

381 pav.

Išnagrinėtasis pavyzdėlis taip pat rodo, kad kartais **loginė funkcija gali turėti ne vieną, o kelias MDNF.**

Mūsų nagrinėtuojų atveju jų yra dvi: $Y_1 = \bar{X}_1\bar{X}_0 \vee X_2X_1 \vee \bar{X}_2X_0$,
 $Y_2 = X_2\bar{X}_0 \vee X_1X_0 \vee \bar{X}_2\bar{X}_1$.

Geometrinis metodas turi tą trūkumą, kad juo galima naudotis, tik kai funkcijos argumentų skaičius $n \leq 3$.

Šis trūkumas įveikiamas modifikuojant geometrinį metodą ir gaunant iš jo taip vadinamąjį **Karno kortelių metodą**.

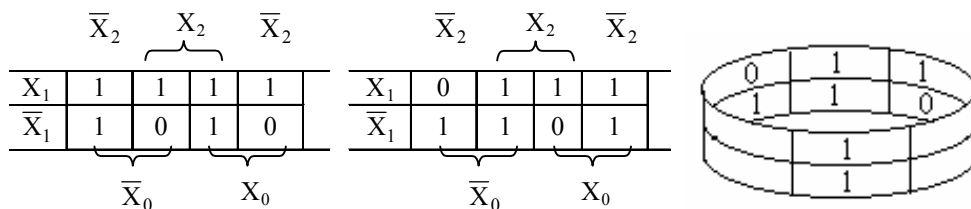
1.16.1.4.3. Karno kortelių metodas

Karno kortelėse n –mačio vienetinio kubo viršūnės vaizduojamos matricos langeliais, išdėstytais taip, kad gretimos viršūnės būtų atvaizduotos gretimais langeliais, t. y., kad, pereinant nuo n –mačio kubo prie Karno kortelės būtų išsaugotas gretimumo santykis.

Kadangi n –matis kubas turi 2^n viršūnių (žiūr. 1.9.1.1. skyrelį), tai Karno kortelė (Karno matrica) turi 2^n langelių, į kuriuos įrašomos funkcijos reikšmės atitinkamose n –mačio kubo viršūnėse.

Iš to, kas pasakyta apie Karno kortelę, išplaukia, jog **Karno kortelė – tai gana kompaktiška teiginių algebros funkcijos reikšmių lentelė, turinti 2^n langelių** (kai tuo tarpu mūsų įprastos lentelės, kuriomis mes iki šiol naudojome teiginių algebros funkcijų aprašymui, turi po $2^n(n+1)$ langelių), **išdėstytų taip, kad būtų išsaugotas gretimumo santykis ir kad pagal langelio padėtį lentelėje būtų galima nustatyti tą langelį atitinkančios n –mačio kubo viršūnės koordinačių reikšmes**. Patogumo dėlei tos reikšmės pažymimos Karno kortelės pakraščiuose, dalinant langelių aibę į dvi lygias ir nepriklausomas dalis, atitinkančias kiekvieną kintamąjį X_j ir jo neiginį $\bar{X}_j$.

382 pav. pavaizduotos dvi Karno lentelės: pirmoji priklauso tai funkcijai, kurią vaizduoja 379 pav. vienetinis kubas, antroji – tai funkcijai, kurią vaizduoja 380 pav. vienetinis kubas.



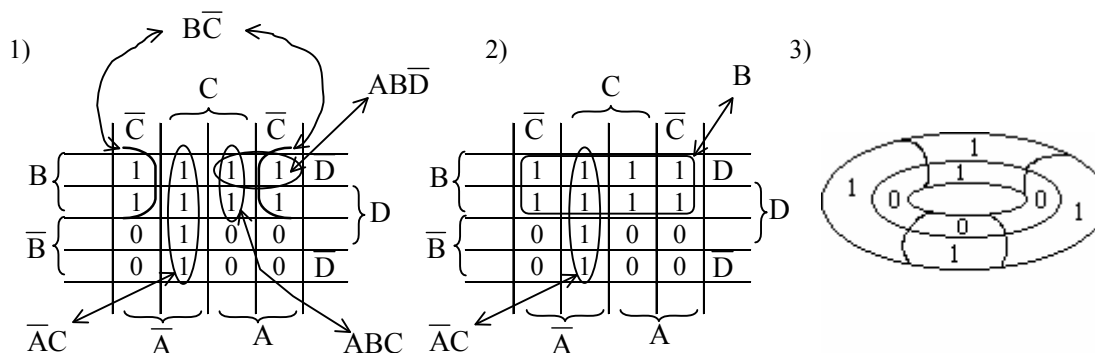
382 pav.

Tų Karno kortelių horizontalios linijos galuose yra pratęstos ir tie pratęsimai skirti kortelių galų suklijavimo atvaizdavimui. Tas suklijavimas reikalingas tam, kad būtų išsaugotas gretimumo santykis: trimatės kubo kiekviena viršūnė yra gretima trimis kitoms viršūnėms, todėl trimatės Karno lentelės kiekvienas langelis turi turėti tris

gretimus langelius. Suklijavus lentelės galus, gaunama cilindrinė lentelė, kuri ir pavaizduota 382 pav. Praktikoje lentelės galų suklijavimas yra tik išivaizduojamas, negaištant laiko klijavimams.

Keturmatį vienetinį kubą vaizduojanti Karno lentelė turės jau $2^4=16$ langelių, kurių kiekvienas privalo turėti po 4 gretimus langelius. Kad būtų išsaugotas gretimumo santykis, tokios lentelės galus teks suklijuoti ne tik sujungiant horizontalias, bet ir vertikalias linijas, suteikiant Karno kortelei toro pavidalą.

383 pav. pavaizduota: 1) mūsų jau nagrinėtos keturių argumentų A, B, C ir D loginės funkcijos $f(A, B, C, D) = ABC \vee \overline{AC} \vee \overline{BC} \vee AB\overline{D}$ Karno lentelė; 2) Karno lentelė, atitinkanti minimizavimo rezultatą – funkciją $f(A, B, C, D) = B \vee \overline{AC}$, o taip pat 3) tas lenteles atitinkantis toras.



383 pav.

Kai loginės funkcijos argumentų skaičius $n=5$, tai tokios funkcijos Karno lentelė, kurią sudaro $2^5=32$ langeliai, jau nebegali būti pavaizduota vienoje plokštumoje, net supjausčius ją per suklijavimo linijas, nes plokštumoje kvadratinis langelis negali turėti daugiau negu keturis gretimus tokio pat dydžio kvadratinis langelius. Todėl, kai $n=5$, tai Karno lentelę sudaro jau dvi lentelės po 16 langelių, sudėtos viena virš kitos, kitaip tariant, du gretimi torai. Tada kiekvienas langelis turės po keturis gretimus langelius vienoje plokštumoje ir dar vieną langelį, užimantį tokią pat padėtį kitoje Karno lentelėje, esančioje kitoje plokštumoje. Vaizduojant tokias Karno lenteles vienoje plokštumoje, jos patalpinamos viena šalia kitos, tačiau išivaizduojama, jog jos yra viena ant kitos.

Įdomu, ar nėra topologinio ryšio tarp tokių dviejų faktų:

1) keturmačio kubo „išsklotinė“ sudaro pilnai uždara paviršių – torą, kuriame nelieta vietos penktajam matavimui, ir, norint įvesti penktąjį matavimą, tenka kurti lygiagretų torą – antrąjį keturmatį „pasaulį“;

2) tas pasaulis, kuriame mes gyvename, gali turėti irgi tik keturis matavimus: tris – fizinei erdvei ir vieną – laikui; penktajam matavimui mūsų fiziniame pasaulyje tiesiog nėra vietos.

Ryšium su tuo iškyla klausimas: ar negalėtų lygiagrečiai su mūsų keturmačiu pasauliu egzistuoti kiti tokie pat uždari keturmačiai pasauliai, nesusisiekiantys vienas su kitu?

Tokie klausimai, žinoma, priklauso mokslinės fantastikos bei filosofijos sričiai ir sistemotyra jų kol kas nenagrinėja, tačiau nuo to jie nenustoja būti įdomūs. Kai kurie šiuolaikinės teorinės fizikos atstovai rimtai nagrinėja hipotetinius teorinius daugiamačius pasaulio modelius.

Kai $n=6$, tai Karno lentelė susideda iš $2^6=64$ langelių, sudarančių keturias lenteles po 16 langelių kiekvienoje, t. y. keturis torus, išdėstytus taip, kad kiekvienas toras turėtų po du gretimus.

Kai $n=7$, tai Karno lentelę sudaro 8 torai sujungti į torų cilindrą, panašiai kaip buvo tuo atveju, kai n buvo lygu 3 ir 8 langeliai buvo sujungti į cilindrą (žiūr. 382 pav.).

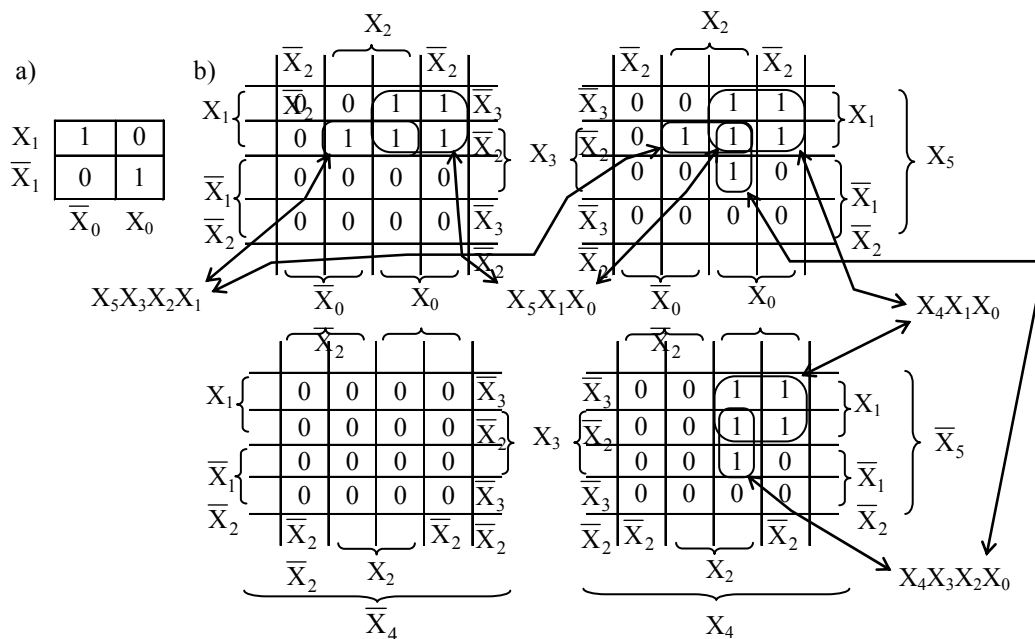
Kai $n=8$, tai Karno lentelę sudaro 16 pirmosios eilės torų, sujungtų į **antrosios eilės torą**.

Kai $n=9$, tai Karno lentelę sudaro 2 antrosios eilės torai, kai $n=10$ – keturi antrosios eilės torai, kai $n=11$ – 8 antrosios eilės torai, sujungti į torų cilindrą, kai $n=12$ – 16 antrosios eilės torų, sujungtų į vieną **trečiosios eilės torą**, ir t. t.

Karno lentelės langelių galima laikyti nulinės eilės toru, vaizduojančiu loginę funkciją, turinčią $n=0$ argumentų, t. y., loginę konstantą.

Pasinaudodami šiuo nulinės eilės toro apibrėžimu, galime sudaryti **Karno lentelės struktūros formulę**: teiginių algebros funkcijos, turinčios $n=4m+k$ argumentų, kur $k=0, 1, 2, 3$, o $m=0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, Karno lentelę sudaro 2^k gretimų m -sios eilės torų, kurių kiekvienas, kai $m>0$, susideda iš šešiolikos $(m-1)$ -osios eilės torų ir t. t., t. y. iš 2^{4m} nulinės eilės torų – Karno lentelės elementarių langelių, atitinkančių n -mačio kubo viršūnes. Visą Karno lentelę sudaro $2^{4m+k}=2^n$ langelių – nulinės eilės torų.

Pavyzdžiui, kai $n=2$, t. y., kai $n=4 \cdot 0 + 2$, tai Karno lentelę sudaro $2^k=2^2=4$ nulinės eilės gretimi torai, paprasčiau tariant, keturių gretimų langelių lentelė, o kai $n=6$, t. y. kai $n=4 \cdot 1 + 2$, tai Karno lentelę sudaro $2^k=2^2=4$ pirmosios eilės torai, kitaip tariant keturios gretimos lentelės po 16 langelių kiekviena. Abu šie atvejai parodyti 384 pav.



384 pav.

384^{a,c} pav. vaizduoja funkcijos $f(X_1, X_0) = X_1 \oplus X_2 = X_1 \bar{X}_0 \vee \bar{X}_1 X_0$ Karno kortelę, o 384^{b,c} pav. – Karno kortelę tokios funkcijos, kurios MDNF yra $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_4 X_1 X_0 \vee X_5 X_1 X_0 \vee X_4 X_3 X_2 X_0 \vee X_5 X_3 X_2 X_1$.

Šią funkciją 1952 m. pateikė Berkhartas (W.H.Burkhart) kaip pavyzdį funkcijos, iš kurios MDNF tiesiogiai jau neįmanoma gauti jos faktorizuotos formos (FF) $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = (X_1 X_0 \vee X_3 X_2) \wedge (X_4 X_0 \vee X_5 X_1)$. Tokių pavyzdžių egzistavimas rodo, jog **MDNF gavimą ne visada galima laikyti teiginių algebros funkcijų faktorizavimo etapu**, ir tai gerokai apsunkina faktorizavimo problemos sprendimą.

Naudojantis Karno kortelėmis, Bulio algebros funkcijų minimizavimas vykdomas, **stengiantis suklijuoti kuo daugiau gretimų langelių į stačiakampius, turinčius 2^p langelių**, kur $p=1, 2, 3, 4, \dots$ – yra sveikas skaičius, ne mažesnis už 1.

Suklijavę Karno lentelės, vaizduojančios n -matį kubą, du gretimus langelius ($p=1$), mes suklijuojame dvi gretimas n -mačio kubo viršūnes ir vietoj dviejų

konjunkcijų, susidedančių iš n raidžių* kiekviena, gauname vieną konjunkciją, susidedančią iš $(n-1)$ raidės. Vienos tokios operacijos dėka minimizuojamoje DNF raidžių skaičius sumažėja $(n+1)$ raide, o tą DNF realizuojančios schemos diodų skaičius sumažėja $2n+2-(n-1)-1=n+2$ diodais.

Suklijavę keturis gretimus langelius ($p=2$), mes suklijuojame 2 n -mačio kubo briaunas į vieną sieną, esančią dvimatėje plokštumoje, kitaip tariant, vietoje keturių konjunkcijų, turinčių po n raidžių, gauname vieną konjunkciją, turinčią $(n-2)$ raides. Diodų skaičius šią DNF realizuojančioje schemoje sumažėja $4n+4-(n-2)-1=3n+5$ diodais.

Suklijavę 8 gretimus langelius ($p=3$), mes suklijuojame dvi n -mačio kubo dvimates sienas į vieną trimatę sieną, kitaip tariant, vietoj 8 konjunkcijų, turinčių po n raidžių, gauname vieną konjunkciją, turinčią $n-3$ raides. Diodų skaičius sumažėja $8(n+1)-(n-3)-1=7n+10$ diodų.

Suklijavę 16 gretimų langelių ($p=4$), t. y. suklijavę visą pirmos eilės torą į n -mačio kubo keturmatę sieną, mes vietoj 16 konjunkcijų po n raidžių kiekviena, gauname vieną konjunkciją, turinčią $(n-4)$ raides. Sutaupytų diodų skaičius tampa lygus $16(n+1)-(n-4)-1=15n+19$.

Daugiau 16 langelių suklijuoti viename pirmos eilės tore nebeįmanoma, tačiau gali būti taip, kad gretimi langeliai yra kitame ar kituose toruose ir iš tokių langelių galima sudaryti „erdvinį stačiakampį“, turintį 32 langelius, ir iš kiekvienos konjunkcijos, turinčios po n raidžių, suklijuojant jas, eliminuoti po penkias raides, t. y. gauti vieną konjunkciją, turinčią $(n-5)$ raides. Toks suklijavimas leistų sutaupyti $32(n+1)-(n-5)-1=31n+36$ diodus.

Analogiškai galima elgtis, klijuojant po 64,128 ir t. t. (bendrai, po 2^p) ir n -mačio kubo gretimų viršūnių, gaunant vietoj 64,128 ir t. t. (bendrai 2^p) konjunkcijų, turinčių po n raidžių, vieną konjunkciją, turinčią po $(n-6)$, $(n-7)$ (bendrai, $n-p$) raidžių ir sutaupant $2^p(n+1)-(n-p+1)=(2^p-1)(n+1)+p$ diodų.

Tiesa, didėjant n ir p , „erdvinis stačiakampis“, sudarytas iš gretimų n -mačio kubo viršūnių, leidžiančių suklijuoti 2^p konjunkcijų į vieną, turinčią $n-p$ raidžių, darosi vis painesnis ir todėl, esant didelėms n reikšmėms, Karno kortelių metodas tampa nebepatogus ir praktiškai nebetaikomas. Tačiau, kol Bulio algebros funkcijų argumentų skaičius n yra 10 ribose (ar nedaug viršija šį skaičių), naudotis Karno kortelių metodu, minimizuojant Bulio algebros funkcijos „rankiniu būdu“, gana patogiu.

Pailiustruosiu tai konkrečiais pavyzdžiais.

Tarkime mums reikia rasti funkcijos $f(X_4, X_3, X_2, X_1) = \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1 \vee X_4 \overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1 \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1 \vee X_4 X_3 X_2 \overline{X}_1 \vee X_4 X_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1 \vee X_4 X_3 \overline{X}_2 X_1 \vee X_4 X_3 X_2 X_1 \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2 X_1 \vee X_4 \overline{X}_3 X_2 X_1 \vee X_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1 \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1$, kurios Karno kortelė pavaizduota 385^a pav.

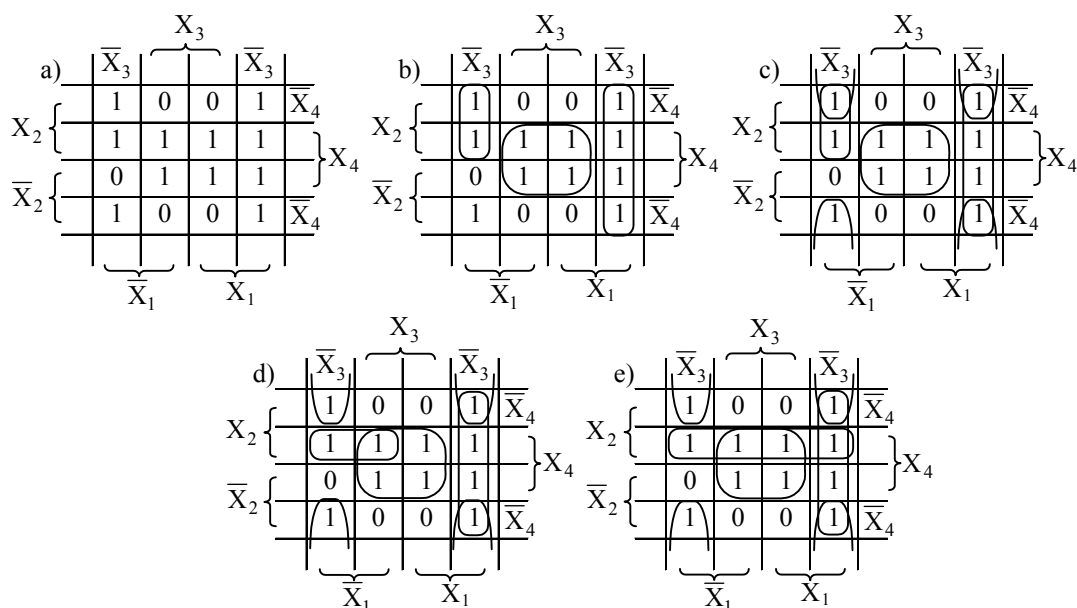
Nesunku iškart pastebėti, kad duotoje Karno lentelėje galima sudaryti du stačiakapius, turinčius po $2^2=4$ gretimus langelius ir vieną stačiakampį, turintį $2^1=2$ langelius (žiūr. 385^b pav.). Vienas langelis, atitinkantis keturmačio kubo viršūnę $\overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1 = 1$, lieka su niekuo nesuklijuotas. Gauname tokią nagrinėjamos funkcijos DNF: $\overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1 \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1 \vee X_4 X_3 \vee \overline{X}_3 X_1$.

Tačiau ši DNF, nors vietoj buvusių 44 raidžių turi jau tik 11 raidžių, dar nėra MDNF.

Atsižvelgdami į tai, kad nagrinėjamoji Karno lentelė yra pirmos eilės toras, matome, jog nesuklijuotoji viršūnė $\overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1 = 1$ turi dar tris gretimas „vienetines“ viršūnes: $\overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1 = 1$, $\overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2 X_1 = 1$, $\overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1 = 1$, kurios visos keturios kartu sudaro stačiakampį, turintį $2^2=4$ langelius

* Literas toliau vadinsime raidėmis, laikydami raidėmis ne tik elementarių teiginių žyminius kokios nors abėcėlės raidėmis, bet ir raides su brūkšniu viršuje, žyminčias elementarių teiginių neiginius.

ir todėl gali būti suklijuotos į vieną konjunkciją $\bar{X}_4\bar{X}_3=1$ – tą stačiakampį aprašančią lygtį. Tos suklijuojamos viršūnės parodytos 385^{„cc“} pav., kurį aprašo DNF $\bar{X}_4\bar{X}_3 \vee \bar{X}_3X_2\bar{X}_1 \vee X_4X_3 \vee \bar{X}_3X_1$. Tačiau ir ši DNF dar nėra MDNF, kaip nėra MDNF ir jai ekvivalenti DNF $\bar{X}_4\bar{X}_3 \vee X_4X_2\bar{X}_1 \vee X_4X_3 \vee \bar{X}_3X_1$, taip pat turinti 9 raides ir pavaizduota 385^{„d“} pav.



385 pav.

MDNF gausime, prijungę prie stačiakampio $X_4X_2\bar{X}_1=1$ dar dvi viršūnes, kaip parodyta 385^{„cc“} pav., ir gaudami stačiakampį $X_4X_2=1$, jungiantį jau ne dvi, o keturias kubo viršūnes.

Taigi, nagrinėjamos funkcijos MDNF yra funkcija $f(X_4, X_3, X_2, X_1) = \bar{X}_4\bar{X}_3 \vee X_4X_2 \vee X_4X_3 \vee \bar{X}_3X_1$, turinti tik 8 raides.

Iš šio pavyzdėlio skaitytojas turėtų padaryti sau išvadą, kad reikia stengtis jungti „vienetines“ viršūnes į **kiek galima didesnius stačiakampius, turinčius po 2^p langelių**.

