinėmis (baigtinėmis) konstruktyvinėmis priemonėmis, t. y. kiekvienas matematinis objektas turi būti sukonstruotas iš jau turimų (pirminių ar jau ankščiau sukonstruotų) elementų per baigtinį elementarių žingsnių (veiksmų) skaičių, naudojantis vienareikšmiškai apibrėžtomis baigtinėmis operacijomis iš baigtinio operacijų sąrašo.

Intuicionistų nuomone, matematikos pagrindą sudaro intuicija, tiksliau tariant, vienas po kito vykstančių įvykių begalinės sekos intuityvus suvokimas, ir tik po to – dedukcijos metodo taikymas. Minėtojo begalinės sekos intuityvaus suvokimo dėka mes, turėdami kokį nors vieną tos sekos narį, intuityviai galime nustatyti egzistuojant sekantį po jo ir t. t., ir tokiu būdu intuityviai suvokti vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių niekada nesibaigiančią seką. **Priimdami tą seką kaip pradinį matematikos pagrindą, intuicionistai genetiškai kuria visas kitas matematikos sąvokas, konstruodami jas iš jau turimų elementų, naudodamiesi jau minėtais finitiniais metodais. Intuicionistai laiko kokį nors matematinį objektą egzistuojančiu tada ir tik tada, kai jie gali sudaryti baigtinį to objekto sukonstravimo algoritmą ir „pagaminti“ tą objektą. Jokių kitų to objekto egzistavimo įrodymų intuicionistai nepripažįsta.**

Pavyzdžiui, jei iš kokio nors matematinio objekto neegzistavimo prielaidos išplaukia prieštara, tai intuicionistai to fakto dar nelaiko pakankamu, kad galėtų teigti, jog tas matematinis objektas būtinai egzistuoja. Todėl nemaža dalis klasikinės matematikos įrodymų intuicionistų nuomone negali būti laikomi griežtais įrodymais, priimtinais intuicionistams.

Intuicionistai nesinaudoja aktualiosios begalybės sąvoka ir laiko kokią nors aibę egzistuojančia tada ir tik tada, jei galima nurodyti taisyklę, kuria naudojantis žingsnis po žingsnio galima „gaminti“ tos aibės elementus, imant juos iš pirminės natūraliųjų skaičių aibės arba konstruojant juos finitiniaus metodais iš jau turimų (pirminių ar ankščiau sukonstruotų) elementų. Todėl intuicionistų nagrinėjamų matematinių objektų aibėje negali atsirasti tokių kurioziškų aibių kaip „visų aibių aibė“ ir pan.

Įrodymų konstruktyvumo reikalavimas priveda prie to, kad intuicionistai atsisako pripažinti negalimo trečiojo dėsnio formulę $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ absoliučiai teisinga formule begalinėms aibėms. Intuicionistų argumentaciją galima paaiškinti tokiu pavyzdžiu.

Tarkime, kad skaičius x apibrėžtas taip: jei 1 yra k -tasis dešimtainis skaitmuo dešimtainėje mišriojoje trupmenoje, vaizduojančioje skaičių π , ir jei tuoj po 1 eina skaičiai 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ... sudarydami natūraliųjų skaičių seką, o kairiau k -tojo dešimtainio ženklo tokios skaitmenų sekos

pradžios dar nėra, tai $x=(-1)^k$, priešingu atveju $x=0$. Ir nors skaičius x apibrėžtas visiškai korektiškai, intuicionizmo keliams apribojimams neleidžia intuicionistams teigti, kad teiginys „ $x=0$ “ yra arba teisingas, arba neteisingas. Intuicionistai galėtų teigti, kad šis teiginys teisingas, jei egzistų to teiginio teisingumo įrodymas, turintis baigtinį žingsnių skaičių, t. y. egzistų to teiginio teisingumo įrodymas, jog begalinėje skaitmenų eilutėje $\pi=3,141592654\dots$ negali egzistuoti natūralių skaičių seka $\dots 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\dots$. Tai, kad iki šiol tokios sekos nerasta, dar nėra įrodymas, jog tokia seka iš viso egzistuoti negalės, nes ji gali būti kiek nori didelis natūralus skaičius. Neįrodyta ir tai, kad „ $x=0$ “ – neteisingas teiginys, t. y., kad tokia seka skaitmenų eilutėje $\pi=3,14\dots$ tikrai egzistuoja. Taigi, kol nėra vieno įrodymo nėra, intuicionistų nuomone, teiginys „ $x=0$ “ negali būti pripažintas nei teisingu, nei neteisingu, ir trečiojo negalimojo dėsnis šiuo atveju, intuicionistų nuomone, taikomas būti negali.

Taigi, **intuicionistų nuomone, trečiojo negalimojo (tertium non datur) formulė $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow 1$ yra tapatybė tik griežtai apibrėžtomis baigtinėms aibėms, ir negalimo trečiojo dėsnio taikymas begalinėms aibėms neturi pagrindo.** Tačiau klasikinėje logikoje negalimo trečiojo dėsnis taikomas ir begalinėms aibėms. Braueris tai aiškina istorinėmis priežastimis. **Logikos dėsniai susiformavo dar tada, kada žmonės operuodavo tik su baigtinėmis aibėmis, o vėliau visi logikos dėsniai automatiškai ir be kokios nors papildomos analizės bei pagrindimo buvo perkelti ir begalinėms aibėms, dėl ko ir atsirado prieštaros.**

Analogiškai prieinama išvados, kad intuicionistinėje logikoje ir dvigubo neigimo eliminavimo formulė $(\neg \neg A \Rightarrow A) \Leftrightarrow 1$ negali būti laikoma absoliučiai teisinga formule.

Kadangi intuicionistai atmetė kai kuriuos klasikinės logikos dėsnius, tai jiems iškilo uždavinys sukurti aksiomatinę teiginių ir predikatų skaičiavimo sistemą, kurioje būtų išvedamos visos tos ir tik tos formulės, kurios gali būti laikomos absoliučiai teisingomis, atsižvelgiant į intuicionistų keliamus **finitinio konstruktyvumo reikalavimus**. Tokį predikatų skaičiavimą 1930m. sudarė A. Heytingas (A. Heyting). Tai reiškė, kad **intuicionistinė matematika privedė prie naujo tipo logikos sukūrimo**, ir todėl intuicionistai **įgijo teisę teigti (priešingai logicistams), jog matematinė logika yra matematikos dalis, nes intuicionistinė matematinė logika, kurioje teiginiai gali turėti be galo daug reikšmių, buvo sukonstruota, remiantis matematinėmis idėjomis ir natūraliųjų skaičių seka.**

Jeigu intuicionistams būtų pavykę pertvarkyti visą matematiką taip, kad visų jos teoremų įrodymai tenkintų intuicionistų keliamus reikalavimus, tai būtų galima laikyti, jog trečioji matematikos krizė pilnai įveikta. Tačiau intuicionistams, nors jie ir pertvarkė didelę dalį matematikos pagal savo reikalavimus, visos dabartinės matematikos pertvarkyti kol kas dar nepavyko ir nėra įrodymų, kad kada nors būtinai pavyks. **Kol kas intuicionistinė matematika yra silpnesnė už klasikinę ir negali įrodyti eilės svarbių teoremų, įrodytų klasikinėje matematikoje.** Be to įrodymai intuicionistinėje matematikoje daugelyje atvejų žymiai sudėtingesni negu klasikinėje. Pagrindinė intuicionizmo bėda, kuri trukdo jo įsigalėjimui, yra tame, kad **daugeliui matematikų sunku atsisakyti tos dalies svarbių klasikinės matematikos pasiekimų, kurie nepriimtini intuicionistams, tačiau neatrodo neteisingi ir nepriimtini klasikinės matematikos atstovams.**

Reikia pažymėti, kad iš intuicionizmo išaugo **konstruktyvinės matematikos mokykla**, kuri vis labiau populiarėja ir kurioje, kaip ir intuicionizme, atrodo, negali atsirasti jokių prieštarų bei paradoksų. Tobulinant konstruktyvinės matematikos aparatą, tikimasi pertvarkyti visą matematiką ir tokiu būdu galutinai įveikti trečiąją krizę matematikoje. Tačiau nėra garantijų, kad tai būtinai pavyks.

3. Formalizmo esmę sudaro bandymas kurti matematikos pagrindus antruoju mūsų jau minėtu formalų teorijų konstravimo būdu (žiūr. 398 pav.) grynai formaliai, panašiai, kaip kuriami kokie nors determinuoti baigtiniai žaidimai, suformuluojant vienareikšmiškai apibrėžtų neprieštarinių taisyklių formaliai pilną rinkinį, leidžiantį nustatyti kiekvienoje galimoje situacijoje, kokie žaidėjo „ėjimai“ iš baigtinio jų rinkinio šiuo momentu yra leistini, o kartais – ir neišvengiami.

Formalizmo pradininku ir formalizmo mokyklos įkūrėju laikomas vokiečių matematikas D. Hilbertas (D. Hilbert, 1862–1943). Formalizmo koncepciją jis suformulavo dar 1904m., tačiau tik nuo 1920m. kartu su savo bendradarbiais V. Ackermannu (W. Ackermann), P. Bernaisu (P. Bernays) ir Dž. Fon Noimanu (J. von Neumann) sukūrė ir pradėjo nuosekliai realizuoti formalizmo programą, atsakydamas į intuicionistų iššūkį klasikinei matematikai ir tikėdamasis sukurti formalius klasikinės matematikos pagrindus be jokių galimų antinomijų ir kitų paradoksų.

