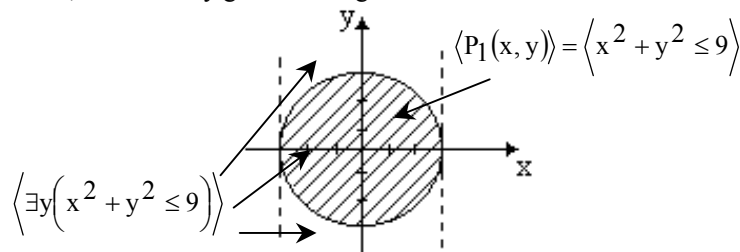


Tuomet duotąją lygčių sistemą galima aprašyti taip:

$$\begin{cases} \{[\exists y P_1(x, y) \vee P_2(x, y)] \rightarrow [P_1(x, y) \wedge \forall x P_2(x, y)]\} = 1, \\ \exists x \neg P_2(x, y) \rightarrow P_1(x, y) = 1. \end{cases}$$

Predikatas $\exists y P_1(x, y) = \exists y (x^2 + y^2 \leq 9)$ yra vieno objektinio kintamojo x predikatas $P_3(x) = (-3 \leq x \leq 3)$. Tuo įsitikinti ir gauti predikatą $P_3(x)$ galima net dviem būdais: 1) nagrinėjant 356 pav. ir 2) išreiškiant iš nelygybės $x^2 + y^2 \leq 9$ objektinį kintamąjį y ir nagrinėjant klausimą, esant kokioms kintamojo x reikšmėms, kintamasis y gali realiai egzistuoti.



356 pav.

1. Naudojantis pirmuoju būdu, iš 356 pav. nesunku pastebėti, jog predikatas $\exists y P_1(x, y)$ yra teisingas srityje, kuri yra predikato $P_1(x, y)$ teisingumo srities $\langle P_1(x, y) \rangle$ – skritulio, turinčio centrą koordinačių pradžios taške $x=0, y=0$ ir spindulį $R=3$, projekcija lygiagrečiai y -ų ašiai į x -y ašį, t. y. $\langle \exists y P_1(x, y) \rangle = \text{pr}_{|y} \langle P_1(x, y) \rangle$, todėl $\exists y (x^2 + y^2 \leq 9) = (-3 \leq x \leq 3)$, nes esant tokioms ir tik tokioms kintamojo x reikšmėms, egzistuoja nors viena kintamojo y reikšmė, tenkinanti predikatą $P_1(x, y) = (x^2 + y^2 \leq 9)$.

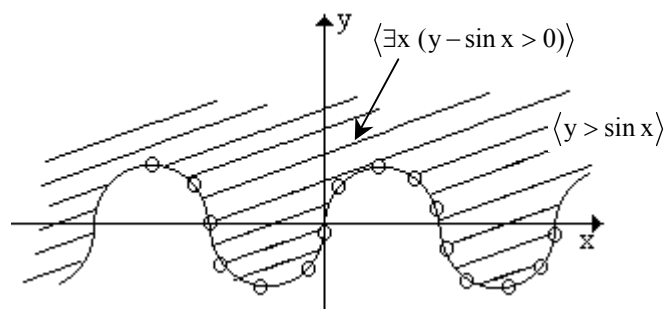
Kitaip tariant, **predikatas $\exists x_j P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ yra teisingas (t. y. jo reikšmė lygi loginiam vienetui) toje n -matės erdvės srityje, kuri gaunama predikato $P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ teisingumo sritį $\langle P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \rangle$ projektuojant lygiagrečiai koordinačių ašiai x_j .**

2. Naudodamiesi antruoju būdu ir iš nelygybės $x^2 + y^2 \leq 9$, išreikšdami y , gauname $y \leq \sqrt{9 - x^2}$, iš kur išplaukia, jog reali kintamojo y reikšmė gali egzistuoti tik tada, kada $|x| \leq 3$, t. y., kada $-3 \leq x \leq 3$.

Predikatą $\forall x P_2(x, y) = \forall x (y - \sin x \leq 0)$ galima pertvarkyti, pereinant nuo bendrumo kvantoriaus $\forall$ prie egzistavimo kvantoriaus $\exists$, naudojantis tapatybe $\neg \forall x P(x, y) \equiv \exists x \neg P(x, y)$, teigiančia akivaizdžią tiesą: „jei netiesa, jog predikatas $P(x, y)$ yra teisingas bet kokiai x reikšmei, tai turi egzistuoti bent viena tokia x reikšmė, kad tas predikatas būtų neteisingas“.

Todėl $\forall x P_2(x, y) \equiv \neg \neg \forall x P_2(x, y) \equiv \neg \exists x \neg P_2(x, y)$, t. y. $\forall x (y - \sin x \leq 0) \equiv \neg \exists x \neg (y - \sin x \leq 0) \equiv \neg \exists x (y - \sin x > 0)$.

Predikato $\exists x (y - \sin x > 0)$ teisingumo sritį gausime projektuodami predikato $y - \sin x > 0$ (arba, kas tas pats – predikato $y > \sin x$) teisingumo sritį lygiagrečiai x -ų ašiai (žiūr. 357 pav.).



357 pav.

Iš 357 pav. matyti, jog $\exists x (y - \sin x > 0) \equiv (y > -1)$, kitaip tariant, jei $y > -1$, tai egzistuoja bent viena tokia x reikšmė x^* , kad $y > \sin x^*$.

Tai išplaukia ir iš nelygybės $y - \sin x > 0$, kai bandome ją spręsti x atžvilgiu ir nagrinėjame, kokioms kintamojo y reikšmėms esant tas sprendinys egzistuoja: jei $y > -1$, tai visuomet rasime tokią x reikšmę x^* , kad būtų tenkinama nelygybė $\sin x^* < y$.

Kadangi $\forall x (y - \sin x \leq 0) \equiv \neg \exists x (y - \sin x > 0)$, tai $\forall x (y - \sin x \leq 0) \equiv \neg (y > -1) \equiv (y \leq -1)$.

Gautas rezultatas atitinka kvantoriaus $\forall x$ prasme: tikrai, jei $y \leq -1$, tai esant bet kokiai x reikšmei (kitai tariant, visoms x reikšmėms) bus tenkinama nelygybė $y \leq \sin x$.

Pažymėsime predikatą $\forall x(y - \sin x \leq 0) \equiv \neg \exists x(y - \sin x > 0) \equiv y \leq -1$ žymeniu $P_4(y)$.

Tuomet duotąją predikatinę lygčių sistemą galėsime užrašyti taip: $\{[P_3(x) \vee P_2(x, y)] \rightarrow [P_1(x, y) \wedge P_4(y)]\} = 1$, $[\neg P_4(y) \rightarrow P_1(x, y)] = 1$.

Predikatai $P_1(x, y) = (x^2 + y^2 \leq 9)$ ir $P_3(x) = \exists y P_1(x, y) = \exists y (x^2 + y^2 \leq 9)$ nėra nepriklausomi, nes egzistuoja tapatybė $[P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow \exists x_j P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)] \equiv 1$. Todėl, sprendžiant duotąją sistemą, tikslinga prie jos prijungti lygybę $[P_1(x, y) \rightarrow \exists y P_1(x, y)] \equiv 1$, t. y. $[P_1(x, y) \rightarrow P_3(x)] \equiv 1$.

Analogiškai, remdamiesi tapatybe $[\forall x_{ij} P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)] \equiv 1$, gauname, jog predikatai $P_2(x, y) \equiv (y - \sin x \leq 0)$ ir $P_4(y) \equiv \forall x (y - \sin x \leq 0) \equiv (y \leq -1)$ taip pat yra priklausomi, t. y., jog galioja lygybė $[P_4(y) \rightarrow P_2(x, y)] = 1$, kurią tikslinga prijungti prie duotos lygčių sistemos.

Interpretuodami elementarius predikatus $P_1(x)$, $P_2(x, y)$, $P_3(x)$, $P_4(y)$ kaip kintamuosius teiginius P_1, P_2, P_3, P_4 , gauname tokią teiginių algebros lygčių sistemą:

$$\begin{cases} [(P_3 \vee P_2) \rightarrow (P_1 P_4)] = 1, \\ (\neg P_4 \rightarrow P_1) = 1, \\ P_1 \rightarrow P_3 = 1, \\ P_4 \rightarrow P_2 = 1. \end{cases}$$

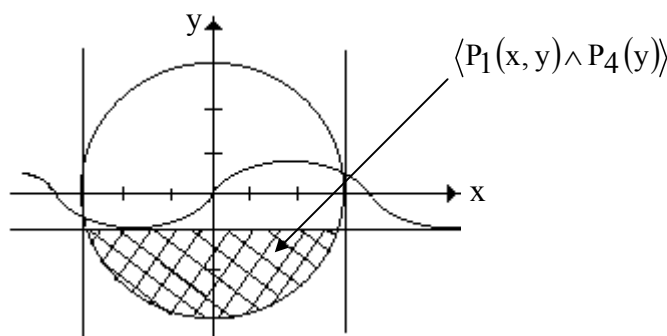
Pereidami prie Bulio algebros lygčių, gauname $\bar{P}_3 \bar{P}_2 \vee P_1 P_4 = 1$, $P_4 \vee P_1 = 1$, $\bar{P}_1 \vee P_3 = 1$, $\bar{P}_4 \vee P_2 = 1$, iš kur išplaukia $(\bar{P}_3 \bar{P}_2 \vee P_1 P_4) \cdot (P_4 \vee P_1) \cdot (\bar{P}_1 \vee P_3) \cdot (\bar{P}_4 \vee P_2) = 1$.

Įvykdę kairėje lygybės pusėje loginę daugybą, gauname, jog $P_1 P_2 P_3 P_4 = 1$, t. y., jog $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$, $P_4 = 1$.

Pereidami prie kiekybinės algebros, gauname:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y - \sin x \leq 0, \\ -3 \leq x \leq 3, \\ y \leq -1. \end{cases}$$

Spręsdami šią sistemą grafiškai ir užstrichuodami tą sritį, kurios taškų koordinatės tenkina visas iš šią sistemą įeinančias nelygybes, gauname (žiūr. 358 pav.):



358 pav.

Tai reiškia, jog duotosios predikatinės lygčių sistemos sprendinys, yra tų plokštumos (x, y) taškų koordinatės, kurios priklauso užstrichuotam skritulio sektoriui, t. y. uždarai sričiai, kurios taškų koordinatės tenkina nelygybes $(x^2 + y^2 \leq 9)$ ir $y \leq -1$.

Kitai tariant, duotąją predikatinę lygčių sistemą galima supaprastinti, suvedant ją į predikatinę lygtį $[(x^2 + y^2 \leq 9) \wedge (y \leq -1)] = 1$, t. y. į lygtį $P_1(x, y) \wedge \forall x P_2(x, y) = 1$.

Analogiškai sprendžiamos ir **mišrios klasikinės matematinės logikos lygtys bei jų sistemos**, į kurių sudėtį įeina ir elementarūs bei sudėtingi predikatai, ir elementarūs bei sudėtingi kintantys teiginiai, ir elementarūs bei sudėtingi pastovūs teiginiai.

Analogiškai, kaip buvo parodyta 1.16.1.2.4. skyrelyje, galima operuoti su situaciniais, normatyviniais bei motyvaciniais modeliais ir iš jų išplaukiančiais sprendiniais, kai į tų modelių sudėtį įeina ne tik teiginiai, bet ir predikatai, t. y. galima tikrinti tų modelių suderinamumą, surasti prieštaravimus, tuos prieštaravimus eliminavus, galima ieškoti iš tų modelių išplaukiančių išvadų, o taip pat, žinant sprendinius bei situacinius ir normatyvinius modelius, ieškoti motyvacinių modelių.

Vykdamas šias operacijas, tenka susidurti su rimtais sunkumais, išplaukiančiais iš tos aplinkybės, kad modeliai ne visada būna determinuoti.

1.16.1.2.6. Tikimybinės teiginių algebras lygčių ir jų sistemų sprendimas

Sprendžiant tikimybinės logikos lygtis bei jų sistemas, pradžioje tikslinga, pasiliekančiam matematinės logikos formulių stratoje, maksimaliai supaprastinti tas lygtis bei jų sistemas, naudojantis matematinės logikos aparatu – logikos dėsniais, išreikštais matematinės logikos kalba. Tai – **pirmasis tikimybinės logikos lygčių bei jų sistemų sprendimo etapas**.