Nesunku pastebėti, kad mūsų nagrinėjamo atveju gautoji MDNF nėra vienintelė, nes yra ir kitų būdų padengti visas „vienetines“ viršūnes mažiausiu didžiausių stačiakampių, turinčių po 2^p langelių, skaičiumi. Kitas šios funkcijos MDNF (o jų yra keturios) surasime šiek tiek vėliau. Šiai MDNF realizuoti prireiktų tik 12 diodų, kai tuo tarpu nagrinėjamos funkcijos TDNF realizacijai būtų prireikę $11 \times 4 + 11 = 55$ diodų. Taigi, surandant MDNF, reikalingų diodų skaičių pavyko sumažinti daugiau nei 4,5 karto.

Kitas minimizavimo, naudojantis Karno kortelėmis, pavyzdėlis – tai funkcijos $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1) = \bar{X}_5\bar{X}_4\bar{X}_3X_2\bar{X}_1 \vee \bar{X}_5\bar{X}_4\bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1 \vee \bar{X}_5X_4X_3\bar{X}_2\bar{X}_1 \vee \bar{X}_5X_4X_3X_2\bar{X}_1 \vee \bar{X}_5\bar{X}_4X_3X_2X_1 \vee \bar{X}_5X_4X_3X_2X_1 \vee \bar{X}_5\bar{X}_4\bar{X}_3X_2X_1 \vee \bar{X}_5\bar{X}_4\bar{X}_3\bar{X}_2X_1 \vee X_5\bar{X}_4\bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1 \vee X_5\bar{X}_4\bar{X}_3X_2\bar{X}_1 \vee X_5\bar{X}_4\bar{X}_3X_2X_1 \vee X_5\bar{X}_4\bar{X}_3\bar{X}_2X_1 \vee X_5X_4X_3\bar{X}_2\bar{X}_1 \vee X_5X_4X_3X_2\bar{X}_1 \vee X_5X_4X_3X_2X_1$ MDNF paieška.

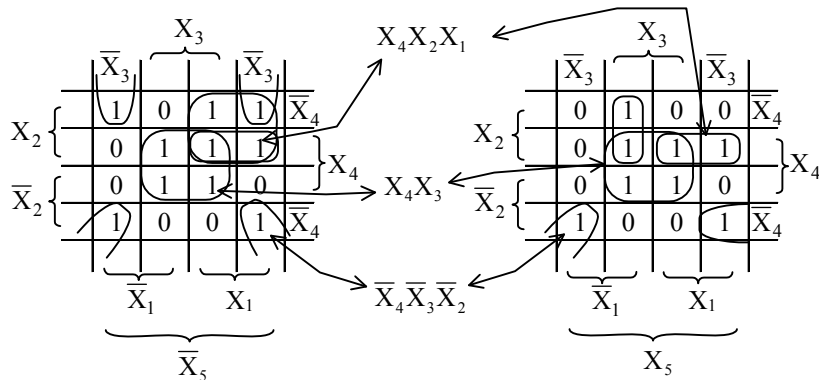
Šios funkcijos TDNF, turinčios 18 konjunkcijų po 5 raides kiekvienoje, realizavimui prireiktų $18 \times 5 + 18 = 108$ diodų.

Kadangi šiuo atveju minimizuojamos funkcijos argumentų skaičius $n=5 > 4$, tai vieno pirmos eilės toro jau nebepakaks ir prireiks dviejų tokių torų.

Jie pavaizduoti 386 pav.

Antrasis toras skiriasi nuo pirmojo tik koordinatės X_5 reikšme: antrajame tore $X_5=1$, o pirmajame $X_5=0$. Todėl jungdami pirmojo toro keturis vidurinius langelius jungiantį stačiakampį, aprašomą lygtimi $\bar{X}_5X_4X_3=1$, su antrojo toro analogišku stačiakampiu, aprašomu lygtimi $X_5X_4X_3=1$, gauname „erdvinį stačiakampį“, susidedantį iš 8 langelių ir aprašomą lygtimi $X_4X_3=1$, nes suklijavimo metu eliminuojasi kintamasis X_5 .

Analogiškai, jungdami pirmojo toro stačiakampį $\bar{X}_5 X_4 X_2 X_1 = 1$, susidedantį iš dviejų langelių, su antrojo analogišku stačiakampiu $X_5 X_4 X_2 X_1 = 1$, gauname „erdvinį stačiakampį“, susidedantį iš 4 langelių ir aprašomą lygtimi $X_4 X_2 X_1 = 1$.



386 pav.

Dar vieną „erdvinį stačiakampį“, susidedantį iš 4 langelių, sudaro penkiamačio kubo viršūnės $\bar{X}_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 \bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 = 1$, $X_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 \bar{X}_1 = 1$, $X_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 = 1$. Jas suklijuodami gauname konjunkciją $\bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 = 1$ (žiūr. 386 pav., kur parodyti visi trys čia paminėti „erdvinių stačiakampių“ suklijavimo rezultatai).

Kiti „vienetiniai“ nagrinėjamų torų langeliai jau nebesudaro „erdvinių stačiakampių“ ir yra jungiami kiekviename pirmos eilės tore į stačiakampius atskirai.

Pirmajame tore gauname du „plokščius“ stačiakampius po keturis langelius kiekviename, aprašomus lygtimis $\bar{X}_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 = 1$ ir $\bar{X}_5 X_2 X_1 = 1$, o antrajame tore – vieną plokščią stačiakampį, jungiantį du langelius ir aprašomą lygtimi $X_5 X_3 X_2 \bar{X}_1 = 1$.

Jungdami visus gautus rezultatus, sudarome nagrinėjamos funkcijos MDNF $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1) = X_4 X_3 \vee X_4 X_2 X_1 \vee \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_5 X_2 X_1 \vee X_5 X_3 X_2 \bar{X}_1$, kurios realizacijai prireiktų 24 diodų, t. y. 84 diodais mažiau, negu pradžioje.

Trečiuoju minimizavimo pavyzdžiu, naudojantis Karno kortelėmis, galėtų būti šešių argumentų funkcijos $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0)$ – mūsų jau minėto Berkhartho pavyzdžio (žiūr. 384 pav.) – MDNF sudarymas iš jos TDNF, susidedančios iš 15 vieneto konstituentų, kurios realizavimui būtų prireikę 105 diodų. Gautas MDNF realizavimui pakaktų 18 diodų, o šios funkcijos FF – tik 14 diodų.

Išnagrinėti pavyzdžiai rodo, kad Karno kortelių metodas yra gana patogus ir efektyvus Bulio algebros funkcijų „rankinio“ minimizavimo metodas, kai tų funkcijų argumentų skaičius n nėra labai didelis ir mums tenka operuoti su pirmos bei antros, na, dar ir trečios eilės torais. Esant dar didesnėms n reikšmėms, Karno lentelių metodo taikymas, kaip jau buvo minėta, tampa gana painus ir praktiškai jau nebepatogus. Todėl tenka ieškoti metodų, kuriuos būtų nesunku kompiuterizuoti.

Tokių metodų pavyzdžiu galėtų būti JAV matematiko **Mak Klaskio** (Mc Cluskey) pasiūlytas **sutrumpintos DNF (SDNF) gavimo metodas**, papildytas **Kvaino (Quine W. V.) implikantinės matricos** arba **algebriniu Petriko (Petrick S. R.) metodu**, leidžiančiais iš SDNF gauti visas „akligatvines“ DNF, tame tarpe ir MDNF.

Norint aprašyti šiuos metodus, teks įsivesti kai kurias naujas sąvokas.

1.16.1.4.4. Implikantės. Paprastos implikantės. Sutrumpintoji DNF (SDNF)

Teiginių algebros funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **implikante** vadinama tokia teiginių algebros funkcija $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, kuri yra ne silpnesnė už $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, t. y. tokia funkcija, kuriai galioja lygybė

$$\{\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n [\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow f(X_1, X_2, \dots, X_n)]\} = 1.$$

Tai reiškia, kad tuo atveju, kai $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ yra funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ implikantė, tai bet kuriam tų funkcijų argumentų rinkiniui galioja teiginiai: 1) „jei $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)=1$, tai ir $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ būtinai lygi 1“; 2) „jei $f(X_1, X_2, \dots, X_n)=0$, tai ir $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ būtinai lygi 0“. Kitaip tariant, **funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ implikantės $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ Karno kortelės vienetukai (kai tokių yra) dengia kai kuriuos (o gali būti ir visus) funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ Karno kortelės vienetukus ir negali dengti nė vieno jos nulinio.**

Funkcijos $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **paprasta implikante** $\Psi(X_1, \dots, X_n)$ vadinama tokia jos implikantė $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, kuri tenkina šias sąlygas:

1) yra elementari konjunkcija, t. y. kai kurių (kartais gali būti ir visų) funkcijos $f(X_1, \dots, X_n)$ argumentų X_j bei jų neiginių $\bar{X}_j$ loginė sandauga;

2) toje elementarioje konjunkcijoje jau neįmanoma išbraukti nė vieno teiginio (ar jo neiginio), nepažeidžiant implikantės implikantiškumo, t. y., nepadarrant jos jau nebe implikante.

Pavyzdžiui, funkcija $f_1(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1) = X_1 X_0 \vee X_5 X_1 X_0$ yra mūsų anksčiau nagrinėtos Berkhartho funkcijos (žiūr. 384^b pav.) implikantė, tačiau nėra jos paprastoji implikantė, nes netenkina pirmosios sąlygos – nėra elementarioji konjunkcija.

Funkcija $f_2(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_5 X_4 X_3 X_2 X_1 X_0$ taip pat yra Berkhartho funkcijos implikantė, tačiau nėra jos paprastoji implikantė, nes netenkina antrosios sąlygos: iš šios elementarios konjunkcijos galima išbraukti, pavyzdžiui, X_5 , arba X_3 , arba X_2 , arba bet kurią jų porą, ar net visus tris tuos teiginius, o likusi elementari konjunkcija vis tiek išlieka Berkhartho funkcijos implikante.

Funkcija $f_3(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1) = \bar{X}_5 \bar{X}_4 X_3 X_2 X_1 X_0$ nėra Berkhartho funkcijos paprastoji implikantė, nes ši elementari konjunkcija iš viso nėra Berkhartho funkcijos implikantė.

Funkcijos $f_4(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_5 X_3 X_2 X_1$, $f_5(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_4 X_3 X_2 X_0$, $f_6(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_5 X_1 X_0$ ir $f_7(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_4 X_1 X_0$ yra Berkhartho funkcijos paprastos implikantės, nes kiekviena iš jų yra tos funkcijos implikantė ir tuo pačiu – elementari konjunkcija, iš kurios negali būti išbraukta nė viena raidė, nepažeidžiant implikantiškumo.

Palieku skaitytojui įsitikinti, kad Berkhartho funkcija jokių kitų paprastų implikančių (apart jau minėtųjų f_4, f_5, f_6 ir f_7) neturi ir turėti negali.

Funkcijos $f(X_1, \dots, X_n)$ **sutrumpinta DNF (SDNF)** vadinama **visų** jos paprastųjų implikančių disjunkcija.

Pavyzdžiui, funkcija $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_4 X_1 X_0 \vee X_5 X_1 X_0 \vee X_4 X_3 X_2 X_0 \vee X_5 X_3 X_2 X_1$ yra Berkhartho funkcijos SDNF, o kartu ir jos MDNF.

Ne visada funkcijos SDNF yra jos MDNF, nes kartais **SDNF sudėtyje gali būti tokių paprastų implikančių, kurias galima išbraukti, nepažeidžiant nei implikantiškumo nei net funkcinio ekvivalentiškumo**. Taip gali atsitikti tada, kai SDNF turi tokių paprastų implikančių, kurių visi vienetukai persidengia kitomis paprastomis implikantėmis.

Pavyzdžiui, funkcijos $f(X_4, X_3, X_2, X_1)$, kurios Karno kortelė pavaizduota 385^a pav., SDNF sudaro visų jos paprastų implikančių disjunkcija $\bar{X}_3 X_2 \vee \bar{X}_4 \bar{X}_3 \vee X_4 X_3 \vee X_4 X_2 \vee X_4 X_1 \vee \bar{X}_3 X_1$. Šioje disjunkcijoje, nepažeidžiant jos funkcinio ekvivalentiškumo, galima išbraukti, pavyzdžiui, paprastas implikantes $\bar{X}_3 X_2$ ir $X_4 X_1$, nes implikantės $\bar{X}_3 X_2$ dengiamas „vienetines“ keturmačio kubo viršūnės $\bar{X}_4 \bar{X}_3 X_2 \bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 = 1$, $X_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 = 1$ ir $X_4 \bar{X}_3 X_2 \bar{X}_1 = 1$ dengia paprastos implikantės $\bar{X}_4 \bar{X}_3$ ir $X_4 X_2$, o implikantės $X_4 X_1$ dengiamas „vienetines“ viršūnės $X_4 X_3 X_2 X_1 = 1$, $X_4 X_3 \bar{X}_2 X_1 = 1$, $X_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 = 1$ ir $X_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 = 1$ dengia paprastos implikantės $X_4 X_3$ ir $\bar{X}_3 X_1$. Todėl šios funkcijos MDNF turi mažiau paprastų implikančių negu jos SDNF.

1.16.1.4.5. Nepilnas elementarus suklijavimas. Kvaino algoritmas SDNF gauti

Nepilnu elementariu suklijavimu vadinsime tokį dviejų elementarių konjunkcijų suklijavimą, kada po suklijavimo paliekami ir tos operacijos operandai –

suklijuojamos konjunkcijos. Tai reiškia, kad nepilno elementaraus suklijavimo operacijos rezultatas yra disjunkcija, susidedanti iš 1) pirmojo suklijavimo operacijos operando, 2) antrojo operacijos operando, 3) pilno suklijavimo rezultato – konjunkcijos, turinčios viena raidė mažiau negu tos operacijos operandai (kartais pilno suklijavimo operacijos rezultatu gali būti ne tik konjunkcija, bet ir viena raidė be neiginio ar su neiginiu).

Nepilno suklijavimo pavyzdys: $\overline{A}BC \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{A}B \vee \overline{A}\overline{B}C \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Vykdam nepilną suklijavimą nebūtina perrašyti suklijuojamas konjunkcijas. Galima tiesiog prirašyti jų pilno suklijavimo rezultatą, neišbraukiant tuo rezultatu absorbuojamų suklijavimo operacijų operandų.

Dabar jau galim atsakyti į klausimą: 1) kaip surasti Bulio algebros funkcijos SDNF ir 2) kaip iš SDNF gauti MDNF.

Į pirmąjį klausimą atsakymą duoda **Kvaino teorema**: jei, naudojantis funkcijos TDNF, įvykdyti visus galimus nepilnus elementarius suklijavimus (klijuojant vieneto konstituentės ir tų klijavimų rezultate atsirandančias elementarias konjunkcijas), o po to – visas galimas absorbcijas, tai rezultate gausime tos funkcijos SDNF.

Su šios teoremos įrodymu skaitytojas gali susipažinti šios mokymo priemonės autoriaus knygoje [100] (žiūr. teoremą 1.2.9.6.2.1). Ten jis gali susipažinti ir su **Kvaino algoritmu**, realizuojančiu SDNF gavimą, remiantis minėtąja teorema.

Pailiustruosiu SDNF gavimą konkrečiu pavyzdžiu.

Rasime funkcijos, kurios Karno kortelė pavaizduota 385^a pav., SDNF, naudodamiesi Kvaino algoritmu.

Pradžioje įvykdysime visus galimus nepilnus suklijavimus, žymėdami žvaigždutėmis tas konjunkcijas, kurias pavyko suklijuoti. Gausime:

$$\begin{aligned} f(X_4, X_3, X_2, X_1) = & \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1^* \vee X_4 \overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1^* \vee X_4 X_3 X_2 \overline{X}_1^* \vee \\ & \vee X_4 X_3 \overline{X}_2 \overline{X}_1^* \vee X_4 X_3 \overline{X}_2 X_1^* \vee X_4 X_3 X_2 X_1^* \vee X_4 \overline{X}_3 X_2 X_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2 X_1^* \vee \\ & \vee X_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2^* \vee \overline{X}_3 X_2 \overline{X}_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 X_2^* \vee \\ & \vee X_4 X_2 \overline{X}_1^* \vee X_4 X_2 X_1^* \vee X_4 \overline{X}_3 X_2^* \vee X_4 X_3 \overline{X}_1^* \vee X_4 X_3 X_2^* \vee X_4 X_3 \overline{X}_2 \vee X_4 \overline{X}_2 X_1^* \vee \\ & \vee X_4 X_3 X_1^* \vee \overline{X}_3 X_2 X_1^* \vee X_4 \overline{X}_3 X_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 X_1^* \vee \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1^* \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \vee \overline{X}_4 \overline{X}_3 \vee \overline{X}_3 X_2 \vee \\ & \vee \overline{X}_3 X_2 \vee X_4 X_2 \vee X_4 X_2 \vee X_4 X_1 \vee X_4 X_1 \vee X_4 X_3 \vee X_4 X_3 \vee \vee \overline{X}_3 X_1 \vee \overline{X}_3 X_1. \end{aligned}$$

Įvykdę visas galimas absorbcijas, gausime SDNF: $f(X_4, X_3, X_2, X_1) = \overline{X}_4 \overline{X}_3 \vee \overline{X}_3 X_2 \vee X_4 X_2 \vee X_4 X_1 \vee X_4 X_3 \vee \overline{X}_3 X_1$, sutampančią su jau anksčiau gautu rezultatu.

1.16.1.4.6. Kvaino implikantinės matricos metodas MDNF gauti

Atsakymą į antrąjį klausimą, kaip iš SDNF gauti MDNF, duoda **Kvaino implikantinės matricos metodas**.

Kvaino implikantine matrica vadinama matrica, turinti tiek eilučių, kiek funkcijos SDNF turi paprastų implikančių, ir tiek stulpelių, kiek funkcijos TDNF turi vieneto konstituentių. Tos matricos langeliuose įrašomos žvaigždutės, kai atitinkamos eilutės paprastoji implikantė savo vienetuokais dengia atitinkamo stulpelio vieneto konstituentę, t. y., kai to langelio eilutės paprastoji implikantė adsorbuoja to langelio stulpelio vieneto konstituentę. Kai to nėra, Kvaino implikantės matricos langelis paliekamas tuščias.

Sudarysime ką tik minėtosios funkcijos Kvaino implikantinę matricą. Ji turės 11 stulpelių ir 6 eilutes (žiūr. 320 lentelę).

320. lentelė

p.i \ v.k	$\overline{X}_4\overline{X}_3\overline{X}_2\overline{X}_1$	$\overline{X}_4\overline{X}_3X_2\overline{X}_1$	$X_4\overline{X}_3X_2\overline{X}_1$	$X_4X_3X_2\overline{X}_1$	$X_4X_3\overline{X}_2\overline{X}_1$
$\vee$ $\overline{X}_4\overline{X}_3$	*	*			
$\overline{X}_3X_2$		*	*		
X_4X_2			*	*	
X_4X_1					
$\vee$ X_4X_3				*	*
$\overline{X}_3X_1$					
	$\vee$	$\vee$		$\vee$	$\vee$

p.i \ v.k	$X_4X_3\overline{X}_2X_1$	$X_4X_3X_2X_1$	$X_4\overline{X}_3X_2X_1$	$\overline{X}_4\overline{X}_3X_2X_1$	$X_4\overline{X}_3\overline{X}_2X_1$	$\overline{X}_4\overline{X}_3\overline{X}_2X_1$
$\overline{X}_4\overline{X}_3$				*		*
$\overline{X}_3X_2$			*	*		
X_4X_2		*	*			
X_4X_1	*	*	*		*	
X_4X_3	*	*				
$\overline{X}_3X_1$			*	*	*	*
	$\vee$	$\vee$		$\vee$		$\vee$

Kadangi kiekviena „vienetinė“ n – mačio (šiuo atveju – keturmačio) kubo viršūnė turi būti padengta į MDNF (o taip pat – ir į SDNF) sudėtį įeinančiomis paprastomis implikantėmis, tai kiekviename Kvaino implikantinės matricos stulpelyje turi būti nors po vieną žvaigždutę.

Gali būti tokių stulpelių, kuriuose yra po keletą žvaigždutė. Tuo atveju galimi keli „vienetinių“ viršūnių padengimo variantai. Tačiau gali būti ir tokių stulpelių, kuriuose yra tik po vieną žvaigždutę. Tai reiškia, jog atitinkamą „vienetinę“ kubo viršūnę gali padengti tik viena paprastoji implikantė. Tokios implikantės, jei jų yra, sudaro būtinąją **MDNF branduolį**, t. y. tos implikantės būtinai bus visuose galimuose MDNF variantuose.

Mūsų nagrinėjamu atveju MDNF branduolį sudaro dvi paprastos implikantės: $\overline{X}_4\overline{X}_3$ ir X_4X_3 . Pažymėsime tas implikantes „varnelėmis“ „ $\vee$ “. Tokiais pat ženklais pažymėsime ir jų dengiamus stulpelius (žiūr. 320-ą lentelę).

Ištraukdami tas dvi paprastas implikantes į MDNF sudėtį, mes padengsime 8 stulpelius, t. y. aštuonias „vienetines“ kubo viršūnes. Liks nepadengtos dar 3 viršūnės. Jų padengimui pasirinksiame tokias dar neįtrauktas į MDNF sudėtį paprastas implikantes, kad gautume visas 11 kubo „vienetinių“ viršūnių padengiančią DNF, turinčią minimalų raidžių (be neiginių ar su neiginiais – nesvarbu) skaičių. Tai ir bus MDNF.

Kad padengtume kubo viršūnę $X_4\overline{X}_3X_2\overline{X}_1 = 1$, atitinkančią trečiąjį matricos stulpelį, galime pasielgti dvejopai: 1) arba pasirinkti implikantę $\overline{X}_3X_2$, 2) arba – implikantę X_4X_2 . Kiekviena iš jų padengs ir dar nepadengtąjį aštuntąjį stulpelį, atitinkantį „vienetinę“ viršūnę $X_4\overline{X}_3X_2X_1 = 1$, tačiau nė viena iš jų nepadengs dar nepadengto dešimtojo stulpelio, atitinkančio „vienetinę“ viršūnę $X_4\overline{X}_3X_2X_1 = 1$.

Tą viršūnę dengia paprastos implikantės X_4X_1 ir $\overline{X}_3X_1$. Kiekviena iš jų dengia dar ir branduolio implikantėmis nepadengtąjį aštuntąjį viršūnę, tačiau nė viena iš jų nedengia trečiosios viršūnės. Todėl norint padengti visas (11) „vienetines“ kubo viršūnes, branduolį tenka papildyti dviem paprastom implikantėm, paimant vieną (bet kurią, nes abi turi po vienodą raidžių skaičių) iš poros, dengiančių trečiąją viršūnę (t. y. arba $\overline{X}_3X_2$, arba X_4X_2), ir vieną iš poros, dengiančių dešimtąją viršūnę (t. y. arba X_4X_1 , arba $\overline{X}_3X_1$).