Formalizmo programoje galima išskirti tokius etapus:

1) pradžioje sukuriami **formalios kalbos gramatika**, t. y. suformuluojamos tam tikros neprieštaringos matematinių formulių konstravimo iš nieko konkretaus nereiškiančių simbolių (t. y. simbolių, pradžioje neturinčių jokio konkretaus prasminio turinio, išskyrus tai, jog jie žymi kažkokias su tais simboliais abipusiai vienareikšmiškai surištas esybes bei jų vietas formalioje struktūroje – formulėje) taisyklės, vadinamos **sintaksės taisyklėmis**, ir įvedama **taisyklingai sukonstruotos formulės sąvoka**;

2) po to, naudojantis sukurta formalia kalba, konstruojamos **leistinų taisyklingai sukonstruotų formulių išvedimo matematinis aparatas**: tuo tikslu sudaromas **pradinis leistinų taisyklingai sukonstruotų formulių rinkinys** – formalios teorijos **aksiomų sistema** – ir suformuluojamos naujų leistinų taisyklingai suformuluotų formulių, vadinamų **teoremais**, gavimo iš aksiomų taisyklės – **išvedimo taisyklės**;

3) naudojantis išvedimo taisyklėmis, iš aksiomų ir iš jau išvestų teoremų išvedinėjamos naujos teoremos, iš jų konstruojama formali išvestų TSF sistema ir bandoma įrodyti konstruojamos formalios sistemos **formalų neprieštaringumą**, t. y. bandoma įrodyti, kad konstruojamoje sistemoje, išvedus kokią nors teoremą, neįmanoma išvesti formulę, kuri toje sistemoje būtų laikoma išvestosios teoremos loginiu neiginiu;

4) naudojantis sukurtoju išvedimo aparatu, nagrinėjamas pasirinktos **aksiomų sistemos formalaus pilnumo ar formalaus nepilnumo klausimas**, t. y. nagrinėjama, ar galima prie turimos aksiomų sistemos pridėti dar vieną taisyklingai sukonstruotą formulę, neišvedamą iš turimų aksiomų, naudojantis turimomis išvedimo taisyklėmis, nepaverčiant visos formalios sistemos formaliai prieštaringa, ar jokios naujos iš turimų aksiomų neišvedamos taisyklingai sukonstruotos formulės prie aksiomų sistemos pridėti, papildant ją dar viena nauja aksioma, jau nebegalima; pirmuoju atveju formali sistema laikoma dar formaliai nepilna (kaip, pavyzdžiui, predikatų skaičiavimas), antruoju – formaliai pilna (kaip, pavyzdžiui, teiginių skaičiavimas); kartais nagrinėjamas dar ir **aksiomų formalaus nepriklausomumo klausimas**, t. y. nagrinėjama, ar negalima iš turimos aksiomų sistemos išmesti kokią nors aksiomą, nemažinant formalios teorijos formalaus pilnumo, kitaip tariant, ar nėra turimoje aksiomų sistemoje tokių aksiomų, kurios galėtų būti išvestos iš likusių aksiomų kaip teoremos, ir todėl galėtų būti eliminuotos iš aksiomų sąrašo;

5) gautoji formali teorija (jos aksiomos ir išvestos teoremos, o taip pat teoremos, kurios toje teorijoje galėtų būti išvestos) taikoma įvairiose srityse, atitinkamai **interpretuojant toje teorijoje naudojamus simbolius, iš jų sudarytas formules, aksiomas ir teoremas**, t. y. įvedant atitinkamą **semantiką**.

Formalizmo programoje, dažnai vadinamoje „**Hilberto programa**“ buvo numatyta:

a) sukurti tokį formalų matematinių įrodymų (matematinių formulių išvedimo) aparatą, kuris remtųsi nekeliančiomis abejonių savo teisingumu ir neprieštaringumu aksiomomis ir tik tokiomis išvedimo taisyklėmis, kuriomis naudojantis iš teisingų aksiomų ir bei teoremų, išreikštų formalia matematine kalba formulių pavidalu, formaliai būtų galima išvesti tik teisingas formules – naujas teoremas; kadangi tokiam naujų teoremų gavimo būdui nereikalingi ir neleistini jokie papildomi samprotavimai, o tik formalūs jau turimų formulių pertvarkymai į naujas formules, vadovaujantis tik duotosiomis išvedimo taisyklėmis, kurių, paimtų kartu su aksiomomis, formalus neprieštaringumas, įrodomas, remiantis pačios formalios teorijos priemonėmis, t. y. tomis pačiomis formaliomis išvedimo taisyklėmis ir aksiomomis, tai tokiu būdu užkertamas kelias bet kokių kitų (tame tarpe ir tokių, kurie būtų prieštaringi ir sąlygotų antinomijų atsiradimą) samprotavimų patekimą į matematinių teoremų išvedimą;

b) naudojantis sukurto teoremų išvedimo aparatu, išvesti teoremas, sudarančias įvairių matematikos skyrių (geometrijos, aritmetikos, matematinės analizės ir t. t.) pagrindą, t. y. perstatyti „matematikos rūmą“ ant tvirtų patikimų pamatų ir toliau jį vystyti, remiantis nepriekaištingu formalizuotu dedukciniu aparatu.

Vykdam šios programos pirmąją dalį (t. y. dalį „a“), buvo sukurti teiginių ir predikatų skaičiavimai – formalios dedukcinės loginės sistemos, kurios po to buvo naudojamos, kuriant formalizuotą aksiomatinę geometriją ir aksiomatinę aritmetiką, t. y., vykdam antrąją šios programos dalį.

Kuriant formalizuotas logines dedukcines sistemas, susiformavo **matematikos pagrindų mokslas ir matematinių įrodymų teorija – metamatematika** (žiūr., pavyzdžiui, [252]), kurios sudėtinėmis dalimis ir tapo **formalizuotos loginės dedukcinės sistemos**, jų tarpe – jau mums žinomi **teiginių ir predikatų skaičiavimai**.

„Hilberto programos“ idėjos buvo dėstomos ir realizuojamos Hilberto ir Bernaiso kapitaliniame veikle „**Matematikos pagrindai**“, vaidinusiame formalizmo mokykloje panašų vaidmenį kaip Raselo ir Vaithedo „**Matematikos principai**“ logiczmo mokykloje. Pirmasis „**Matematikos pagrindų**“ tomas pasirodė 1934 m., o 1939 m. – antrasis, tačiau, jau berašant šį traktatą, **buvo susidurta su anksčiau nenumatytais neįveikiamais sunkumais**. Todėl „**Hilberto programos**“ idėjas pavyko realizuoti tik **dalinai**: buvo sukurtos tokios matematinės logikos dalys kaip teiginių ir predikatų skaičiavimai, įrodant jų formalų neprieštaringumą, o taip pat formali aksiomatinė geometrija, tačiau **formalios aksiomatinės aritmetikos kūrimo pilnai užbaigti jau nebepavyko**, nes **nepavyko įrodyti tokios formalios sistemos formalų neprieštaringumą bei pilnumą**, naudojantis vien tik pačios formalios sistemos vidinėmis priemonėmis.

Hilberto planas toje jo formoje, kokioje jį įsivaizdavo pats Hilbertas formalizmo programos kūrimo pradžioje, pasirodė nerealizuojamas. Tai dar 1931 m. įrodė austrų matematikas Kurtas Godelis (K. Gödel). Naudodamasis nepriekaištingai griežtais metodais, priimtinais ir logizmo, ir intuicionizmo, ir formalizmo atstovams, jis įrodė, kad tokios formalizuotos dedukcinės sistemos kaip Hilberto kuriama formali klasikinės matematikos sistema, formalus neprieštaringumas negali būti įrodytas, naudojantis vien tik tos formalios sistemos priemonėmis. Ši išvada išplaukė iš dar bendresnio K. Godelio įrodyto teiginio: teiginio apie Hilberto sistemos nepilnumą. K. Godelis įrodė, kad Hilberto sistemoje egzistuoja eilė problemų, kurių ji negalės išspręsti, naudodamasi vien tik tos formalios sistemos vidinėmis priemonėmis. Tarp tokių problemų atsidūrė ir tos sistemos formalaus pilnumo įrodymo tos formalios sistemos vidinėmis priemonėmis problema. Iš Godelio teoremų išplaukia, jog baigtiniais metodais, formalizuotais viduje formalios sistemos, adekvačios šiuolaikinei matematikai, negalima įrodyti formalaus tos sistemos pilnumo, o tos formalių sistemos, kuriose toks jų formalaus neprieštaringumo įrodymas vidinėmis formaliomis priemonėmis yra įmanomas, netenkina adekvatumo šiuolaikinei matematikai reikalavimo. Tai reiškia, jog Godelis savo teoremomis įrodė formalistinių metodų taikymo ribotumą: net tokie mokslai kaip matematika negali būti pilnai aksiomatizuoti ir formalizuoti taip, kad tų mokslų neprieštaringumą ir formalų pilnumą būtų galima įrodyti grynai formaliai, nesinaudojant interpretacijomis, t. y. nesinaudojant konkrečios praktikos faktais ir kriterijais. Kitaip tariant, iš Godelio teoremų išplaukia, jog egzistuoja sistemos, kurių bet kokie formalūs modeliai yra formaliai nepilni ir niekada negali tapti pilniais, kiek mes juos bepildytume naujomis aksiomomis. Kiek daug aksiomų, formaliai vaizduojančių tokios sistemos dėsningumus, toks formalus modelis beturėtų, visuomet išliks galimybė surasti ir pridėti dar vieną neišvedamą iš turimų aksiomų formulę kaip papildomą aksiomą, kad gautume naują neprieštaringą modelį – naują formaliai neprieštaringą teoriją, išliekančią ir toliau formaliai nepilna. Ir tokių aksiomų sąrašo didinimą galima tęsti be galo.

Garsioji Godelio teorema apie aksiomatinės aritmetikos ir kitų sudėtingų formalų teorijų formalų nepilnumą ir formalaus pilnumo nepasiekiamumą parodė, jog Hilberto idėja sukonstruoti visą matematiką kaip aksiomatinę formalią teoriją, kurioje visos teoremos būtų formaliai išvedamos iš baigtinio skaičiaus neabejotinai teisingų aksiomų, naudojantis tik baigtiniu skaičiumi patikrintų neprieštaringų formalų išvedimo taisyklių, niekada negalės būti realizuota.

Nežiūrint į tai, kad „Hilberto programą“ įvykdyti nepavyko ir niekada nepavyks, darbai, padaryti, stengiantis tą programą įgyvendinti, turėjo ir turi didelę metodologinę ir praktinę reikšmę.

Apie „Hilberto programą“ ir jos reikšmę tolesnei matematikos raidai galima pasakyti beveik tą patį, ką labai taikliai yra pasakęs G. Poja apie 1.16.1.5.5.2. skyrelyje jau minėtojo prancūzų filosofo, matematiko, fiziko ir fiziologo R. Dekarto visuotinio loginio–matematinio metodo mokslinėms problemoms spręsti sukūrimo programą: „Dekarto projektas žlugo, tačiau tai buvo didis projektas, ir net savo nesėkme jis paveikė mokslo raidą žymiai daugiau, nei tūkstantis ir vienas mažų projektų, pasirodžiusių sėkmingais“ [264].

Metodologinė darbų, padarytų vykdant „Hilberto programą“, ir jų rezultatų reikšmė pasireiškė tuo, kad bandymas pilnai formalizuoti matematiką, patirdamas nesėkmę, padėjo giliau suprasti, koks turėtų būti santykis tarp indukcinio ir dedukcinio pažinimo metodų. Dabartiniu metu mes pakankamai aiškiai suvokiame, jog jokia formali dedukcinė teorija negali būti užbaigtu viso pasaulio modeliu ir atspindi tik dalį jo dėsningumų tam tikroje ribotoje srityje, kurią aprašo ir apibrėžia aksiomų sistema, sudaranti tos formalios teorijos pagrindą. Nagrinėdami naujus reiškinius, atrasdami naujus faktus ir darydami naujus apibendrinimus, mes, naudodamiesi indukcinio metodu, papildome dedukcinių teorijų bazinių teiginių (aksiomų) arsenalą, tokiu būdu išplėsdami tos formalios teorijos ribas ir platyn ir gilyn, tačiau ta teorija niekada neapėms visą pasaulio.