Bulio algebras formulių (tapatybių), išreiškiančių logikos dėsnius, sąrašą galima rasti [52] (žiūr. 15-17 puslapius), o čia paminėsiu tik kai kuriuos svarbesnius dėsnius iš to sąrašo:

- 1) dvigubo neigimo dėsnį $\overline{\overline{A}} \equiv A$;
- 2) konjunkcijos komutatyvumo dėsnį $A \wedge B \equiv B \wedge A$;
- 3) disjunkcijos komutatyvumo dėsnį $A \vee B \equiv B \vee A$;
- 4) konjunkcijos asociatyvumo dėsnį $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$;
- 5) disjunkcijos asociatyvumo dėsnį $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$;
- 6) konjunkcijos distributyvumo disjunkcijos atžvilgiu dėsnį $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
- 7) disjunkcijos distributyvumo konjunkcijos atžvilgiu dėsnį $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
- 8) dualumo dėsnius (de Morgano dėsnius) $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ ir $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$;
- 9) idempotentiškumo dėsnius: $A \wedge A \equiv A$ ir $A \vee A \equiv A$;
- 10) prieštaros dėsnį $A \wedge \overline{A} \equiv 0$;
- 11) “tertium non datur” dėsnį $A \vee \overline{A} \equiv 1$;
- 12) elementaraus suklijavimo dėsnius: $(A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B) \equiv A$ ir $(A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee B) \equiv A$;
- 13) elementarios absorbcijos dėsnius: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ ir $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;
- 14) išskaidymo dėsnius: $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ ir $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$,
 $F(X_1, \dots, X_m) \equiv [\overline{X}_j \wedge F(X_1, \dots, X_{j-1}, 0, X_{j+1}, \dots, X_n)] \vee [X_j \wedge F(X_1, \dots, X_{j-1}, 1, X_{j+1}, \dots, X_n)]$;
 $F(X_1, \dots, X_m) \equiv [\overline{X}_j \vee F(X_1, \dots, X_{j-1}, 1, X_{j+1}, \dots, X_n)] \wedge [X_j \vee F(X_1, \dots, X_{j-1}, 0, X_{j+1}, \dots, X_n)]$;
- 15) veiksmų su 0 dėsnius: $A \wedge 0 \equiv 0$, $A \vee 0 \equiv A$ ir $\overline{0} \equiv 1$;
- 16) veiksmų su 1 dėsnius: $A \wedge 1 \equiv A$, $A \vee 1 \equiv 1$ ir $\overline{1} \equiv 0$; ir t. t.

Supaprastinus logines lygtis bei jų sistemas, pereinama nuo matematinės logikos formulių prie įprastos (kiekybinės) algebras lygčių bei jų sistemų, naudojantis **perėjimo formulėmis**:

- 1) $X_1 \wedge X_2 = x_1 \cdot x_2 / x_1 = x_2 \cdot x_1 / x_2$;
- 2) $X_1 \vee X_2 = x_1 + x_2 - X_1 \wedge X_2$;

$$3) \bar{X} = 1 - x.$$

Šiose formulėse didžiosiomis raidėmis vaizduojami teiginiai bei predikatai, t. y. matematinės logikos formulių komponentai, o mažosiomis raidėmis – skaičiai, išreiškiantys atitinkamas teiginių bei predikatų teisingumo tikimybes – tikimybinės teiginių bei predikatų reikšmes.

Gautos kiekybinės algebros lygtys bei jų sistemos sprendžiamos, naudojantis įprastos algebros matematiniu aparatu. Tai – **antrasis tikimybinės logikos lygčių bei jų sistemų sprendimo etapas**.

Pailiustruosiu tikimybinės logikos lygčių sprendimo procedūrą konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog duota tikimybinės logikos lygčių sistema

$$\begin{cases} X_1 \oplus X_2 = 0,72, \\ X_1 \rightarrow X_2 = 0,84, \\ X_1/X_2 = 0,76, \end{cases}$$

kurią reikia išspręsti, t. y. nustatyti teiginių X_1 ir X_2 tikimybinės reikšmes x_1 ir x_2 , o jei tie teiginiai yra priklausomi, tai ir sąlygines tikimybes x_1/x_2 bei x_2/x_1 .

Pirmasis etapas šiuo konkrečiu atveju yra labai paprastas, todėl jo neišskirsime, o vykdysime kartu su antruoju etapu.

Iš duotos sistemos pirmosios lygties gauname, jog $(X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2) = 0,72$ (1).

Iš antrosios lygties gauname, jog $\bar{X}_1 \vee X_2 = 0,84$, t. y. $\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 = 0,84$, iš kur $X_1 \wedge \bar{X}_2 = 1 - 0,84 = 0,16$ (2).

Iš trečiosios lygties gauname, jog $\overline{X_1 \wedge X_2} = 0,76$, iš kur $X_1 \wedge X_2 = 1 - 0,76 = 0,24$ (3).

Kadangi $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2) = X_1$ ir tuo pačiu metu $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2) = [X_1 \wedge X_2] + [X_1 \wedge \bar{X}_2] - [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \wedge \bar{X}_2)] = [X_1 \wedge X_2] + [X_1 \wedge \bar{X}_2] - 0 = 0,24 + 0,16 = 0,4$, tai gauname, jog $x_1 = 0,4$ (4).

Iš (1) ir (2) gauname: $(X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2) = [X_1 \wedge \bar{X}_2] + [\bar{X}_1 \wedge X_2] - 0 = 0,72$, iš kur $[\bar{X}_1 \wedge X_2] = 0,72 - [X_1 \wedge \bar{X}_2] = 0,72 - 0,16 = 0,56$ (5).

Kadangi $(X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2) = X_2$ ir $(X_1 \wedge X_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2) = [X_1 \wedge X_2] + [\bar{X}_1 \wedge X_2] - 0$, tai iš (3) ir (5) gauname, jog $[X_2] = 0,24 + 0,56 = 0,8$ (6).

Kadangi $[X_1 \wedge X_2] = x_1 \cdot x_2 / x_1 = x_2 \cdot x_1 / x_2$, tai gauname, jog $x_2 / x_1 = \frac{[X_1 \wedge X_2]}{X_1} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6 < x_2$ ir $x_1 / x_2 = \frac{[X_1 \wedge X_2]}{X_2} = \frac{0,24}{0,8} = 0,3 < x_1$, t. y., kad teiginiai X_1 ir X_2 yra priklausomi ir tarp jų egzistuojanti koreliacija yra neigiama.

Sprendžiant tikimybinės logikos lygtis bei jų sistemas, kai loginiai kintamieji $X_1, X_2, \dots, X_n$, kurių reikšmes reikia nustatyti, gali būti priklausomi, reikia atsižvelgti į tai, kad tokiais atvejais nežinomųjų skaičius išauga iki $N = \sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n - 1$, nes tenka

ieškoti ne tik besąlyginių tikimybių $x_1, x_2, \dots, x_n$, bet ir sąlyginių tikimybių $x_2/x_1, \dots, x_n/x_1, x_3/x_2, \dots, x_n/x_{n-1}, x_3/x_1 \wedge x_2, \dots, x_n/x_1 \wedge x_2, x_4/x_1 \wedge x_3, \dots, x_n/x_{n-2} \wedge x_{n-1}, \dots, x_n/x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ reikšmių.

Pavyzdžiui, sprendžiant tikimybinės logikos lygčių sistemą, kai $n=2$, tenka ieškoti $N=2^2-1=3$ nežinomųjų reikšmių (pavyzdžiui, x_1, x_2 ir x_2/x_1). Visas kitas sąlygines tikimybes ($x_1/x_2, x_2/\bar{x}_1$ ir t. t.) galima išreikšti per surastas tris tikimybes:

1) kadangi $x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 / x_1 = x_2 \cdot x_1 / x_2$, tai $x_1 / x_2 = \frac{x_1 \cdot x_2 / x_1}{x_2}$; 2) kadangi

$\bar{x}_1 \wedge x_2 = (1 - x_1) \cdot x_2 / \bar{x}_1 = x_2 \cdot (1 - x_1) / x_2 = 1 - x_1 / x_2$, tai $x_2 / \bar{x}_1 = \frac{1 - x_1 / x_2}{1 - x_1}$ ir t. t.

Jeigu ką tik nagrinėtame pavyzdėlyje būtų buvusios duotos ne trys, o tik dvi loginės lygtys, tai, sprendžiant tokią sistemą vieną iš trijų nežinomųjų būtų galima padaryti laisvuju kintamuoju ir per jį išreikšti kitų dviejų nežinomųjų reikšmes.

Pavyzdžiui, jei būtų buvusi duota tokia dviejų loginių lygčių sistema:

$$\begin{cases} X_1 \oplus X_2 = 0,72, \\ X_1 \rightarrow X_2 = 0,84, \end{cases}$$

tai, sprendžiami ją ir pasirinkdami laisvuju kintamuoju kintamąjį x_2 , būtume gavę $x_1 = x_2 - 0,4$, $x_1/x_2 = 1 - \frac{0,56}{x_2}$, iš kur išplauktų, jog laisvasis kintamasis x_2 galėtų keistis segmente $[0,56; 1]$.

Tuomet x_1 keistųsi segmente $[0,16; 0,6]$, o sąlyginė tikimybė x_1/x_2 – segmente $[0; 0,44]$.

Taigi šiuo atveju tikimybinės logikos lygčių sistema turėtų be galo daug sprendinių, tačiau tarp jų nebūtų sprendinio, atitinkančio atvejį, kai teiginiai X_1 ir X_2 būtų nepriklausomi, nes lygtis

$$x_2 - 0,4 = 1 - \frac{0,56}{x_2} \text{ neturi leistinų sprendinių.}$$

Pridėję prie pirmųjų dviejų lygčių trečiąją lygtį $X_1/X_2 = 0,76$, gautume $\overline{X_1 \wedge X_2} = 0,76$, iš kur išplauktų $x_2 \cdot x_1/x_2 = 0,24$.

Kadangi $x_1/x_2 = 1 - \frac{0,56}{x_2}$, tai gautume, jog $x_2 - 0,56 = 0,24$, iš kur išplauktų $x_2 = 0,8$, $x_1 = 0,4$,

$x_1/x_2 = 1 - \frac{0,56}{0,8} = 0,3$, t. y. tas pats vienintelis sprendinys, kurį jau buvome gavę anksčiau, sprendždami iškart visas tris lygtis.

Taigi, turėdami $2^n - 1$ nepriklausomų ir neprieštarinių tikimybinės logikos lygčių su nežinomaisiais $X_1, X_2, \dots, X_n$, mes galėtume surasti $2^n - 1$ nepriklausomų tikimybių reikšmes, tenkinančias tas lygtis, o po to apskaičiuoti ir visų kitų galimų sąlyginių tikimybių reikšmes. Tokiu būdu surastume visų galimų tikimybių – besąlyginių ir sąlyginių – reikšmes, iš viso $\sum_{k=1}^n C_n^k C_k^1 2^k = n \cdot 2 \cdot 3^{n-1}$ reikšmių.

Rekomenduoju skaitytojui išsivesti šią formulę.

Pavyzdžiui, kai $n=2$ ir kintamieji X_1 ir X_2 yra nepriklausomi teiginiai, tai reikia turėti $2^n - 1 = 3$ nepriklausomas ir neprieštaringas lygtis, kurias išsprendus, pakanka surasti $2^n - 1 = 3$ nepriklausomų tikimybių reikšmes (pav., $[X_1] = x_1$, $[X_2] = x_2$, $[X_2/X_1] = x_2/x_1$ arba $[X_1 \wedge X_2] = x_1 \cdot x_2/x_1$).

Žinodami tas tris tikimybes, galime per jas išreikšti ir po to apskaičiuoti visas likusias $2n3^{n-1} - (2^n - 1) = 12 - 3 = 9$ tikimybes:

$$\begin{aligned} 1) \quad [\overline{X_1}] &= 1 - x_1; \quad 2) \quad [\overline{X_2}] = 1 - x_2; \quad 3) \quad [X_1/X_2] = \frac{[X_2 \wedge X_1]}{x_2} = \frac{[X_1 \wedge X_2]}{x_2} = \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2/x_1}{x_2}, \quad 4) \quad [\overline{X_2}/X_1] = 1 - x_2/x_1; \quad 5) \quad [\overline{X_1}/X_2] = 1 - x_1/x_2 = 1 - \frac{x_1 \cdot x_2/x_1}{x_2}; \\ 6) \quad [X_2/\overline{X_1}] &= \frac{[\overline{X_1} \wedge X_2]}{1 - x_1} = \frac{x_2 - [X_1 \wedge X_2]}{1 - x_1} = \frac{x_2 - x_1 \cdot x_2/x_1}{1 - x_1}; \\ 7) \quad [X_1/\overline{X_2}] &= \frac{[\overline{X_2} \wedge X_1]}{1 - x_2} = \frac{x_1 - [X_1 \wedge X_2]}{1 - x_2} = \frac{x_1 - x_1 \cdot x_2/x_1}{1 - x_2} = \frac{x_1(1 - x_2/x_1)}{1 - x_2}; \\ 8) \quad [\overline{X_1}/\overline{X_2}] &= 1 - x_1/\overline{x_2} = 1 - \frac{x_1(1 - x_2/x_1)}{1 - x_2} = \frac{1 - x_2 - x_1 + x_1 \cdot x_2/x_1}{1 - x_2}; \\ 9) \quad [\overline{X_2}/\overline{X_1}] &= 1 - x_2/\overline{x_1} = 1 - \frac{x_2 - x_1 \cdot x_2/x_1}{1 - x_1} = \frac{1 - x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2/x_1}{1 - x_1}. \end{aligned}$$

Mūsų prieš tai nagrinėtoju atveju: 1) $x_1=0,4$; 2) $x_2=0,8$; 3) $[\overline{X}_1] = 0,6$; 4) $[\overline{X}_2] = 0,2$; 5) $[X_2/X_1] = 0,6$; 6) $[X_1/X_2] = 0,3$; 7) $[\overline{X}_1/X_2] = 0,7$; 8) $[\overline{X}_2/X_1] = 0,4$; 9) $[X_1/\overline{X}_2] = 0,8$; 10) $[X_2/\overline{X}_1] = \frac{14}{15}$; 11) $[\overline{X}_1/\overline{X}_2] = \frac{1}{5}$; 12) $[\overline{X}_2/\overline{X}_1] = \frac{1}{15}$.