Taigi, galimi 4 variantai MDNF:

- 1) $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee X_4X_3 \vee \overline{X}_3X_2 \vee X_4X_1$,
- 2) $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee X_4X_3 \vee \overline{X}_3X_2 \vee \overline{X}_3X_1$,
- 3) $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee X_4X_3 \vee X_4X_2 \vee X_4X_1$,
- 4) $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee X_4X_3 \vee X_4X_2 \vee \overline{X}_3X_1$.

Paskutinis variantas sutampa su anksčiau (Karno kortelių metodu) gautu variantu. Antrąjį variantą būtume galėję gauti, jei 385^{ac} pav. būtų suklijavę stačiakampiai $\overline{X}_3X_2\overline{X}_1 = 1$ su stačiakampiu $\overline{X}_3X_2X_1 = 1$, priklausančiu stačiakampiui $\overline{X}_3X_1 = 1$. Palieku skaitytojui nustatyti, kaip reikėjo sujungti į stačiakampius 385^{ac} pav. Karno kortelės vienetikus, kad būtų gautas pirmasis ir trečiasis MDNF variantai.

1.16.1.4.7. Algebrinis Petriko metodas

Kvaino implikatinės matricos metodą galima papildyti taip vadinamu **algebriniu Petriko metodu**.

Toks papildymas ypatingai naudingas, kai implikantinė matrica yra didelė ir galima sudaryti daug n -mačio kubo viršūnių padengimo variantų, tarp kurių atrinkti minimalius darosi ne taip jau paprasta.

Naudojantis algebriniu Petriko metodu, paprastosios implikantės interpretuojamos kaip tam tikri elementarūs teiginiai $A, B, C, D, \dots$ ir, naudojantis šiais žymėjimais, matematinės logikos formule aprašoma visų matricos stulpelių padengimo sąlyga: jei atitinkamo stulpelio viršūnę dengia kelios paprastos implikantės, tai sudaroma tų implikančių žymenų disjunkcija, reiškianti, kad stulpelio viršūnę gali padengti ta arba kita implikantė, po to sudaroma visų tų disjunkcijų, aprašančių kiekvieno stulpelio padengimo sąlygą, konjunkcija, nes juk reikia padengti kiekvieną stulpelį, ir tokiu būdu gautoji KNF pertvarkoma į DNF, kurioje ir išrenkami tie variantai, kurie atitinka minimalius visų stulpelių padengimus.

Pailiustruosiu Petriko metodo taikymą mūsų sudarytajai Kvaino implikantinei matricai (žiūr. 320-ją lentelę).

Pažymėsiu paprastas implikantes eilės tvarka (nuo viršaus žemyn) raidėmis A, B, C, D, E, F .

Kadangi pirmąjį stulpelį dengia tik viena paprastoji implikantė $\overline{X}_4\overline{X}_3$ pažymėta raide A , tai to stulpelio padengimo sąlyga yra A .

Antrojo stulpelio padengimo sąlyga yra $A \vee B$. Trečiojo stulpelio: $B \vee C$, ketvirtąjo: $C \vee E$, penktojo E , šeštojo: $D \vee E$, septintojo: $C \vee D \vee E$, aštuntojo $B \vee C \vee D \vee F$, devintojo: $A \vee B \vee F$, dešimtojo: $D \vee F$, vienuoliktojo: $A \vee F$.

Visų stulpelių padengimo sąlyga:

$$A(A \vee B)(B \vee C)(C \vee E)E(D \vee E)(C \vee D \vee E)(B \vee C \vee D \vee F)(A \vee B \vee F)(D \vee F)(A \vee F).$$

Gautąją KNF pertvarkome į DNF, logiškai sudauginami loginius dauginamuosius (disjunkcijas ir pavienes raides). Gauname: $ACDE \vee ABDE \vee ACEF \vee ABEF$. Tai reiškia, kad galimi keturi nepriklausomi padengimo variantai:

1) į pirmąjį variantą turi įeiti paprastosios implikantės A, C, D ir E , t. y. gauname DNF: $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee X_4X_2 \vee X_4X_1 \vee X_4X_3$;

2) į antrąjį variantą turi įeiti paprastosios implikantės A, B, D ir E , t. y. gauname DNF: $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee \overline{X}_3X_2 \vee X_4X_1 \vee X_4X_3$;

3) į trečiąjį variantą turi įeiti paprastosios implikantės A, C, E ir F , t. y. gauname DNF: $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee \overline{X}_3X_2 \vee X_4X_3 \vee \overline{X}_3X_1$;

4) į ketvirtąjį variantą turi įeiti paprastosios implikantės A, B, E ir F , t. y. gauname DNF: $\overline{X}_4\overline{X}_3 \vee \overline{X}_3X_2 \vee X_4X_1 \vee \overline{X}_3X_1$;

Kadangi visos šios KNF turi po vienodą raidžių skaičių, tai visos keturios yra MDNF. Kaip matome, jos sutampa su anksčiau gautų 4 MDNF formulėmis.

Petriko metodas leidžia gauti ne tik MDNF, bet ir visas DNF, sudarytas iš paprastųjų implikančių ir dengiančias visas „vienetines“ viršūnes. Tarp tų DNF, aišku, bus ir MDNF.

Norint gauti visas tas DNF, pakanka, pervedant KNF, aprašančią visų stulpelių dengimo sąlygą, į DNF, nepaprastinti (t. y. neabsorbuoti) atsirandančių konjunkcijų, išrašant galutiniame rezultate visų skirtingų konjunkcijų disjunkciją.

Mūsų nagrinėjamu atveju būtume gavę disjunkciją: $ABCDE \vee ABCDEF \vee ACDE \vee ACDEF \vee ABDE \vee ABDEF \vee ABCEF \vee ACEF \vee ABEF$, kurioje riebesniu šriftu išskirtos konjunkcijos atitinka minimalius perdengimus – mūsų jau anksčiau gautas MDNF. Visos kitos konjunkcijos atitinka

disjunkcijas, sudarytas iš paprastųjų implikančių, dengiančias visas „vienetines“ viršūnes, tačiau ne minimaliu būdu.

1.16.1.4.8. Kvaino algoritmo patobulinimas. Mak Klaskio metodas

Galima patobulinti ir SDNF gavimo algoritmą, sumažinant palyginimų skaičių, vykdant nepilnus suklijavimus ir absorbcijas Kvaino algoritme, bei palengvinant ir pagreitinant pačius palyginimus.

Tai galima padaryti, pakeičiant vieneto konstituentės jų numeriais i , įvedant vieneto konstituentės indekso sąvoką ir įrodant Mak–Klaskio teoremas apie elementarių konjunkcijų klijavimosi požymius.

Vieneto konstituentės $\bigwedge_{j=0}^{n-1} x_j^{\alpha_{ij}}$ **numeris** i , kur α_{ij} yra kintamojo X_j reikšmė natūraliai sutvarkytos (išrikiuotos) reikšmių lentelės i -joje eilutėje, **sutampa su eilutės numeriu ir apskaičiuojamas, naudojantis formule** $i = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} 2^j$.

Pavyzdžiui, vieneto konstituentės $X_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 X_0$ numeris $i = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$. Dvejetainėje sistemoje tas numeris užrašomas taip: $i = 10011_2$.

Įvedus vieneto konstituentės numerį, funkcijos TDNF galime atvaizduoti tų jos vieneto konstituentių, kurios atitinka funkcijos reikšmę, lygią 1, numerių rinkiniu – numerių disjunkcija. Kitaip tariant, **funkcijos TDNF galima atvaizduoti n -mačio kubo „vienetinių“ viršūnių numerių disjunkcija, numeruojant kubo viršūnes atitinkamų vieneto konstituentių numeriais i .**

Pavyzdžiui, mūsų jau nagrinėtosios Berkharto funkcijos $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0)$, kurios reikšmių Karno kortelė pavaizduota 384 pav., tobuloji disjunkcinė normalioji forma (TDNF) gali būti atvaizduota ne tik formule $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = X_5 \bar{X}_4 X_3 X_2 X_1 \bar{X}_0 \vee X_5 \bar{X}_4 X_3 X_2 X_1 X_0 \vee X_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 X_0 \vee X_5 \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee X_5 \bar{X}_4 X_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee X_5 X_4 X_3 X_2 X_1 \bar{X}_0 \vee X_5 X_4 X_3 X_2 X_1 X_0 \vee X_5 X_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 X_0 \vee X_5 X_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee X_5 X_4 X_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 X_3 X_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 X_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 X_3 X_2 \bar{X}_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 X_3 \bar{X}_2 \bar{X}_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 \bar{X}_1 X_0 \vee \bar{X}_5 X_4 X_3 X_2 \bar{X}_1 X_0$, bet ir formule $(101110 \vee 101111 \vee 100111 \vee 100011 \vee 101011 \vee 111110 \vee 111111 \vee 110111 \vee 110011 \vee 111011 \vee 010111 \vee 011111 \vee 011101 \vee 011011 \vee 010011 \vee 111101)$.

Šią formulę kompaktiškiau galima užrašyti dešimtainėje sistemoje: $(46 \vee 47 \vee 39 \vee 35 \vee 43 \vee 62 \vee 63 \vee 55 \vee 51 \vee 59 \vee 23 \vee 31 \vee 29 \vee 27 \vee 19 \vee 61)$, arba dar kompaktiškiau: $f(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = \vee (19, 23, 27, 29, 31, 35, 39, 43, 46, 47, 51, 55, 59, 61, 62, 63)$.

Vieneto konstituentės indeksu k vadinamas vienetukų skaičius dvejetainėje vieneto konstituentės numerio išraiškoje.

Pavyzdžiui, vieneto konstituentės, turinčios numerį $i = 46$ indeksas $k = 4$, o vieneto konstituentės, turinčios numerį $i = 19$, indeksas $k = 3$.

Mak–Klaskio teoremos nusako būtinus ir pakankamus dviejų elementarių konjunkcijų suklijuojamumo požymius.

Pirmoji Mak–Klaskio teorema nusako Bulio algebros funkcijos **dviejų vieneto konstituentių suklijuojamumo būtiną ir pakankamą požymį**. Ši teorema formuluojama taip:

„Kad Bulio funkcijos dvi vieneto konstituentės būtų galima suklijuoti eliminuojant vieną raidę, būtina ir pakankama, kad būtų patenkintos dvi sąlygos:

1) tų konstituentų numerių skirtumas turi būti lygus 2^p , kur p – sveikasis neneigiamas skaičius;

2) didesniojo numerio indeksas turi būti lygiai vienetu didesnis už mažesniojo numerio indeksą.“

Pavyzdžiui, konstituentės, turinčios numerius 9 ir 1 gali būti suklijuotos, nes: 1) $9-1=8=2^3$, 2) numerio 9 indeksas 2 ir jis yra vienetu didesnis už 1 indeksą, kuris yra lygus 1. Kad šis teiginys yra teisingas, galima įsitikinti tiesiogiai: numerį 9 atitinka konstituentė $X_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0$, o numerį 1 – konstituentė $\bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0$; $X_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0 \vee \bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0 = \bar{X}_2\bar{X}_1X_0(X_3 \vee \bar{X}_3) = \bar{X}_2\bar{X}_1X_0$.

Konstituentės, turinčios numerius 9 ir 4, nors jų indeksai skiriasi vienetu, negali būti suklijuotos, nes $9-4=5$ – nėra sveikasis dvejetainis laipsnis.

Konstituentės, turinčios numerius 9 ir 5, taip pat negali būti suklijuotos, nors $9-5=4=2^2$, nes tų konstituentų indeksai vienodi (lygūs 2).

Konstituentės, turinčios numerius 9 ir 7, nors $9-7=2$ ir tų numerių konstituentės skiriasi 1, nes 9 indeksas yra 2, o 7 indeksas yra 3, suklijuotos būti negali. Priežastis – didesniojo numerio indeksas yra mažesnis už mažesniojo numerio indeksą. Kad šios konstituentės negali būti suklijuotos, galima įsitikinti tiesiogiai: numerį 9 atitinka konstituentė $X_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0$, o numerį 7 – konstituentė $\bar{X}_3X_2X_1X_0$; $X_3\bar{X}_2\bar{X}_1X_0 \vee \bar{X}_3X_2X_1X_0 = X_0(X_3\bar{X}_2\bar{X}_1 \vee \bar{X}_3X_2X_1) = X_0$ – konstituentės nesiklijuoja.

Šios ir kitų Mak–Klaskio teoremų įrodymą skaitytojas gali rasti šios mokymo priemonės autoriaus knygelėje [100], kur Bulio algebros funkcijų minimizavimo problemos aprašytos žymiai plačiau ir detaliau.

Remiantis pirmąja Mak–Klaskio teorema, minimizuojamos funkcijos konstituentės, turinčios vienodus indeksus, jungiamos į grupes ir išrikiuojamos tose grupėse numerių didėjimo tvarka, o po to pačios grupės išrikiuojamos indeksų didėjimo tvarka.

Tikrinant konstituentų suklijuojamumą, nebereikia konstituentų lyginti kiekvieną su kiekviena, o pakanka palyginti tik konstituentes, esančias gretimose grupėse, kurių indeksai skiriasi vienetu. Tikrinant belieka tik žiūrėti, ar žemiau esančios grupės konstituentės numeris yra didesnis už aukščiau esančios grupės konstituentės numerį sveiku dvejetainiu laipsniu ar ne, o tai žymiai palengvina ir pagreitina tikrinimą.

Jei konstituentės klijuojasi, tai suklijuojamus numerius pažymime žvaigždutėmis, o suklijavimo rezultatai išreikštą per mažesnįjį numerį ir numerių skirtumą, paimtą iš skliaustelių, užrašome į kitą stulpelį. Keičiantis mažesniojo numerio indeksui, gaunama kita rezultatų grupė. Grupės atskiriamos viena nuo kitos horizontaliais brūkšneliais.

Įvykdysime vieneto konstituentų suklijavimą Berkharto funkcijai (žiūr. 321-ą lentelę).

Gauti suklijavimo rezultatai vaizduoja konjunkcijas, gautas iš vieneto konstituentų, atitinkančių suklijuotas vieneto konstituentes su mažesniais numeriais, išbraukiant tose konstituentėse argumentus X_p (arba jų neiginius), kur p yra laipsnis, kuriuo reikia pakelti 2, kad gautume suklijuotų konstituentų numerių skirtumą.

Pavyzdžiui, 19(4) reiškia konjunkciją, kuri gaunama iš konstituentės $\bar{X}_5X_4\bar{X}_3\bar{X}_2X_1X_0$, turinčios numerį $i=19$, išbraukiant argumentą $\bar{X}_2$, nes $4=2^2$, t. y. $p=2$. Gauname konjunkciją $\bar{X}_5X_4\bar{X}_3X_1X_0$.

321. lentelė

k	i	Rezultatas
3	19*	19(4)
	35*	19(8)
	23*	19(32)
	27*	35(4)
	29*	35(8)
	39*	35(16)
	43*	23(8)
	46*	23(32)
	51*	27(4)
5	31*	27(32)
	47*	29(2)
	55*	29(32)
	59*	39(8)
	61*	39(16)
	62*	43(4)
6	63*	43(16)
		46(1)
		46(16)
		51(4)
		51(8)
		31(32)
		47(16)
		55(8)
		59(4)
		61(2)
		62(1)

Rezultatas 62(1) reiškia konjunkciją, kuri gaunama, išbraukiant iš konstituentės, turinčios numerį $i=62$, argumentą X_0 , nes $1=2^0$. Tokiu būdu gauname konjunkciją $X_5X_4X_3X_2X_1$.

Vieneto konstituenčių suklijavimo rezultate gautos konjunkcijos gali būti klijuojamos toliau (žiūr. 322-ją lentelę).

Jų suklijuojamumo būtina ir pakankamą sąlygą nusako **antroji Mak–Klaskio teorema**.

„Kad pirmojo suklijavimo rezultatai būtų suklijuojami, būtina ir pakanka, kad būtų tenkinamos dvi sąlygos:

1) pirmojo suklijavimo rezultatų skirtumai būtų vienodi, t. y. iš vieneto konstituenčių išbrauktos raidės būtų vienodos ir todėl konjunkcijos, kurias bandome suklijuoti, būtų sudarytos iš tų pačių raidžių;

2) pirmojo suklijavimo rezultatų mažesnieji vieneto konstituenčių numeriai būtų suklijuojami, t. y. tenkintų pirmosios Mak–Klaskio teoremos būtinus ir pakankamus reikalavimus.“

Antrasis šios teoremos reikalavimas galės būti tenkinamas tik tada, jei bus bandoma klijuoti konjunkcijas tik iš gretimų grupių, kadangi kiekvienoje grupėje mažesniųjų numerių indeksai bus vienodi, o gretimose – skirsis vienetu. Tai reiškia, jog ir antrojo klijavimo metu nereiks peržiūrinėti visas konjunkcijas, o tik tas, kurių mažesniųjų numerių indeksai

skiriasi vienetu.

Pratęsime Berkharto funkcijos DNF konjunkcijų klijavimą. Antrojo suklijavimo rezultatai (žiūr. 322-ją lentelę) turės jau du skirtumus. Kai kurie suklijavimo rezultatai gali kartotis, t. y. skirtis tik raidžių išbraukimo tvarka. Juos išbraukiame lengvu brūkšneliu.

Suklijuotus pirmojo suklijavimo rezultatus taip pat pažymime žvaigždutėmis, rašydami jas tik po vieną kartą nepriklausomai nuo to, keliuose suklijavimuose ta konjunkcija dalyvavo. Svarbu tik pažymėti, kad ji jau suklijuota.

Antrojo suklijavimo rezultatai – iš atitinkamų vieneto konstituenčių išbraukiant po dvi raides gautos konjunkcijos – gali būti ir toliau klijuojamos.

Jų suklijuojamumo būtiniais ir pakankamiems požymiams nusakyti galėtų būti suformuluota trečioji Mak–Klaskio teorema, tačiau racionaliau yra šiek tiek apibendrinti antrąją Mak–Klaskio teoremą ir suformuluoti (bei įrodyti) **apibendrintąją antrąją Mak–Klaskio teoremą**:

„Kad m-tojo suklijavimo rezultatai (kur $m=1, 2, \dots$) būtų suklijuojami, būtina ir pakanka, kad būtų tenkinamos šios dvi sąlygos:

1) m-tojo suklijavimo rezultatų visi m skirtumų turi sutapti, t. y. tie rezultatai turi būti konjunkcijos, turinčios po $n-m$ raidžių, kurios tose konjunkcijose turi būti atitinkamai vienodos ir gali skirtis tik neigimo buvimu ar nebuvimu;

2) m-jo suklijavimo rezultatų konstituenčių numeriai turi būti suklijuojami, t. y. turi tenkinti pirmosios Mak–Klaskio teoremos reikalavimus.“

Šis antrasis reikalavimas gali būti patenkintas tik tada, kada bandomi suklijuoti m-jo suklijavimo rezultatai priklausys gretimoms grupėms, kurių konstituenčių numerių indeksai skiriasi lygiai 1. Tai reiškia, jog bandant suklijuoti po m-jo suklijavimo gautas konjunkcijas, pakanka palyginti tik konjunkcijas iš gretimų

322. lentelė

Pirmojo suklijavimo rezultatas	Antrojo suklijavimo rezultatas
19(4)*	19(4,8)
19(8)*	19(4,32)
19(32)*	~~19(8,4)~~
35(4)*	19(8,32)
35(8)*	~~19(32,4)~~
35(16)*	~~19(32,8)~~
23(8)*	35(4,8)
23(32)*	35(4,16)
27(4)*	~~35(8,4)~~
27(32)*	35(8,16)
29(2)*	~~35(16,4)~~
29(32)*	~~35(16,8)~~
39(8)*	23(8,32)
39(16)*	~~23(32,8)~~
43(4)*	27(4,32)
43(16)*	~~27(32,4)~~
46(1)*	29(2,32)
46(16)*	~~29(32,2)~~
51(4)*	39(8,16)
51(8)*	~~39(16,8)~~
31(32)*	43(4,16)
47(16)*	~~43(16,4)~~
55(8)*	46(1,16)
59(4)*	~~46(16,1)~~
61(2)*	51(4,8)
62(1)*	~~51(8,4)~~

grupių neperžiūrinėjant visų kitų, kas kaip tik ir yra svarbiausias Mak–Klaskio metodo pranašumas.

Antras Mak–Klaskio metodo labai svarbus pranašumas – jį labai patogiu realizuoti kompiuteriu. Minimizuojant Bulio algebros funkcijas belieka tik įvesti į kompiuterį vieneto konstituentų, kurios atitinka minimizuojamos funkcijos vienetines reikšmes, numerius. Visa kita atlieka kompiuteris.

Patikrinsime ar galimas trečiasis, po to ketvirtasis ir t. t. suklijavimas, ieškant Berkhartho funkcijos SDNF. Išrašysime visas suklijavimo procedūras nuo pradžios ir iš eilės (žiūr. 323-ją lentelę).

Ketvirtojo suklijavimo nagrinėjamu atveju būti jau nebegali, nes po trečiojo suklijavimo liko tik viena grupė, kurioje konstituentų 19 ir 35 indeksai vienodi ir lygūs 3. Belieka išrinkti nesuklijuotas ir neabsorbuotas (t. y. nepažymėtas žvaigždutėmis) konjunkcijas ir sudaryti jų disjunkciją, kuri ir bus Berkhartho funkcijos SDNF.

Tarp tos funkcijos vieneto konstituentų, kaip matyti iš 323-osios lentelės, konjunkcijų, nepažymėtų žvaigždutėmis, nėra. Nėra jų ir tarp pirmojo suklijavimo rezultatų – konjunkcijų, turinčių po 5 raides. Tarp antrojo suklijavimo rezultatų – konjunkcijų, turinčių po 4 raides, – tokių jau pasitaiko. Tai konjunkcijos

$$29(2,32) = \overline{X}_5 X_4 X_3 X_2 \overline{X}_1 X_0 = X_4 X_3 X_2 X_0 \text{ ir } 46(1,16) = X_5 \overline{X}_4 X_3 X_2 X_1 \overline{X}_0 = \\ = X_5 X_3 X_2 X_1.$$

Nesuklijuoti (ir nepažymėti žvaigždutėmis) liko ir trečiojo suklijavimo rezultatai – konjunkcijos, turinčios po 3 raides: $19(4,8,32) = \overline{X}_5 X_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1 X_0 = \\ = X_4 X_1 X_0 \text{ ir } 35(4,8,16) = X_5 \overline{X}_4 \overline{X}_3 \overline{X}_2 X_1 X_0 = X_5 X_1 X_0.$

323. lentelė

k	i	Pirmasis rezultatas	Antrasis rezultatas	Trečiasis rezultatas
3	19*	19(4)*	19(4,8)*	19(4,8,32)
	35*	19(8)*	19(4,32)*	~~19(4,32,8)~~
4	23*	19(32)*	~~19(8,4)~~	~~19(8,32,4)~~
	27*	35(4)*	19(8,32)*	35(4,8,16)
	29*	35(8)*	~~19(32,4)~~	~~35(4,16,8)~~
	39*	35(16)*	~~19(32,8)~~	~~35(8,16,4)~~
	43*	23(8)*	35(4,8)*	
	46*	23(32)*	35(4,16)*	
	51*	27(4)*	~~35(8,4)~~	
5	31*	27(32)*	35(8,16)*	
	47*	29(2)*	~~35(16,4)~~	
	55*	29(32)*	~~35(16,8)~~	
	59*	39(8)*	23(8,32)*	
	61*	39(16)*	~~23(32,8)~~	
	62*	43(4)*	27(4,32)*	
...	...	...	...	...