Kitaip tariant, matematiniai ir loginiai darbai matematikos pagrindų srityje (ir, tame tarpe, minėtoji Godelio teorema) patvirtino filosofinę nuostatą apie pasaulio neišsemiamumą ir iš to išplaukiančią išvadą, jog negali egzistuoti baigtinė dėsnių aibė, iš kurių logiškai išplauktų viskas, kas vyksta, egzistuoja bei galėtų vykti ir egzistuoti mus supančiame pasaulyje. Pasaulis, būdamas begalinis erdvėje ir laike, yra neišsemiamas ir „platyn“, ir „gilyn“, ir „pirmyn“, t. y. neišsemiamas savo sudėtingume ir savo potencialiose galimybėse generuoti tai, ko dar nebuvo ir kas nebūtinai vienareikšmiškai ir neišvengiamai turėtų išplaukti iš to, kas yra ar buvo. Ši nuostata tapo vienu iš pagrindinių sisteminio mąstymo principų ir gerai koresponduoja su sistematotyroje nagrinėjamu emerđencijos reiškiniu.

Jeigu būtų priešingai, t. y., jei egzistotų baigtinė dėsnių aibė, iš kurių deduktyviai išplauktų viskas, kas vyksta ar galėtų vykti, tai mes turėtume pasaulį, kuriame viskas būtų fatališkai iš anksto apibrėžta, iš anksto apspręsta. Toks pasaulis kaip virtuali sistema logiškai yra įmanomas ir gali būti įsivaizduojamas, tačiau jis vargu ar panašus į tą realų pasaulį, kuriame gyvename.

Taikomoji tų darbų, kurie buvo įvykdyti metamatematikoje, kuriant formalų teoremų išvedimo ir metateoremų įrodymo aparatą, ir gautų rezultatų reikšmė yra tame, jog jie, **praturtindami matematikos ir logikos instrumentariją, reikšmingai palengvino ir palengvina loginio mąstymo procesų formalizavimą, algoritmizavimą ir kompiuterizavimą**, kas labai svarbu ir aktualu, kuriant kompiuterinį „dirbtinį intelektą“, galėsiantį tapti efektyviu žmogaus pagalbininku sudėtingų loginių problemų sprendime ir kitokioje intelektualioje veikloje, tame tarpe, ir kuriant patogų ir efektyvų interfeisą tarp žmogaus ir kompiuterio, o tuo labiau – tarp didelio kolektyvo, sudaryto iš įvairių sričių specialistų, suburtų sudėtingos kompleksinės problemos sprendimui. Juk, naudojantis šiuolaikine kompiuterine technika, kol kas galima apdoroti tik tokią informaciją, kuri yra pilnai formalizuota: išskaidyta į tokius informacinius „atomus“, kuriuos gali „atpažinti“ ir „įsiminti“ kompiuteris ir iš kurių jis, vadovaudamasis formaliomis vienareikšmiškai apibrėžtomis taisyklėmis, gali konstruoti mums reikalingus bei mus dominančius tų „atomų“ junginius, t. y. formaliai išvedinėti iš turimų teiginių naujus teiginius, tame tarpe ir tokius, kuriuos gauti be kompiuterio būtų sunku ar net neįmanoma, nes pareikalautų iš mūsų labai galingos atminties ir vaizduotės, neleistinais daug laiko ir labai sudėtingo ir nepriekaištingo loginio mąstymo, nedarančio apsirikimų ir apmaudžių klaidų. Formalizmo mokyklos atstovai, vykdydami „Hilberto programą“, ne taip jau mažai pasiekė šioje srityje, **sukurdami ir išstobulindami informacijos ir operacijų su ja formalizavimo „technologiją“**.

O tai, kad paaiškėjo, jog „Hilberto programa“ negali būti pilnai realizuota, **padėjo intelektualių procesų kompiuterizavimo ir automatizavimo entuziastams blaiviau įvertinti savo galimybes, greičiau ir giliau suvokti formaliųjų metodų ribotumą** bei atsisakyti nepagrįstai pretenzingų pažadų, kad kibernetinė technika jau pačioje artimiausioje ateityje kompiuterizuosianti ir automatizuosianti visą intelektualinę veiklą.

Buvo pagaliau suvokta, kad kuriant „dirbtinį intelektą“, **nepakanka vien tik formalių sintaksės taisyklių**, kad labai svarbu ir tai, **ką tie informaciniai „atomai“ reiškia, kokią neformalią prasmę jie turi**. Todėl nuo darbų, pradžioje skirtų vien tik **formaliajai sintaktikai**, palaipsniui buvo pereita ir prie darbų, skirtų **semantikai**, ir ši tema tampa vis labiau dominuojanti: vis plačiau ir giliau nagrinėjami tokie klausimai kaip „**semiotiniai modeliai**“, „**prasminės informacijos apdorojimas**“, „**ženklų sistemos**“, „**freimai**“ ir „**slotai**“, „**semantiniai ryšiai**“, „**sintagmatinės grandinės**“ ir pan.

Tačiau visa tai įvyko (ir tebevyksta) jau **penktajame logikos mokslo raidos etape**, prie kurio apžvalgos dabar ir pereisime.

1.16.1.5.5.7. Šiuolaikinės matematinės logikos raidos etapas

Trečioji matematikos krizė, apie kurią buvo tiek rašyta 1.16.1.5.5.4., 1.16.1.5.5.5. ir 1.16.1.5.5.6. skyreliuose, ketvirtajame matematinės logikos raidos etape bent jau ta prasme, ko buvo užsibrėžta pasiekti to etapo pradžioje, daugelio matematikų nuomone taip ir liko iki galo neįveikta. Todėl situacija šiuolaikinėje matematikoje daugeliui tikrai gali atrodyti nepavydėtina.

Tačiau, **jei pažvelgtume į matematikos mokslą ir į šią krizę jame iš sistemų teorijos pusės, tai (daugelio klasikinės matematikos atstovų nuostabai) rastume, kad nutiko tai, kas ir turėjo nutikti, ir, kas svarbiausia, kad matematikos moksle nieko tragiško neįvyko**. Paaiškinsiu šią savo mintį.

Apžvelgdami tai, kas buvo išdėstyta 1.16.1.5.5.4., 1.16.1.5.5.5. ir 1.16.1.5.5.6. skyreliuose, galime padaryti apibendrinančią išvadą, jog XIX a. pabaigoje ir XX a. pirmojoje pusėje matematikai susidūrė su dviem jiems netikėtais ir juos sutrikdžiusiais dalykais, kurie mano – ir ne tik mano – nuomone, iššaukė tai, ką mes čia sąlyginai pavadiname trečiąja matematikos krize:

1) su loginių ir semantinių antinomijų atradimu klasikinėje aibių teorijoje, laikomoje vienu iš pamatinių šiuolaikinės matematikos mokslų;

2) su bet kurios baigtinės matematinių aksiomų sistemos – šiuolaikinės matematikos „rūmo“ loginio „pamato“ svarbiausiojo „akmens“ – nepakankamumu, t. y. su tos sistemos nepilnumo bei jos negalėjimo niekada tapti pilna įrodymu.

Kyla klausimas: **ar tie du dalykai atsirado dėl to, kad šiuolaikinės matematikos esmė ir „pamatai“ yra ydingi ir todėl juos būtina keisti, ar tų dalykų atsiradimas – natūralus matematikos mokslo natūralios raidos rezultatas?**

Aš linkęs laikytis antrosios nuomonės, kuri, kaip rodo 1.16.1.5.5.5. skyrelyje pateikta trumpa istorinė matematikos krizių apžvalga, visose ankstesnėse krizėse save pateisino. Įsitikinęs, kad ji save pateisins ir šį kartą. Toks įsitikinimas man atrodo pakankamai pagrįstas: jis išplaukia iš susidariusios situacijos sisteminės analizės rezultatų.

Antinomijų aibių teorijoje atsiradimo priežastys, nagrinėjant jas vadovaujantis sisteminė metodologija, atrodo analogiškos 1.16.1.5.5.5. skyrelyje jau minėtoms paradoksų atsiradimo matematinėje analizėje priežastims: matematinėje analizėje paradoksai atsirado dėl pernelyg laisvo ir

todėl ne visada korektiško operavimo su nepakankamai griežtai apibrėžtais ir todėl gana miglotai suvokiamais begaliniais mažais dydžiais, beveik automatiškai ir todėl nepakankamai pagrįstai transformuojant baigtinių dydžių algebrą į begalinius mažų dydžių algebrą, o antinomijos aibių teorijoje atsirado pernelyg laisvai ir todėl ne visada korektiškai operuojant su begalinėmis aibėmis, beveik automatiškai ir todėl nepakankamai pagrįstai transformuojant baigtinių aibių algebrą į begalinių aibių algebrą, įsivedant joje tokius vidiniai prieštarigus operandus kaip aktualiosios begalybės ir tokius apibrėžimus kaip impredikatyvūs apibrėžimai, kurie, nekorektiškai juos taikant, gali atvesti prie ydingojo rato susidarymo bei „apibrėžimo“ tokių sąvokų, kurios yra vidiniai prieštaringos. Beveik automatiškai, o todėl ir nepakankamai pagrįstai buvo perkelti į begalinių aibių teoriją ir logikos dėsniai, galiojantys baigtinių aibių teorijoje, tarp jų – ir trečiojo negalimojo, ir dvigubo neiginio dėsniai, nors, kaip jau buvo parodyta 1.16.1.5.5.6. skyrelyje, jų taikymo galimybė begalinėms aibėms kelia abejonių.

Iš čia ką tik aprašytos priežasčių analogijos išplaukia ir priemonių toms priežastims pašalinti analogiškumas: reikia kritiškai peržiūrėti begalinių aibių teoriją, sugriežtinant operavimo su jomis bei jų apibrėžimų taisykles taip, kad būtų eliminuota galimybė bet kokių alogiškumų atsiradimui, t. y. pasielgti panašiai, kaip buvo pasielgta matematinėje analizėje, sukuriant ribų teoriją ir aritmetrizuojant matematinės analizės pagrindus.