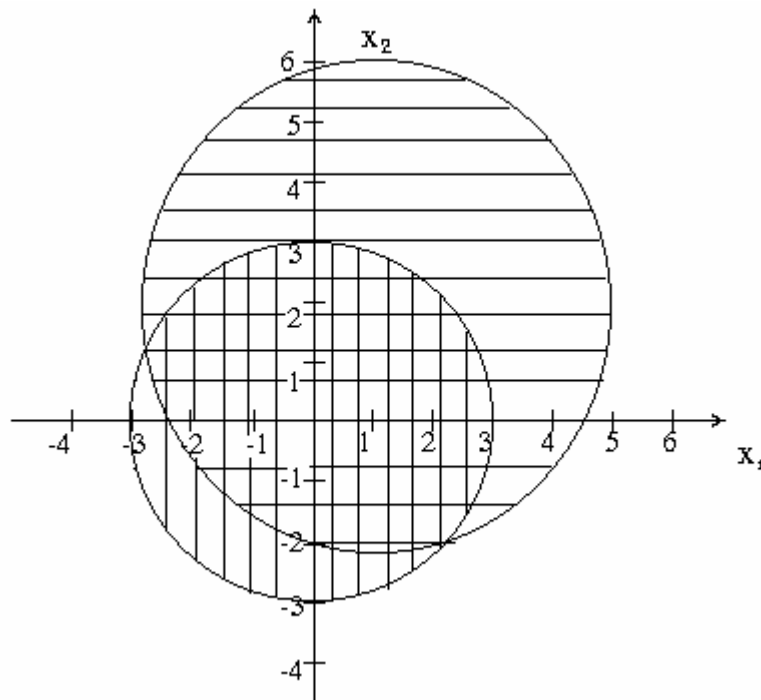
Kai $n=3$ ir kintamieji X_1, X_2, X_3 – nepriklausomi teiginiai, tai norint gauti skaitines tų teiginių teisingumo reikšmes, reikia turėti $2^n-1=7$ nepriklausomas ir neprieštaringas lygtis. Išsprendus tas lygtis, galima surasti $2^n-1=7$ nepriklausomas tikimybes, o kartu su priklausomomis – iš viso $2n3^{n-1}=54$ tikimybes.

Galima spręsti ne tik tikimybines teiginių algebros lygtis, bet ir **tikimybines predikatinės lygtis bei jų sistemas**.

Tarkime, jog mums duota predikatinų lygčių sistema

$$\begin{cases} P(x, y) \wedge F(x, y) = 0,42, \\ P(x, y) \vee F(x, y) = 0,88, \\ P(x, y) \rightarrow F(x, y) = 0,58, \end{cases}$$

kurioje $P(x, y)$ yra predikatas $x^2+y^2 \leq 9$, o $F(x, y)$ – predikatas $(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 16$ (žiūr. 359 pav., kur pavaizduotos sritys $\langle P(x, y) \rangle$ ir $\langle F(x, y) \rangle$; pirmoji užstričiuota vertikaliais, o antroji – horizontaliais brūkšniais).



359 pav.

Interpretuodami predikatus $P(x, y)$ ir $F(x, y)$ kaip atitinkamus teiginius, gauname tikimybines teiginių algebros lygčių sistemą:

$$\begin{cases} P(x, y) \wedge F(x, y) = 0,42, \\ P(x, y) \vee F(x, y) = 0,88, \\ P(x, y) \rightarrow F(x, y) = 0,58, \end{cases}$$

Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$P + F - 0,42 = 0,88,$$

$$\overline{P} + F - \overline{P} \wedge F = 0,58,$$

$$(P \wedge F) \vee (\overline{P} \wedge F) = F,$$

$$(P \wedge F) + (\overline{P} \wedge F) - 0 = F,$$

$$\overline{P} \wedge F = F - P \wedge F = F - 0,42,$$

$$1 - P + F - F + 0,42 = 0,58,$$

$$\begin{aligned}
P &= 1 + 0,42 - 0,58 = 0,84, \\
F &= 0,88 + 0,42 - P = 1,3 - 0,84 = 0,46, \\
\bar{P} \wedge F &= F - 0,42 = 0,46 - 0,42 = 0,04, \\
(\bar{P} \wedge F) \vee (\bar{P} \wedge \bar{F}) &= \bar{P}, \\
(\bar{P} \wedge F) + (\bar{P} \wedge \bar{F}) &= 1 - P, \\
\bar{P} \wedge \bar{F} &= 1 - P - (\bar{P} \wedge F) = 1 - 0,84 - 0,04 = 0,12, \\
(P \wedge \bar{F}) \vee (P \wedge F) &= P, \\
(P \wedge \bar{F}) + (P \wedge F) &= P, \\
P \wedge \bar{F} &= P - (P \wedge F) = 0,84 - 0,42 = 0,42.
\end{aligned}$$

Gavome, jog $P(x, y) = 0,84$, $F(x, y) = 0,46$, $P(x, y) \wedge F(x, y) = 0,42$, $P(x, y) \wedge \bar{F}(x, y) = 0,42$, $\bar{P}(x, y) \wedge F(x, y) = 0,04$, $\bar{P}(x, y) \wedge \bar{F}(x, y) = 0,12$.

Žinodami predikatus $P(x, y)$ ir $F(x, y)$ bei sritis $\langle P(x, y) \rangle$ ir $\langle F(x, y) \rangle$, pavaizduotas 359 pav., mes galime nustatyti ir keturias sritis $\langle P \wedge F \rangle$, $\langle P \wedge \bar{F} \rangle$, $\langle \bar{P} \wedge F \rangle$ ir $\langle \bar{P} \wedge \bar{F} \rangle$, į kurias predikatai P ir F suskirsto plokštumą (x, y) . Todėl kiekviename plokštumos taške mes galime nustatyti predikatų P , F , $P \wedge F$, $P \wedge \bar{F}$, $\bar{P} \wedge F$ ir $\bar{P} \wedge \bar{F}$ teisingumo tikimybes, esant situacijai, kurią aprašo duotoji lygčių sistema.

Pavyzdžiui taške $x=0$, $y=0$ (ir, bendrai, bet kuriame srities, užstrichuotos dvigubai – vertikaliais ir horizontaliais brūkšniais, taške) predikatas $P(x, y) \leftrightarrow (x^2 + y^2 \leq 9)$ yra teisingas su tikimybe 0,84, predikatas $F(x, y) \leftrightarrow [(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 16]$ yra teisingas su tikimybe 0,46. Tikimybė, kad šios srities taškuose predikatas $P \wedge F$ bus teisingas, nagrinėjamoje situacijoje yra lygi 0,42, o tikimybė, kad bus teisingas predikatas $P \wedge \bar{F}$, yra lygi $1 - 0,42 = 0,58$. Analogiškai gauname, jog šios srities taškuose tikimybė, kad bus teisingas predikatas $\bar{P} \wedge F$, yra lygi $1 - 0,04 = 0,96$, o tikimybė, kad šioje srityje situacijoje, aprašomoje duotąja lygčių sistema, predikatas $\bar{P} \wedge \bar{F}$ bus teisingas bus lygi $1 - 0,12 = 0,88$.

Taip pat galima rasti, kad neužstrichuotos plokštumos (x, y) dalies taškuose esamoje situacijoje predikatų P , F , $P \wedge F$, $P \wedge \bar{F}$, $\bar{P} \wedge F$ ir $\bar{P} \wedge \bar{F}$ tikimybės bus lygios, atitinkamai: $1 - 0,84 = 0,16$; $1 - 0,46 = 0,54$; $1 - 0,42 = 0,58$; $1 - 0,42 = 0,58$; $1 - 0,04 = 0,96$; $0,12$.

Pasikeitus situacijai, t. y. pasikeitus duotajai lygčių sistemai, galėtų pasikeisti (ir dažniausiai pasikeistų) čia išvardintų predikatų teisingumo tikimybės.

1.16.1.3. Trečiosios klasės loginiai uždaviniai

Šios klasės uždaviniams būdinga, kad juos sprenddami mes žinome nagrinėjamo **loginio bloko įėjimo ir išėjimo trajektorijas** (ar pakankamai ilgas jų pradines atkarpas) **ir ieškome to bloko matematinio modelio – to bloko perėjimo ir išėjimo funkcijų**.

Kitaip tariant, turėdami pakankamai daug informacijos apie tiriamos sistemos elgesį įvairiose situacijose ir sprenddami trečios klasės loginį uždavinį, mes **ieškome loginių priklausomybių tarp pirminių faktorių – ieškomų perėjimo ir išėjimo funkcijų argumentų – ir pasekmių – tų funkcijų reikšmių** – ir bandome tas priklausomybes išreikšti matematinės logikos kalba.

Keletą tokių uždavinių mes jau sprendėme. Pavyzdžiui, 1.3. skyriuje, turėdami 2-ją lentelę, kurioje buvo surašyti „juodosios dėžės“ metodu įvykdyto eksperimento rezultatai – determinuoto baigtinio automato įėjimo žodžiai ir reakcija į juos – atitinkami išėjimo žodžiai, nustatėme to automato minimalios būsenų erdvės taškus ir sudarėme to automato išorinį informacinį modelį – 11-ją lentelę. 1.4.6. skyrelyje buvo sudarytas to automato išorinis matematinis modelis, t. y. buvo surastos ir išreikštos matematinės logikos kalba jo perėjimo ir išėjimo funkcijos, o 1.10.3. skyrelyje – to automato vidinis modelis (žiūr. 226 pav.).

Panašų uždavinį reikėjo spręsti ir vykdant užduotis 1.3.13. (žiūr. 13-ją lentelę), 1.4.2. bei 1.4.3 ir eilę 1.10. skyriaus užduočių.

Trečiosios klasės loginių uždavinių aibė gana plati ir marga. Šiame skyrelyje mes apžvelgsime tik kai kuriuos tos klasės poklasius ir tiems poklasiams priklausančių uždavinių pavyzdžius. Šiek tiek daugiau informacijos apie trečiosios klasės loginius uždavinius ir jų sprendimo būdus galima rasti šių eilučių autoriaus knygelėje [110].

1.16.1.3.1. Kombinacinių loginių schemų ir baigtinių automatų projektavimo (normatyvinių vidinių modelių sudarymo) uždaviniai

Kombinacinėmis loginėmis schemomis vadinamos schemos, sudarytos iš blokų, realizuojančių teiginių algebros funkcijas, ir charakterizuojamos ta savybe, kad tų schemų išėjimai kiekvienu momentu vienareikšmiškai priklauso nuo tų schemų įėjimų. Kitaip tariant, kombinacinės loginės schemos neturi atminties, t. y., jų būsena visą laiką išlieka ta pati (prisiminkite 1.3. skyriaus pradžią).

Kombinacines logines schemas galima priskirti baigtinių automatų klasei kaip atskirą tos klasės poklasį, nes kombinacines logines schemas galima laikyti baigtiniais automatais, kurių būsena nepriklauso nuo automato įėjimų ir laikui bėgant nesikeičia.

Baigtiniai automatai – tai diskretaus veikimo schemos, turinčios baigtinį būsenų skaičių bei diskretų kalendorių ir realizuojančios diskretaus argumento diskrečias funkcijas. Priklausomai nuo to, kaip išsidėstę ypatingieji baigtinio automato kalendoriaus taškai laiko koordinatės ašyje, baigtiniai automatai skirstomi į **sinchroninius ir asinchroninius**.

Sinchroniniuose automatuose visi jų sudarantys blokai turi tą patį diskretų kalendorių, kurio ypatinguosius taškus generuoja bendras visam automatui **taktų generatorius**, kuris gali priklausyti pačiam baigtiniam automatui, tačiau gali ir nepriklausyti.

Asinchroniniuose automatuose jo blokų kalendoriaus ypatinguosius taškus generuoja automato aplinka ir patys jo blokai, t. y. automato perėjimo į kitą būseną bei išėjimo signalų išdavimo momentai priklauso nuo ateinančių iš automato aplinkos įėjimo signalų ir nuo automato viduje vykstančių procesų. Todėl vieno ir to paties asinchroninio automato skirtingi blokai gali turėti nevienodus diskrečius kalendorius.