...	...	...	...	...
6	63*	43(16)*	27(32,4)	
		46(1)*	29(2,32)	
		46(16)*	29(32,2)	
		51(4)*	39(8,16)*	
		51(8)*	39(16,8)	
		31(32)*	43(4,16)*	
		47(16)*	43(16,4)	
		55(8)*	46(1,16)	
		59(4)*	46(16,1)	
		61(2)*	51(4,8)*	
		62(1)*	51(8,4)	

Todėl Berkhartho funkcijos SDNF yra funkcija $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = [29(2,32)] \vee [46(1,16)] \vee [19(4,8,32)] \vee [35(4,8,16)] = X_4 X_3 X_2 X_0 \vee X_5 X_3 X_2 X_1 \vee X_4 X_1 X_0 \vee X_5 X_1 X_0$, kas sutampa su rezultatu, gautu naudojantis Karno lentelėmis.

324. lentelė

p.i.	v.k.	$\overline{X}_5 X_4$	$\overline{X}_5 \overline{X}_4$	$\overline{X}_3 X_2$	$\overline{X}_3 \overline{X}_2$	$X_3 X_2$	$X_3 \overline{X}_2$	$X_1 X_0$
		$\overline{X}_3 \overline{X}_2$	$\overline{X}_3 X_2$	$X_3 \overline{X}_2$	$X_3 X_2$	$\overline{X}_1 X_0$	$\overline{X}_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$
		$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$
✓	$X_4 X_3 X_2 X_0$				*	*		
✓	$X_5 X_3 X_2 X_1$							
✓	$X_4 X_1 X_0$	*	*	*		*		
✓	$X_5 X_1 X_0$						*	*
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

p.i.	v.k.	$X_5 \overline{X}_4$	$X_5 X_4$	$X_3 \overline{X}_2$	$X_3 X_2$	$\overline{X}_3 \overline{X}_2$	$\overline{X}_3 X_2$	$X_1 X_0$
		$X_3 \overline{X}_2$	$X_3 X_2$	$\overline{X}_1 X_0$	$\overline{X}_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$
		$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$	$X_1 \overline{X}_0$	$X_1 X_0$
✓	$X_4 X_3 X_2 X_0$					*		*
✓	$X_5 X_3 X_2 X_1$	*	*				*	*
✓	$X_4 X_1 X_0$			*	*	*		*
✓	$X_5 X_1 X_0$		*	*	*	*		*
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Norėdami iš SDNF gauti MDNF, sudarysime Kvaino implikantinę matricą (žiūr. 324-ją lentelę).

Kaip matome, MDNF branduolį sudaro visos keturios paprastosios implikantės, įeinančios į SDNF sudėtį. Todėl funkcijos MDNF sutampa su SDNF.

Tą patį rezultatą būtume gavę, jei būtume naudojęsi algebriniu Petriko metodu. Sužymėję paprastas implikantes eilės tvarka (iš viršaus žemyn raidėmis A, B, C ir D, būtume gavę tokią stulpelių padengimo sąlygomis lygtį: $CCCA(A \vee C)DDDB(B \vee D)(C \vee D)(C \vee D)(C \vee D)AB(A \vee B \vee C \vee D)=1$, t. y. lygtį $ABCD(A \vee C)(B \vee D)(C \vee D)(A \vee B \vee C \vee D)=1$, kurią pervedę į DNF formą, gautume $ABCD=1$. O tai reiškia, kad į MDNF sudėtį būtinai įeis visos keturios paprastosios implikantės.

Kai Mak–Klaskio metode vietoj vieneto konstituentų naudojamės jų numeriais, tai ir Kvaino implikantinę matricą galima sudaryti naudojantis numeriais (žiūr. 325 lentelę).

325. lentelė

	p.i. \ v.k.	19	23	27	29	31	35	39	43	46	47	51	55	59	61	62	63
A	29(2,32)				*	*									*		*
B	46(1,16)									*	*					*	*
C	19(4,8,32)	*	*	*		*						*	*	*			*
D	35(4,8,16)						*	*	*		*	*	*	*			*

Vieneto konstituentų numerius, kuriuos dengia paprastoji implikantė, surasti labai nesunku: kiekviena paprastoji implikantė dengia vieneto konstituentę, kurios numeris sutampa su vieneto konstituentės mažiausiu numeriu, užrašytu paprastosios implikantės žymėjimo pradžioje, o taip pat visas tas vieneto konstituentes, kurių numeriai gaunami iš mažiausiojo vieneto konstituentės numerio, pridėdant prie jo kiekvieną iš skirtumų, užrašytų skliausteliuose, bei kiekvieną tų skirtumų sumų kombinaciją.

Pavyzdžiui, paprastoji implikantė 29(2,32) dengia vieneto konstituentes, turinčias numerius: 29, $29+2=31$, $29+32=61$, $29+2+32=63$, t. y. keturias kubo viršūnes.

Keturias kubo viršūnes (46, 47, 62 ir 63) dengia ir paprastoji implikantė 46(1,16).

Paprastoji implikantė 19(4,8,32) dengia 8 kubo viršūnes: 19, $19+4=23$, $19+8=27$, $19+4+8=31$, $19+32=5$, $19+32+4=55$, $19+32+8=59$ ir $19+32+8+4=63$.

8 viršūnes dengia ir implikantė 35(4,8,16): 35, $35+4=39$, $35+8=43$, $35+4+8=47$, $35+16=51$, $35+16+4=55$, $35+16+8=59$ ir $35+16+8+7=63$.

Tie numeriai ir pažymėti žvaigždutėmis 325-ojoje lentelėje, kuri sutampa su 324-ąja lentele.

Pavyzdžiui, kaip, naudojantis Mak–Klaskio metodu, surandamos Bulio algebros funkcijų SDNF, o iš jų, naudojantis Kvaino implikantinės matricos bei Petriko metodu, – MDNF, galima rasti jau minėtoje knygelėje [100].

1.16.1.4.9. MKNF gavimo metodai

Toje pačioje knygelėje aprašyti ir MKNF gavimo metodai: euristiciniai, neapibrėžtųjų koeficientų bei minimizacinių kortelių, geometrinių ir Karno kortelių, Kvaino, Kvaino implikantinės matricos bei Petriko metodai. Jie yra panašūs į mūsų čia aprašytus metodus ir gali būti gauti iš jų, naudojantis **dualumo principu**, galiojančiu Bulio algebroje. Naudojantis šiuo principu, galima pereiti nuo DNF prie KNF ir atvirkščiai. Pakanka konjunkcijos ženklus „ $\wedge$ “ pakeisti disjunkcijos ženklais „ $\vee$ “, o disjunkcijos ženklus – konjunkcijos ženklais, teiginius – jų neigimais, o neiginius – jų neigimais, t. y. teiginiais be neigimo, vienetukus pakeisti nuliais, o nulius vienetukais.

Todėl, ieškant MKNF, pavyzdžiui, Karno kortelių metodu, stačiakampiai, susidedantys iš 2^p langelių, sudarinėjami ne iš langelių, kuriuose įrašyti vienetukai, o iš langelių, kuriuose įrašyti nuliai.

Pavyzdžiui, funkcijos, kurios Karno lentelė pavaizduota 385^a pav., SKNF ir MKNF sudarys tik dvi paprastos implikantės (t. y. elementarios disjunkcijos, esančios dualūs paprastų implikančių – elementarių konjunkcijų – analogai): $X_4 \vee \bar{X}_3$ ir $\bar{X}_4 \vee X_3 \vee X_2 \vee X_1$. Todėl tos funkcijos MKNF $(X_4 \vee \bar{X}_3) \wedge (\bar{X}_4 \vee X_3 \vee X_2 \vee X_1)$ bus sudaryta tik iš 6 raidžių ir jos realizavimui prireiks tik 8 diodų, kai tuo tarpu tos pačios funkcijos MDNF, kurių galėjo būti net keturi variantai, buvo sudarytos iš 8

raidžių ir kiekvienos jų realizavimui reikėjo po 12 diodų. Taigi šiuo atveju naudingiau naudotis MKNF, o ne MDNF. Kitais atvejais gali atsitikti taip, kad naudingiau naudotis MDNF, o ne MKNF.

Pavyzdžiui, jei būtume ieškoję Berkharto funkcijos MKNF, tai būtume gavę, kad $f(X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0) = (X_5 \vee X_4)(X_5 \vee X_0)(X_4 \vee X_1)(X_3 \vee X_1)(X_3 \vee X_0)(X_1 \vee X_0) \wedge (X_2 \vee X_1)(X_2 \vee X_0)$. Į šios MKNF sudėtį įeina 16 raidžių ir realizacijai reikia 24 diodų, kai tuo tarpu tos funkcijos MDNF, kaip jau esame gavę, sudaro 14 raidžių ir jos realizacijai reikia tik 18 diodų, t. y. 6 diodais mažiau.

Yra ir tokių funkcijų, kurių MDNF ir MKNF turi po vienodą raidžių skaičių ir kurių realizacijai reikia vienodo diodų skaičiaus. Pavyzdžiui, funkcijos $y = X_1 \oplus X_2$ MKNF ir MDNF turi vienodą raidžių skaičių: $X_1 \oplus X_2 = \overline{X}_1 X_2 \vee X_1 \overline{X}_2$ ir $X_1 \oplus X_2 = (X_1 \vee X_2)(\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2)$. Kiekvienos jų realizacijai reikia 6 diodų.

Todėl, ieškant minimalių funkcijos formų DNF ir KNF klasėje, tenka surasti ir MDNF ir MKNF ir po to išsirinkti iš jų geriausią (jei jos turi ne po vienodą raidžių skaičių ir jų realizacijai reikia nevienodo diodų skaičiaus).

Minėtoje knygutėje [100] aprašyti ir kiti MDNF ir MKNF suradimo algoritmai (Bleiko–Poreckio, Nelsono), kurių mes čia jau nebenagrinėsime.

Paminėsime tik nepilnai apibrėžtų teiginių algebros funkcijų minimizavimo ir tokių funkcijų realizavimo schemų sudarymo ypatumus.

1.16.1.4.10. Teiginių algebros dalinių funkcijų minimizavimo metodai

Nepilnai apibrėžtomis, arba dalinėmis teiginių algebros funkcijomis vadinamos tokios funkcijos, kurių reikšmės griežtai apibrėžtos ne visiems galimiems tų funkcijų argumentų reikšmių rinkiniams, t. y. tokios teiginių algebros funkcijos, kurių reikšmės, esant kai kurioms tų funkcijų argumentų reikšmėms gali būti kokios nori. Praktikoje tokios funkcijos atsiranda tada, kai ne visi logiškai galimi funkcijų argumentų reikšmių rinkiniai yra fiziškai realizuojami arba leistini. Tokiais atvejais loginės funkcijos reikšmė, esant tokioms nerealizuojamoms arba neleistinoms argumentų reikšmėms, gali būti kokios nori ir todėl atsiranda **papildoma galimybė, minimizuojant tokią funkciją, dar labiau supaprastinti jos schemą**, lyginant su tuo atveju, kai panaši funkcija griežtai apibrėžta.

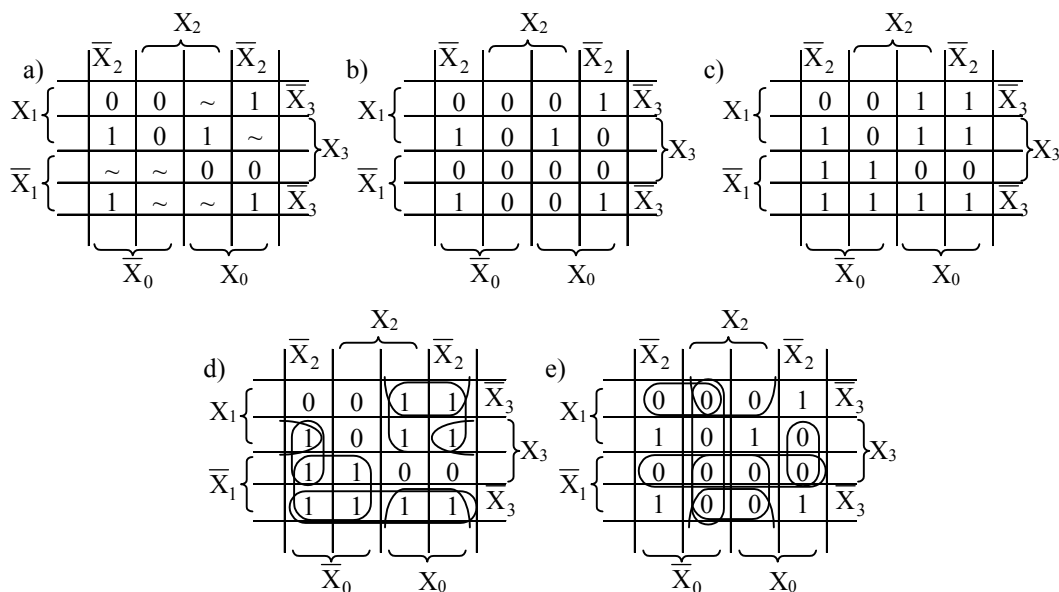
Minimizuojant dalinę loginę funkciją $f(x_{n-1}, \dots, x_0)$, nagrinėjamos dvi funkcijos: 1) $f_0(x_{n-1}, \dots, x_0)$ – **nulinis dalinės funkcijos papildymas**, kuris gaunamas iš dalinės funkcijos, priimant, kad neapibrėžtose situacijose dalinės funkcijos reikšmė tampa lygi 0; 2) $f_1(x_{n-1}, \dots, x_0)$ – **vienetinis dalinės funkcijos papildymas**, kuris gaunamas iš dalinės funkcijos, priimant, kad neapibrėžtose situacijose dalinės funkcijos reikšmė tampa lygi vienetui.

Ieškant dalinės funkcijos MDNF, pradžioje surandama vienetinio jos papildymo $f_1(x_{n-1}, \dots, x_0)$ SDNF, o po to – tos SDNF paprastomis implikantėmis stengiamasi minimaliu būdu padengti visus nulio dalinės funkcijos papildymo $f_0(x_{n-1}, \dots, x_0)$ vieneto konstituentės. Tuo tikslu sudaroma Kvaino implikantinė matrica, kurios eilutes sudaro $f_1(x_{n-1}, \dots, x_0)$ SDNF paprastųjų implikančių eilutės, o stulpelius – $f_0(x_{n-1}, \dots, x_0)$ TDNF vieneto konstituentės.

Ieškant dalinės funkcijos MKNF, surandama $f_0(x_{n-1}, \dots, x_0)$ SKNF ir po to tos SKNF paprastomis implikantėmis stengiamasi minimaliai padengti funkcijos $f_1(x_{n-1}, \dots, x_0)$ nulio konstituentės, sudarant Kvaino implikantinę matricą, kurios eilutės – nulio papildymo funkcijos $f_0(x_{n-1}, \dots, x_0)$ SKNF paprastos implikantės, o stulpeliai – vienetinio papildymo funkcijos $f_1(x_{n-1}, \dots, x_0)$ nulio konstituentės.

Gautos MDNF ir MKNF lyginamos ir išsirenkama ta forma, kuri turi mažiau raidžių.

Pailiustruosiu dalinių teiginių algebros funkcijų minimizavimo procesą konkrečiu pavyzdžiu, kuriame dalinės funkcijos $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ Karno kortelėje neapibrėžtos reikšmės pažymėtos ženkleliais „~“ (žiūr. 387^{a,c} pav.).



387 pav.

387^{b,c} pav. pavaizduota tos funkcijos nulinio papildymo $f_0(x_3, x_2, x_1, x_0)$ Karno kortelė, o 387^{a,c} pav. – vienetinio papildymo $f_1(x_3, x_2, x_1, x_0)$ Karno kortelė.

387^{d,e} pav. pavaizduota vienetinio papildymo funkcijos $f_1(x_3, x_2, x_1, x_0)$ SDNF Karno kortelė, iš kurios matyti, jog tos funkcijos SDNF yra 6 paprastųjų implikančių disjunkcija $\bar{X}_3\bar{X}_1 \vee \bar{X}_1\bar{X}_0 \vee X_1X_0 \vee \bar{X}_3X_0 \vee X_3\bar{X}_2\bar{X}_0 \vee X_3\bar{X}_2X_1$. Funkcijos $f_1(x_3, x_2, x_1, x_0)$ MDNF (jū yra ne viena) turi po 9 raides ir jų realizacijai prireiktų 13 diodų.

326-oji lentelė vaizduoja Kvaino implikantinę matricą, sudarytą dalinės funkcijos MDNF paieškai.

326. lentelė

		$\vee$		$\vee$	
$f_1 \setminus f_0$		$\bar{X}_3\bar{X}_2\bar{X}_1\bar{X}_0$	$X_3\bar{X}_2X_1\bar{X}_0$	$X_3X_2X_1X_0$	$\bar{X}_3\bar{X}_2X_1X_0$
$\vee$	$\bar{X}_3\bar{X}_1$	*			*
	$\bar{X}_1\bar{X}_0$				*
$\vee$	X_1X_0			*	*
	$\bar{X}_3X_0$			*	*
	$X_3\bar{X}_2\bar{X}_0$		*		
	$X_3\bar{X}_2X_1$		*		

Dalinės funkcijos $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ MDNF branduolį sudaro paprastos implikantės $\bar{X}_3\bar{X}_1$ ir X_1X_0 . Jos padengia funkcijos $f_0(x_3, x_2, x_1, x_0)$ keturis vienetinius stulpelius. Nepadengtas lieka tik stulpelis $X_3\bar{X}_2X_1\bar{X}_0$, kurį gali dengti bet kuri iš dviejų paprastų implikančių: $X_3\bar{X}_2\bar{X}_0$ ir $X_3\bar{X}_2X_1$. Todėl dalinė funkcija $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ turi dvi MDNF: 1) $\bar{X}_3\bar{X}_1 \vee X_1X_0 \vee X_3\bar{X}_2\bar{X}_0$ arba 2) $\bar{X}_3\bar{X}_1 \vee X_1X_0 \vee X_3\bar{X}_2X_1$. Abi MDNF turi po 7 raides ir jų realizacijai reikia po 10 diodų kiekvienai. Tai yra mažiau negu 9 raides ir 13 diodų, kurių reikia funkcijos $f_1(x_3, x_2, x_1, x_0)$ MDNF.

387^e pav. vaizduoja nulinio papildymo funkcijos $f_0(x_3, x_2, x_1, x_0)$ SKNF, susidedančią iš 6 paprastųjų implikancijų ir sudarančią jų konjunkciją $(X_3 \vee \bar{X}_2) \cdot (\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1) \cdot (\bar{X}_2 \vee X_1) \cdot (\bar{X}_2 \vee X_0) \wedge$

$\wedge (X_3 \vee \bar{X}_1 \vee X_0) \cdot (\bar{X}_3 \vee X_2 \vee \bar{X}_0)$. Ši funkcija turi vieną MKNF, susidarančią iš 5 paprastųjų implicienčių: $(X_3 \vee \bar{X}_2) \cdot (\bar{X}_3 \vee X_1) \cdot (\bar{X}_2 \vee X_0) \cdot (X_3 \vee \bar{X}_1 \vee X_0) \cdot (\bar{X}_3 \vee X_2 \vee \bar{X}_0)$. Ją sudaro 12 raidžių ir jos realizavimui prireiktų 17 diodų.

Dalinės funkcijos MKNF paieškai sudarysime Kvaino implicientinę lentelę (žiūr. 327-ją lentelę), kurios eilutės atitiks nulinio papildymo funkcijos $f_0(x_3, x_2, x_1, x_0)$ paprastas implicientes, o stulpeliai – vienetinio papildymo funkcijos $f_1(x_3, x_2, x_1, x_0)$ nulinio konstituentės.

327. lentelė

$f_0 \setminus f_1$	$X_3 \vee X_2 \vee \bar{X}_1 \vee X_0$	$X_3 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \vee X_0$	$\bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 \vee X_0$	$\bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 \vee X_1 \vee \bar{X}_0$	$\bar{X}_3 \vee X_2 \vee X_1 \vee \bar{X}_0$
$X_3 \vee \bar{X}_2$		*			
$\bar{X}_3 \vee X_1$				*	*
$\bar{X}_2 \vee X_0$		⊗	⊗		
$\bar{X}_2 \vee X_1$				*	
$X_3 \vee \bar{X}_1 \vee X_0$	⊗	⊗			
$\bar{X}_3 \vee X_2 \vee \bar{X}_0$					*

Dalinės funkcijos SKNF branduolį sudaro dvi paprastosios implimentės: $X_3 \vee \bar{X}_1 \vee X_0$ ir $\bar{X}_2 \vee X_0$. Jos padengia 3 stulpelius. Likusius du stulpelius galima padengti dviem būdais. Vienas iš tų būdų yra minimalus. Tai padengimas viena implimente $\bar{X}_3 \vee X_1$. Todėl ši dalinė funkcija turi tik vieną MKNF, susidedančią iš 3 paprastųjų implicienčių: $(\bar{X}_2 \vee X_0) \cdot (X_3 \vee \bar{X}_1 \vee X_0) \cdot (\bar{X}_3 \vee X_1)$. Į jos sudėtį įeina 7 raidės ir jos realizavimui reikėtų 10 diodų.

Lyginami dalinės funkcijos MKNF su jos MDNF, matome, kad jos visos trys funkcijos turi vienodą sudėtingumą, todėl galima teigti, kad nagrinėjamos dalinės funkcijos minimali išraiška DNF ir KNF klasėje gali būti tokia:

- 1) $\bar{X}_3 X_1 \vee X_1 X_0 \vee X_3 \bar{X}_2 \bar{X}_0$;
- 2) $\bar{X}_3 \bar{X}_1 \vee X_1 X_0 \vee X_3 \bar{X}_2 X_1$;
- 3) $(\bar{X}_2 \vee X_0) \cdot (X_3 \vee \bar{X}_1 \vee X_0) \cdot (\bar{X}_3 \vee X_1)$.

Pirmosios funkcijos Karno kortelė parodyta 388^a pav., antrosios – 388^b pav., trečiosios – 388^c pav.

		X_2				
		$\bar{X}_2$		$\bar{X}_2$		$\bar{X}_3$
X_1		0	0	1	1	
		1	0	1	1	
$\bar{X}_1$		1	0	0	0	
		1	1	1	1	$\bar{X}_3$
		$\bar{X}_0$		X_0		

		X_2				
		$\bar{X}_2$		$\bar{X}_2$		$\bar{X}_3$
X_1		0	0	1	1	
		1	0	1	1	
$\bar{X}_1$		0	0	0	0	
		1	1	1		$\bar{X}_3$
		$\bar{X}_0$		X_0		

		X_2				
		$\bar{X}_2$		$\bar{X}_2$		$\bar{X}_3$
X_1		0	0	1	0	
		1	0	1	1	
$\bar{X}_1$		0	0	0	0	
		1	0	1	1	$\bar{X}_3$
		$\bar{X}_0$		X_0		

388 pav.