Šiuo keliu jau einama ir einama pakankamai sėkmingai: išsiaiškintos antinomijų atsiradimo priežastys, sukurta ir tobulinama Cermelo aksiomų sistema, daug klausimų, kurie nebuvo pakankamai aiškūs, išsiaiškino savo darbuose logizmo, intuicionizmo ir formalizmo krypčių atstovai. Todėl galima sakyti, jog **matematika, išsiaiškinusi antinomijų atsiradimo priežastis, tapo gilesnė ir patikimesnė nei buvo anksčiau.**

Panašią išvadą galima padaryti ir sistemiškai išanalizavus antrąją trečiosios krizės matematikoje priežastį – išsiaiškintą **matematikos aksiomų sistemos nepilnumą ir negalimybę tą aksiomų sistemą kada nors papildyti iki substancionaliai (neformaliai) ir formaliai pilnos aksiomų sistemos.**

Juk matematikos mokslas bendrasisteminis požiūriu yra mokslas, kuris susiformavo, nagrinėjant tuos pačius bendruosius visų realiai mūsų pasaulyje vykstančių procesų ir jame egzistuojančių realių sistemų dėsningumus, kuriuos mes, abstrahuavę nuo pačių procesų ir sistemų, išmokome formalizuoti, išreikšdami formaliais ženklais ir vykdydami su tais ženklais formalias operacijas, atspindinčias (modeliuojančias) tas realias operacijas, kuriose tie dėsningumai realiai pasireiškia. Todėl matematikos mokslas skiriasi nuo tokių mokslų kaip fizika, chemija, biologija tik tuo, kad jo objektas yra bendresnis – ne tiek patys fiziniai, cheminiai, biologiniai, bei visi kiti reiškiniai, kiek bendrasisteminiai santykiai juose, bendrasisteminės jų savybės – ir todėl jo požiūris yra bendresnis ir abstraktesnis: matematikos mokslas abstrahuoja tik tas nagrinėjamų objektų ir reiškinių savybes ir tik tuos santykius tarp jų, kurie yra bendri visiems objektams ir visiems reiškiniams, kokiai realaus pasaulio sričiai jie nepriklausytų. Nagrinėdami matematikos mokslo objektą, nesunkiai galime pastebėti, kad didžiosios dalies matematikos mokslo sričių objektas yra kiekybė, t. y. kiekybiniai santykiai, tačiau šiuolaikinė matematika jau neapsiriboja vien tik tuo, ir kai kurios naujausios jos šakos pradeda pretenduoti ir į antros kategorijos – kokybės – analizę, bandydamos joje taikyti metodus, artimus kiekybinės analizės metodams. Todėl, šių eilučių autoriaus nuomone, šiuolaikinė matematika tiek savo specifine kalba, tiek savo specifiniais metodais ir specifiniu tų metodų taikymo aparatu ne tiek jau daug besiskiria nuo matematinės sistemotyros, o abiejų tų mokslų objektai vis labiau artėja vienas prie kito ir, laikui bėgant, šie abu mokslai galėtų ir turėtų susilieti į vieną mokslą. Apie tai jau buvo rašyta 1.6.4.1.4. skyrelyje, kur šios mintys buvo išdėstytos žymiai išsamiau. Čia pridėsiu tik tai, jog matematika yra toks pat gamtos (pačia plačiaja to žodžio prasme) mokslas, kaip ir visi kiti gamtos mokslai, ir skiriasi nuo pastarųjų tik tuo, kad jo objektas yra platesnis (**bendrieji** visoms sistemoms ir visiems reiškiniams **santykiai**), o požiūris į tą objektą yra abstraktesnis, bendresnis ir specifiskesnis (siauresnis ta prasme, kad stengiamasi susikoncentruoti tik ties tuo, kas tuo ar kitu būdu galėtų būti išmatuojama, įvertinama).

O jeigu mes priimame tokį bendrasisteminį požiūrį į matematiką ir jeigu mums atrodo natūralu, kad tokie mokslai kaip fizika ar biologija negali būti formaliai išvesti iš baigtinio skaičiaus vienareikšmiškai suformuluotų aksiomų, tai kodėl mus turėtų šokiruoti, kad matematika, būdama realaus neišsemiamo pasaulio modeliu (kad ir labai abstrakčiu, projektuojamu labai specifiniu ir siauru aspektu, bet vis dėlto modeliu, kurį galima visą laiką plėsti ir tikslinti, artinant prie modeliuojamo objekto), turi panašią savybę, t. y. negali būti visa išvesta iš baigtinio skaičiaus aksiomų?

Aksiomatiškai gali būti kuriamos tik tam tikros atskiros to modelio dalys ir tik tam tikrame abstrakcijos bei adekvatumo atspindimam (modeliuojamam) realiam objektui (t. y. minėtiems bendrasisteminiam realaus pasaulio dėsningumams, kuriuos mes stengiamės matematiškai atvaizduoti)

lygyje, tačiau jokiū būdu ne visa matematika ir ne bet kuriame adekvatumo lygyje, jei matematika pretenduoja į bendrasisteminių gamtos plačiąją prasmę mokslo statusą.

Taigi, žiūrint iš sistemų teorijos pozicijų, taip vadinamoji trečioji matematikos krizė nėra jokia jos krizė, jokia matematikos katastrofa. Į „katastrofą“ pateko tik tie matematikai, kurie, užmiršę matematikos kilmę ir todėl klaidingai suvokę jos esmę, nepamatuotai pretenzingai užsimojo pasiekti nepasiekiamą – iš baigtinio vienareikšmiškai suformuluotų aksiomų rinkinio, naudojantis baigtiniu vienareikšmiškų taisyklių rinkiniu, gauti kiek norint sudėtingą neišsemiamai sudėtingo pasaulio modelį, kuris adekvačiai atspindėtų visus egzistuojančius tame pasaulyje bendruosius matematine kalba išreiškiamus dėsningumus. Juk iš riboto aksiomų rinkinio, naudojantis ribotu taisyklių rinkiniu, galima deduktyviai išvesti tik ribotą matematiką, ir su tuo tokios matematikos ribotumu mes anksčiau ar vėliau neišvengiamai turime susidurti, kaip kad, pavyzdžiui, jau buvo susidurta, bandant realizuoti formalizmo programą. O jei mes norime kurti tokį matematikos mokslą, kuris, būdamas ribotas kiekvienu konkrečiu baigtiniu momentu, potencialiai leistų mums neribotai artėti prie to, ką filosofai vadina absoliučia tiesa, tai mes negalime iš anksto ir visiems laikams apsiriboti koku nors pastoviu baigtiniu aksiomų bei taisyklių rinkiniu ir tikėtis deduktyviai gauti iš jo visą esamą ir būsimą matematiką. Todėl pastangos pastatyti visą matematikos rūmą ant „tvirtų pamatų“, kuriuos sudaro baigtinis aksiomų bei išvedimo taisyklių rinkinys, deduktyviai išvedant visą matematiką iš tų ir tik tų aksiomų, naudojantis tomis ir tik tomis išvedimo taisyklėmis, šių eilučių autoriui, žiūrinčiam į visa tai iš ką tik išsakytų bendrasisteminių pozicijų, atrodo bergždžios.

Matyt, tą bergždumą, po to, kai K. Godelis įrodė savo garsiąsias nepilnumo teoremas, pradėjo suvokti ir dauguma matematikų: penktajame matematinės logikos raidos etape, kurį mes čia dabar pradėjome nagrinėti, darbų, skirtų matematikos pagrindimui bei jos dedukcinio griežtumo problemoms, lyginant su ketvirtuoju etapu, jau žymiai sumažėjo ir atviro nusivylimo aksiomatinio metodo gaidelės išsakomos net pakankamai įžymių ir autoritetinių matematikų. Pavyzdžiui, Niujorko universiteto ir R. Kuranto vardo Matematikos instituto profesorius bei kelių žurnalų JAV redakcijų narys M. Klainas savo beveik puspenkto šimto puslapių apimties knygoje „Matematika, apibrėžtumo praradimas“ [265] prisipažįsta esąs **priverstas pripažinti įrodymų matematikoje absoliutaus griežtumo iliuziškumą**. Skaitytojui rekomenduočiau šią knygą bent jau pavartyti, nes joje jis ras gana turtingą ir istoriškai vertingą kolekciją pačių įvairiausių (tame tarpe – ir prieštarūnų) nuomonių apie matematiką ir jos problemas, išsakytų įvairiais laikais įvairių daugiau ar mažiau garsių autorių, o taip pat daug įdomių pavyzdžių. Tai padėtų skaitytojui žymiai papildyti ir patikslinti tą matematikos įvaizdį, kurį jis dabar turi susidaręs iš savo patirties bei iš to, ką paskaitė šios mokymo priemonės skyriuose.

Pasigirsta net ir tokių balsų, kurie, susišaukdami su mūsų jau minėtu žymiu anglų filosofu F. Bekonu, dar 1620 m. parašiusiu „Naująjį organoną“, **nukrypsta į kitą kraštutinumą ir pareiškia gana kategorišką nuomonę, kad dedukcinis aksiomatinis metodas yra tik formalus žaidimas, imituojantis tariamąjį įrodymų griežtumą, bet tikrovėje neturintis jokios pažintinės vertės ir galintis atnešti net žalą, nes atima laiką tuštiems „eksercizams“ ir mulkina (nesąmoningai ar net sąmoningai) į šį metodą įtikėjusius naivuolius**. Su tokiomis krašutinėmis nuomonėmis skaitytojui taip pat labai rekomenduočiau detaliau susipažinti, paskaičius, pavyzdžiui, knygetes [266, 267], parašytas gana šmaikščia kalba su nemaža pašaipios ironijos doze adresu tokių daugelio matematikų pripažįstamų autoritetų kaip Burbaki [268, 269], Klini [251], Frenkelis ir Bar – Hilelas [270], Konas [271], Fridas [272], Foras [273] ir t. t. Tai, manau, padėtų jaunam ir dar nepatyrusiam skaitytojui atidžiau ir kritiškiau žiūrėti į kai kuriuos matematikoje dažnai sutinkamus įrodymus, pretenduojančius į absoliutų griežtumą, ir tiksliau suvokti formalųjų metodų tikrąją vietą teorijoje ir praktikoje, jų taikymų galimybes ir ribas, o taip pat, iš kitos pusės, atidžiau bei kritiškiau žiūrėti ir į šmaikščius, tačiau ne visada pakankamai atsakingus kritinius pareiškimus bei bandančius juos pagrįsti samprotavimus. Taigi, knygučių [266] ir [267] kritinė analizė būtų veiksmingas priešnuodis, sulaikantis nuo polinkio į nepagrįstus kraštutinius į vieną ar kitą pusę.

Kadangi, kaip dažniausiai būna, dauguma skaitytojų nesiryš ieškoti minėtųjų knygučių [266, 267], kurias ne kiekvienoje bibliotekoje ir rasi, tai aš čia pateiksiu trejetą pavyzdėlių, iliustruojančių, kaip ir už ką kritikuoja formalizmą ir aksiomatinį metodą aršūs jų oponentai. Iš tų pavyzdėlių mes galėsime akivaizdžiai pamatyti bei spręsti, kiek tokia kritika teisi, ir kiek – neteisi, o kartu (kas svarbiausia) – ir pasidaryti sau naudingas išvadas.

Pirmajame pavyzdėlyje, kurį knygutės [267] autorius paėmė iš planimetrijos pradmenų, analizuojamas teoremas, kad kiekvienas taškas gali priklausyti bent dviem tiesėms, įrodymas.