Jei asinchroniniame baigtiniame automate vidinė jo būsena nesikeičia ir todėl automato kalendoriaus ypatingųjų taškų atsiradimas priklauso tik nuo įėjimo signalų, tai toks asinchroninis baigtinis automatas tampa jau mūsų minėtąja kombinacine logine schema.

Baigtinio automato schemą (jo vidinį modelį) sudaro blokai, realizuojantys logines funkcijas, o taip pat į jo sudėtį gali įeiti blokai, galintys kurį laiką išsaugoti automato būseną, t. y., blokai realizuojantys baigtinio automato „atmintį“. Tokiais blokais gali būti jau mums pažįstami trigeriai, vėlinimo blokai, vėlinimo grandelės ir pan. Kuo daugiau būsenų turi baigtinis automatas, tuo daugiau trigerių (ar kitų atminties elementų) reikia to automato schemos sudarymui. Kai automato būsenų skaičius yra k , tai tokio automato schemos sudarymui reikia $\lceil \log_2(k-1) \rceil + 1$ trigerių, kur $\lceil \log_2(k-1) \rceil$ yra sveikoji dvejetainio logaritmo nuo skaičiaus $k-1$ dalis.

Šioje mokymo priemonėje mes jau nagrinėjome kombinacinių schemų ir baigtinių automatų vidinių modelių sudarymo pavyzdžius. Priminsiu kai kuriuos iš jų.

Dvejetainio vienaskilčio sumatoriaus, turinčio tris įėjimus ir du išėjimus, vidinio modelio sudarymas (žiūr. 1.3. skyriaus pradžią bei 1.4.1. skyrelį), o taip pat dvejetainio n -skilčio lygiagretaus veikimo sumatoriaus vidinio modelio sudarymas (žiūr. 1.10.4. skyrelį) – tai baigtinių automatų, turinčių tik vieną nekintamą būseną (o kartu ir kombinacinių loginių schemų), sudarymo pavyzdžiai.

Automatų Nr.1 ir Nr.2 bei Tiūringo mašinos išorinių ir vidinių modelių sudarymo (žiūr. 1.3. skyrių ir 1.4.5., 1.4.7., 1.10.3., 1.10.6. skyrelius), o taip pat nuoseklaus veikimo dvejetainio sumatoriaus vidinio modelio sudarymo (žiūr. 1.7.29., 1.7.31., 1.7.32. ir 1.10.9. užduotis bei 1.11.3. skyrelį)

uždavinys bei tų uždavinių sprendimas – tai baigtinių automatų, turinčių baigtinį skaičių būsenų, projektavimo uždavinių pavyzdžiai.

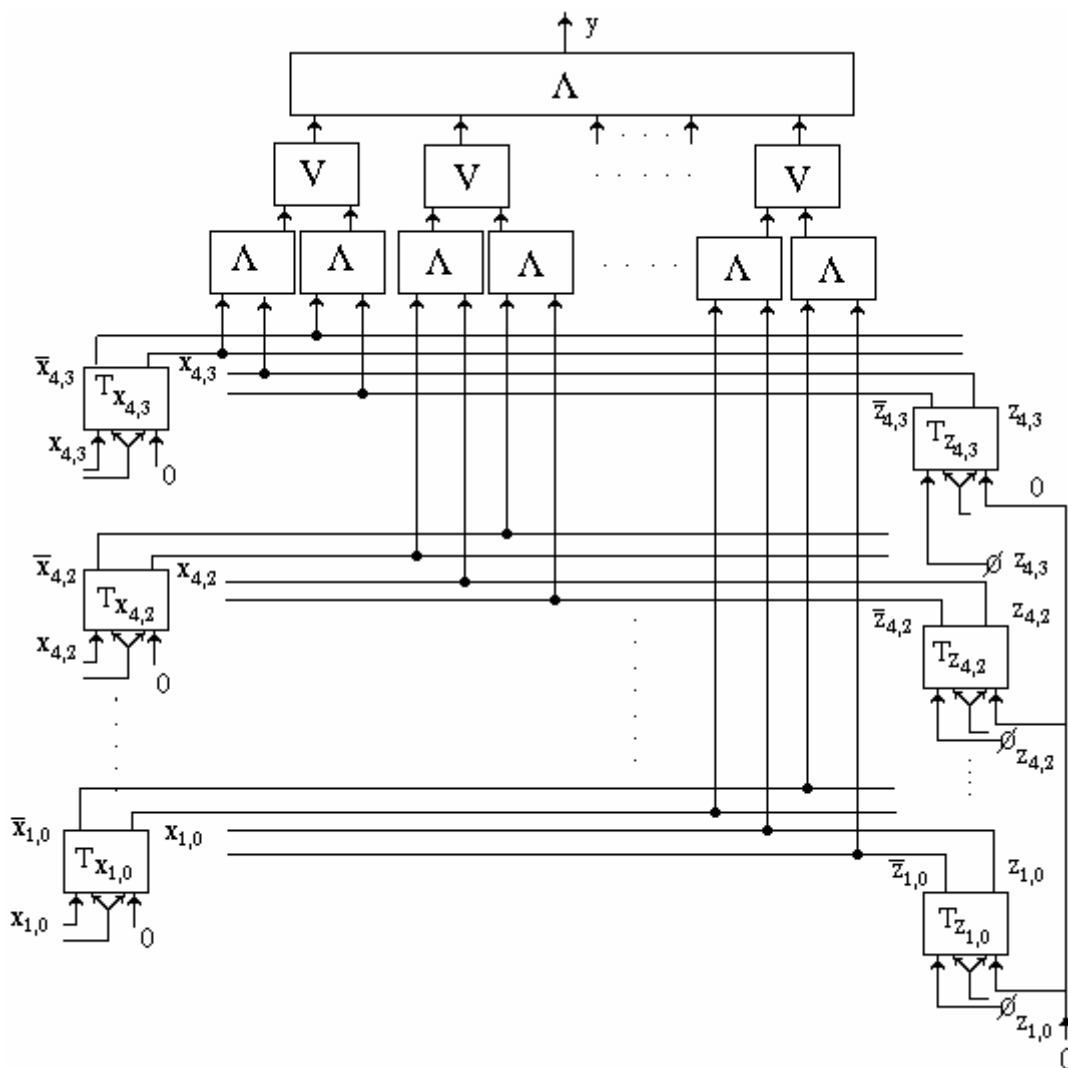
Kadangi čia išvardintieji pavyzdžiai išbarstyti šios mokymo priemonės skyreliuose, turinčiuose savo tikslus, ne visada sutampančius su šio skyrelio tikslais, tai norėdamas, kad skaitytojui būtų lengviau susidaryti bendrą vaizdą apie šio trečiosios loginių uždavinių klasės poklasio uždavinius, išnagrinėsiu dar vieną tokio uždavinio sprendimo pavyzdį.

Tarkime, jog mums reikia suprojektuoti „elektroninį užraktą“ (durims, automobiliams, įėjimui į kompiuterį ir pan.), kuris išimintų mūsų pasirinktą keturženklį dešimtainį skaičių ir „suveiktų“ (t. y. „atidarytų“ įėjimą) tada ir tik tada, kai norintis „atrakinti“ tą „užraktą“ surinktų ir įvestų kaip tik tą skaičių – „elektroninio užrakto“ „raktą“ („slaptažodį“).

Išimintąjį skaičių – „elektroninio užrakto raktą“ – vaizduosime vektoriumi $\vec{Z}$. Tas vektorius dešimtainėje sistemoje turės keturias koordinatas z_1, z_2, z_3, z_4 . Tų koordinatų reikšmės ir bus jau minėtieji keturženklis skaičiaus dešimtainiai skaitmenys. Dvejetainėje sistemoje kiekvieną tokį skaitmenį vaizduos keturženklis dvejetainis kodas. Todėl dvejetainėje sistemoje vektorius $\vec{Z}$ turės 16 koordinatų: $\vec{Z} = (z_{1,3}, z_{1,2}, z_{1,1}, z_{1,0}; z_{2,3}, z_{2,2}, z_{2,1}, z_{2,0}; z_{3,3}, z_{3,2}, z_{3,1}, z_{3,0}; z_{4,3}, z_{4,2}, z_{4,1}, z_{4,0})$.

Analogiškai pažymėsime skaičių, kuris įvedamas, norint atrakinti „užraktą“, vektoriumi $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{1,3}, x_{1,2}, x_{1,1}, x_{1,0}; x_{2,3}, x_{2,2}, x_{2,1}, x_{2,0}; x_{3,3}, x_{3,2}, x_{3,1}, x_{3,0}; x_{4,3}, x_{4,2}, x_{4,1}, x_{4,0})$.

Projektuojamo „elektroninio užrakto“ schemą sudarys trys blokai: 1) vektoriaus $\vec{Z}$ įvedimo ir išvedimo blokas; 2) vektoriaus $\vec{X}$ įvedimo ir užregistravimo blokas; 3) vektorių $\vec{X}$ ir $\vec{Z}$ palyginimo ir sprendimo priėmimo blokas.



360 pav.

Čia nenagrinėsiu pirmojo ir antrojo blokų bei jų elementų (dešimtainės klaviatūros, skirtos dešimtainių skaitmenų įvedimui; schemas, pervedančios dešimtainį kodą į dvejetainį; trigerių registro, skirtą įvedamų skaičių užregistravimui ir išimimui; postūmio schemas, skirtos įvestų dešimtainių

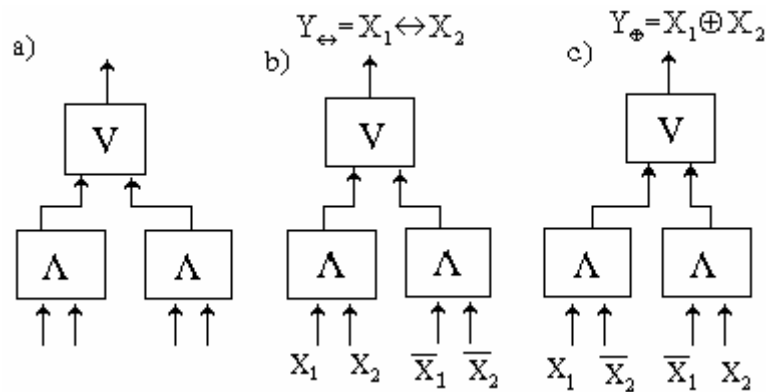
skaitmenų dvejetainių kodų „stūmimui“ trigerių registre į kairę, kad atsirastų laisvos dvejetainės pozicijos įvedamo eilinio dešimtainio skaitmens dvejetainio kodo įrašymui į trigerių registrą), palikdamas tai antrajai šios mokymo priemonės daliai, kurioje bus specialūs skyriai skirti **sistemų tipinių elementų modeliams**, o apsiribosiu trečiuoju bloku, laikydamas, jog, atitinkamai suveikus pirmajam ir antrajam blokui, vektorių $\bar{z}$ ir $\bar{x}$ koordinačių reikšmės x_{ij} ir z_{ij} jau yra saugojamos atitinkamuose trigerių registruose, turinčiuose po 16 trigerių.

Pažymėję signalą, vaizduojantį užrakto atrakinimą, žymeniu y , gauname tokią užrakto atrakinimo sąlygą, išreikštą matematinės logikos kalba:

$$y = \bigwedge_{i=1}^4 \bigwedge_{j=0}^3 (x_{ij} \leftrightarrow z_{ij}) = \bigwedge_{i=1}^4 \bigwedge_{j=0}^3 [(x_{ij} \wedge z_{ij}) \vee (\bar{x}_{ij} \wedge \bar{z}_{ij})] = 1.$$

Šią formulę realizuoja schema, pavaizduota 360 pav., kuriame taip pat pavaizduoti ir vektorių $\bar{z}$ ir $\bar{x}$ koordinačių reikšmes išsimenančių trigerių registrai, priklausantys pirmajam ir antrajam blokams. Postūmio schemas šiame paveiksle neparodytos.

Schema, pavaizduota 361^a pav., vykdo dviejų teiginių palyginimo operaciją. Priklausomai nuo to, kaip prijungiami tos schemas įėjimai, ji gali vykdyti ir operaciją $Y_{\leftrightarrow} = X_1 \leftrightarrow X_2$ (361^b pav.) ir operaciją $Y_{\oplus} = X_1 \oplus X_2$ (361^c pav.).

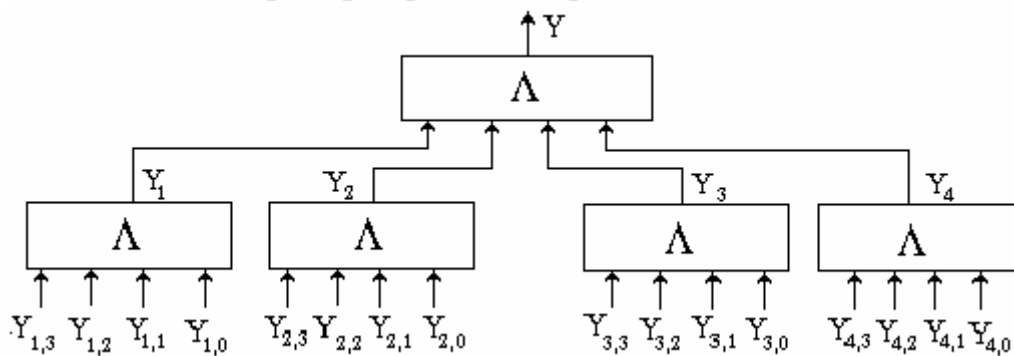


361 pav.