Lyginami šias korteles su 387^a pav. Karno kortele, pastebime, kad minimizuojant duotąją dalinę Bulio algebros funkciją, neapibrėžtą funkcijos reikšmę keturmačio kubo viršūnėse $\bar{X}_3 X_2 X_1 X_0 = 1$, $X_3 \bar{X}_2 X_1 X_0 = 1$ ir $\bar{X}_3 X_2 \bar{X}_1 X_0 = 1$ visais atvejais tikslinga keisti į 1, o viršūnėje $X_3 X_2 \bar{X}_1 \bar{X}_0 = 1$ – į 0. Kitose dviejose viršūnėse, kuriose funkcijos reikšmė taip pat neapibrėžta, vienais atvejais neapibrėžtą reikšmę reikia keisti į 1, kitais – į 0.

1.16.1.4.11. Bulio algebros funkcijų faktorizavimas

Knygelėje [100] nagrinėjama ir Bulio algebros funkcijų faktorizavimo (FF radimo) problema, apie kurią mes jau kalbėjome, nagrinėdami Berkharto funkciją ir jos

FF. Priminsiu, kad funkcijos disjunktinėje bei konjunktinėse formose bendrus argumentus, faktorizuojant tą funkciją, galima iškelti už skliaustų ir tokiu būdu sumažinti raidžių ir reikalingų diodų skaičių. Tačiau, kaip jau buvo minėta, kartais, sudarant FF, galima susidurti ir su nepageidautinais reiškiniiais: gali pailgėti signalų kelias nuo bloko įėjimo iki jo išėjimo ir tai gali sumažinti bloko veikimo greitį, o kartais dėl įvairių signalų kelių nevienodo ilgio blokas gali suveikti klaidingai, sumaišydamas „šiandieną su vakarykščia diena“.

Šiomis pastabomis ir Berkharto funkcijos faktorizavimo pavyzdžiu (žiūr. 384 pav.) čia ir apsiribosiu, parekomenduodamas tiems skaitytojams, kurie norėtų apie Bulio algebros funkcijų faktorizavimą sužinoti daugiau, pasiskaityti jau ne kartą minėtąją šių eilučių autoriaus knygelę [100]. Dar vieną faktorizavimo pavyzdėlį pateiksiu 1.16.1.4.12. skyrelyje (žiūr. 391 pav.).

1.16.1.4.12. Absoliutus Bulio algebros funkcijų minimizavimas

Pereisiu prie absoliutaus minimizavimo pavyzdžio, kuris gaunamas minimizuojant dvejetainio vienaskilčio aritmetinio sumatoriaus, turinčio tris įėjimus, schemą.

Absoliutaus minimizavimo metu atmetami bet kokie apribojimai, kuriuos turėtų tenkinti minimali funkcijos forma, ir reikalaujama tik vieno – operacijų skaičius, realizuojant duotąją funkciją, turi būti minimalus ir schema, realizuojanti šią funkciją, turi turėti minimalų skaičių elementų (ir tokiu būdu turėtų būti pigiausia ir, galbūt, patikimiausia bei greičiausiai veikianti).

Taikydami absoliutaus minimizavimo metodą dvejetainio vienskilčio aritmetinio sumatoriaus schemai, pasinaudosime jo išėjimo funkcijų Karno kortelėmis (žiūr. 389 pav.).

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \overline{X_3} \quad X_3 \quad \overline{X_3} \\
 \begin{array}{cc|cc}
 X_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 \overline{X_2} & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 & \overline{X_1} & & X_1 &
 \end{array}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c} \overline{X_3} \quad X_3 \quad \overline{X_3} \\
 \begin{array}{cc|cc}
 X_2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \overline{X_2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & \overline{X_1} & & X_1 &
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= X_1 \overline{X_2} \overline{X_3} \vee \overline{X_1} \overline{X_2} X_3 \vee \overline{X_1} X_2 \overline{X_3} \vee X_1 X_2 X_3 = \\
 &= X_1 \oplus X_2 \oplus X_3
 \end{aligned}$$

389 pav.

Lygindami šias Karno korteles, galime pastebėti įdomų faktą: jei išėjimo Y_2 reikšmių lentelėje vienetuką iš langelio, atitinkančio trimačio kubo viršūnę $X_3 X_2 X_1 = 1$, perkeltume į langelį, atitinkantį kubo viršūnę $\overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1} = 1$, pakeisdami juo ten esantį nulį, tai gautume Karno lentelę, atvirkščią išėjimo Y_1 lentelei, t. y. gautume funkcijos $\overline{Y_1}$ lentelę.

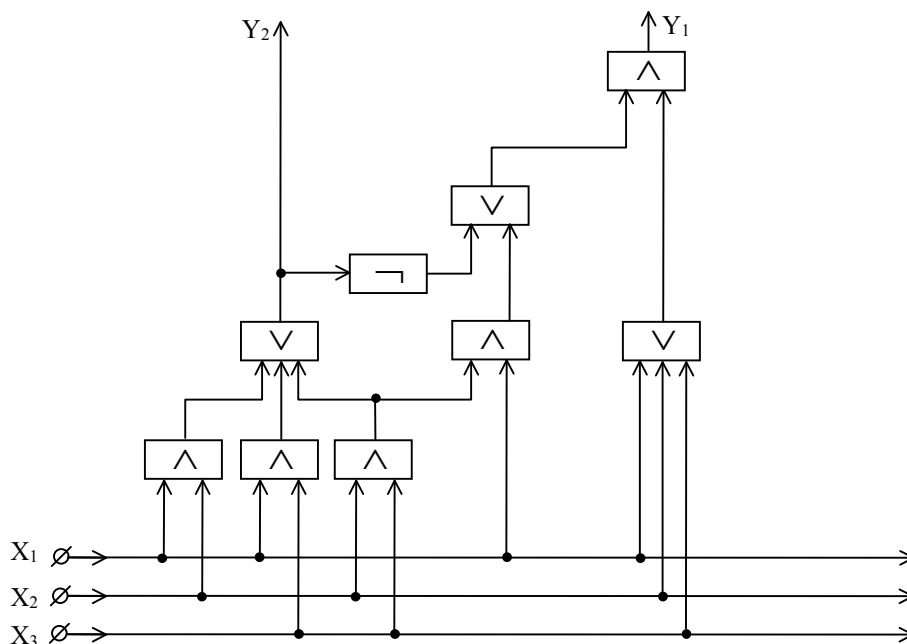
Iš to, kas čia pasakyta, išplaukia, kad funkcijos Y_1 (kurios realizavimo schema yra žymiai sudėtingesnė už funkcijos Y_2 realizavimo schemą) reikšmės galima gauti iš funkcijos Y_2 realizavimo schemas išėjimo, šiek tiek pakeitus jį ir po to invertavus.

Kad langelyje $X_3 X_2 X_1 = 1$ išnyktų vienetą, funkciją Y_2 pakanka logiškai padauginti iš funkcijos $\overline{X_3 X_2 X_1}$, kuri lygi 0, kai $X_3=1, X_2=1, X_1=1$, ir lygi 1 visais kitais atvejais.

Kad langelyje $\overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1} = 1$ atsirastų vienetą reikia prie funkcijos $Y_2 \wedge \overline{X_3 X_2 X_1}$ logiškai pridėti funkciją $\overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1}$, kuri lygi 1, kai $X_3=0, X_2=0, X_1=0$, ir lygi 0 visais kitais atvejais.

Tuomet funkciją Y_1 gausime, invertuodami funkciją $(Y_2 \wedge \overline{X_3 X_2 X_1}) \vee \overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1}$, t. y. $Y_1 = \overline{(Y_2 \wedge \overline{X_3 X_2 X_1}) \vee \overline{X_3} \overline{X_2} \overline{X_1}} = (\overline{Y_2} \vee X_3 X_2 X_1) \wedge (X_3 \vee X_2 \vee X_1)$.

Iš šių formulų išplaukia tokia dvejetainio vienskilčio aritmetinio sumatoriaus, turinčio tris įėjimus, schema, kaip parodyta 390 pav.



390 pav.

Gavome schemą, kuriai reikalingas vienas invertorius, 5 konjunktoriai, turintys po du įėjimus, 2 disjunktoriai, turintys po tris įėjimus, ir vienas disjunktoriaus, turintis du įėjimus, t. y. 1 tranzistorius, 18 diodų ir 10 rezistorių. Tokiu būdu mes sutaupėme dar 7 diodus, 2 tranzistorius ir 5 rezistorius.

Atsižvelgiant į tai, kad realūs sumatoriai turi po 16, 32 ir net 64 skiltis, sutaupyta suma net vienam n-skilčiui sumatoriui tampa ne taip jau maža.

		X_3				
		$\bar{X}_3$		$\bar{X}_3$		
X_2	{	0	1	0	1	$\bar{X}_4$
		1	0	1	0	X_4
$\bar{X}_2$	{	0	1	0	1	$\bar{X}_4$
		1	0	1	0	X_4
		$\bar{X}_1$		X_1		

391 pav.

O jei paskaičiuotume, kiek dabar gaminama kalkuliatorių ir kompiuterių, tai galėtume suprasti, ką gali duoti net mažytė ekonomija, gaminant vieną mažytį elementą, kurių reikia labai daug kiekvienai sudėtingai schemai, kai tų schemų gaminama dešimtys ir šimtai milijonų.

Pailiustruosiu faktorizavimo ir absoliutaus minimizavimo euristicinio metodo taikymą dar vienu konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog mums reikia minimizuoti funkcijos $y=f(x_4, x_3, x_2, x_1)$, kurios reikšmių Karno lentelė pavaizduota 391 pav., realizavimo schemą.

Iš Karno lentelės matyti, kad nė viena šios funkcijos vieneto konstituentė (o taip pat ir nulinio konstituentė) negali būti sukljuota, todėl šios funkcijos MDNF sutaps su TDNF, MKNF su jos TKNF ir šią funkciją realizuojančios schemas MDNF ar MKNF formoje sudarymui prireiks 40 diodų, 4 tranzistorių ir ne mažiau kaip 17 rezistorių.

Diodų ir rezistorių skaičių schemoje galima sumažinti faktorizavus šią funkciją.

$$Y = \bar{X}_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 \bar{X}_1 \vee X_4 \bar{X}_3 X_2 \bar{X}_1 \vee \bar{X}_4 X_3 X_2 \bar{X}_1 \vee X_4 X_3 \bar{X}_2 \bar{X}_1 \vee \bar{X}_4 X_3 \bar{X}_2 X_1 \vee X_4 X_3 X_2 X_1 \vee \bar{X}_4 \bar{X}_3 X_2 X_1 \vee X_4 \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_1 = \bar{X}_2 \bar{X}_1 \cdot (X_4 X_3 \vee \bar{X}_4 \bar{X}_3) \vee X_2 X_1 \cdot (X_4 X_3 \vee \bar{X}_4 \bar{X}_3) \vee X_2 X_1 \cdot (X_4 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 X_3) \vee X_2 \bar{X}_1 \cdot (X_4 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 X_3) = (X_4 X_3 \vee \bar{X}_4 \bar{X}_3) \cdot (X_2 X_1 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_1) \vee (X_4 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4 X_3) \wedge (X_2 \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 X_1).$$

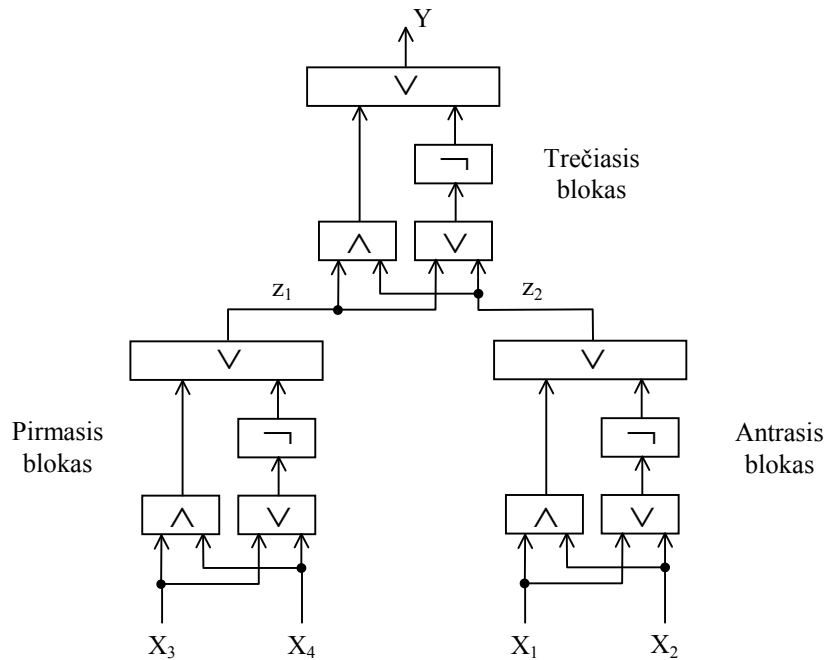
Šioje faktorizuotoje formoje realizuojant funkciją, jos schemai, kurią sudarys 4 ešelonai (pirmas ešelonas – 8 konjunktoriai po du įėjimus kiekvienas; antras ešelonas – 4 disjunktoriai po du įėjimus kiekvienas; trečias ešelonas – 2 konjunktoriai po du įėjimus kiekvienas; ketvirtas ešelonas – disjunktoriaus, turintis du įėjimus), prireiks jau tik 30 diodų. Tranzistorių skaičius liks toks pat, nors rezistorių skaičius šiek tiek padidės. Tačiau rezistoriai žymiai pigesni už diodus, o tuo labiau už tranzistorius, todėl faktorizuotos funkcijos schema bus pigesnė už schemą MDNF ar MKNF variantuose. Tuo atveju, kai signalai X_j ir $\bar{X}_j$ išeina iš trigerių registrų, visų signalų kelių ilgiai faktorizuotoje formoje (kaip ir MDNF bei MKNF) bus vienodi (tik du kartus ilgesni negu MDNF ir MKNF). FF schema šiuo atveju yra simetriška.

Tačiau FF šiuo atveju nėra pati minimaliausia schema. Galima sumažinti ir diodų, ir tranzistorių, ir rezistorių skaičių.

Išvesime žymenis: $z_1 = X_4 X_3 \vee \overline{X_4} \overline{X_3} = X_4 X_3 \vee \overline{X_4 \vee X_3}$; $z_2 = X_2 X_1 \vee \overline{X_2} \overline{X_1} = X_2 X_1 \vee \overline{X_2 \vee X_1}$.

Nesunku pastebėti, kad $X_4 \overline{X_3} \vee \overline{X_4} X_3 = \overline{X_4 X_3 \vee \overline{X_4} \overline{X_3}} = \overline{z_1}$ ir $X_2 \overline{X_1} \vee \overline{X_2} X_1 = \overline{z_2}$. Todėl $Y = z_1 z_2 \vee \overline{z_1} \overline{z_2} = z_1 z_2 \vee \overline{z_1 \vee z_2}$.

Gauti rezultatai rodo, kad schemą, leidžiančią gauti išėjimą Y, galima sudaryti iš 3 izomorfiškų blokų, susidedančių iš konjunktoriaus, turinčio du įėjimus, dviejų disjunktorių, turinčių po du įėjimus, ir vieno inventoriaus. Pirmasis blokas gamintų z_1 iš X_3 ir X_4 , antrasis – z_2 iš X_1 ir X_2 , o trečiasis – Y iš z_1 ir z_2 (žiūr. 392 pav.).



392 pav.

Kadangi vienam blokui reikia 6 diodų, 1 tranzistoriaus ir 5 rezistorių, tai visai schemai, surinktai iš trijų vienodų blokų, prireiks 18 diodų, 3 tranzistorių ir 15 rezistorių. Taigi, absoliučiai minimali schema šiuo atveju, lyginant ją su MDNF, turės daugiau negu dvigubai mažiau diodų, o be to mažiau tranzistorių ir rezistorių. Lyginant su FF, ši schema taip pat leis sutaupyti 12 diodų, 1 tranzistorių ir 8 rezistorius. Be to šios schemos gamyba taip pat labai paprasta: schema surenkama iš trijų izomorfiškų blokų.

1.16.1.4.13. Loginių schemų, turinčių kelis išėjimus, minimizavimas

Papildomos schemos minimizavimo galimybės atsiranda, kai schema turi kelis išėjimus, t. y. vienu metu realizuoja kelias išėjimų funkcijas. Tuomet gali atsitikti, kad **kai kurias schemas dalis galima padaryti bendromis keliems išėjimams**. Tuo, pavyzdžiui, mes jau pasinaudojome minimizuodami dvejetainio vienaskilčio aritmetinio sumatoriaus schemą: išėjimui Y_1 gauti buvo panaudota ir ta visos schemos dalis, kuri buvo skirta išėjimui Y_2 gauti.

Atsirandant papildomoms galimybėms, pats minimizavimo procesas, žinoma, tampa sudėtingesnis (ir tai yra natūralus logiškai paaiškinamas dėsningumas: visada, atsirandant papildomoms galimybėms, atsiranda ne tik papildomas poreikis, bet papildomos pastangos jomis pasinaudoti), tačiau tai dažniausiai atsiperka, nes dažnai leidžia gauti papildomą efektą – padaryti bendrą schemą paprastesnę, lyginant su tuo atveju, jei būtų minimizuojama atskirai kiekviena išėjimo funkcija. Kitaip tariant, visos schemos, turinčios keletą išėjimų, **globali minimizacija** gana dažnai gali duoti geresnį

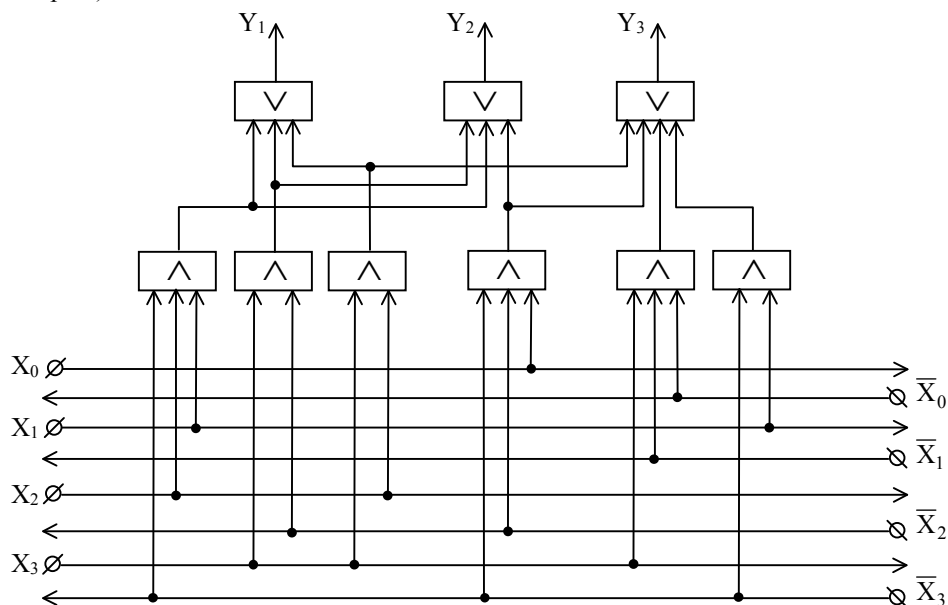
rezultatą negu tos schemos visų išėjimo funkcijų **lokali minimizacija** kiekvienos atskirai.

Pavyzdžiui, kai bloko, turinčio keturis įėjimus su išėjimo funkcijomis $Y_1=f_1(X_3, X_2, X_1, X_0)=V(6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$, $Y_2=f_2(X_3, X_2, X_1, X_0)=V(1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$, $Y_3=f_3(X_3, X_2, X_1, X_0)=V(1, 2, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15)$, tas išėjimo funkcijas minimizuojame atskirai surasdami jų MDNF, tai gauname: $Y_1 = X_3 \vee X_2 X_1$, $Y_2 = X_3 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 X_0 \vee X_3 X_2 X_1$, $Y_3 = X_3 X_2 \vee \bar{X}_3 X_1 \vee X_3 \bar{X}_1 \bar{X}_0 \vee \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_0$. Tokių funkcijų realizavimui prireiktų $4+10+14=28$ diodų. Jei atkreiptume dėmesį į tai, kad konjunkciją $X_3 X_2 X_1$, kurios realizavimui reikia trijų diodų, galime gauti, logiškai sudauginę jau turimus signalus $X_2 X_1$ ir $X_3 X_2$, kam prireiktų tik dviejų diodų, tai sutaupyti 1 diodą. Analogiškai sutaupyti dar vieną diodą, gaudami reikalingą signalą $\bar{X}_3 \bar{X}_2 X_0$ iš dviejų signalų $\bar{X}_3$ ir $\bar{X}_2 X_0$ konjunkcijos. Tuomet projektuojame bloke beliktų 26 diodai, tačiau signalų kelių ilgiai jau taptų nevienodi ir bloko schema jau nebūtų dviešeloninė.

Bet svarbiausia yra tai, kad ir šiuo atveju bloko schema dar nebūtų minimali. Jei atsižvelgtume į tai, kad minimizuojamų funkcijų Y_1 , Y_2 ir Y_3 TDNF turi nemažai bendrų vieneto konstituentų, kurias klijuodami galėtume gauti ir bendrą konjunkciją, turinčią mažiau raidžių, negu konstituentės, tai galėtume gauti tokias funkcijų Y_1 , Y_2 ir Y_3 DNF, kurios maksimaliai panaudoja bendrąsias implikantes ir, panaudodamos minimalų raidžių skaičių, padengia visas funkcijų Y_1 , Y_2 ir Y_3 vieneto konstituentes.

Tas implikantes ir tokias funkcijų Y_1 , Y_2 ir Y_3 DNF galima surasti, pavyzdžiui, naudojantis Mak–Klaskio ir Kvaino implikantinės matricos metodais (kaip tai daroma, žiūr. knygelę [100]). Čia pateiksiu galutinį rezultatą: $Y_1 = \bar{X}_3 X_2 X_1 \vee X_3 \bar{X}_2 \vee X_3 X_2$, $Y_2 = \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_0 \vee \bar{X}_3 X_2 X_1 \vee X_3 \bar{X}_2$, $Y_3 = \bar{X}_3 \bar{X}_2 X_0 \vee \bar{X}_3 X_1 \vee X_3 X_2 \vee X_3 \bar{X}_1 \bar{X}_0$.

Lyginami šias DNF su funkcijų Y_1 , Y_2 ir Y_3 MDNF, matome, jog šios DNF žymiai skiriasi: yra sudėtingesnės ir lengvai galėtų būti minimizuotos. Tačiau to specialiai nedaroma, norint išsaugoti bendrąsias implikantes, dalyvaujančias kelių išėjimo funkcijų schemose, ir tokiu būdu sutaupyti diodus (žiūr. 393 pav.).



393 pav.

Gavome schemą, kuri išlieka dviešeloninė ir kurios sudarymui reikia mažiau diodų (jau tik 25).