Prieš užrašydamas aksiomas, kurių sistema buvo pavadinta sistema Nr.1 ir iš kurių ta teorema išvedama, knygutės [267] autorius K. I. Valjkovas analizuoja ir kritiškai vertina **formalistams būdingą tendenciją taip apibendrinti aksiomų formuluotes, kad jose liktų kuo mažiau žodžių, turinčių konkretų turinį ir prasmę, pakeičiant kai kuriuos žodžius ženklais, o kitus žodžius – iš viso eliminuojant**. K. I. Valjkovas teigia, kad, pereinant nuo formuluotės „Kiekvienai porai taškų A ir B

egzistuoja tiesė L , kuriai tie taškai priklauso“ prie formulotės „Kiekvienai porai A ir B egzistuoja L , kuriai tie A ir B priklauso“, o vėliau – ir prie formulotės „ $\forall_A \forall_B \exists_L [(A \in L) \wedge (B \in L)]$ “, kurią formalistai jau laiko „pakankamai respektabilia“, ne tik išplečiama ta sritis, kuriai tą aksiomą galima taikyti, bet ir negrįžtamai prarandama daug prasminės informacijos. Su šiuo knygutės [267] autoriaus teiginiu galima sutikti, tuo labiau, kad čia nieko ypatingai nauja ir nepasakyta. Seniai žinoma, kad, **apibendrinant sąvokas, gaunamos naujos sąvokos, kurių apimtis platesnė, tačiau turinys – siauresnis**. Apie tai buvo kalbėta ir šios mokymo priemonės 1.5.4. skyrelyje. Sąvokų apibendrinimo operacijos tikrai „menkina“ sąvokų turinį, tačiau ne visada turi būti smerktinos, o kartais jos būna net ir labai naudingos, nes reikalingos ir labai konkrečios (bet „siauros“ savo apimtimi), ir labai „plachios“ (bet labai abstrakčios) sąvokos. Viskas priklauso nuo situacijos, kurioje tos sąvokos vartojamos. Tačiau **vis dėlto svarbu** (ir čia K. I. Valjkovas tikrai teisus), **kad žmogus, operuodamas abstrakčiais ženklais, suvoktų, kas už tų ženklų slepiasi, ką jie galėtų reikšti. Todėl naujų dalykų dėstyme turėtų vyrauti metodas, kuris remiasi ėjimu „nuo konkretaus prie abstraktaus“, laipsnišku turimų sąvokų apibendrinimu, tik palaipsniui įvedant vis abstraktesnes ir platesnes sąvokas, kuriomis po to būtų galima operuoti ir nuo kurių, gavus atitinkamus rezultatus, reikalui esant, būtų galima grįžti į „konkretų pasaulį“**. Kai kur vis dar sutinkama „mada“ pradėti matematikos kursų dėstymą aukštosiose mokyklose nuo labai apibendrinto ir abstraktaus lygio, kai studentai priversti nusirašinėti nuo lentos formules, nesuprasdami, ką jos iš viso reiškia, tikrai yra ydinga ir kritikuotina. **Burbaki knygos gali būti naudingos sistematizuojant jau turimas žinias, bet pradėti matematikos dėstymą nuo Burbaki – tikrai neracionalu**. O juk tokia „mada“ matematikos dėstyme ne taip jau seniai buvo gana plačiai paplitusi ir dar iki šiol kai kurie dėstytojai šios **pedagogikos atžvilgiu** ydingos „mados“ vis dar laikosi, kaltindami pirmakursius nesugebėjimu matematiškai mąstyti.

Tačiau grįžkime prie sistemos Nr.1 aksiomų formulavimo ir teoremos įrodymo kritinės analizės, pateiktos K. I. Valjkovo knygutėje [267].

Minėtosios teoremos išvedimui pasitelkiama aksiomų sistema, susidedanti iš keturių aksiomų:

1. Bet kuriems dviem A_i ir B_i egzistuoja ℓ_i , priklausanti A_i ir B_i .
2. Bet kuriems dviem A_i ir B_i egzistuoja ne daugiau nei viena jiems priklausanti ℓ_i .
3. Kiekvienai ℓ_i egzistuoja bent viena jai priklausanti pora, susidedanti iš A_i ir B_i .
4. Egzistuoja trejetas A_i, B_i ir C_i , nepriklausantis vienai ℓ_i .

Šiose aksiomose žodžiai „taškai“ ir „tiesės“ specialiai praleisti todėl, kad, kaip teigia formalių aksiomatinių teorijų atstovai, **visas iš šios aksiomų sistemos išvedamas teoremas būtų galima taikyti ne tik tiesėms ir taškams, bet ir visiems bet kokios prigimties objektams, kuriems galioja visos šios aksiomos**.

Teoremos, kad kiekvienas A_i priklauso ne mažiau kaip dviem ℓ_i , išvedimas pateikiamas taip:

„Tarkime, kad A priklauso tik vienai ℓ . Iš pirmosios aksiomos išplaukia, kad egzistuoja tokia ℓ , kuri priklauso A ir B . Iš ketvirtosios aksiomos išplaukia, jog atsiras toks C , kuris nepriklauso ℓ . Iš pirmosios aksiomos išplaukia, kad egzistuoja m , priklausanti A ir C . Objektai ℓ ir m skirtingi (ketvirtoji aksioma). Taigi, gavome, kad A priklauso tuo pačiu metu ir ℓ ir m , kas prieštarauja prielaidai. Tai reiškia, jog prielaida neteisinga, iš kur išplaukia teoremos teisingumas“.

K. I. Valjkovas kritikuoja šį teoremos išvedimą daugeliu aspektų ir kritikuoja, mano manymu, teisingai.

Visų pirma, jis pažymi, kad priklausomybės sąvoka pirmojoje bei antrojoje aksiomose vartojama viena prasme, o trečiojoje ir ketvirtojoje – kita. Bendrai paėmus – tai skirtingos sąvokos, nes ne būtinai iš to, kad koks nors A priklauso kokiai tai ℓ , išplaukia, jog ir ℓ priklauso kokiam tai A , tačiau teoremos įrodyme tos sąvokos sutapatinamos. Norint tokį sutapatinimą įteisinti, aksiomų sistema turėtų būti papildyta penktąja aksioma „Jei A_i priklauso ℓ_i , tai ℓ_i priklauso A_i “.

Bet ir to, pasirodo, nepakanka, kad būtų vienareikšmiškai ir pilnai apibrėžta žodžio „priklauso“ reikšmė. Juk, pavyzdžiui, tuo atveju, jei mes nežinome to žodžio reikšmės ir stengiamės išsiaiškinti ją tik iš pateiktų aksiomų, turinčių implicitiškai apibrėžti visas į tas aksiomas įeinančias sąvokas, mums visiškai pagrįstai gali kilti klausimas, ar iš to, kad A ir B priklauso ℓ , išplaukia, jog ir A atskirai bei B atskirai taip pat priklauso ℓ .

Pateiktose aksiomose apie tai juk nieko nepasakyta, o išvesdami teoremą mes neišreikštinau naudojome tuo, kad objektai A, B ir C ir pavieniui gali priklausyti ℓ .

Todėl reikalinga dar ir šeštoji aksioma, teigianti, kad, jei $A_i, B_i, C_i, \dots, N_i$ priklauso ℓ_i visi kartu, tai jie priklauso ℓ_i ir kiekvienas atskirai, o taip pat ℓ_i priklauso bet koks tų objektų poaibis.

Čia knygutės [267] autorius pagrįstai daro išvadą, kad, **bandydami formaliai apibrėžti sąvoką „priklauso“, mes tampame priversti įsivedinėti vis naujas aksiomas, o kartu su jomis ir**

naujas sąvokas (naujus žodžius ar juos žyminčius bei pakeičiančius ženklus), kurių apibrėžimui vėl gali prireikti naujų aksiomų su naujais žodžiais (ar ženklais), kuriuos irgi gali prireikti apibrėžti.

O juk pirmosiose keturiose aksiomose vartojamas ne tik žodis „priklauso“ (arba jį pakeičiantis ženklas „ $\in$ “, nuo ko formalus apibrėžimo problema nė kiek nepalengvėja), bet ir žodis „egzistuoja“ (arba kvantorius $\exists$), o taip pat žodžiai „bet kuris“, arba „kiekvienas“, žymimi kvantoriais $\forall$, ką formaliose sistemose, nesinaudojančiose intuityviai suvokia tais žodžiais žymimų sąvokų prasme, irgi reikia implicitiškai apibrėžti. **Kyla ne toks jau trivialus klausimas, ar šis besiplečiantis aksiomų, skirtų jose naudojamų sąvokų formaliam apibrėžimui, ratas, kada nors gali užsibaigti? Ar galima išsiversti be intuityvaus kai kurių pirminių sąvokų suvokimo, apsiribojant vien tik formaliais apibrėžimais, naudojantis formaliai užrašytais aksiomomis?** K. I. Valjkovas teigia, kad ne, ir daugelyje atvejų jis teisus, kaip tam tikra prasme teisus ir savo laiku sukėlusios daug ginčų knygos „Skaiciavimo mašinos ir sveikas protas“ [274] autorius M. Taubė, teigdamas, kad „**bet koks formalus procesas, koks ilgas jis bebūtų ir su koku tikslumu jis bebūtų vykdomas – yra vis dėlto tik tarpas tarp neformalios pradžios ir neformalios pabaigos**“. Tačiau K. I. Valjkovas, kritikuodamas formalizuotą dedukcinį metodą, teisus ne visada ir tik iš dalies, **nes juk egzistuoja tokios formalios sistemos, kaip teiginių bei predikatų skaičiavimai, kuriose teoremų išvedimas iš duoto baigtinio aksiomų sąrašo, naudojantis baigtiniu formalių išvedimo taisyklių skaičiumi, nereikalauja intuityvaus toje sistemoje vartojamų simbolių prasmės suvokimo.** O be to klasikinis teiginių skaičiavimas yra ne tik substancionaliai, bet ir formaliai pilna sistema, iš kur išplaukia, jog tokiai sistemai tų formalių apibrėžimų, kurie egzistuoja teiginių skaičiavimo aksiomų forma, pilnai pakanka ir pakanka net ir tam, kad formaliai apibrėžti simboliai „ $\neg$ “, „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “ pilnai sutaptų su teiginių algebros operacijų neigimo, konjunkcijos, disjunkcijos ir materialiosios implikacijos ženklais, įvestais teiginių algebroje neformaliai.

Viena iš priežasčių, dėl kurių į 1.16.skyriaus sudėtį buvo įtraukti 1.16.1.5.2., 1.16.1.5.3. ir 1.16.1.5.4. skyreliai, skirti teiginių ir predikatų skaičiavimams, kaip tik ir buvo tame, **kad turėtume atitinkamų svarių argumentų šioje labai svarbioje sistemotyrai (ir matematikai tame tarpe) diskusijoje, t. y. kad turėtume atsakymą į klausimą, ar iš viso galima sukurti kokią nors formalią sistemą, kuri būtų pilnai apibrėžta savo vidinėmis priemonėmis ir nereikala būtų tam papildomos intuityvios informacijos iš išorės.**

Pripažindamas, kad didžioji dalis tų kritinių pastabų, kurias knygutės [267] autoriaus išsakė ką tik minėtos teoremos įrodymo atžvilgiu, yra teisingos, jokių būdu negaliu sutikti su jo pateikta tos teoremos ir jos įrodymo „interpretacija“, pavadinta „nevykėlio dviratininko įrodymu“. Juk šis „įrodymas“ ir „išvada“, kad „dviratininkas, atsitrenkęs į vieną medį, būtinai turi atsitrenkti ir į kitą“, neturi ne tik semantinio, bet ir jokio loginio ryšio su nagrinėjama teorema ir ką tik nagrinėtu jos įrodymu, nes „dviratininko, atsitrenkusio į medį“ situacija netenkina aksiomų, iš kurių buvo gauta teorema, kad kiekvienas A priklauso ne mažiau kaip dviem ℓ_i . Todėl „nevykėlio dviratininko įrodymas“ „įrodo“ gal būt tik tai, kad K. I. Valjkovas, matyt, veikiamas polemikos įkarščio, neretai ir pats nusižengia logikos taisyklėms, kartais prarasdamas net elementarią „sveiko proto“ kontrolę, kas labai sumenkina gana įdomią ir savotiškai vertingą savo kritiškais pastabomis jo knygutę.