Schemas, pavaizduotos 361^{b,c} pav., išėjimas y tampa lygus 1, kai teiginių X_1 ir X_2 loginės reikšmės yra vienodos (arba abu teiginiai kartu yra teisingi, arba kartu neteisingi), o schemas, pavaizduotos 361^c pav. išėjimas y tampa lygus 1, kai teiginių X_1 ir X_2 loginės reikšmės yra skirtingos.

360 pav. schemas išėjimas y taps lygus 1 tada ir tik tada, kai vektoriai $\bar{x}$ ir $\bar{z}$ bus vienodi. Vietoj tą išėjimą gaminančio konjunktoriaus, turinčio 16 įėjimų, gali būti panaudota hierarchinė konjunktorių schema, pavaizduota 362 pav., kurios žemutiniame lygyje gaunami dešimtainių skaitmenų x_i , z_i lyginimo rezultatai $Y_i = X_i \leftrightarrow Z_i$, o antrajame ešelone gaunamas galutinis rezultatas

$$Y = Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3 \wedge Y_4 = \bigwedge_{i=1}^4 \left[\bigwedge_{j=0}^3 Y_{ij} \right] = \bigwedge_{i=1}^4 \left[\bigwedge_{j=0}^3 (X_{ij} \leftrightarrow Z_{ij}) \right].$$



362 pav.

Schemas, pavaizduotos 362 pav., įėjimai y_{ij} yra schemų, pavaizduotų 361^{b,c} pav., išėjimai.

1.16.1.3.2. Ventilinių schemų modeliavimo, jų analizės ir sintezės uždaviniai

Kito trečios loginių uždavinių klasės poklasio pavyzdys – tai **ventilinių schemų modeliavimo, analizės ir sintezės uždaviniai**.

Ventiline schema vadinama schema, sudaryta iš ventilių, sujungtų laidininkais į tinklą, turintį vieną įėjimą (retkarčiais – kelis įėjimus) ir vieną arba kelis išėjimus.

Ventiliu vadinamas elementas, turintis du įėjimus ir realizuojantis įėjimo signalų konjunkciją. Šis elementas skiriasi nuo paprasto konjunktoriaus tik tuo, kad jo įėjimai nėra funkcionaliai (ir „elektriškai“) ekvivalentūs.

Vienas iš ventilio įėjimų vadinamas **pagrindiniu** ir per tą įėjimą gali tekėti palyginti stipri srovė, antrasis ventilio įėjimas vadinamas **valdymo įėjimu**, nes jo paskirtis tik atidaryti ar uždaryti pirmojo įėjimo kanalą. Valdymo įėjimo srovė ir jo valdymui reikalinga energija dažniausiai yra, lyginant su pagrindinio įėjimo srove ir energija, gana nedidelė (silpna).

Paprasčiausias elektrinio ventilio pavyzdys – elektros srovės įjungiklis. Pagrindinis jo įėjimas – tai įėjimas per elektros laidą, atvedantį elektros srovę į įjungiklį, jo išėjimas – kitas elektros laidas, per kurį išteka elektros srovė, praėjusi įjungtą įjungiklį. Elektros įjungiklio/išjungiklio valdymo įėjimas – tai svirtelė ar mygtukas, į kurį veikdamas (spausdamas ta ar kita kryptimi) žmogus įjungia bei išjungia elektros srovės tekėjimą per įjungiklį/išjungiklį nuo jo pagrindinio įėjimo iki išėjimo ir toliau.

Kitas paprasčiausio ventilio – hidraulinio ventilio – pavyzdys – vandens čiaupas vandentiekio tinkle. Šito ventilio pagrindinis įėjimas – vandentiekio vamzdis, kuriuo vanduo ateina į čiaupą iš vandens tiekimo tinklo. Ventilio išėjimas – čiaupo galas, per kurį vanduo išteka (į kriauklę, vonią ir pan.). Valdymo įėjimas – ta čiaupo dalis, kurią mechanškai veikdamas žmogus čiaupą atidaro bei uždaro.

Elektroninio ventilio pavyzdys – tranzistorius. Jo pagrindinį kanalą, jungiantį pagrindinį įėjimą ir išėjimą, sudaro emiterio ir kolektoriaus grandinė, o valdymo įėjimą – tranzistoriaus bazė, į kurią veikdami elektros potencialu, tranzistorių (t. y. emiterio ir kolektoriaus grandinę) galima atidaryti bei uždaryti (žinoma, galima atidaryti ir uždaryti nepilnai ir tokiu būdu reguliuoti srovės stiprumą).

Dar vienas elektroninio ventilio pavyzdys – radijo lempa, vadinama triodu. Pagrindinį kanalą, jungiantį pagrindinį įėjimą ir išėjimą, sudaro katodo – anodo grandinė, o valdymo įėjimą – triodo tinklėlis („gridlikas“). Veikdami į tinklėlį kintančiu elektros potencialu, mes galime reguliuoti elektros srovę, tekančią pagrindine grandine, bei anodo potencialą (tame tarpe, galime radijo lempą ir visai uždaryti).

Nagrinėsime paprasčiausią ventilinę schemą, kurioje ventiliai gali turėti tik dvi būsenas: 1) pilnai atidaryto ventilio, per kurį teka srovė, 2) pilnai uždaryto ventilio, per kurį srovė visai neteka. Pirmąją būseną Z , pagrindinį išėjimą Y ir valdymo įėjimą X pirmuoju atveju pažymėsime loginiais vienetais ($Z=1$, $Y=1$, $X=1$), antruoju atveju – loginiais nuliais ($Z=0$, $Y=0$, $X=0$).

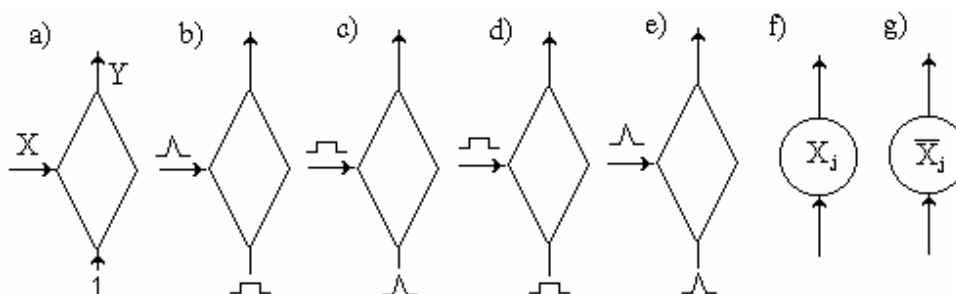
Signalus, ateinančius į ventilio valdymo įėjimą, vadinsime **ventiliniaisiais signalais** ir žymėsime X . Pagrindinį ventilio įėjimą visada laikysime lygiu loginiam vienetui ir niekaip nežymėsime. Iš to, kas pasakytą, išplaukia, jog šiuo paprasčiausiu atveju ventilio išėjimo funkcija bus ventilio įėjimo pakartojimas: $Y=X$. Šią lygybę reikia traktuoti kaip informacinę lygybę, nes energetiniu atžvilgiu Y dažniausiai yra žymiai stipresnis už X .

Ventilio valdymo įėjimui ir jo valdymo signalams būdinga tai, jog tuo atveju, kai į ventilio valdymo įėjimą vienu metu ateina keli ventiliniai signalai, tai valdantis

ventilų signalas bus tų ventilių signalų disjunkcija. Todėl tais atvejais ventilio išėjimą Y galima aprašyti formule: $Y = \bigvee_{i=1}^n X_i$, kur X_i – ventiliniai signalai, ateinantys į ventilio valdymo įėjimą vienu metu.

Elektroninėse schemose ventiliai gali būti vaizduojami šiek tiek ištemptais „rombikais“, kaip parodyta 363^a pav., kur ventilio pagrindinis įėjimas ir išėjimas pavaizduoti rodyklėmis, einančiomis „rombiko“ ištempimo kryptimi, o ventilio valdymo įėjimas – rodykle, einančia statmenai ventilio srovės kryptčiai į vieną iš „rombiko“ kampų, nesutampančią su ventilio pagrindinį įėjimą ir išėjimą vaizduojančiais kampais.

Pagrindinis ventilio įėjimas ir valdymo įėjimas gali būti **impulsiniai** bei **potenciniai**. Įvairūs, galimi atvejai pavaizduoti 363^b÷363^e pav.

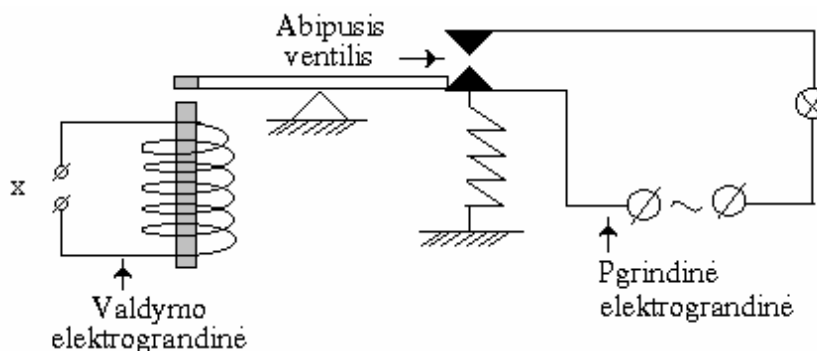


363 pav.

Ventilų galima vaizduoti ir skrituliuku, kaip parodyta 363^f ir 363^g pav., kuriuose parodyti pagrindinis įėjimas ir išėjimas, o valdymo įėjimo reikšmė įrašoma į skrituliuko vidų.

Paprastas **orientuotas (vienos krypties, vienapusis) ventilis** gali praleisti srovę tik į vieną pusę – nuo pagrindinio įėjimo išėjimo link – ir nepraleidžia srovės atvirkščia kryptimi. Tokiam ventilių tipui priklauso ir tranzistoriai ir radijo lempos.

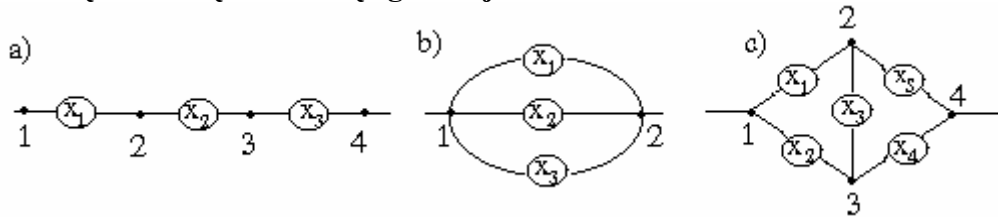
Tačiau yra ir **neorientuotų (abipusių) ventilių**, kurie praleidžia srovę abiem kryptim. Elektros srovės įjungikliai (išjungikliai, perjungikliai), elektromagnetinės relės ir pan. priklauso neorientuotų ventilių klasei. Elektromagnetinėse relėse valdymo signalai (valdymo srovė) patenka į elektromagneto ritelės apvijas ir keičia elektromagneto magnetinį lauką (stiprina ar silpnina jį). Pagrindinė srovė teka per elektromagnetinės relės kontaktus, kurie, veikiant magnetiniam laukui, gali judėti ir tokiu būdu susijungti arba nutolti vienas nuo kito, nutraukdami ryšį tarp elektros srovės grandinės dalių (žiūr. 364 pav.).



364 pav.

Ventilius galima jungti vieną su kitu nuosekliai bei lygiagrečiai, o taip pat į taip vadinamas „tiltelines schemas“ (žiūr. 365^c pav.).

Nuosekliai sujungtų ventilių grandinės aprašomos valdymo signalų konjunkcijomis, lygiagrečiai – tų signalų disjunkcijoms, ir **tarp tokių schemų ir jas aprašančių formulių struktūrų egzistuoja izomorfizmas.**



365 pav.

Tai reiškia, jog turėdami schemas, pavaizduotas 365^a pav. bei 365^b pav., mes galime sudaryti vienareikšmiškai jas aprašančias formules $Y_1 = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$ ir $Y_2 = X_1 \vee X_2 \vee X_3$, o po to pagal tas formules vienareikšmiškai atstatyti tas schemas, nustatydami vienareikšmišką atitikimą tarp schemos ir formulės elementų, tarp ryšių schemoje ir ryšių formulėje (žiūr. izomorfizmo apibrėžimą ir izomorfizmo pavyzdžius 1.8.1. ir 1.8.2. bei 1.9.1.5. skyreliuose).