Jei atsisakytume schemos dviešelonishumo, tai diodų skaičių galiam būtų sumažinti iki 24, nes tuomet, sudarydami konjunkciją $\bar{X}_3 X_2 X_1$, galėtume pasinaudoti jau turima konjunkcija $\bar{X}_3 X_1$ ir tokiu būdu gauti konjunkciją $\bar{X}_3 X_2 X_1$, panaudodami jau ne tris, o tik du diodus.

Ieškant minimalių schemų, ne būtina pradėti nuo DNF, nes, kaip jau buvome pastebėję, kartais KNF gali būti ekonomiškesnės negu DNF.

Pavyzdžiui, mokymo praktika rodo, kad jei studentams duodi užduotį sudaryti bloko, turinčio 3 įėjimus ir 2 išėjimus su išėjimo funkcijomis $Y_1=V(0, 1, 2, 7)$ ir $Y_2=V(0, 1, 2, 6, 7)$, schemą, panaudojant ne daugiau kaip 11 diodų, tai jie gana ilgai vargsta, o kai kurie ir neįvykdo užduoties, nes naudodamiesi

DNF, jie pasiekia ribą – 12 diodų ir daugiau niekaip nepajėgia sumažinti diodų skaičiaus. Tuo tarpu, jei pereitume prie KNF, tai gana nesunkiai galėtume gauti reikiamą sprendimą: $Y_2 = (\overline{X_2} \vee X_1) \cdot (X_2 \vee \overline{X_1} \vee \overline{X_0})$, $Y_1 = Y_2 \wedge (\overline{X_2} \vee X_0)$. Išėjimo Y_2 gavimui sunaudotume 7 diodus, o tam, kad gautume Y_1 tektų, naudojantis jau gautu išėjimu Y_2 , pridėti dar 4 diodus.

Tuo ir baigsime ketvirtosios klasės loginių uždavinių ir jų sprendimo metodų apžvalgą, o kartu ir visų keturių klasių loginių uždavinių apžvalgą. Šiek tiek susipažinę su galimais matematinės logikos taikymais, pereisime prie šiek tiek sudėtingesnių klausimų – **logikos ir matematikos teorinių pagrindų nagrinėjimo**. Tai labai aktualu dar besiformuojančiam sistematikos mokslui, nes **logikos ir matematikos dėsniai**, mano nuomone, yra **bendrasisteminiai dėsniai**, o ir formaliąją logiką bei matematiką galima laikyti sudedamąja sistemų teorijos plačiąja prasme dalimi, nes **ir logika, ir matematika nagrinėja ir taiko dėsnius, būdingus santykiams ir sistemų struktūroms**, nepriklausančius nuo objektų ir sistemų substrato.

1.16.1.5. Formalios dedukcinės sistemos. Aristotelio silogistika. Teiginių ir predikatų skaičiavimai. Metamatematika. Neklasikinės ir modalinės logikos

Žmonės, stebėdami aplinkinį pasaulį ir pačius save, **pastebėtus faktus fiksuoja teiginių** forma, kurdami ir fiksuodami savo atmintyje vaizdinį (jutiminį) ir koncepcinį pasaulio modelį. Surinkę pakankamai daug faktų, jie pastebi, kad **egzistuoja ne tik įvairūs objektai bei reiškiniai, bet ir tam tikri dėsningumai**, kurie leidžia suformuluoti **apibendrinančius teiginius – dėsnius**.

Pavyzdžiui, stebėdami, kaip vienas po kito mirė ir miršta jų giminaičiai bei pažįstami, ir nesutikdami nė vieno žmogaus, kuris gyventų nuo neatmenamų laikų, žmonės suformulavo apibendrinantį teiginį: „Visi žmonės mirtingi“.

Toks apibendrinančių samprotavimų tipas, kurio rezultatas – apibendrinantys teiginiai, leidžiantys daryti išvadas ir apie dar nestebėtus kai kuriuos objektus bei reiškinius, vadinamas **indukcija**.

Indukciniai samprotavimai, vedantys nuo dalinių stebėjimų prie apibendrinančių teiginių, leidžia pastebėti ir išreikšti teiginiais egzistuojančius dėsningumus ne tik aplinkiniuose reiškiniuose, bet ir pačiuose žmonių samprotavimuose, atspindinčiuose aplinkos dėsningumus žmogaus sąmonėje. Tokiu būdu indukciniai samprotavimai priveda ne tik prie **gamtos dėsnių**, bet ir prie taip vadinamų **logikos dėsnių** suvokimo ir formulavimo. Logikos dėsniai, kaip ką tik buvo minėta, ypatingai svarbūs sistematikos mokslui, nes jie yra **bendrasisteminiai struktūriniai dėsniai ir jais naudojami visi mokslai**. Logikos dėsniais turėtų remtis ir kiekvieno žmogaus mąstymas, nes **taisyklingas mąstymas (t. y. neprieštaraujantis logikos dėsniams, o jais grindžiamas mąstymas) yra būtina teisingo mąstymo ir teisingų išvadų gavimo sąlyga**.

Mąstymo logiškumas yra būtina sisteminio mąstymo sąlyga, todėl sistematikos kursui skirtoje mokymo priemonėje mes gana daug dėmesio skirsime logikos mokslui ir jo problemoms.

Objektyvumo ir pilnumo dėlei reiktų pažymėti, kad ne visai sutampa įvairių filosofų nuomonės dėl logikos dėsnių prigimtys.

Vieni tvirtina, kad logikos dėsniai – tai gamtoje egzistuojantiems santykiams būdingų struktūrinių dėsningumų atspindys, susiformuojantis žmogaus sąmonėje, jam bendraujant su realiu pasauliu, kaupiant individualią patirtį, ir mokymosi procese, per kalbą (žodžiu ir raštu) perimant kitų žmonių ir kitų jų kartų jau sukauptą patirtį.

Tačiau yra ir tokių filosofų, kurie teigia, jog bent jau pagrindiniai mąstymo dėsniai yra įgimti bei paveldimi (kaip ir instinktai), t. y. jau iš anksto „užprogramuoti“ žmogaus sąmonėje, ir individuali patirtis bei mokymasis tik praturtina, dar labiau išvysto bei konkretizuoja žmogaus mąstymą, padeda sąmonei sugeneruoti naujas – konkretesnes ir detalesnes – „mąstymo programas“, papildančias ir išplečiančias paveldėtąją „mąstymo įrangą“.

Čia mes nesiimsime spręsti, kurie filosofai yra teisesni, nes mums čia svarbu tik tai, jog gamtos ir logikos dėsniai bei ryšiai tarp jų egzistuoja, jog tuos dėsnius ir ryšius tarp jų, analizuojant gamtoje ir žmogaus mąstyme vykstančius procesus, galima atrasti ir suprasti, kad tų dėsnių egzistavimas leidžia gauti iš jų išplaukiančias išvadas. Net ir tuo atveju, jei kai kurie logikos dėsniai būtų iš anksto „įrašyti“ į žmogaus sąmonę kaip jo populiacijos genetinio kodo sudėtinė dalis, jie turėjo evoliucijos procese, veikiant gamtos dėsniams, susiformuoti, o žmonės, kurdami logikos mokslą, turėjo tuos, tarkime, įgimus mąstymo dėsningumus pastebėti ir po to išreikšti jų esmę žodžiais, t. y. vėl gi įvykdyti indukcinį procesą. Atsakymą į klausimą, kaip pas žmonių populiacijos atstovus atsirado sugebėjimas skirti tiesą nuo netiesos ir suvokti logikos dėsnius bei jais naudotis savo mąstyme, turi duoti jau ne logikos, o neuropsichologijos ir evoliucijos mokslai. **Koks tas atsakymas bebūtų, logika nuo to nepasikeis.**

Naudodamiesi indukcijos procese surastais gamtos (plačiąja prasme) ir logikos dėsniais, žmonės, kaip jau buvo minėta, tampa pajėgūs **daryti išvadas** apie dar nestebėtus objektus ir daiktus, apie procesus ir jų eigą bei galimas pasekmes.

Pavyzdžiui, šienpjovys, nuo pat ryto, saulei kepinant, pjovęs pievą ir po pietų namie truputį numigęs, atsibudęs ir išėjęs į kiemą, pastebi, kad žolė aplinkui visur šlapia. Iš to jis daro išvadą, kad, jam miegant, palijo, nors paties lietaus jis nei matė, nei girdėjo.

Tokie samprotavimai, kada iš pastebėtų faktų, vadovaujantis jau žinomais gamtos ir logikos dėsniais, daromos išvados ir formuluojami teiginiai apie faktus, kurie nebuvo tiesiogiai stebimi, vadinami **dedukciniais samprotavimais**, o pats išvadų gavimas – **dedukcija**. Tuo atžvilgiu dedukciniai mąstymo procesai yra lyg ir atvirkštiniai indukciniams: **indukcija veda mus nuo dalinių faktų prie bendrųjų teiginių, dedukcija leidžia, naudojantis bendraisiais teiginiais, daryti išvadas apie dalinius faktus.**

Indukcija ir dedukcija – du vienas kitą papildantys pasaulio pažinimo ir mąstymo procesai: be indukcijos nebūtų žinomi bendrieji dėsniai ir negalėtų būti dedukcijos, tačiau ir dedukcija padeda surasti ir formuluoti bei tikrinti dėsningumus ir tokiu būdu skatina indukcinį procesą, padeda jiems.

Dedukcija – grynai ir griežtai loginis procesas, besiremiantis tik logikos dėsniais ir turimais patikrintais (ir todėl) laikomais neabejotiniais faktais. Dedukcijos metu gautos išvados yra **įrodomos**, ir įvairių **teoremų įrodymas** – vienas iš grynai dedukcinio mąstymo pavyzdžių.

Indukcija, bendrai paėmus, būdama pirminiu loginiu procesu, negali būti pilnai pagrįsta vien tik loginėmis priemonėmis, vien tik logine dedukcija. Indukcija pirmoje eilėje remiasi stebėjimais ir pastebėtais faktais, ir, juos apibendrinama, formuluoja bendrus teiginius, aprėpiančius visų stebėtų tam tikros rūšies faktų visumą. Todėl nauji faktai kartais gali ne tik patvirtinti bei patikslinti, bet ir paneigti ankstesniame indukcijos procese suformuluotus teiginius bei gali paskatinti naujus indukcinį procesą, siekiančius suformuluoti naujus apibendrinančius teiginius, aprėpiančius ir senąją ir naująją praktiką. Tačiau ir apibendrinant surinktą faktinę medžiagą, formuluojant teiginius apie pastebėtus dėsningumus bei tikrinant

hipotezes apie tų teiginių teisingumą, taip pat reikia laikytis tam tikrų mąstymo taisyklių. Todėl **egzistuoja ne tik dedukcinė bet ir indukcinė logika**, kurios viena kitai padeda, viena kitą papildo.

Gana dažnai atsitinka taip, kad atrastieji nauji faktai neatmeta seniau suformuluotų apibendrinančių teiginių (nors kartais būna ir taip, kaip, pavyzdžiui, molekulinė kinetinė šilumos teorija atmetė senąją flogistono teoriją), bet patikslina ir papildo juos, palikdami senąją teoriją naujosios teorijos daliniu atveju.

Ryškus tokio reiškinių pavyzdys – formulavimas reliatyvistinės mechanikos dėsnių, kurie aprėpia senąją klasikinę Niutono mechaniką kaip reliatyvistinės mechanikos dalinį atvejį: kai $\beta = \frac{v}{c}$ (kur v – kūno judėjimo greitis, c – šviesos greitis)

artėja prie 0, tai iš reliatyvistinės mechanikos dėsnių gauname jų dalinį atvejį – Niutono mechanikos dėsnius, kuriais žmonės ir iki šiol naudojasi savo kasdieninėje praktikoje, apie ką mes jau esame kalbėję 1.1. skyriuje.

Kitas analogiškas pavyzdys – kvantinė mechanika, kurios dėsniai buvo suformuluoti, nagrinėjant mikrodalelių sąveikavimą. Tai atominės fizikos dėsniai, nesutampantys su Niutono mechanikos dėsniais, suformuluotais, nagrinėjant palyginti didelių kūnų (makrokūnų) judėjimą ir jų energetinį sąveikavimą. Tačiau tuo atveju, kai osciliuojamos energijos kvanto dydį $h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, kur h – Planko konstanta, λ – osciliuojamos bangos ilgis, c – šviesos greitis, lyginant jį su stebimo makrokūno energija, galime laikyti dydžiu, pakankamai artimu 0, tai iš kvantinės mechanikos dėsnių gauname Niutono mechanikos dėsnius. Apie tai mes taip pat jau esame kalbėję 1.9.1.2. skyrelyje.

Šie pavyzdžiai rodo (o tokių pavyzdžių galima rasti gana daug, tame tarpe ir logikoje, su kuo mes susidursime 1.16.2. skyrelyje), jog mokslo surasti dėsningumai, kai jie neiškreiptai atspindi realaus pasaulio dėsningumus, mokslui vystantis, nėra atmetami, o tik tobulinami, tikslinami, t. y. vyksta **iteracinis mokslo artėjimo prie objektyvios ir absoliučiai pilnos tiesos nepabaigiamas procesas**. Šį apibendrinimą galima laikyti **bendrasisteminio dėsniu** ir prijungti prie kitų sistemų teorijos dėsnių.

Indukcijos proceso metu rasti dėsningumai negali būti griežtai įrodyti per bet kurį baigtinį laiko intervalą, ir jų teisingumo „įrodymas“ – nepabaigiamas tų dėsningumų tikrinimo ir tikslinimo procesas, kurio metu mes vis pilniau susipažįstame su mus supančiu ir mumyse esančiu pasauliu, jį suprantame vis giliau ir tiksliau.

Šis teiginys – tai irgi vienas iš **indukcinės logikos ir sisteminio mąstymo postulatų**, susiformavusių pasaulio pažinimo procese.

Tiesa, yra viena loginio mąstymo procedūra, turinti indukcijos pavadinimą, kurią galima būtų priskirti prie „uždarų“ dedukcinių procesų, formuluojančių griežtai ir pilnai įrodytus teiginius.

Tai – **matematinė, arba pilnoji, indukcija**, kuri remiasi **matematinės indukcijos principu**, laikomu neabejotinai teisingu teiginiu, priimtinu ir logicistams, ir intuicionistams ir formalistams (žiūr. 1.16.1.5.5.6. skyrelį).

Šis principas teigia, kad tuo atveju, kai mes turime seką kokių tai reiškinių (pavyzdžiui, seką formulių), priklausančių nuo parametro n , galinčio turėti be galo daug sveikų reikšmių $n=0, 1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots$, ir kai mes galime:

1) **patikrinti**, jog tos sekos pradžioje (t. y. kelioms pradinėms n reikšmėms, pavyzdžiui, $n=0, 1, \dots, k \geq 2$) mūsų suformuluotas teiginys (pavyzdžiui, formulė, dėsnis ir pan.) yra teisingas,

2) **įrodyti**, jog iš to teiginio teisingumo visoms parametro n reikšmėms, tenkinančioms nelygybę $n \leq k$ (kur k – sveikas kintamasis, galintis turėti ir pradines, ir bet kurias kitas parametro n reikšmes), išplaukia to teiginio teisingumas parametro n reikšmei, lygiai $k+1$,

tai mes galime būti įsitikinę, jog mūsų suformuluotas teiginys yra teisingas visoms parametro n reikšmėms, pradedant nuo patikrintųjų ir, kiek nori, didesnėms už jas.

Iš tikrųjų, jei mes patikriname, kad, pavyzdžiui, kokia tai formulė yra teisinga, kai $n=2$ ir $n=3$, ir įrodome, jog iš tos formulės teisingumo visoms n reikšmėms, kai $n \leq k$, kur k – bet koks sveikas skaičius, tenkinantis nelygybę $k \geq 3$, būtinai išplaukia jos teisingumas, esant parametro reikšmei lygiai $k+1$, tai, naudodamiesi tuo įrodymu, mes gausime, jog ta formulė privalo būti teisinga, kai $n=4$, po to – kai $n=5$ ir t. t. iki begalybės.

Pavyzdžiui, nesunku patikrinti, jog formulė $\sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ yra teisinga, kai $n=0$, o taip pat, kai $n=1$ ir kai $n=2$.

Šiuos faktus vadinsime formulės $\sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ teisingumo įrodymo matematinės indukcijos metodu **pradinę bazę** (žiūr. matematinės indukcijos principo aprašymo pirmąjį punktą).

Nesunku įrodyti ir **perėjimo proceso** (žiūr. matematinės indukcijos principo aprašymo antrąjį punktą) **loginį teisėtumą**, t. y., įrodyti, jog iš formulės $\sum_{i=0}^k i^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$ teisingumo išplaukia

formulės $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$ teisingumas bet kuriai k reikšmei $k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Įrodysime tai.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^k i^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{2^2} + (k+1) \right] = \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 \times \\ &\times (k^2 + 4k + 4) = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2, \text{ ką ir turėjome gauti.} \end{aligned}$$

Todėl, remdamiesi matematinės indukcijos principu, galima teigti, jog formulė $\sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ yra teisinga visoms n reikšmėms.

Analogiškai, naudodamiesi matematinės indukcijos metodu, galime įrodyti formulės $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ teisingumą.

Ši formulė teisinga, kai $n=0$, nes $\sum_{i=0}^0 i^2 = 0^2 = 0$ ir $\frac{0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = 0$.

Teisinga ši formulė ir tuomet, kai $n=1$, nes $\sum_{i=0}^1 i^2 = 0^2 + 1^2 = 1$ ir $\frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Ši formulė išlieka teisinga ir kai $n=2$, nes $\sum_{i=0}^2 i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$ ir $\frac{2 \cdot (2+1)(2 \cdot 2+1)}{6} = 5$.

Taigi, pradinę bazę jau turime. Belieka įrodyti perėjimo formulę, t. y. įrodyti, jog $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \sum_{i=0}^k i^2 + (k+1)^2$ yra lygu $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Įrodysime tai.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) = \frac{k+1}{6} [2k(k+2) + 3(k+2)] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \text{ ką ir reikėjo įrodyti.}$$

Dabar, naudodamiesi perėjimo proceso įrodymu teisėtumu ir žinodami, jog formulė $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ yra teisinga, kai $n=2$, gauname, jog ta formulė turi būti teisinga ir kai $n=3$.

Pritaikę perėjimo procesą gautam rezultatui, gauname, jog formulė turi būti teisinga, kai $n=4$ ir t. t. Šią perėjimų seką galime tęsti be galo, o tai ir reiškia, jog formulė $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ yra teisinga

visoms n reikšmėms $n=3, 4, 5, \dots$. Kadangi buvo patikrinta, kad ta formulė teisinga, kai $n=0, 1, 2$, tai gauname, jog ta formulė teisinga visoms natūralioms kintamojo n reikšmėms: $n=0, 1, 2, 3, 4, \dots$.

Paprastoji (nepilnoji) indukcija skiriasi nuo matematinės indukcijos tuo, kad, naudojantis paprastąja (nepilnąja) indukcija, tikrinamas pastebėto dėsningumo galiojimas visais stebimais atvejais (t. y. minėtoji pilnosios matematinės indukcijos metodo taikymo pradinė bazė aprėpia visus nagrinėtus atvejus), nes **nėra galimybės įrodyti perėjimo proceso teisėtumą visiems atvejams. Apsiribojama tik tuo, kad nerandama faktų, kurie prieštarautų tokio proceso teisėtumui (t. y. paneigtų pastebėtą dėsningumą), ir todėl priimama hipotezė, kad toks procesas, matyt, teisėtas. Ir tol, kol tokia hipotezė nepaneigiama kokiais nors faktais, laikoma, kad indukcijos metodu surastas dėsnis galioja.**

Svarbu pažymėti, kad tokios hipotezės, kuriomis remiantis mes laikome indukcijos metodu gautus dėsnius galiojančiais, turi neprieštarauti viena kitai, t. y. turi sudaryti **neprieštarinę sistemą** (apie formalųjį neprieštaringumą žiūr. 1.16.1.5.2. skyrelį). **Iš indukcijos metodu suformuluotų hipotezių išplaukiančių išvadų gavimui ir jų neprieštaringumo tikrinimui naudojamosi dedukcine logika, sudarant grįžtamąjį ryšį tarp indukcijos ir dedukcijos metodų bei tais metodais gautų rezultatų.**

Tokią neprieštarinę ir daug kartų patikrintą sistemą sudaro, pavyzdžiui, fizikos dėsnių sistema, ir todėl mes su labai maža tikimybe, jog mūsų nuomonė nėra teisinga, galime teigti, kad mums žinomi fizikos dėsniai, matyt, teisingai atspindi tikrovę.

Artimas indukcijos metodui yra ir **analogijų metodas**, kurio panaudojimo sėkmę paaiškina mums jau žinomi **izomorfizmo** reiškiniai. Analogijų metodas atkreipia dėmesį į panašius reiškinius ir **padedą formuluoti hipotezes**, kurios gana dažnai pasiteisina. Tačiau analogijų metodas (kaip ir nepilnos indukcijos metodas) negali būti laikomas griežtai loginiu metodu, galinčiu įrodyti suformuluotos hipotezės absoliutų teisingumą visur ir visada. Nepakankamai atsargus šio metodo vartojimas gali privesti prie nepakankamai pagrįstų ar net klaidingų išvadų.

Išvadų pilno pagrįstumo savybę turi tik taisyklingai taikomas dedukcijos metodas, tačiau ir jis remiasi indukcijos metodu nustatytais dėsniais, **todėl dedukcijos metodu gautos išvados gali būti laikomos teisingomis tik su sąlyga, jei indukcijos metodu surasti dėsniai, kuriais buvo remiamasi dedukciniame procese, galioja dedukcinių išvadų interpretavimo bei taikymo srityje.**

Visa tai reiškia, kad **įvairių mokslų pastangomis sudarytas pasaulio ir jo sudėtinių dalių modelis gali būti laikomas teisingu, t. y. atitinkančiu tikrovę, tik su tam tikra (tiesa, gana nemaža) tikimybe, ir ta tikimybė tuo didesnė, kuo daugiau surandama faktų, neprieštarujančių tam modeliui bei dar ir dar kartą patvirtinančių jį.**

Kadangi faktų, prieštarujančių dabar turimam moksliniam materialaus pasaulio ir jame egzistuojančių gamtos ir logikos dėsnių modeliui bei iš pagrindų

sugriaunančių jį, per netrumpą mokslų istoriją nebuvo surasta, o vyko tik to modelio koregavimo, tikslinimo ir papildymo procesai, tai **galima priimti (ir laikyti gana pagrįsta) hipotezę, jog šiuolaikiniam mokslui žinomi gamtos ir logikos dėsniai savo pagrinde yra teisingi ir jų rėmuose galima pakankamai patikimai kurti dedukcines sistemas. Ši išvada taip pat labai svarbi sistemyros mokslui ir sisteminio mąstymo ugdymui.**

Dedukcines sistemas galima formalizuoti ir tokiu būdu gauti **formalias teorijas**. Tokių teorijų rėmuose, naudojantis įsivestąja formalia kalba ir tų teorijų **dedukciniu aparatu**, galima išvesti iš indukcijos metodu nustatytų dėsnių išplaukiančias išvadas, įrodinėti teoremas.