Antrasis K. I. Valjkovo pavyzdėlis sukonstruotas, formalizuojant ir aksiomatizuojant giminystės ryšius. Jis skirtas tam, kad būtų pailiustruota, kaip įrodomos teoremos aibių teorijoje, ir pasiūlyta iš to.

Knygutės [267] 25-jame puslapyje pateikiama tokia aksiomų sistema, pavadinta aksiomų sistema Nr.2:

1) $A \sim V$; 2) $V \sim G$; 3) $D \sim B$; 4) D ne $\sim G$; 5) jei $X \sim Y$, tai taip pat ir $Y \sim X$; 6) jei $X \sim Y$ ir $Y \sim Z$, tai taip pat ir $X \sim Z$.

Remiantis šiomis aksiomomis, įrodinėjama, jog aksiomomis aprašytoje situacijoje turėtų galioti teorema, teigianti, kad A ne $\sim B$.

Teoremos įrodymui naudojamosi, kaip ir anksčiau, suvedimo į priešpriešą (reductio ad absurdum) metodu. Įrodymas susideda iš septynių žingsnių:

- 1) priimama prielaida, jog $A \sim B$;
- 2) iš šios prielaidos ir penktosios aksiomos gaunama išvada, jog $B \sim A$;
- 3) pasinaudojant trečiąja aksioma $D \sim B$, antrajame žingsnyje gautą išvadą $B \sim A$ ir šeštąją aksiomą, gaunama nauja išvada, jog $D \sim A$;
- 4) pasinaudojant pirmąją, antrąją ir šeštąją aksiomomis, išvedama duotojoje sistemoje galiojanti teorema $A \sim G$;
- 5) pasinaudojant trečiajame žingsnyje gautąją sąlyginę ((t. y. galiojančia tuo atveju, jei teisinga pradžioje priimta prielaida $A \sim B$) išvada $D \sim A$, teorema $A \sim G$ ir šeštąją aksiomą, išreiškiančią santykio „ $\sim$ “ tranzityvumą, gaunama nauja sąlyginė išvada $D \sim G$;

6) gautoji sąlyginė išvada $D \sim G$ lyginama su ketvirtąja aksioma $D \neq \sim G$ ir daroma išvada, jog, priėmus prielaidą $A \sim B$ ir naudojantis duotosiomis aksiomomis (ir tik jomis), gaunama sąlyginė išvada, prieštaraujanti vienai iš aksiomų, iš ko išplaukia, jog priimtoji prielaida $A \sim B$ yra neteisinga;

7) iš to, kad priimtoji prielaida $A \sim B$ yra neteisinga, daroma išvada, kad turi būti teisingas teiginys $A \neq \sim B$, ką ir buvo siekta įrodyti.

Analizuodamas šį įrodymą, K. I. Valjkovas visiškai teisingai pastebi, kad septintajame žingsnyje neišreikštinėje formoje buvo pasinaudota trečiojo negalimojo dėsnio, kuris ne visuomet galioja, ir pateikia pavyzdį situacijos, kada tas dėsnis gali ir negalioji. Todėl negalima nesutikti su knygutės [267] autoriaus teiginiu, kad teoremos $A \neq \sim B$ įrodymui suvedimo į prieštarą metodu duotųjų šešių aksiomų nepakanka ir reikalinga dar septintoji aksioma, teigianti, jog bet kuriems X ir Y yra teisingas vienas ir tik vienas iš teiginių $X \sim Y$ arba $X \neq \sim Y$, t. y. reikalinga aksioma, išreiškianti negalimo trečiojo dėsnį, tikrai galiojantį situacijoje, kai teiginyje $X \sim Y$ jungtis „ $\sim$ “ interpretuojama kaip giminystės ryšys tarp X ir Y .

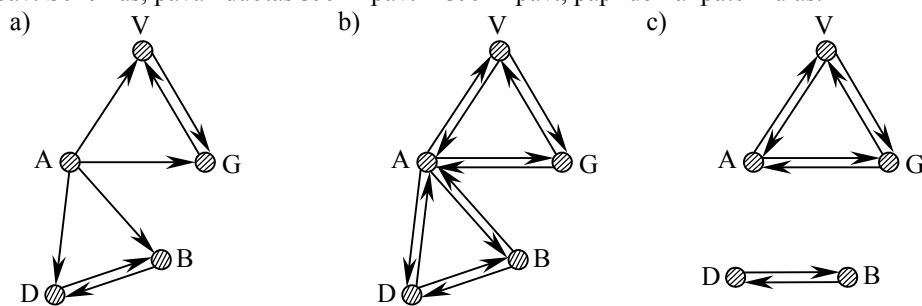
Galima sutikti ir su kai kuriomis kitomis minėtosios knygutės autoriaus pastabomis dėl įrodymo nepakankamo pagrįstumo bei griežtumo ir aksiomų sistemos nepakankamo pilnumo, tuo atveju, kai aksiomose panaudoti simboliai gali reikšti bet ką, tenkinantį tas aksiomas.

Tačiau K. I. Valjkovas neapsiriboja tik tokia kritika. Jis užsimoja parodyti, kad „neteisinga viena iš pagrindinių aksiomatinio formalizmo tezių“, išsakytą K. I. Valjkovo cituojamoje ištraukoje iš Burbaki:

„Suformuoti duotosios struktūros aksiomatinę teoriją – reiškia išvesti iš struktūros aksiomų išplaukiančias logines išvadas, nesinaudojant jokiais kitomis prielaidomis nagrinėjamų elementų atžvilgiu (tame tarpe ir bet kokiais hipotezėmis apie tų elementų „prigimtį“).

... Kiekvieną kartą, **kai matematikas pastebi, jog tarp elementų, kuriuos jis nagrinėja, egzistuoja santykiai, tenkinantys tam tikro tipo struktūros aksiomas, jis tuoj pat gali pasinaudoti visu to tipo struktūros bendrųjų teoremų arsenalu.**“

Remdamasis pirmąja šios ištraukos dalimi, K. I. Valjkovas įgyja teisę laisvai interpretuoti aksiomų sistemos Nr.2 simbolius: ir esybes A, B, D, V, G, X, Y , ir santykį „ $\sim$ “ bei jo buvimo neigimą „ $\neq$ “. Naudodamasis šia teise, jis interpretuoja santykį „ $\sim$ “ kaip informacinį ryšį tarp punktų, žymimų simboliais A, B, D, V, G, X, Y ir savo knygutės [267] 28-jame puslapyje pateikia schemą, pavaizduotą 399^a pav. Schemas, pavaizduotas 399^b pav. ir 399^c pav., papildomai pateikiu aš.



399 pav.

Po to knygutės [267] autorius pereina prie pacituotos ištraukos iš Burbaki antrosios dalies ir bando ją paneigti, teigdamas, kad jo knygutėje pateiktoji schema „tenkina visas sistemos Nr.2 aksiomas“, tačiau „netenkina ką tik iš tų aksiomų išvestos teoremos $A \neq \sim B$ “, nes kaip matyti iš 399^a pav., gavome, jog $A \sim B$. Iš viso to K. I. Valjkovas daro apibendrinančią išvadą, patvirtinančią visą abiejų jo knygučių ([266] ir [267]) tekstą raudona gija jungiančią mintį, kad „teisingas išvadas galima gauti tik neformaliai, tik konkrečiai interpretuojant aksiomas, o formaliai, kai objektai ir santykiai gali būti laisvai interpretuojami, esą, galima gauti kokias tik nori išvadas, tame tarpe ir prieštaringas“.

Šitoje vietoje K. I. Valjkovas neteisis, nes daro eilę klaidų, kurių kilmė man iki šiol neaiški: **iš vienos pusės, jis, kritikuodamas formalizmą ir formalius įrodymus, rodo didelį pastabumą ir minties aiškumą, iš kitos pusės, pateikdamas savo pavyzdžius, nepastebi tiesiog akivaizdžių klaidų.**

Visų pirma, knygutės [267] autorius neteisis, kad schema, pavaizduota 399^a pav., tenkina visas sistemos Nr.2 aksiomas, nes ta schema netenkina penktosios aksiomos: juk jei, pavyzdžiui, $A \sim V$, tai turėtų būti ir $V \sim A$. Todėl nieko nuostabaus, kad ši schema netenkina ir iš sistemos Nr.2 aksiomų išplaukiančios teoremos $A \neq \sim B$, kurios išvedimui penktajame žingsnyje buvo pasinaudota formule $D \sim A$, kurios 399^a pav. schema taip pat netenkina.

Jei patenkintume penktosios aksiomos reikalavimus ir iš schemos, pavaizduotos 399^a pav., gautume schemą, pavaizduotą 399^b pav., tai nesunkiai įsitikintume, jog tuomet būtų netenkinama

ketvirtoji aksioma. Vadinasi, 399^{„a“} pav. schema, kuri turi aksiomų sistemai Nr.2 prieštaraujančius ryšius $A \sim D$ ir $A \sim B$, negali būti tos sistemos modeliu.

Jei mes pareitume į 399^{„c“} pav. pavaizduotą schemą, kuri tenkina visas šešias sistemos Nr.2 aksiomas, kuo visiškai nesunku įsitikinti, tai pastebėtume, kad ši schema tenkina ir teoremą $A \neq \sim B$.

K. I. Valjkovas suklydo ne tik pateikdamas schemą, kuri netenkina penktosios aksiomos, bet daro ir dar didesnę bei dar bendresnę klaidą, interpretuodamas santykį „ $\sim$ “ kaip informacinių ryšių tarp dviejų punktų. Tokia interpretacija netinka todėl, kad informacinių ryšių sistema ne būtinai turi tenkinti penktąją ir šeštąją sistemos Nr.2 aksiomas. Juk iš to, kad punktas X perduoda informaciją punktui Y, neišplaukia, jog ir punktas Y būtinai turi perduoti informaciją punktui X: informacinis ryšys gali būti ne tik dupleksinis, bet ir simpleksinis. Taip pat iš to, kad punktas X surištas tiesioginiu informaciniu ryšiu su punktu Y, o punktas Y – su punktu Z, neišplaukia, kad punktas X būtinai turi būti sujungtas tiesioginiu informaciniu ryšiu su punktu Z.

Kaip matome, knygų [266] ir [267] autoriaus bandymas paneigti ištraukoje iš Burbaki išsakytas mintis nepavyko. Jis ir negalėjo pavykti, nes **tos Burbaki mintys yra teisingos, ir, jei nedaryti klaidų, panašių į tas, kurias padarė minėtųjų knygų autorių, negausime ir „išvadų“, prieštaraujančių toms mintims.** Tiesa, ne visada klaidos būna tokios akivaizdžios, kaip ką tik išnagrinėtoju atveju. Kartais jos būna subtilesnės ir sunkiau pastebimos. Su tokiu atveju kaip tik ir susipažinsime dar viename (ir paskutiniame) pavyzdėlyje.