„Tiltelinės schemas“, pavaizduotos 364^c pav., taip aprašyti jau nepavyksta, nes formulėje $Y_3 = (X_1 \wedge X_5) \vee (X_2 \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (X_2 \wedge X_3 \wedge X_5)$ ventilių valdymo signalai X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 kartojami po kelis kartus, kai tuo tarpu schemoje ventilių, turinčių tuos valdymo signalus, yra tik po vieną. Tai reiškia, jog **formulė $Y_3 = X_1 X_5 \vee X_2 X_4 \vee X_1 X_3 X_4 \vee X_2 X_3 X_5$, funkcionaliai ekvivalentiškai aprašydama schemą 364^c, neatvaizduoja jos struktūros, t. y. schemos ir formulės struktūros nėra izomorfiškos.**

Negausime izomorfiškos formulės ir iškeldami joje kai kuriuos kintamuosius už skliaustelių.

Pavyzdžiui, formulė $Y_3 = X_1(X_5 \wedge X_3 X_4) \vee X_2(X_4 \wedge X_3 X_5)$ taip pat nėra izomorfiška „tiltelinei schemai“, nors ir yra funkcionaliai ekvivalenti jai. Tą patį galima pasakyti ir apie formulę $Y_3 = (X_1 \wedge X_2 X_3) X_5 \vee (X_2 \wedge X_1 X_3) X_4$, kuri taip pat turi jau mažiau raidžių negu funkcionaliai ekvivalentiška abiems šioms formulėms formulė $Y_3 = X_1 X_5 \vee X_2 X_4 \vee X_1 X_3 X_4 \vee X_2 X_3 X_5$.

Nesunku įsitikinti, jog neįmanoma sudaryti loginės formulės, kuri, būdama funkcionaliai ekvivalentiška „tiltelinei schemai“, būtų kartu ir izomorfiška jai. Tai reiškia, jog loginių formulių kalba nėra visiškai pakankama ventilių schemų matematiniam aprašymui, ir reikia ieškoti kitų matematinių modelių, kurie aprašytų ne tik ventilinės schemos išėjimo funkcijas, bet ir schemos struktūrą.

Tai galima padaryti, naudojantis struktūrinėmis matricomis, apie kurias jau rašėme 1.9. skyriuje.

Ventilinės schemos tiesioginių ryšių struktūrinė matrica (arba trumpiau – tiesioginių ryšių matrica) – tai ventilinės schemos matematinis modelis, turintis kvadratinės matricos formą, kurioje eilutės ir stulpeliai atitinka ventilinės schemos mazgus, o matricos langeliuose įrašomos tiesioginių ryšių tarp atitinkamų mazgų charakteristikos bei sąlygos: 0 – kai nuo mazgo, atitinkančio matricos eilutę, iki mazgo, atitinkančio matricos stulpelį, tiesioginio ryšio nėra; 1 – kai minėtieji mazgai pastoviai surišti besąlyginiu ryšiu; kokia tai loginė formulė – kai minėtieji mazgai surišti sąlyginiu ryšiu, tampančiu lygiu vienetui, kai tos formulės reikšmė tampa lygi vienetui, ir nuliui, kai ta reikšmė tampa lygi nuliui.

Ventilinės schemos mazgai vadinami ypatingi tos schemos taškai: 1) schemos įėjimų ir išėjimų taškai – **įėjimo ir išėjimo poliai** (išoriniai mazgai);

2) kiekvieno schemos ventilio pagrindinio įėjimo ir išėjimo taškai – **vidiniai mazgai**. Mazgai numeruojami numeriais – arabiškais skaičiais: 1, 2, 3, 4,...

Pavyzdžiui, schema, pavaizduota 365^a pav. turi 4 mazgus, 365^b – 2 mazgus, 365^c – 4 mazgus. Tas schemas atitinkančios tiesioginių ryšių matricos parodytos 366 pav.

a)

	1	2	3	4
1	1	X_1	0	0
2	X_1	1	X_2	0
3	0	X_2	1	X_3
4	0	0	X_3	1

b)

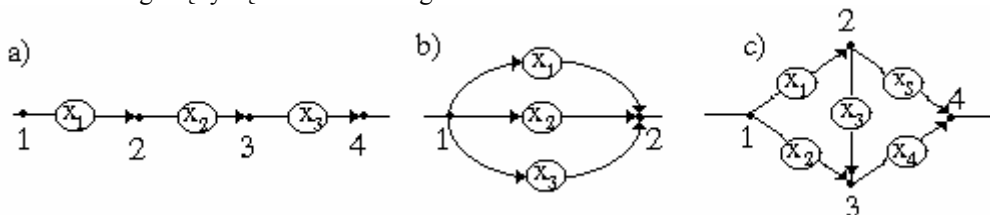
	1	2
1	1	$X_1 \vee X_2 \vee X_3$
2	$X_1 \vee X_2 \vee X_3$	1

c)

	1	2	3	4
1	1	X_1	X_2	0
2	X_1	1	X_3	X_5
3	X_2	X_3	1	X_4
4	0	X_5	X_4	1

366 pav.

366 pav. pavaizduotos matricos yra simetriškos, nes jos yra neorientuotų (abipusių) ventiliinių schemų matematiniai modeliai. 367 pav. pavaizduotos orientuotos (vienpusės) ventilinės schemos ir jas atitinkančios tiesioginių ryšių matricos bei loginės formulės.



a)

	1	2	3	4
1	1	X_1	0	0
2	0	1	X_2	0
3	0	0	1	X_3
4	0	0	0	1

a) $Y_4 = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$

b)

	1	2
1	1	$X_1 \vee X_2 \vee X_3$
2	0	1

b) $Y_2 = X_1 \vee X_2 \vee X_3$

c)

	1	2	3	4
1	1	X_1	X_2	0
2	0	1	X_3	X_5
3	0	0	1	X_4
4	0	0	0	1

c) $Y_4 = X_1 X_5 \vee X_1 X_3 X_4 \vee X_2 X_4$

367 pav.

Orientuotų ventiliinių schemų tiesioginių ryšių matricose labai lengva nustatyti schemos polius: įėjimo polius atitinka stulpeliai, sudaryti iš nulių ir vieno vienetuko, įrašytų į eilutę, turinčią to poliaus numerį, o išėjimo polius atitinka eilutės, sudarytos iš nulių ir vieno vienetuko, įrašytų į stulpelį, turintį to poliaus numerį.

Nagrinėjant ventilines schemas, gali būti sprendžiami tokie matematiniai uždaviniai:

- 1) duotajai ventilinei schemai **tiesioginių ryšių matricos sudarymo**;
- 2) **ventilinės schemos**, atitinkančios duotąją tiesioginių ryšių matricą, **sudarymo**;
- 3) ventilinės schemos mazgų **pilnų ryšių funkcijų matricos** (trumpiau, **pilnų ryšių matricos**), tame tarpe, ir **ventilinės schemos išėjimo funkcijų sudarymo**;
- 4) ventilinės schemos, turinčios duotąsias išėjimo funkcijas, **tiesioginių ryšių matricos ir pačios ventilinės schemos sudarymo**.

Pirmosios ir antrosios grupės uždaviniai yra **ventiliinių schemų modeliavimo (tiesioginio ir atvirkštinio) uždaviniai**.

Trečiosios grupės uždaviniai vadinami **ventiliinių schemų analizės uždaviniai**. Kai pagal duotąją ventilinę schemą ar jos tiesioginių ryšių matricą ieškomos ir nustatomos ventilinės schemos išėjimo funkcijos, tai sakoma, jog sprendžiamas ventilinės schemos **analizės siaurąja prasme (išorinės analizės) uždavinys**. Kai ieškoma ir surandama ventilinės schemos mazgų **pilnų ryšių matrica**, tai sakoma, jog sprendžiamas ventilinės schemos **analizės plačiąja prasme (vidinės analizės) uždavinys**.

Ketvirtosios grupės uždaviniai vadinami **ventilinių schemų sintezės uždaviniais**.

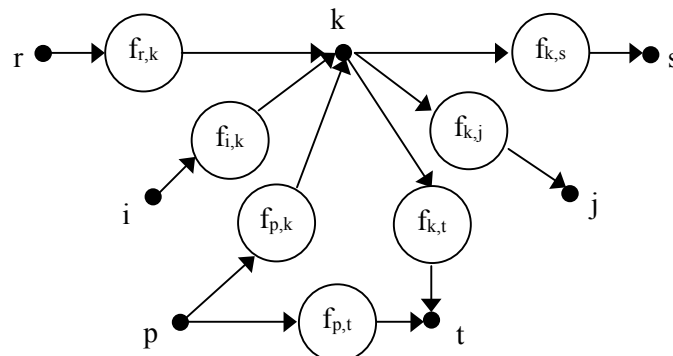
Visas keturias čia išvardintas uždavinių grupes galima priskirti trečiajai loginių uždavinių klasei. Todėl jie ir nagrinėjami šiame skyrelyje.

Pirmosios ir antrosios grupės uždaviniai yra gana paprasti. Jų pavyzdžius mes jau nagrinėjome (žiūr. 365, 366 ir 367 pav.), todėl iškart pereisime prie trečiosios grupės – ventilinių schemų analizės – uždavinių.

Analizės siaurąją prasmę uždavinį galima spręsti **vidinių schemos mazgų eliminavimo metodu**, taikant 1.9.2.5. skyrelyje apibrėžtą struktūros elementų eliminavimo operaciją. Aprašysiu tą metodą.

Tarkime, jog turime ventilinės schemos tiesioginių ryšių f_{ij} matricą $\|f_{ij}\|$, kur f_{ij} – loginė formulė, įrašyta į matricos langelį (i, j) ir aprašanti tiesioginio perėjimo iš mazgo „i“ į mazgą „j“ sąlygą: kai $f_{ij}=1$, tai toks perėjimas egzistuoja, kai $f_{ij}=0$, tai tokio perėjimo nėra.

Tarkime, jog mums reikia eliminuoti tos matricos vidinį mazgą, turintį numerį „k“ (žiūr. 368 pav).



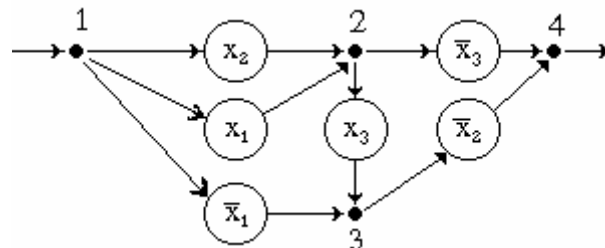
368 pav.

Eliminuojant mazgą „k“, atsiranda papildomi tiesioginiai ryšiai tarp pasiliekančių matricoje (ir scheme) mazgų. Pavyzdžiui, dvi atkarpos (p, k) ir (k, t) po mazgo „k“ eliminavimo tampa viena atkarpa (p, k, k, t) ir todėl tarp mazgų „p“ ir „t“ atsiranda papildomas tiesioginis ryšys, einantis per mazgą „k“. Po mazgo „k“ eliminavimo naujas tiesioginis ryšys $f_{p,t}^{(n)}$ tarp mazgų „p“ ir „t“ gali būti išreikštas per iki eliminavimo buvusius („senus“) ryšius $f_{p,t}^{(s)}$, $f_{p,k}^{(s)}$ ir $f_{k,t}^{(s)}$: $f_{p,t}^{(n)} = f_{p,t}^{(s)} \vee (f_{p,k}^{(s)} \wedge f_{k,t}^{(s)})$. Analogiškai gauname, jog pavyzdžiui $f_{i,j}^{(n)} = f_{i,j}^{(s)} \vee (f_{i,k}^{(s)} \wedge f_{k,j}^{(s)})$ ir t. t.

Šios formulės galioja ir atvejams, kai dalis (ar net visos) ryšių formulių $f_{i,j}^{(s)}$ yra lygios nuliui ar loginiam vienetui.

Pailiustruosiu vidinių schemos mazgų eliminavimo procedūrą konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog turime ventilinę schemą, pavaizduotą 369 pav.



369 pav.

Sudarysime tos schemos tiesioginių ryšių matricą (žiūr. 370^a pav.).

a)

	1	2	3	4
1	1	$X_1 \vee X_2$	$\bar{X}_1$	0
2	0	1	X_3	$\bar{X}_3$
3	0	0	1	$\bar{X}_2$
4	0	0	0	1

b)

	1	3	4
1	1	$\bar{X}_1 \vee X_3$	$X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3$
3	0	1	$\bar{X}_2$
4	0	0	1

c)

	1	4
1	1	$\bar{X}_2 \vee \bar{X}_3$
4	0	1

370 pav.

Tarkime, jog mes eliminuojame mazgą „2“. Tuomet gausime naują schemą ir naują matricą, turinčią tik 3 mazgus: 1) įėjimo polių „1“, 2) vidinį mazgą „3“ ir 3) išėjimo polių „4“.