Sugebėjimas kurti formalias sistemas ir jomis naudotis, dar ne taip seniai buvęs būdingu tik gana negausiai matematikos bei matematinės logikos specialistų grupei, ryšium su intensyviu kompiuterinės technikos bei jos programinės įrangos tobulėjimu ir jos taikymų srities augimu platin ir gilin, tampa vis aktualesniu dalyku. Jis tampa aktualesniu ir studijuojantiems sistemyrą, nes ne tik reikalingas sisteminiams modeliuotojams ir sisteminiams projektuotojams, bet ir yra, kaip jau buvo minėta, viena iš svarbių sudedamųjų sisteminio mąstymo dalių. **Tokio sugebėjimo ugdymas kartu yra ir mąstymo logiškumo, bendros mąstymo kultūros, pasižyminčios mąstymo nuoseklumu ir griežtumu, ugdymas.** Todėl formalizavimui, formalių sistemų kūrimui ir jų panaudojimui, o taip pat teisingam formalizavimo vietos mokslų sistemoje suvokimui sistemyros kurse skiriamas ypatingas dėmesys.

Šiame skyrelyje mes nagrinėsime kai kurias formalias sistemas, būtent, formalias dedukcines sistemas, vadinamas formaliomis teorijomis.

Formaliomis sistemomis vadinamos sistemos, sudarytos iš formalių objektų, sujungtų į sistemą formaliais santykiais. Formalios sistemos savybės išplaukia iš minėtųjų formalių santykių ir todėl gali būti deduktyviai išvestos iš formalios sistemos apibrėžimo, pilnai ir vienareikšmiškai išreiškiančio visus formalioje sistemoje egzistuojančius pagrindinius formalius santykius.

Formaliais objektais vadinami abstrakčių objektų, sudarančių formalios sistemos sudėtį, žymenys (žymėjimai, ženklai). **Formaliais santykiais** vadinami abstrakčių santykių, sudarančių formalios sistemos struktūrą, žymenys (ženklai, žymėjimai).

Apie tai, kas yra abstrakcija, abstraktūs objektai, abstrakčios savybės ir abstraktūs santykiai, jau buvo kalbėta 1.5. skyriuje, todėl čia apsiribosiu tik priminiu, jog **abstrakčiais objektais** vadinami realiai egzistuojančių bei galinčių realiai ar virtualiai egzistuoti objektų bei jų savybių ar santykių **artutiniai modeliai**, gaunami abstrahuojantis nuo tų realių savybių ir realių santykių, kurie nagrinėjamo aspektu laikomi neesminiais bei nereikšmingais. Abstraktūs objektai skiriasi nuo realių objektų visų pirma tuo, kad yra **baigtiniai (išsemiami)**, t. y. griežtai apibrėžti, turintys baigtinius griežtai apibrėžtų savybių skaičius ir galintys turėti tik baigtinį skaičių griežtai apibrėžtų santykių su kitais abstrakčiais objektais.

Kitaip tariant, **abstraktūs objektai – tai sąvokos, turinčios baigtinį griežtai apibrėžtą turinį, išreiškiamą baigtiniu griežtai apibrėžtų teiginių skaičiumi.**

Abstrakčiais santykiais vadinami realiai egzistuojančių bei galinčių realiai ar virtualiai egzistuoti santykių artutiniai modeliai, kuriems būdingas turinio išsemiamumas ir apibrėžimo vienareikšmiškumas. Kitaip tariant, **abstraktūs santykiai – tai santykiai, kurie gali būti pilnai ir vienareikšmiškai išreikšti baigtiniu griežtai apibrėžtų teiginių skaičiumi.** Pagrindinių abstrakčių santykių, egzistuojančių formalioje sistemoje, skaičius taip pat turi būti ir yra baigtinis.

Formalią dedukcinę sistemą – **formalią teoriją** – galima sukurti, sudarius (užsidavus) ketvertuką $\langle A_1, T_1, A_2, T_2 \rangle$, kur

A_1 – **bazinių elementų – bazinių simbolių**, žyminčių abstrakčius objektus, baigtinė aibė,

T_1 – baigtinė aibė **sintaksės taisyklių**, kuriomis naudojantis iš aibės A_1 elementų konstruojamos **teisingai sudarytos formulės (TSF)**,

A_2 – bazinių (pradinių) TSF (pavyzdžiui, pradinių teisingų teiginių bei predikatų), priimamų **formalios teorijos aksiomomis bei postulatais**, baigtinė aibė,

T_2 – **išvedimo taisyklių**, leidžiančių iš aksiomų gauti **formalios teorijos teoremas**, baigtinė aibė.

Aibės A_1 ir T_1 sudaro formaliosios sistemos **formaliają kalbą** su jai būdinga **sintaktika**, o aibės A_2 ir T_2 – formaliosios sistemos **loginį (dedukcinį) aparatą**, kartais vadinamą formalios teorijos **deduktika**.

Čia išvardintas ketvertukas kartu su iš jo išplaukiančiomis teoremomis, užrašytomis formaliaja kalba, ir sudaro formaliąją teoriją.

Visos galimos tos **sistemos interpretacijos**, t. y. visos realios bei virtualios sistemos, kurių formaliu modeliu galėtų būti sukonstruotoji formali sistema, apibrėžia **formalios sistemos semantiką**, o visi tie atvejai, kuriuose formalioji sistema – jos kalba ir jos loginis (dedukcinis) aparatas – galėtų būti panaudoti kokioms nors aktualioms praktinėms ar teorinėms problemoms spręsti – **formaliosios sistemos pragmatiką**.

Iš to, kas čia buvo pasakyta, išplaukia, jog formali teorija, tai dedukcinė formali sistema, kuriai būdinga, kad formaliojoje teorijoje iš, palyginti, nedidelio skaičiaus **pradinių elementų ir pradinių konstrukcijų** (prielaidų, aksiomų, postulatų ir pan.), naudojantis nedideliu skaičiumi **formalių konstravimo taisyklių**, gaunamos (išvedamos) visos kitos tos formalios teorijos konstrukcijos (teoremos), kurios po to gali būti įvairiai interpretuojamos ir panaudojamos.

Bazinių elementų aibė A_1 ir sintaksės taisyklių aibė T_1 gali būti pasirinktos gana laisvai, tačiau taip, kad jų užtektų vienareikšmiškam aibių A_2 ir T_2 elementų ir iš jų išplaukiančių teoremų užrašymui.

Pradinės konstrukcijos A_2 ir išvedimo taisyklės T_2 gali būti gautos dvejopai:

a) **apibendrinant realaus pasaulio bei mąstymo dėsningumus ir formalizuojant jų modelius** į pradines formalios sistemos konstrukcijas (**aksiomas**) ir į formalias sistemos konstrukcijų pertvarkymo (jungimo, dekomponavimo, išplėtimo ir pan.) taisykles (**išvedimo taisykles**);

b) **konstruojant neprieštaringas pradines konstrukcijas ir operavimo su jomis taisykles**, t. y., kuriant ne tik **realiai egzistuojančio**, bet ir galinčių realiai egzistuoti virtualių pasaulių bei jų dalių **hipotetinius formalius modelius**.

Kam reikalingas formalizavimas, formalių kalbų ir formalių teorijų kūrimas?

Tikslųjų mokslų atstovai seniai pastebėjo, kad natūraliosios kalbos dėl jose vartojamų sąvokų daugiareikšmiškumo bei lingvistinių konstrukcijų neoperacionalumo ir nekompaktiškumo nėra pakankamai tinkamos tiksliesiems mokslams kaip jų mokslinės kalbos. Jau Platono dialoge „Eutideme“ galima rasti daug sofizmų, kuriuose, naudojantis natūraliosios kalbos daugiareikšmiškumu, gaunamos absurdiškos išvados. Ypatingai aiškiai **tikslios mokslinės kalbos poreikis** buvo suformuluotas XVII a. Dekarto, o šiek tiek vėliau – ir Leibnico. Dekartas 1621 m. savo laiške prancūzų abatui Mersenui rašė, jog **reikia ir mintyse įvesti tokią pat tvarką, kaip ir skaičiuose**. Dekartas ne tik išsakė mokslinės kalbos reikalingumo idėją, bet ir buvo pradėjęs tokią kalbą kurti, tačiau to darbo neužbaigė, nes ir negalėjo jo užbaigti. Apie formalios kalbos ir formalios teorijos, leidžiančios **matematiškai išreikšti logines**

mąstymo procedūras ir apskaičiuoti iš duotųjų prielaidų išplaukiančias išvadas panašiai, kaip apskaičiuojamos formulų reikšmės, reikalingumą rašė ir Leibnicas, kuris net buvo ėmęsis „loginės mašinos“ kūrimo darbų.

Kaip pamatysime vėlesniuose šio skyriaus skyreliuose, formalių kalbų ir formalių teorijų kūrime dalyvavo visa eilė žymių mokslininkų.

Ypatingai aktualiu formalių kalbų ir formalių teorijų kūrimas ir tobulinimas tapo, kaip jau buvo minėta, **šiais laikais ryšium su kompiuterinės technikos taikymu**. Manau, jog skaitytojas jau ne kartą buvo susidūręs su **algoritminėmis kalbomis** ir yra girdėjęs apie **dirbtinio intelekto sistemas**. Bet apie tai vėliau. O dabar pereisime prie dedukcinių loginių sistemų pavyzdžių nagrinėjimo. Tarp jų išnagrinėsime ir formalių loginių sistemų pavyzdžius: klasikinius teiginių ir predikatų skaičiavimus.

1.16.1.5.1. Aristotelio silogistika

Pirmasis mums žinomas sėkmingas bandymas sukurti **dedukcinę loginę sistemą** buvo padarytas dar Antikos laikais. Tai **Aristotelio silogistinė sistema**, kurioje Aristotelis silogizmų pavidalu išreiškė **pagrindinius dedukcinio mąstymo dėsnius (teisingo mąstymo taisykles)**.

Silogizmu vadinamas teiginių – **silogizmo prielaidų** (premisų) – rinkinys kartu su iš tų prielaidų logiškai išplaukiančia **išvada**, užrašytas simboliškai kalba ir išreiškiantis kokią tai **mąstymo taisyklę**, kitaip tariant, **silogizmas – tai mąstymo taisyklės formulė**.

Silogizmai gali būti paprasti ir sudėtingi, sąlyginiai ir besąlyginiai (kategoriški).

Trumpai apžvelgsime paprastų kategoriškų silogizmų sistemą.

Paprastu kategorišku silogizmu vadinamas silogizmas, turintis tik dvi paprastas prielaidas ir išvadą. Kiekviena prielaida susideda iš dviejų **terminų**, žyminčių objektų klases (aibes), bei tuos terminus jungiančio **besąlyginio loginio ryšio**. Abi prielaidas vieną su kita jungia taip vadinamas **vidurinysis terminas M**, kuris yra bendras abiem prielaidoms ir gali būti jose ir subjektu ir predikatu. Pirmoji prielaida vaizduoja besąlyginį loginį ryšį tarp viduriniojo termino M ir **išvados predikato P**, o antroji prielaida – besąlyginį loginį ryšį tarp **išvados subjekto S** ir viduriniojo termino M. Sujungdamas abi prielaidas, vidurinysis terminas M kartais leidžia gauti išvadą, vaizduojančią besąlyginį loginį ryšį tarp subjekto S ir predikato P.

Besąlyginiai loginiai ryšiai paprasto kategoriškojo silogizmo prielaidose ir išvadoje gali priklausyti **keturiems tipams**, reiškiantiems: 1) **bendrąjį teigimą**, sutrumpintai žymimą raide „a“ – pirmąją žodžio „afirmo“ („teigiu“, „tvirtinu“) balse; 2) **bendrąjį neigimą**, žymimą raide „e“ – pirmąją žodžio „nego“ („neigiu“) balse; 3) **dalinį teigimą**, žymimą raide „i“ – antrąją žodžio „afirmo“ balse; 4) **dalinį neigimą**, žymimą raide „o“ – antrąją žodžio „nego“ balse.

Formulė SaP reiškia teiginį „Visi objektai, priklausantys klasei S, priklauso ir klasei P“. Matematinės logikos kalboje ši formulė išreiškiama, naudojantis predikatais S(x) bei P(x) ir bendrumo kvantoriumi $\forall x: \forall x [S(x) \rightarrow P(x)]$.

Konkretus bendrojo teigiančiojo teiginio SaP pavyzdys: „Visi kvadratai yra rombai“.

Formulė SeP reiškia teiginį „Nė vienas objektas, priklausantis klasei S, nepriklauso (negali priklausyti) klasei P“. Matematinės logikos kalba šis teiginys išreiškiamas formule $\forall x[S(x) \rightarrow \neg P(x)]$, arba formule $\neg \exists x[S(x) \wedge P(x)]$.

Konkretus bendrojo neigiančiojo teiginio SeP pavyzdys: „Nė vienas gyvas organizmas nėra uždara sistema“.

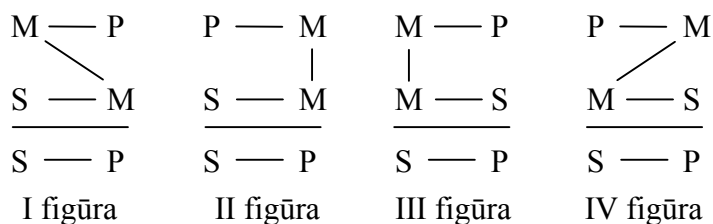
Formulė SiP reiškia teiginį „Kai kurie objektai, priklausantys klasei S, priklauso ir klasei P“. Matematinės logikos kalba tai reiškia $\exists x[S(x) \wedge P(x)]$.

Konkretus dalinio teigiančiojo teiginio SiP pavyzdys: „Kai kurios pirmojo tipo sistemos priklauso dirbtinių sistemų klasei“.

Formulė SoP reiškia teiginį „Kai kurie objektai, priklausantys klasei S, nepriklauso klasei P“. Matematinės logikos kalba tai užrašoma taip: $\exists x[S(x) \wedge \neg P(x)]$.

Konkretus dalinio neigiančiojo teiginio pavyzdys: „Kai kurios sistemos nėra determinuotos“.

Paprastieji kategoriškieji silogizmai priklausomai nuo viduriniojo termino M vaidmens bei vietos prielaidose skirstomi į keturias grupes, vadinamas **paprastojo kategoriškojo silogizmo figūromis** (žiūr. 394 pav.).



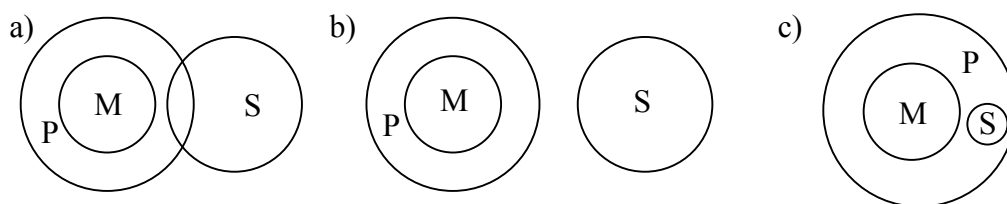
394 pav.

Kiekvienos figūros silogizmai priklausomai nuo loginių ryšių prielaidose išsidėstymo skirstomi į **modus**.

Kadangi yra keturi loginio ryšio tipai ir dvi prielaidos, tai kiekvienoje figūroje galėtų būti po 16 modusų (aa, ae, ai, ao, ea, ee, ei, eo, ia, ie, ii, io, oa, oe, oi, oo), o iš viso – 64 modusai. Atsižvelgę į išvadų įvairovę, gautume $64 \cdot 4 = 256$ galimus modusus.

Tačiau ne kiekviena galima prielaidų kombinacija leidžia gauti apibrėžtą (vienareikšmę) išvadą apie ryšį tarp subjekto S ir predikato P.

Pavyzdžiui, kai pirmojoje figūroje pirmoji prielaida priklauso „a“ tipui, o antroji – „e“ tipui, jokios vienareikšmiškai apibrėžtos išvados apie santykį tarp S ir P, kaip rodo 395 pav., padaryti negalima, nes galimi keli skirtingi atvejai.



395 pav.

Atveju, kurį vaizduoja 395^a pav., kai kurie objektai, priklausantys klasei S, nepriklausydami klasei M, patenka į klasę P; atveju, kurį vaizduoja 395^b pav., nė vienas objektas, priklausantis klasei S, į klasę P nepatenka, o atveju „c“ visi objektai, priklausantys klasei S, priklauso ir klasei P. Taigi, vienais atvejais galėtume gauti išvadą SiP bei SoP, kitais SeP, o dar kitais – SaP, ir reiktų papildomos informacijos, kad galėtume nustatyti, kuri iš galimų išvadų šiuo atveju yra tinkama.

Analogiškai galima parodyti, kad ketvirtoje figūroje, kai pirmoji prielaida priklauso „a“ tipui, o antroji – „i“ arba „o“ tipui, taip pat jokios vienareikšmiškai apibrėžtos išvados apie ryšį tarp S ir P padaryti negalima.

Tokių pavyzdžių galima rasti gana daug. Nesunku įrodyti net kai kurias teoremas: **1) kai abi prielaidos yra neigiamos, tai jokios apibrėžtos išvados gauti**

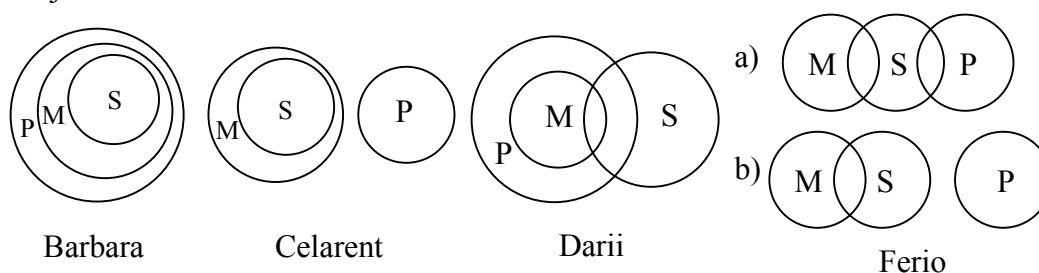
negalima; 2) kai abi prielaidos yra dalinės, taip pat jokios apibrėžtos išvados padaryti negalima.

Tik devyniolikoje atvejų iš 64 gaunamos vienareikšmės stipriausios išvados, t. y., **egzistuoja tik 19 „stipriųjų“ paprastojo kategoriškojo silogizmo modusų.**

Keturi iš jų priklauso pirmajai figūrai, keturi – antrajai, šeši – trečiajai ir penki – ketvirtajai. **Egzistuoja dar 5 taip vadinamieji „silpnieji“ modusai.**

Modusams priskiriami pavadinimai – žodžiai, kuriuose balsės eilės tvarka vaizduoja loginius ryšius tarp terminų abiejose prielaidose ir išvadoje. Tuos žodžius sugalvojo viduramžių scholastai (žiūr. 1.16.1.5.5.2. skyrelį), kad palengvintų Aristotelio silogistikos modusų išiminimą ir taikymą. Šie gana skambūs mnemoniniai pavadinimai prigijo ir išliko iki šių dienų.

Pirmosios figūros modusams buvo priskirti tokie pavadinimai: Barbara, Celarent, Darii, Ferio (žiūr. 396 pav., kuriame parodytos kai kurios būdingos situacijos).



396 pav.

Iš 396 pav. nesunku nustatyti, kad išvados: 1) SaP moduse Barbara, 2) SeP moduse Celarent, 3) SiP moduse Darii ir 4) SoP moduse Ferio tikrai yra teisingos.

Teisingas išvadas duoda ir antrosios figūros modusai Cesare, Camestres, Festino, Baroco, trečiosios – Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo ir Ferison, ketvirtosios – Bramalip, Camenes, Dimaris, Fesapo ir Fresison bei „silpnieji“ – Barbari, Celaront, Cesaro, Cameostro ir Cameno.

Čia išvardintų **modusų teisingumą galima įrodyti ir pasitelkus predikatų skaičiavimą**, apie ką bus kalbama truputi vėliau, t. y. 1.16.1.5.4. skyrelyje. Tiesa, įrodant modusų, kurių pavadinimuose yra raidė „p“, teisingumą predikatų skaičiavime, reikės priimti papildomą prielaidą, kad tam tikros aibės yra netuščios. Įdomu pažymėti, jog tuo metu, kai buvo sudaromi modusai, tuščios aibės dar nebuvo nagrinėjamos ir modusų teisingumas buvo įrodinėjamas atvejams, kai aibės nėra tuščios, tačiau jau tada modusų pavadinimai buvo parinkti taip, kad išskirtų ypatingus atvejus, kada modusų vaizduojamos loginės išvadų gavimo taisyklės galioja tik netuščioms aibėms, kai tuo tarpu visais kitais atvejais tos taisyklės galioja tiek netuščioms, tiek tuščioms aibėms.

Nors dabar sukurtos galingesnės ir universalesnės loginės dedukcinės sistemos – teiginių ir predikatų skaičiavimai, Aristotelio silogistika ir dabar dar nėra tik logikos mokslo istorijos faktas. Dar ir dabar logikos vadovėliuose, skirtuose elementaraus loginio mąstymo pradmenų ugdymui, galima rasti silogizmų aprašymą ir jų modusų panaudojimo pavyzdžių, ypač nagrinėjant tuos ar kitus klaidingų samprotavimų pavyzdžius. Juk iš galimų 256 modusų tik 24 yra teisingi, o iš jų 4 yra teisingi tik tada, kai aibės yra netuščios. Nuomonė, kad silogizmai nagrinėja ir aprašo tik trivalias situacijas, nėra visiškai teisinga. Pavyzdžiui, iš prielaidų PaM ir MaS tikrai nesunku gauti išvadą PaS, tačiau į klausimą, ar šioje situacijoje galima gauti išvadą, turinčią formą S–P ir, jei galima, tai kokiam tipui turėtų priklausyti loginis ryšys, pažymėtas brūkšneliu, ne tik ne kiekvienas mokinukas, bet ir ne kiekvienas studentas iškart duoda

teisingą atsakymą, ne visada sugeba paaiškinti, kodėl šiuo atveju negalima teigti, jog išvada gali būti teiginiai SaP ir SoP bei kodėl išvada gali būti teiginys SiP, tačiau ir ši išvada gali būti teisinga tik tada, kai aibė $\langle P \rangle$ nėra tuščia. O juk šis atvejis aprašomas vienu iš modusų, būtent ketvirtosios figūros modusas Bramalip. Neveltui dar ir dabar kartais pasirodo rimtų mokslinių straipsnių, skirtų Aristotelio silogistikai.

1.16.1.5.2. Aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos

Dabar pereisime prie šiuolaikinės jau pilnai formalios dedukcinės loginės sistemos – **teiginių skaičiavimo**, kartais vadinamo **propoziciniu skaičiavimu**.

Šią sistemą galima konstruoti dvejopai: 1) naudojantis **aksiomų** ir 2) **natūraliosios dedukcijos** (tame tarpe ir sekvencijų) metodu. Šiame skyrelyje pailiustruosiu pirmojo metodo taikymą, o su antruoju metodu supažindinsiu 1.16.1.5.3. skyrelyje.