Trečiasis pavyzdėlis, kurį čia panagrinėsime, knygutės [267] autoriaus buvo paimtas iš grupių teorijos.

Priminsiu (žiūr. 1.9.1.5. skyrelį), kad algebrine grupe $(A, \times)$ vadinama bet kokios prigimties elementų $a_1, a_2, a_3, \dots$ aibė $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, kurioje apibrėžta algebrinė operacija (ją sąlyginai čia pavadinsime „daugyba“ ir sąlyginai pažymėsime ženklu „ $\times$ “), kai tos aibės elementai ir ta operacija tenkina šias sąlygas:

1) aibės A uždarojo operacijos „ $\times$ “ atžvilgiu, ką formaliai galima išreikšti teiginiu $\forall_{a_i} \forall_{a_j} \{[(a_i \in A) \wedge (a_j \in A)] \rightarrow [(a_i \times a_j) \in A]\}$, kuriame $(a_i \times a_j)$ yra operacijos „ $\times$ “ rezultatas, kai jos operandai yra aibės A elementai a_i ir a_j ;

2) operacijos „ $\times$ “ asociatyvumo: $\forall_{a_i \in A} \forall_{a_j \in A} \forall_{a_k \in A} \{[a_i \times (a_j \times a_k)] = [(a_i \times a_j) \times a_k]\}$;

3) neutralaus elemento e egzistavimo: $\exists_{e \in A} \forall_{a_i \in A} \{[(e \times a_i) = a_i] \wedge [(a_i \times e) = a_i]\}$;

4) atvirkstinio elemento a_i^{-1} kiekvienam aibės A elementui a_i egzistavimo: $\forall_{a_i \in A} \exists_{a_i^{-1} \in A} \{[(a_i \times a_i^{-1}) = e] \wedge [(a_i^{-1} \times a_i) = e]\}$

Burbaki [268] prideda dar ir penktąjį reikalavimą, kad „sandauga“ $(a_i \times a_j)$ bet kuriems duotosioms aibės A elementams a_i ir a_j vienareikšmiškai apibrėžtų vieną ir tik vieną atitinkantį tą „sandaugą“ aibės A elementą $a_k = a_i \times a_j$.

To reikalavimo algebrinės grupės apibrėžime, pateiktame 1.9.1.5. skyrelyje, nebuvo, nes tas reikalavimas jau buvo įtrauktas į algebrinės operacijos apibrėžimą, todėl, apibrėžiant algebrinę grupę, ten jo galima buvo jau nebekartoti.

Knygutės [267] autorius analizuoja grupių teorijos vienos teoremos išvedimo pavyzdį, paimtą iš Burbaki [268], būtent teoremos: $\forall_{a_i \in A} \forall_{a_j \in A} \forall_{a_k \in A} \{[(a_i \times a_j) = (a_i \times a_k)] \rightarrow (a_j = a_k)\}$, teigiančios, kad iš „sandaugų“ $a_i \times a_j$ ir $a_i \times a_k$, turinčių vieną bendrą „dauginamąjį“ a_i , lygybės $(a_i \times a_j) = (a_i \times a_k)$ išplaukia „daugiklių“ a_j ir a_k lygybė, išvedimą.

Minėtoje Burbaki knygoje anksčiau išvardinti reikalavimai aibės A elementams ir operacijai „ $\times$ “ suformuluojami atitinkamų aksiomų forma. K. I. Valjkovas tų aksiomų sistemą pavadina sistema Nr.3 ir pateikia tokią, paimtą iš Burbaki knygos ką tik minėtosios teoremos išvedimą:

1) remiantis aksioma (4), kad $\forall_{a_i \in A} \exists_{a_i^{-1} \in A} \{[(a_i \times a_i^{-1}) = e] \wedge [(a_i^{-1} \times a_i) = e]\}$, iš aibės A pasirenkamas elementas a_i^{-1} ir iš jo „padauginamos“ abi lygybės $a_i \times a_j = a_i \times a_k$ pusės; gaunama lygybė $a_i^{-1} \times (a_i \times a_j) = a_i^{-1} \times (a_i \times a_k)$;

2) remiantis aksioma (2), kad $\forall_{a_i \in A} \forall_{a_j \in A} \forall_{a_k \in A} \{[a_i \times (a_j \times a_k)] = [(a_i \times a_j) \times a_k]\}$, pirmame žingsnyje gautoji lygybė pakeičiama lygybe $(a_i^{-1} \times a_i) \times a_j = (a_i^{-1} \times a_i) \times a_k$;

3) vėl remiantis jau minėta aksioma (4), antrajame žingsnyje gautoji lygybė pakeičiama lygybe $e \times a_j = e \times a_k$;

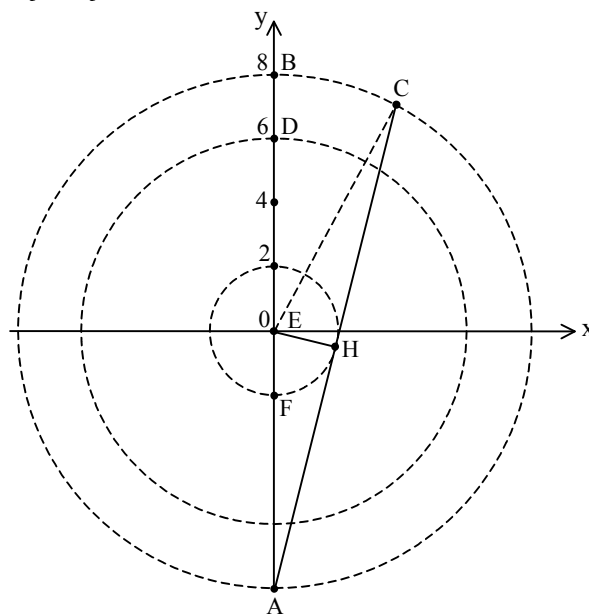
4) remiantis aksioma (3), kad $\exists e \in A \forall a_i \in A \{[(e \times a_i) = a_i] \wedge [(a_i \times e) = a_i]\}$, lygybė $e \times a_j = e \times a_k$ pakeičiama lygybe $a_j = a_k$, t. y. gaunama, kad iš lygybės $a_i \times a_j = a_i \times a_k$ ir aksiomų sistemos Nr.3 išvedama lygybė $a_j = a_k$, ką ir reikėjo įrodyti.

Analizuodamas šį įrodymą, K. I. Valjkovas pažymi, kad jame buvo naudojamos ne tik sistemos Nr.3 aksiomos, bet ir eile prielaidų, vaidinančių vaidmenį papildomų aksiomų, neištrauktų į sistemą Nr.3. Pavyzdžiui, jis visiškai pagrįstai klausia, iš kur išplaukia, kad „dauginami“ abi lygybės $(a_i \times a_j) = (a_i \times a_k)$ pusės iš elemento a_i^{-1} mes gausime vėl lygybę, nes sistemoje Nr.3 tokios aksiomos nėra ir ji iš duotųjų aksiomų neišplaukia. **Su tokiais pastabomis tikrai reikia sutikti, tačiau jos ne tik neprieštarauja įrodymų formalizavimo idėjai, bet, atvirkščiai, parodo dar gilesnio formalizavimo reikiamybę, kad būtų užkirstas kelias neišreikštiniam naudojimuisi tuo, kas formaliai neišreikšta ir neištraukta į „duotąjį“ aksiomų sąrašą.** Į pastabą, kad tas sąrašas kartais gali nebūti baigtinis, galima atsakyti taip: aksiomų sąrašas nebus baigtinis, jei mes norėsime gauti absoliučiai adekvatų realios sistemos modelį, t. y. jei mes operuosime ne su formaliomis, o su realiomis sistemomis. Jeigu gi mes apsiribosime formalia sistema, esančia artutiniu realios sistemos modeliu, atvaizduojančiu tik tam tikrą baigtinę tos sistemos savybių ir joje egzistuojančių santykių aibę, tai ir aksiomų, sudarančių tos formalios sistemos pagrindą, skaičius taip pat bus baigtinis.

Taigi, kritikos strėlės, kurias K. I. Valjkovas nukreipia prieš formalizavimo idėją, formalias sistemas ir formalius įrodymus ir, galima sakyti, net ir, apskritai, prieš dedukcinį metodą, ne tik nesugriauna formalių teorijų, bet, atkreipdamos dėmesį į tuos ar kitus trūkumus, net padeda jų tobulinimui, dėl ko ir naudinga paanalizuoti tokią, pavadinčiau, „priešišką“ formalizmui ir formalizavimui literatūrą.

Tuo labiau nepajėgios įrodyti formalizavimo metodų netinkamumą (o pagal K. I. Valjkovą – net žalingumą) tokios nevykusiai sukonstruotos „interpretacijos“ kaip jau minėtasis „dviratininkas“, „informacinių ryšių tinklas“, pavaizduotas 399^a pav., bei tas pavyzdėlis su „sunkiais taškais“, kuriuo knygutės [267] autorius bando įrodyti, jog, remiantis aksiomų sistema Nr.3, galima ne tik išvesti teoremą apie „daugiklių“ a_j ir a_k lygybę, bet ir sukonstruoti sistemą, kurioje tie elementai a_j ir a_k yra nelygūs, tuo lyg ir parodant aksiomatinės grupių teorijos prieštarumą, o todėl – ir beprasmiškumą bei bevertiškumą.

Tame pavyzdėlyje K. I. Valjkovas nagrinėja aibę A, sudarytą iš plokštumos taškų, turinčių svorius, kurie tolygiai ir proporcingai didėja, didėjant tų taškų atstumams nuo taško E (žiūr. 400 pav.), turinčio nulinę masę ir nulinį svorį.



400 pav.

Pavyzdžiui, taškų A, B ir C, kaip priklausančių vienam ir tam pačiam apskritimui, turinčiam centrą taške E ir spindulį, lygų 8, svoriai yra lygūs, ir todėl šiuo atžvilgiu galima teigti, jog $A=B=C$, kur ženklas „=“ panaudotas kaip ekvivalentumo ženklas, reiškiantis atitinkamų taškų svorių lygybę.

Analogiškai, taškų F ir H, priklausančių kitam koncentriškam apskritimui, turinčiam spindulį, lygų 2 vienetais, svoriai taip pat yra lygūs, tačiau tie svoriai yra lygiai keturis kartus mažesni negu taškų A, B ar C svoriai.

Taško D, kurio atstumas nuo taško E yra lygus 6 vienetais, svorio santykis su taško A svoriu yra lygus $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, o su taško F svoriu – $\frac{6}{2} = 3$.

Pasirinkus tokius svorio matavimo vienetus, kad taško, nutolusio nuo taško E atstumu, lygiu 1, svoris būtų lygus vienam svorio vienetai, galima apskaičiuoti kiekvieno plokštumos, pavaizduotos 400 pav., taško svorį: taško svoris turės tiek svorio vienetų, kiek to taško atstumas nuo taško E turi ilgio vienetų.