Rasime naujas ryšių funkcijas: $f_{1,1}^{(n)} = f_{1,1}^{(s)} \vee (f_{1,2}^{(s)} \wedge f_{2,1}^{(s)}) = 1 \vee [(X_1 \vee X_2) \wedge 0] = 1$;

$$f_{1,3}^{(n)} = f_{1,3}^{(s)} \vee (f_{1,2}^{(s)} \wedge f_{2,3}^{(s)}) = \bar{X}_1 \vee [(X_1 \vee X_2) \wedge X_3] = \bar{X}_1 \vee X_1 X_3 \vee X_2 X_3 = \bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 X_3 \vee X_1 X_3 \vee X_2 X_3 = \bar{X}_1 \vee X_3 (\bar{X}_1 \vee X_1) \vee X_2 X_3 = \bar{X}_1 \vee X_3 \vee X_2 X_3 = \bar{X}_1 \vee X_3 (1 \vee X_2) = \bar{X}_1 \vee X_3;$$

$$f_{1,4}^{(n)} = f_{1,4}^{(s)} \vee (f_{1,2}^{(s)} \wedge f_{2,4}^{(s)}) = 0 \vee [(X_1 \vee X_2) \wedge \bar{X}_3] = X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3;$$

$$f_{3,1}^{(n)} = f_{3,1}^{(s)} \vee (f_{3,2}^{(s)} \wedge f_{2,1}^{(s)}) = 0 \vee (0 \wedge 0) = 0; f_{3,3}^{(n)} = f_{3,3}^{(s)} \vee (f_{3,2}^{(s)} \wedge f_{2,3}^{(s)}) = 1;$$

$$f_{3,4}^{(n)} = f_{3,4}^{(s)} \vee (f_{3,2}^{(s)} \wedge f_{2,4}^{(s)}) = \bar{X}_2 \vee (0 \wedge \bar{X}_3) = \bar{X}_2; f_{4,1}^{(n)} = 0; f_{4,3}^{(n)} = 0; f_{4,4}^{(n)} = 1.$$

Naujoji ryšių matrica pavaizduota 370^b pav.

Dabar eliminuosime paskutinį vidinį mazgą „3“ ir gausime matricą, vaizduojančią ryšius tarp mazgų „1“ ir „4“, t. y. tarp įėjimo ir išėjimo polių. Ryšys $f_{1,4}^{(n)} = f_{1,4}^{(s)} \vee (f_{1,3}^{(s)} \wedge f_{3,4}^{(s)}) =$
 $= X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3 \vee [(\bar{X}_1 \vee X_3) \wedge \bar{X}_2] = X_1 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 X_3 = X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee$
 $\vee X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 = \bar{X}_2 (X_1 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_3 \vee$
 $\vee \bar{X}_1 X_3 \vee \bar{X}_1 X_3 \vee X_1 X_3) \vee \bar{X}_3 (X_1 X_2 \vee X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 X_2) = \bar{X}_2 [\bar{X}_3 (X_1 \vee \bar{X}_1) \vee X_3 (\bar{X}_1 \vee X_1)] \vee$
 $\vee \bar{X}_3 [X_2 (X_1 \vee \bar{X}_1)] = \bar{X}_2 (\bar{X}_3 \vee X_3) \vee \bar{X}_3 X_2 = \bar{X}_2 \vee X_2 \bar{X}_3 = \bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee X_2 \bar{X}_3 = \bar{X}_2 \vee$
 $\vee \bar{X}_3 (\bar{X}_2 \vee X_2) = \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3$ ir bus nagrinėjamos ventilinės schemos išėjimo funkcija. Ryšių tarp mazgų „1“ ir „4“ matrica pavaizduota 370^c pav.

Ventilinių schemų analizės plačiąja prasme uždavinį galima spręsti **matricų loginės daugybos (tiksliau, tiesioginių ryšių matricos kėlimo laipsniu) metodu**.

Matricų $\|f_{i,j}\|$ ir $\|g_{i,j}\|$, turinčių po n eilučių ir po tiek pat stulpelių, **logine sandauga** vadinama matrica $\|h_{i,j}\|$, turinti taip pat n eilučių ir stulpelių, kurios elementai $h_{i,j}$ apskaičiuojami, naudojantis formule $h_{i,j} = \bigvee_{k=1}^n (f_{i,k} \wedge g_{k,j})$.

Taigi, **loginė matricų sandauga gaunama panašiai, kaip ir algebrinė skaitmeninių matricų sandauga, pakeičiant aritmetinę daugybą logine daugyba (konjunkcija), aritmetinę sumą – logine suma (disjunkcija)**.

Kai loginė matrica dauginama iš savęs pačios, tai gaunama **loginės matricos kėlimo laipsniu operacija**. Pakėlę tiesioginių ryšių matricą, kurią vadinsime **pirmos eilės ryšių matrica**, kvadratu, gausime **antros eilės ryšių matricą**, kuri vaizduoja vieno ir dviejų žingsnių ilgio ryšius tarp matricos mazgų.

Pakėlę tiesioginių ryšių matricą kubu, gausime **trečios eilės ryšių matricą**, vaizduojančią visus tuos ryšius tarp ventilinės schemos mazgų, kurių ilgis neviršija trijų žingsnių.

Kadangi ventilinėje schemoje, turinčioje n mazgų patys ilgiausi pilnieji ryšiai negali turėti daugiau negu $n-1$ žingsnį (paprastai kai n – didelis skaičius, jie būna žymiai trumpesni), tai, pakėlę tiesioginių ryšių matricą $(n-1)$ -uoju laipsniu, būtinai gausime matricą, kurioje bus atvaizduoti visi galimi ryšiai tarp schemos mazgų, t. y. gausime **pilnų ryšių matricą**.

Dažniausiai (kaip tai išplaukia iš pastabos, kad patys ilgiausieji pilnieji ryšiai dažnai susideda mažiau nei iš $n-1$ žingsnio) pilnų ryšių matricai gauti nėra būtina kelti tiesioginių ryšių matricą $(n-1)$ -ju laipsniu ir pakanka mažesnio laipsnio, sutampančio su ilgiausio kelio ventilinėje schemoje žingsnių skaičiumi.

Iš to, kas pasakyta, išplaukia toks **pilnų ryšių matricos gavimo algoritmas**:

- 1) keliame tiesioginių ryšių matricą kvadratu;
- 2) gautąją matricą vėl keliame kvadratu ir tokį kėlimą kvadratu tęsiame iki tol, kol

a) arba gausime, jog 2^k -jo laipsnio matrica bus tokia pati, kaip ir 2^{k-1} -jo, kas reikš, kad 2^{k-1} -jo laipsnio matrica jau yra pilnų ryšių matrica ir naujų ryšių, kurių nėra toje matricoje, atsirasti jau nebegali,

b) arba 2^k taps lygus ar didesnis už $n-1$, o tai reikš, kad 2^k -jo laipsnio matrica jau yra pilnų ryšių matrica.

Pailiustruosiu pilnos matricos gavimo algoritmą konkrečiu pavyzdžiu, keldamas ventilinės schemos, pavaizduotos 369 pav. tiesioginių ryšių matricą, pavaizduotą 370^a pav., laipsniu: pradžioje kvadratu, o po to – ketvirtuoju laipsniu. Kadangi šiuo atveju $n=4$, tai ketvirtojo laipsnio ryšių matrica būtinai jau bus pilnų ryšių matrica.

Kėlimo laipsniu rezultatai pavaizduoti 371 pav.

$$\|f_{ij}\| = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & X_1 \vee X_2 & \overline{X}_1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & X_3 & \overline{X}_3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & \overline{X}_2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} ; \|f_{ij}\|^2 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & X_1 \vee X_2 & \overline{X}_1 \vee X_3 & \overline{X}_3 \vee \overline{X}_1 \overline{X}_2 \\ 2 & 0 & 1 & X_3 & \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & \overline{X}_2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\|f_{ij}\|^4 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & X_1 \vee X_2 & \overline{X}_1 \vee X_3 & \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & X_3 & \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \overline{X}_2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

371 pav.

Nesunku įsitikinti, jog $\|f_{ij}\|^3$ ir $\|f_{ij}\|^5$ sutampa su $\|f_{ij}\|^4$. Tai ir suprantama, kadangi ventilinėje schemoje, pavaizduotoje 368 pav., pats ilgiausias kelias yra lygus 3 žingsniams. Todėl antrosios eilės matrica dar nėra pilnų ryšių matrica, tačiau trečios eilės matrica vaizduoja jau visus galimus ryšius.

Ventilinių schemų **sintezės uždavinius** galima spręsti **ventilinės schemos mazgų atstatymo metodu**, kuris yra atvirkštinis mazgų eliminavimo metodui ir remiasi operacija, aprašyta 1.9.2.6. skyrelyje.

Turėdami orientuotos ventilinės schemos išėjimo funkcijas (jų gali būti viena ar kelios, priklausomai nuo ventilinės schemos išėjimų skaičiaus), mes visuomet galime sudaryti ryšių matricą, turinčią $m+1$ eilučių ir stulpelių, kur m – schemos išėjimo polių skaičius.

Laikydami mazgą „1“ įėjimo poliumi, galime sudaryti pirmąją tos matricos eilutę, įrašydami į pirmąjį stulpelį „1“, o į likusius m stulpelių – eilės tvarka visas m išėjimo funkcijas.

Užpildydami sudaromos matricos pirmojo stulpelio likusias eilutes nuliais, likusią neužpildytą matricą, turinčią m eilučių ir stulpelių, užpildome kaip „vienetinę“ matricą E : teigiamąją įstrižainę užpildome vienetukais, o likusius langelius – nuliais.

Turėdami tokią matricą, vaizduojančią ventilinę schemą, neturinčią vidinių mazgų (t. y. sudarytą iš m išeinančių iš įėjimo poliaus „1“ lygiagrečių šakų, besibaigiančių išėjimų poliais), galime įvesti vidinį mazgą, papildydami turimą matricą $(m+2)$ -uoju stulpeliu ir $(m+2)$ -ąja eilute – įvedamo vidinio mazgo stulpeliu ir eilute.

Naująją (išplėstąją) matricą užpildome, dekomponuodami išėjimo funkcijas ir užpildydami papildomai įvestus stulpelį ir eilutę taip, kad, eliminuodami ką tik įvestąjį vidinį mazgą, gautume anksčiau turėtąją ryšių matricą.

Vidinio mazgo atstatymo operacija, būdama atvirkštinė vidinio mazgo eliminavimo operacijai, gali būti įvykdyta įvairiai, todėl, atstatydami vidinį mazgą, mes galime gauti įvairias išplėstąsias matricas. O tai reiškia, jog **ventilinių schemų sintezės uždaviniai gali turėti keletą sprendinių.**

Įvedę vieną vidinį mazgą, panašiu būdu galima įvesti antrąjį, trečiąjį ir t. t. ir tai daryti iki tol, kol gaunamų matricų langeliuose, dekomponuodami į juos įrašytas funkcijas, mes gausime tik elementarius teiginius (t. y. x_j arba $\bar{x}_j$) bei nulius ir vienetikus, t. y. kol gausime ventilinės schemos tiesioginių ryšių matricą. Turėdami tiesioginių ryšių matricą, mes jau galime sudaryti ir pačią ventilinę schemą.

Pailiustruosiu ventilinės schemos sintezės uždavinį konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog mums reikia sudaryti ventilinę schemą, turinčią dvi išėjimo funkcijas $Y_1 = X_1 \leftrightarrow X_2 = X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2$ ir $Y_2 = X_1 \oplus X_2 = X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2$.

Sudarome matricą, turinčią $m+1=3$ eilutes ir stulpelius (žiūr. 318-ją lentelę).

318. lentelė

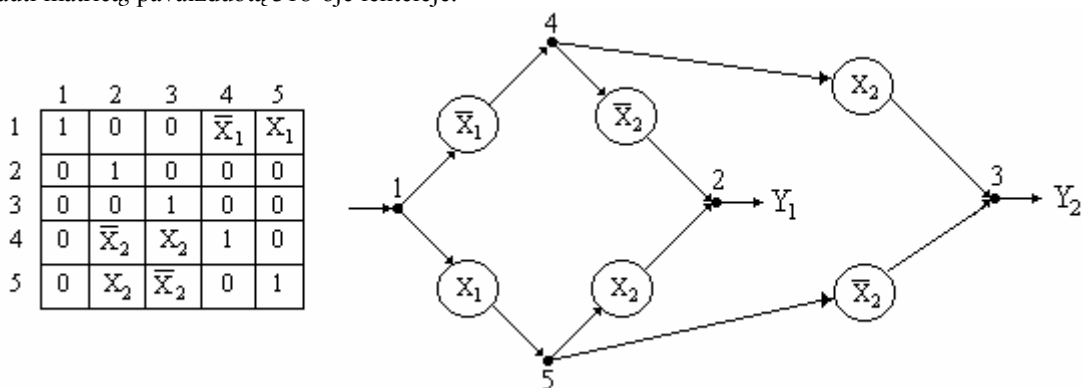
	1	2	3
1	1	$X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2$	$X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2$
2	0	1	0
3	0	0	1

319. lentelė

	1	2	3	4
1	1	$X_1 X_2$	$X_1 \bar{X}_2$	$\bar{X}_1$
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	$\bar{X}_2$	X_2	1

Įvedame vidinį mazgą „4“ ir išivaizduojame, jog Y_1 ir Y_2 yra schemos, kurias vaizduoja 318-oji lentelė, išėjimo funkcijos $f_{1,2}^{(n)}$ ir $f_{1,3}^{(n)}$, gautos iš 319-osios lentelės, eliminuojant įvestąjį mazgą „4“, t. y. jog $f_{1,2}^{(n)} = f_{1,2}^{(s)} \vee (f_{1,4}^{(s)} \wedge f_{4,2}^{(s)})$ ir $f_{1,3}^{(n)} = f_{1,3}^{(s)} \vee (f_{1,4}^{(s)} \wedge f_{4,3}^{(s)})$, kur $f_{i,j}^{(s)}$ yra išplėstosios matricos, turinčios jau keturias eilutes ir stulpelius, langelio (i,j) turinys.