Naudojantis **aksiomatinio metodu**, pradžioje parenkama pradinių absoliučiai teisingų teiginių – **aksiomų** – **sistema**, išreiškianti toje sistemoje naudojamų loginių operacijų (loginių ryšių) pagrindines savybes, ir prie tos sistemos pridedamos taip vadinamos **išvedimo taisyklės**, leidžiančios iš duotųjų absoliučiai teisingų formulių – aksiomų – gauti naujas absoliučiai teisingas formules – teoremas, o iš jų ir aksiomų – naujas teoremas ir t. t. Teoremų gavimą iš aksiomų ir/ar jau išvestų teoremų, naudojantis išvedimo taisyklėmis ir tik jomis, vadinsime **teiginių skaičiavimo formulėmis, galinčiomis formalioje aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje, išvedimu**.

Pailiustruosiu tai vienos aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos, naudojančios logines operacijas „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “ ir „ $\neg$ “, kurios **laikomos iš anksto neapibrėžtomis ir apibrėžiamomis pačiomis aksiomomis***, pavyzdžiu.

Šioje sistemoje **elementarius teiginius** žymėsime didžiosiomis lotyniškėmis raidėmis A, B, C, D ir t. t., o **sudėtingus teiginius**, sudarytus iš elementarių teiginių, jungiant pastaruosius **loginėmis jungtimis** (loginių operacijų ženklais $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$) – didžiosiomis gotiškėmis raidėmis $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ir t. t. Bendrumo dėlei **loginėmis formulėmis** galėsime vadinti ir elementarius teiginius, kuriuos taip pat galėsime žymėti ne tik didžiosiomis lotyniškėmis, bet ir gotiškėmis raidėmis. Tais atvejais, kai norėsime parodyti, jog kokie nors elementarūs teiginiai (pavyzdžiui, A arba B) įeina į kokios nors formulės (pavyzdžiui, $\mathcal{A}$ arba $\mathcal{B}$) sudėtį, tai tą elementarų teiginį vaizduosime kaip formulės argumentą (pavyzdžiui, $\mathcal{A}(A)$, $\mathcal{B}(B)$, $\mathcal{A}(A, B)$ ir pan.).

Žymeniu $S_A^{\mathcal{A}}[\mathcal{A}(A)]$ žymėsime **superpozicijos S rezultatą**, kuris gaunamas iš formulės $\mathcal{A}(A)$, įstačius į ją vietoj kiekvieno įeinančio į šią formulę elementaraus teiginio A formulę $\mathcal{B}$. Pavyzdžiui: $S_A^{\mathcal{R}}[A \rightarrow (B \rightarrow A)] = \mathcal{R} \rightarrow (B \rightarrow \mathcal{R})$; $S_C^{\mathcal{A}}[(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))] = (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A))$; $S_{A,B}^{\mathcal{R},\mathcal{A}}[A \rightarrow (B \rightarrow A)] = \mathcal{R} \rightarrow (A \rightarrow \mathcal{R})$.

Formulės išvedamumą žymėsime ženklu „ $\vdash$ “. Pavyzdžiui, tą faktą, jog iš formulių $A \rightarrow B$ ir $B \rightarrow C$ išvedama formulė $A \rightarrow C$, žymėsime $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$.

Prisimindami iš 1.16.1.2. skyrelio, jog ši išvada nėra pati stipriausia, galima užrašyti ir tokią – stipresnę – formulę: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C(A \rightarrow B)$.

* Būdus, kuriuo čia naudojames, netiesiogiai apibrėždami įvedamus loginių operacijų žymėjimus, „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “, „ $\neg$ “ bei pačias tas operacijas, yra dar vienas **implicitinio apibrėžimo**, apie kurį buvo rašyta 1.5.5. skyrelyje pavyzdys. Rekomenduočiau skaitytojui dar kartą paskaityti tą skyrelį.

Kadangi aksiomos yra pirminės prielaidos, kurios iš niekur neišvedamos (kitai tariant, išvedamos „iš niekur“, t. y. iš tuščios aibės prielaidų), tai aksiomose ženklelis „ $\vdash$ “ rašomas aksiomai iš kairės, paliekant kairiąją formulės pusę (į kairę nuo ženklelio „ $\vdash$ “, kur turėtų būti rašomos formulės, iš kurių išvedamos naujos formulės) tuščią. Pavyzdžiui, aksioma $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ užrašoma taip: $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Išvedamas formules (aksiomas ir teoremas) sutrumpintai žymėsime gotiška raide $\mathfrak{R}$ (nuo vokiško žodžio „recht“).

Tą faktą, kad iš formulių $\mathfrak{U}$ ir $\mathfrak{B}$ logiškai išplaukia formulė $\mathfrak{C}$, galėsime žymėti ne tik formule $\mathfrak{U} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, bet ir formule $\frac{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$. Toks žymėjimas kartais būna labiau patogus nei žymėjimas $\mathfrak{U} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, nes leidžia gana paprastai atvaizduoti ir tokį faktą, jog iš formulių $\mathfrak{U}$ ir $\mathfrak{B}$ išvedamumo išplaukia formulės $\mathfrak{C}$ išvedamumas: $\frac{\vdash \mathfrak{U}, \vdash \mathfrak{B}}{\vdash \mathfrak{C}}$.

Nagrinėjamoje aksiomatinėje sistemoje, aprašytoje knygoje [251], yra 11 aksiomų. Pirmosios dvi imlicitiškai apibrėžia loginę jungtį „ $\rightarrow$ “, išreikšdamos jos savybes, kitos trys – loginę jungtį „ $\wedge$ “, dar kitos trys – „ $\vee$ “ ir paskutinės trys – jungtį „ $\neg$ “.

Štai šios aksiomos:

A.I.1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$,

A.I.2. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

A.II.1. $\vdash A \wedge B \rightarrow A$,

A.II.2. $\vdash A \wedge B \rightarrow B$,

A.II.3. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$;

A.III.1. $\vdash A \rightarrow A \vee B$,

A.III.2. $\vdash B \rightarrow A \vee B$,

A.III.3. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$;

A.IV.1. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$,

A.IV.2. $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$,

A.IV.3. $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$.

Galima buvo išplėsti loginių jungčių sąrašą, įvedant dar vieną jungtį, pavyzdžiui „ $\leftrightarrow$ “.

Tuomet būtų reikalinga tą jungtį apibrėžti, įvedant papildomas aksiomas (prisiminkite 1.5.5. skyrelyje aprašytą „aksiomatinį“ sąvokų apibrėžimą):

12. $\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$,

13. $\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Vietoje šių dviejų papildomų aksiomų galima būtų apsiriboti ir viena aksioma $\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$, arba $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Tačiau mes čia nedidinsim pagrindinių jungčių ir aksiomų skaičiaus, o **jungtimi „ $\leftrightarrow$ “ naudosimės kaip pagalbine jungtimi**, leidžiančia sutrumpintai užrašyti formulę $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Tuomet formulę $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$ laikysime to sutrumpinimo ir pagalbinės jungties „ $\leftrightarrow$ “ apibrėžimu.

Panašiu būdu gali būti įvestos bei apibrėžtos ir kitos pagalbinės jungtys. Pavyzdžiui, galima būtų įvesti dar ir jungtį $\oplus: A \oplus B \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. Tačiau mes čia to irgi nedarysime.

Nagrinėjamoji sistema turi dvi **išvedimo taisykles**:

1) „modus ponens“ $\frac{\mathfrak{U}, \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$, reiškiančią, jog iš prielaidų – teiginių $\mathfrak{U}$ ir

$\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$ – išplaukia išvada – teiginys $\mathfrak{B}$;

2) **superpozicijos taisyklę** $\frac{\vdash \mathcal{A}}{\vdash S_A^{\mathfrak{B}}[\mathcal{A}]}$, reiškiančią, kad įstačius į išvedamą

formulę vietoj $\mathcal{A}$ tą formulę įeinančio elementaraus teiginio kokią nors formulę (nesvarbu išvedamą ar neišvedamą), gauname formulę, kuri išlieka išvedama.

Svarbu pažymėti, jog, įstatant į formulę $\mathcal{A}$ formulę $\mathfrak{B}$ vietoj elementaraus teiginio A , būtina **visoje** formulėje $\mathcal{A}$ pakeisti **visus** teiginius A **vienodai**, t. y. tomis pačiomis formulėmis $\mathfrak{B}$, nes tik tuomet iš išvedamos formulės $\mathcal{A}$ gauta formulė $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$ bus taip pat išvedama, tik tuomet iš tapačiai teisingos formulės $\mathcal{A}$ gauta formulė $\mathcal{A}(\mathfrak{B})$ būtinai bus tapačiai teisinga.

Egzistuoja teiginių skaičiavimo sistemos, kuriose nėra tokios išvedimo taisyklės kaip čia aprašytoji superpozicijos taisyklė. Be jos apsieinama tada, kai vietoj aksiomų vartojamos **aksiomų schemos**, vaizduojančios tapačiai teisingų formulių **pagrindines (pirmines) struktūras**, naudojantis kuriomis galima gauti kitas struktūras, užtikrinančias atitinkamų formulių tapatų teisingumą.

Kitaip tariant, aksiomų schemos yra tos pačios aksiomos, o kartu ir visos formulės, kurios išplaukia iš tų aksiomų, panaudojus superpozicijos taisyklę. Taigi, aksiomų schemose superpozicijos taisyklė lyg ir „įmontuota“ ir glūdi jose neišreikštinėje formoje. **Naudojantis aksiomų schemomis, superpozicijos taisykle naudojamosi neišreikštinai, todėl išreikštinėje (eksplikitinėje) formoje superpozicijos taisyklė tampa nebereikalinga.**

Pailiustruosiu, kaip atrodo aksiomų schemos, atitinkančios mūsų nagrinėjamos teiginių skaičiavimo sistemos aksiomas.

A.S.I.1. $\vdash \mathcal{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{A}),$

A.S.I.2. $\vdash (\mathcal{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{C}));$

A.S.II.1. $\vdash \mathcal{A} \wedge \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{A},$

A.S.II.2. $\vdash \mathcal{A} \wedge \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B},$

A.S.II.3. $\vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}));$

A.S.III.1. $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathfrak{C},$

A.S.III.2. $\vdash \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathfrak{B},$

A.S.III.3. $\vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow ((\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}));$

A.S.IV.1. $\vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\neg \mathfrak{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}),$

A.S.IV.2. $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \neg \neg \mathcal{A},$

A.S.IV.3. $\vdash \neg \neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$

Taigi, aksiomų schemos skiriasi nuo aksiomų tik tuo, kad aksiomose vartojami elementarūs teiginiai, vietoj kurių, naudojantis superpozicijos taisykle, gali būti įstatytos bet kokios formulės, o aksiomų schemose – iškart naudojamos gotiškos raidės, reiškiančios bet kokias formules.

Naudojantis aksiomų schemomis, formulių išvedimas sutrumpėja, nes nebereikia įstatinėti formulių vietoj lotyniškų raidžių, reiškiančių elementarius teiginius, kadangi šiuo atveju iškart naudojamos lyg ir tokio įstatymo (superpozicijos) rezultatai, tačiau neįpratusiam prie formalaus formulių išvedimo technologijos tas išvedimas lyg ir pasunkėja (bent jau pradžioje, kol žmogus pripranta prie tokios technologijos).

Atsižvelgiant į tai, kad dauguma šios mokymo priemonės skaitytojų susiduria su formaliu išvedimu pirmą kartą, ir jiems viskas dar labai neįprasta, buvo pasirinktas

ilgesnis, bet paprastesnis (aiškesnis) formulių išvedimo būdas, prasidedantis ne nuo aksiomų schemų, bet nuo aksiomų.

Nesunku įsitikinti, jog, jei priimtume prielaidą, kad teiginių skaičiavimo loginės jungtys „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\rightarrow$ “ ir „ $\neg$ “ reiškia tą patį, ką ir mums įprastos teiginių algebros loginės operacijos „ $\wedge$ “ (konjunkcija), „ $\vee$ “ (disjunkcija), „ $\rightarrow$ “ (materialioji implikacija) ir „ $\neg$ “ (loginis neigimas), tai gautume, jog visos aksiomos (A.I.1, A.I.2; A.II.1, A.II.2, A.II.3; A.III.1, A.III.2, A.III.3; A.IV.1, A.IV.2 ir A.IV.3) yra absoliučiai teisingos formulės, t. y. tapčiai lygios 1.

Patikrinsime, pavyzdžiui, aksiomas A.I.1 ir A.II.1 (žiūr. 328-ąją ir 329-ąją lenteles).

328. lentelė

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv 1$$

329. lentelė

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow A$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$$A \wedge B \rightarrow A \equiv 1$$

Analogiškai galima patikrinti ir visas kitas aksiomas ir įsitikinti, jog visos jos yra tapčiai lygios 1.

Taip pat nesunku patikrinti, kad, naudodamiesi išvedimo taisyklėmis, iš tapčiai teisingų formulių galime gauti tik tapčiai teisingas formules.

Pavyzdžiui, jei $\mathcal{A}=1$ ir $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}=1$, tai iš materialiosios implikacijos operacijos apibrėžimo išplaukia, jog ir $\mathcal{B}=1$. Tai reiškia, jog, naudodamiesi „modus ponens“ išvedimo taisykle, iš tapčiai teisingų formulių $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ negalime gauti formulės, kuri nebūtų tapčiai teisinga.

Iš tapčiai teisingos formulės apibrėžimo išplaukia, jog tapčiai teisinga formulė yra teisinga bet kokioms argumentų reikšmėms, todėl, jei $\mathcal{A}(A)$ tapčiai teisinga formulė, tai teiginio A pakeitimas formule $\mathcal{B}$ negali padaryti formulės $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ neteisinga. O tai reiškia, kad, naudojantis superpozicijos taisykle, iš tapčiai teisingų formulių negalima gauti formulę, kurios nebūtų tapčiai teisingos.

Todėl galima suformuluoti bendrą išvadą: mūsų nagrinėjamoje aksiomatinėje teiginių skaičiavimo sistemoje visos išvedamos formulės gali būti tik tapčiai teisingomis formulėmis.

Ši išvada galioja visoms teiginių skaičiavimo sistemoms, nes visose jose aksiomos ir išvedimo taisyklės kaip tik taip ir parenkamos, kad būtų išvedamos tik tapčiai teisingos formulės.

Tokios teiginių bei predikatų skaičiavimų sistemos, kuriose gali būti išvestos tik tapčiai teisingos formulės, vadinamos neprieštarinomis pagal savo turinį, t. y. kontensyviai, arba substancionaliai (neformaliai, išoriniai) neprieštarinomis.

Iš ką tik gautų rezultatų išplaukia, jog mūsų nagrinėjamoji aksiomatinė teiginių skaičiavimo sistema yra substancionaliai (kontensyviai, t. y. neformaliai) neprieštaringa.

Substancionaliai (neformaliai) neprieštaringos sistemos yra kartu ir formaliai (vidiniai) neprieštaringos sistemos, t. y. tokios sistemos, kuriose negalima išvesti kokią nors formulę ir jos neiginį. Tai įrodyti visai nesunku, nes jei aksiomatinėje sistemoje būtų galima išvesti formulę ir jos neiginį, tai tokia sistema negalėtų būti substancionaliai neprieštaringa, kadangi formulė ir jos neiginys negali vienu ir tuo pačiu metu būti kartu tapčiai teisingomis formulėmis.

Iš to, kas jau pasakyta anksčiau, išplaukia, jog **mūsų nagrinėjamoje aksiomatinėje sistemoje taip pat negalima išvesti formulės ir jos neiginio**, nes visos tos sistemos aksiomos – absoliučiai teisingi teiginiai, išvedimo taisyklės iš absoliučiai teisingų teiginių leidžia gauti tik absoliučiai teisingus teiginius.

Dabar pailiustruosiu, kaip teiginių skaičiavime iš aksiomų, naudojantis išvedimo taisyklėmis, formaliai išvedamos teoremos.

Pavyzdys. Naudodamiesi aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis, išvesime formulę $A \rightarrow A$.

1. Pritaikysime superpozicijos taisyklę A.I.2. aksiomai ir gausime $\vdash S_C^A [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))]$, t. y. formulę $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A))$.

2. Interpretuodami formulę $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ kaip $\mathcal{A}$ ir formulę $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$ kaip $\mathcal{B}$, pasinaudodami modus ponens taisykle ir A.I.1 aksioma, iš pirmajame įrodymo žingsnyje gautos (išvestos) formulės gauname formulę $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$.

Taip padaryti galima todėl, kad iš modus ponens taisyklės $\frac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$ išplaukia (kaip dalinis jos atvejis) šiek tiek silpnesnė taisyklė $\frac{?\mathcal{A}, ?\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}{?\mathcal{B}}$, kuria ir buvo pasinaudota šiame (antrajame) išvedimo žingsnyje.

3. Pritaikysime superpozicijos taisyklę formulei $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$, kuri buvo gauta antrajame išvedimo žingsnyje. Gausime $\vdash S_B^{(A \rightarrow B)} [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)]$, t. y. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$.

4. Gautai formulei, pasinaudodami A.I.1. aksioma, pritaikysime modus ponens taisyklę:

$$\frac{\vdash \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}), \vdash (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})}{\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}}.$$

Gauname formulę $\vdash A \rightarrow A$, kurią ir reikėjo išvesti.

Tą formulę galime vadinti mūsų nagrinėjamos **aksiomatinės teiginių skaičiavimo sistemos teorema**. Pažymėsime ją T.1.

Teoremos T.1. $\vdash A \rightarrow A$ išvedimo procedūra galima buvo užrašyti žymiai trumpiau, išrašant tik kiekvieno išvedimo žingsnio rezultatus, palydint juos paimtu į figūrinius skliaustus trumpu komentaru, paaiškinančiu, kaip ir iš kur tas rezultatas buvo gautas:

1. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)) \{S_C^A [A.I.2]\};$
2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A) \left\{ MP : \frac{\vdash A.I.1, \vdash 1}{\vdash 2} \right\}, \text{ arba } \{MP(A.I.1., (1))\};$
3. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \{S_C^{(B \rightarrow A)} [2]\};$
4. $\vdash A \rightarrow A \{MP(A.I.1, (3))\}.$

Dabar jau galime apibrėžti, ką vadina formulės (teoremos) išvedimu teiginių skaičiavime.

Formulės (teoremos) išvedimu teiginių skaičiavime vadina formulių (eilučių) seką, kurioje: 1) kiekviena formulė yra arba aksioma, arba anksčiau išvesta teorema, t. y. formulė, gauta iš aukščiau esančių (anksčiau gautų) tos sekos formulių bei aksiomų, naudojantis išvedimo taisyklėmis, ir kurioje 2) **paskutinė sekos formulė yra ta formulė, kurią reikėjo išvesti**.

Kai žodis „išvedimas“ suprantamas kaip tam tikras procesas tuomet formulės (teoremos) išvedimu teiginių skaičiavime vadina aukščiau minėtosios sekos, tenkinančios nurodytus du reikalavimus, sudarymo procesą.

Svarbu pažymėti, kad, **išvedant formulę formalioje sistemoje, leidžiama naudotis tik tos sistemos aiškiai apibrėžtomis vidinėmis priemonėmis (aksiomomis ir išvedimo taisyklėmis) ir neleidžiama naudotis jokiais kitomis priemonėmis bei samprotavimais, kokie logiškai pagrįsti tie samprotavimai beatrodytų.**

Tuo formalios sistemos **vidinių teoremų išvedimas** skiriasi nuo **teoremų apie formalią sistemą**, vadinamų tos sistemos atžvilgiu **metateoremomis, įrodymo.**

Įrodant metateoremą apie sistemą, leidžiama naudotis ir priemonėmis, neapibrėžtomis tos sistemos viduje, tačiau logiškai pagrįstomis platesnėje teorijoje, vadinamoje **metateorija (metasistema)** nagrinėjamos formalios sistemos (formalios teorijos) atžvilgiu.

Pavyzdžiui, $T1 \vdash A \rightarrow A$ yra formalios sistemos, vadinamos teiginių skaičiavimu, teorema (vidinė teorema, **išvedama** vien tik to skaičiavimo priemonėmis). O teiginys, jog **teiginių skaičiavimas yra neformaliai neprieštaringa sistema**, t. y. sistema, kurioje gali būti išvestos tik tapačiai teisingos formulės, yra metateorema teiginių skaičiavimo atžvilgiu, nes ji **įrodoma**, pasitelkus **loginių operacijų interpretacijas, nepriklausančias teiginių skaičiavimui**. Tos operacijos ir jų interpretacijos priklauso kitai sistemai – teiginių algebrai, kuri yra metasistema teiginių skaičiavimo atžvilgiu. Todėl formaliųjų sistemų teorijose ir metateorijose sąvokos „**teoremos išvedimas**“ ir „**teoremos įrodymas**“ laikomos šiek tiek skirtingomis.

Ką formaliose teorijose vadina formulių bei jomis išreikštų teoremų **išvedimu**, mes jau esame apibrėžę: ir kaip tam tikrą konstrukciją (formulių seką), ir kaip tos konstrukcijos sudarymo procesą.

Metateoremos apie formalią sistemą ir teoremos formalioje sistemoje **įrodymu** vadinsime tokią konstrukciją (ir jos sudarymo procesą), kurių **sintaksinis taisyklingumas užtikrina jų semantinį teisingumą**.

Plačiau apie metasistemas, teoremas ir metateoremas skaitytojai gali rasti šių eilučių autoriaus knygelėje [53], o dar plačiau – knygoje [252]. Knyga [252] ir knygelė [53] viena kitą papildo: knygoje [252] skaitytojas susipažins su **metamatematikos** teoriniais pagrindais, o knygelėje [53] ras metateoremų apie teiginių skaičiavimą įrodymus ir kelių dešimčių teiginių skaičiavimo teoremų išvedimą. Išstudijavus knygelę [53], taps lengviau suprantamas gana abstrakčiai išdėstytas knygos [252] tekstas.

Čia apsiribosiu tik pirmųjų keturių labai paprastų teoremų išvedimo iliustracija.

Išvesime teiginių skaičiavimo teoremą $T2 \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$:

1. $\vdash (A \wedge B \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge C)) \{S_C^{A \wedge B} [A.II.3]\};$
2. $\vdash ((A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge C)) \{MP: (A.II.2, (1))\};$
3. $\vdash ((A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow (B \wedge A))) \{S_C^A [2]\};$
4. $\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A \{MP: (A.II.1, (3))\}.$

Iš teoremos $T2$, pritaikę superpozicijos taisyklę $S_{A,B}^{B,A} [T2]$, gauname $T3 \vdash B \wedge A \rightarrow A \wedge B$.

Iš teoremų $T2$ ir $T3$ išplaukia, jog operacija „ $\wedge$ “, aprašytoji mūsų nagrinėjamos sistemos aksiomomis, yra komutatyvi.

Išvesime dar vieną pagalbinę teiginių skaičiavimo formulę (teoremą – schemą), kuri reikalinga išvedant kai kurias kitas teiginių skaičiavimo ir predikatų skaičiavimo formules.