Taip įsivedęs aibę A ir apibrėžęs jos elementus, knygutės [267] autorius įsiveda ir apibrėžia operaciją „ $\times$ “, leidžiančią kiekvienai aibės taškų a ir b porai rasti tašką c, atitinkantį a ir b „sandaugą“ $a \times b$ ir todėl tenkinantį lygybę $a \times b = c$. Tokia operacija K.I.Valjkovas pasirenka materialijų taškų svorio

centro koordinatėms x^* ir y^* nustatymo operaciją $x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$, $y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$, kur x_i ir y_i yra

materialijų taškų (x_i, y_i) , turinčių masės m_i koordinatės, o x^* ir y^* – visų duotųjų n taškų svorio centro koordinatės.

Kai $n=2$, tai $x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $y^* = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$, o kai $n=3$, tai $x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $y^* = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Iš fizikos kurso žinoma, kad svorio centro koordinatėms nustatymo operacija yra asociatyvi. Pavyzdžiui, $x_{1,2}^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $x_{(1,2),3}^* = \frac{(m_1 + m_2) \cdot x_{1,2}^* + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$. Tą patį

būtume gavę ir apskaičiuodami, naudodamiesi formule $x_{1,(2,3)}^* = \frac{m_1 x_1 + (m_2 + m_3) \cdot x_{2,3}^* + m_3 x_3}{m_1 + (m_2 + m_3)} =$

$= \frac{m_1 x_1 + (m_2 + m_3) \cdot \frac{m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_2 + m_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$. Analogiškus rezultatus gautume ir

apskaičiuodami y^* bei z^* , kai materialieji taškai su masėmis m_i būtų išsidėstę trimatėje erdvėje.

Taip apibrėžęs operaciją „ $\times$ “, knygutės [267] autorius, suranda, kad „sandaugą“ $A \times B$ atitinka taškas E, taškų A ir D, sandaugą atitinka taškas F, o taškų A ir C „sandaugą“ – taškas H, ką, naudojantis įsivestais apibrėžimais ir žymėjimais, galima užrašyti kaip $A \times B = E$, $A \times D = F$ ir $A \times C = H$.

Po to K. I. Valjkovas pareiškia, kad įvestosios aibės A elementai ir įsivestoji operacija „ $\times$ “ tenkina visas penkias sistemos Nr.3 aksiomas. Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, jog toks K. I. Valjkovo teiginys yra visiškai teisingas.

Iš tikrųjų, įsivestoji aibė A yra uždara operacijos „ $\times$ “ atžvilgiu, nes plokštumoje kiekvienos dviejų materialijų taškų poros svorio centras yra toje pačioje plokštumoje ant atkarpos, jungiančios tą taškų porą, arčiau to taško, kurio masė yra didesnė. Taigi, pirmosios aksiomos reikalavimas yra tenkinamas.

Tenkinamas ir penktosios aksiomos reikalavimas, nes kiekviena materialijų taškų pora visada turi vieną ir tik vieną svorio centrą, kadangi daugybos, sudėties ir dalybos operacijos, kuriomis naudojamos apskaičiuojant svorio centro koordinatės x^* ir y^* , yra vienaareikšmės, o trupmenų vardikliai – nelygūs nuliui.

Remdamasis tuo, kad svorio centro koordinatėms apskaičiavimo operacija, kaip tai žinoma iš fizikos, yra asociatyvi, K. I. Valjkovas pareiškia, jog tenkinami ir antrosios aksiomos reikalavimai.

Tenkinama ir trečioji aksioma, nes aibėje A egzistuoja neutralusis elementas e operacijos „ $\times$ “ atžvilgiu. Tokiu elementu yra taškas E, turintis masę, lygią 0, ir svorį – taip pat lygų nuliui. Todėl, kaip nesunku įsitikinti, naudojantis svorio centro koordinatėms apskaičiavimo formulėmis, $A \times E = A$, $E \times A = A$, $B \times E = B$, $E \times B = B$ ir t. t.

Nesunku įsitikinti, kad tenkinami ir ketvirtosios aksiomos reikalavimai, nes kiekvienam plokštumo taškui egzistuoja taško E atžvilgiu simetrinis jam taškas, kuris ir yra atvirkštinis jam elementas įsivestos operacijos „ $\times$ “, interpretuojamas kaip svorio centro nustatymo operacija, atžvilgiu.

Iš sąlygos, kad tenkinamos visos penkios sistemos Nr.3 aksiomos, privalėtų išplaukti, jog turėtų būti tenkinama ir iš tų aksiomų išvesta teorema $[(a \times b) = (a \times c)] \rightarrow (b = c)$, t. y. iš to, kad $A \times D = F$ ir $A \times C = H$ bei iš lygybės $F = H$, turėtų išplaukti lygybė $D = C$.

Tačiau, kaip tai matyti iš 400 pav., akivaizdu, kad lygybė $D = C$ šiuo atveju neteisinga, nes taškai D ir C, priklausydami skirtingų spindulių koncentriniais apskritimams, privalo turėti skirtingus svorius ir todėl negali būti tuo atžvilgiu ekvivalentūs. O tai jau leidžia K. I. Valjkovui triumfuoti, nes gautas rezultatas paneigia Burbaki teiginį, kad bet kokie elementai, nepriklausomai nuo jų prigimties, jei tenkina algebrinės struktūros aksiomas, būtinai privalo tenkinti ir visas iš tų aksiomų išplaukiančias teoremas. Bet štai aibės A taškai tenkina visas aksiomas, o iš jų išplaukiančios teoremos juk netenkina!

Tačiau K. I. Valjkovas triumfuoja per anksti ir ieško šio paradokso priežasčių ne ten, kur jos iš tikrųjų yra. Šitas „paradoksas“ gautas ne todėl, kad iš formalių aksiomų išvestos formalios teoremos teisingumas ar neteisingumas priklauso nuo elementų ir operacijos $\times$ „prigimties“ bei nuo to, kaip joje interpretuojama lygybė „=“, bet todėl, kad knygutės [267] autorius ir vėl nepastebėjo, kad jo sukonstruotoji sistema vis dėlto ir vėl netenkina kai kurių nagrinėjamos aksiomų sistemos Nr.3 aksiomų.

K. I. Valjkovas padarė klaidą, nepagrįstai perkeldamas svorio centrą koordinatinių apskaičiavimo operacijos asociatyvumo savybę, nustatytą tomis sąlygomis, kai materialijų taškų masės ir svoriai nepriklauso nuo jų padėties erdvėje (ir nesikeičia materialiajam taškui pereinant iš vienos vietos į kitą), į savo sukonstruotą situaciją, kurioje materialijų taškų svoriai priklauso nuo jų atstumo iki taško E ir kinta, materialiajam taškui tolstant nuo taško E arba artėjant prie jo.

Nesunku įrodyti, kad sistemoje, kurią sukonstravo knygutės [267] autorius ir kuri šioje mokymo priemonėje pavaizduota 400 pav., svorio centro nustatymo operacija jau nėra asociatyvi. Neasociatyvumo priežastis šiuo atveju nėra tokia jau akivaizdi. Todėl jos, matyt, ir nesugebėjo (o gal nepanoro?) pastebėti K. I. Valjkovas. O glūdi ta priežastis toje aplinkybėje, kad K. I. Valjkovo sukonstruotoje sistemoje dviejų materialijų taškų svorio centro svoris jau nėra lygus tų taškų svorių sumai, o priklauso nuo to centro atstumo iki taško E ir visuomet yra mažesnis už minėtąją sumą. Ryšium su tuo K. I. Valjkovo sukonstruotoje sistemoje trijų taškų svorio centro nustatymo rezultatas jau priklauso nuo to, kokia tvarka jis bus apskaičiuojamas. Pailiustruosiu šį teiginį konkrečiu pavyzdžiu, apskaičiuodamas materialijų taškų A, D ir B (žiūr. 400 pav.) svorio centro ordinatę y^* , priimdamas, kad taškų masės ir svoriai išreikšti tokiais vienetais kaip masės kilogramai kg ir svorio kilogramai kG. Tuomet taškų masių ir svorių reikšmės turės po tiek pat vienetų. Kaip jau buvome nustatę, aptardami 400 pav., taško A svoris yra lygus 8 kG, taško D svoris – 6 kG ir taško B svoris – 8 kG. Taško A ordinatė yra (-8) , taško D ordinatė lygi 6, o taško B ordinatė y_B yra lygi 8 ilgio vienetams.

$$\text{Jei turėtume situaciją, kurioje buvo išvestos formulės } x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \text{ ir}$$

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \text{ t. y. situaciją, kurioje materialijų taškų masės ir svoriai yra pastovūs dydžiai,}$$

nesikeičiantys, taškam keičiant savo padėtį erdvėje, tai taškų A, D ir B svorio centro ordinatės $y_{A,D,B}^*$ apskaičiavimo rezultatas tikrai nepriklausytų nuo to, kokia tvarka vyko tas apskaičiavimas, kai taškai A, D ir B buvo grupuojami poromis.

$$\text{Pavyzdžiui, } y_{A,D}^* = \frac{m_A \cdot y_A + m_D \cdot y_D}{m_A + m_D} = \frac{8 \cdot (-8) + 6 \cdot 6}{8 + 6} = \frac{-64 + 36}{14} = -\frac{28}{14} = -2, \text{ kas sutaptų}$$

su rezultatu, kad materialijų taškų A ir D svorio centras yra taške F. Laikydami, kad dabar du materialius taškus A ir D gali atstovauti vienas materialus taškas, turintis ordinatę (-2) ir masę $8+6=14$,

$$\text{rasime to taško ir taško B svorio centrą } y_{(A,D),B}^* = \frac{14 \cdot (-2) + 8 \cdot 8}{14 + 8} = \frac{36}{22} = \frac{18}{11}.$$

Jei būtume pradžioje suradę taškų D ir B svorio centro ordinatę $y_{D,B}^*$, tai būtume gavę $\frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 8}{6 + 8} = \frac{100}{14} = \frac{50}{7}$. Po to apskaičiuodami materialaus taško A ir taškus D ir B atstovaujančio materialaus taško, turinčio taškų D ir B masių sumą ir esančio jų svorio centre, svorio centro ordinatę

$y_{A,(D,B)}^*$, gautume $y_{A,(D,B)}^* = \frac{8 \cdot (-8) + 14 \cdot \frac{50}{7}}{8 + 14} = \frac{-64 + 100}{22} = \frac{36}{22} = \frac{18}{11}$, t. y. tą pačią centro ordinatės reikšmę.

Ją būtume gavę ir tuo atveju, jei būtume naudojęsi svorio centro koordinatžių apskaičiavimo formule iškart: $y_{A,D,B}^* = \frac{8 \cdot (-8) + 6 \cdot 6 + 8 \cdot 8}{8 + 6 + 8} = \frac{36}{22} = \frac{18}{11}$.

Tačiau visai kitą situaciją gaunama K. I. Valjkovo sukonstruotoje sistemoje, kurioje materialųjų taškų svoriai priklauso nuo jų atstumų iki taško E.