Kadangi $f_{1,2}^{(n)} = X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2$ ir $f_{1,3}^{(n)} = X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2$, tai galimos toks šių funkcijų išskaidymo variantas: $f_{1,2}^{(s)} = X_1 X_2$, $f_{1,4}^{(s)} = \bar{X}_1$, $f_{4,1}^{(s)} = \bar{X}_2$, $f_{1,3}^{(s)} = X_1 \bar{X}_2$, $f_{4,3}^{(s)} = X_2$. Taigi, gauname matricą, pavaizduotą 319-oje lentelėje, iš kurios, eliminuodami įvestąjį vidinį mazgą „4“, galėtume vėl gauti matricą, pavaizduotą 318-oje lentelėje.



372 pav.

Kadangi $f_{1,2}^{(s)}$ ir $f_{1,3}^{(s)}$ dar nėra elementarus teiginiai, tai įvedame dar vieną vidinį mazgą, kurį pažymėsime kaip „5“. Galimas $f_{1,2}$ ir $f_{1,3}$ skaidymo variantas: $X_1 X_2 = 0 \vee (X_1 \wedge X_2)$ ir $X_1 \bar{X}_2 = 0 \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2)$, t. y. $f_{1,2}^{(s)} = 0$, $f_{1,5}^{(s)} = X_1$, $f_{5,2}^{(s)} = X_2$, $f_{1,3}^{(s)} = 0$, $f_{5,3}^{(s)} = \bar{X}_2$. Gauname tiesioginių ryšių matricą ir ventilinę schemą, pavaizduotas 372 pav.

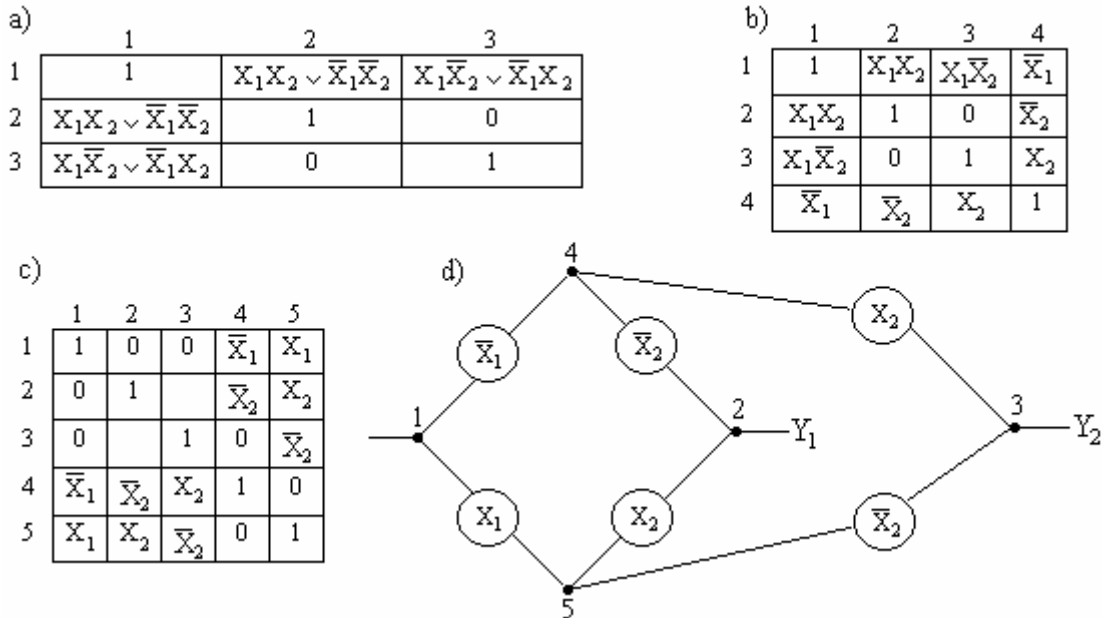
Kaip jau buvo minėta, ventilinių schemų sintezės uždavinys gali turėti (ir dažniausiai turi) ne vieną, o kelis sprendinius. Ne išimtis ir šis uždavinys. Palieku skaitytojui surasti dar bent porą šio

uždavinio sprendinių: vieną – analogišką pavaizduotajam 372 pav., antrą – šiek tiek mažiau racionalų (t. y. turintį daugiau ventilių).

Analogiškai sprendžiami ir simetriškų (abipusių, neorientuotų) ventiliinių schemų analizės ir sintezės uždaviniai.

Kaip pavyzdį, išspręsiu simetrinės ventiliinės schemos sintezės uždavinį, kai duotos jos išėjimo funkcijos Y_1 ir Y_2 sutampa su 372 pav. pavaizduotos orientuotos ventiliinės schemos išėjimo funkcijomis.

Sprendimo eigą iliustruoja 373 pav.



373 pav.

Simetrinių ventiliinių schemų sintezės uždavinys gali taip pat turėti ne vieną, o kelis sprendinius. Mūsų nagrinėjamas uždavinys irgi turi kelis sprendinius, todėl gali kilti klausimas, kurį iš galimų sprendinių derėtų pasirinkti. Šio klausimo sprendimas jau išeina už trečios klasės loginių uždavinių sprendimo ribų. Jis priklauso ketvirtajai loginių uždavinių klasei, apie ką kalbėsime 1.16.1.4. skyrelyje.

1.16.1.3.3. Sudėtingų kūnų formos matematinių modelių sudarymo uždaviniai

Dar vieną trečiosios klasės loginių uždavinių grupę sudaro **formulių, aprašančių geometrinių kūnų formą, sudarymo uždaviniai**.

Sudarant sudėtingo kūno geometrinės formos matematinį modelį, tas kūnas dekomponuojamas į sudėtinės dalis, kurių kiekviena gali būti aprašyta elementariu predikatu, o po to tie predikatai jungiami loginėmis operacijomis taip, kad būtų gautas sudėtingas predikatas $P(x,y,z)$, turintis teisingumo sritį $\langle P(x,y,z) \rangle$ (erdvės (x,y,z) dalį, kurios taškų koordinatės x, y, z reikšmės tenkina predikatą $P(x,y,z)$, paversdamos jį teisingu teiginiu), sutampančią su modeliuojamo kūno užimama erdvės (x,y,z) dalimi.

Modeliuojamo kūno dekompozicijos metu naudojamosi 1.5. skyriuje duotomis formulėmis:

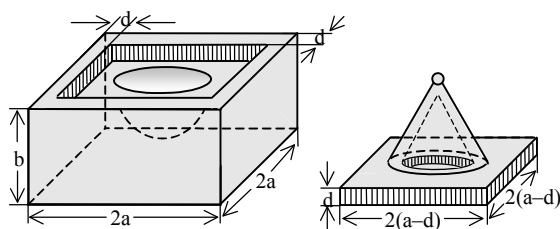
$$\langle P_1(x,y,z) \wedge P_2(x,y,z) \rangle = \langle P_1(x,y,z) \rangle \cap \langle P_2(x,y,z) \rangle,$$

$$\langle P_1(x,y,z) \vee P_2(x,y,z) \rangle = \langle P_1(x,y,z) \rangle \cup \langle P_2(x,y,z) \rangle,$$

$\langle \neg P(x,y,z) \rangle = 7 \langle P(x,y,z) \rangle$, kur 7 – papildymo operatorius, papildantis savo operandą (mūsų nagrinėjamu atveju – sritį $\langle P(x,y,z) \rangle$) iki pilnos erdvės (x,y,z) .

Sudėtingo kūno formos matematinio modelio sudarymo algoritmą pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog turime 374 pav. pavaizduotą senovinę stiklinę rašalinę ir jos dangtį.



374 pav.

Rašalinės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi $2a$. Rašalinės šoninės sienos – stačiakampiai, kurių ilgis lygus $2a$, o aukštis lygus b . Viršutinėje rašalinės dalyje padarytas kvadratinis įdubimas dangčio įstatymui. Įdubimo kraštinės ilgis lygus $2(a-d)$, jo gylis lygus d .

Šio įdubimo centre padaryta pusrutulio formos įduba rašalui. Rutulio spindulys $R=a-2d < b-d$.

Dangčio pagrindas yra kvadratas, turintis kraštinę, lygią $2(a-d)$. Dangčio šoninės sienos – stačiakampiai, turintys aukštį lygų d . Stačiakampio viršuje yra kūgis, kurio išilginis pjūvis – lygiakraštis trikampis. Jo kraštinės ilgis yra c , kur $a \leq c \leq 2(a-2d)$. Kūgio viršuje yra rutuliukas, kurio centras sutampa su kūgio viršūne, o jo spindulys $r=0,5d$. Kūgio aukštinė yra dangčio simetrijos ašis. Pats kūgis – tuščiaviduris. Jo sienelių storis lygus $0,5d$. Kūgio viduje esanti kūgio formos tuštuma susisiekiama su cilindro formos tuštuma, esančia dangčio pagrinde. Tuščiojo cilindro pagrindas yra skritulys, turintis tą patį spindulį, kaip ir tuščiojo kūgio pagrindas.

Sudarysime pačios rašalinės formos matematinį modelį. Tuo tikslu pasirinksime koordinačių x , y , z pradžios tašku O rašalinės apatinio pagrindo centrą, koordinačių ašių OX ir OY kryptis – lygiagrečias rašalinės pagrinde esančioms kraštinėms, o ašį OZ – lygiagrečią vertikalioms rašalinės briaunoms.

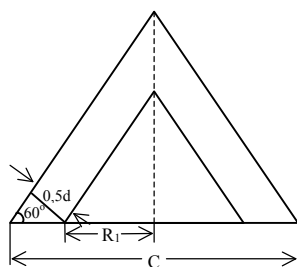
Sudarysime elementarius predikatus:

- 1) $P_1(x, y, z) = [(-a \leq x \leq a) \wedge (-a \leq y \leq a) \wedge (0 \leq z \leq b)]$,
- 2) $P_2(x, y, z) = [(-a+d \leq x \leq a-d) \wedge (-a+d \leq y \leq a-d) \wedge (b-d \leq z \leq b)]$,
- 3) $P_3(x, y, z) = [x^2 + y^2 + (z-b+d)^2 \geq (a-2d)^2]$.

Iš šių predikatų sudarysime sudėtingą predikatą $P_4(x, y, z) = P_1(x, y, z) \wedge \neg P_2(x, y, z) \wedge P_3(x, y, z)$, kurio teisingumo sritis $\langle P_4(x, y, z) \rangle = \langle P_1(x, y, z) \rangle \cap \neg \langle P_2(x, y, z) \rangle \cap \langle P_3(x, y, z) \rangle$ sutampa su tuščios rašalinės stiklinio korpuso užimama erdvės dalimi. Todėl predikatą $P_4(x, y, z)$ (tiksliau $\langle P_4(x, y, z) \rangle$) galima laikyti tuščios rašalinės matematiniu modeliu.

Sudarysime rašalinės dangčio formos matematinį modelį, pasirinkdami tokią to dangčio padėtį, kada jis normaliai uždėtas ant rašalinės ir dengia joje esantį rašalą.

Rasime dangčio pagrinde išpjauto cilindro spindulį R_1 (žiūr. 375 pav.).



375 pav.

- 1) $R_1 = 0,5c - x$; 2) $x^2 - (0,5x)^2 = (0,5d)^2$; 3) $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$; 4) $R_1 = 0,5c - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Predikatas, aprašantis dangčio pagrindą (be išpjovos), minėtoje padėtyje sutaps su mūsų jau sudarytu predikatu $P_2(x, y, z) = [(-a+d \leq x \leq a-d) \wedge (-a+d \leq y \leq a-d) \wedge (b-d \leq z \leq b)]$, t. y. su predikatu, aprašančiu stačiakampį įdubimą rašalinės korpuso, skirtą dangčio įstatymui.

Dangčio pagrindą su cilindrine išpjova aprašys predikatas $P_2(x, y, z) \wedge P_5(x, y, z)$, kur $P_5(x, y, z) = [x^2 + y^2 \geq (0,5c - \frac{d}{\sqrt{3}})^2]$.

Sudarysime predikatą, aprašantį tuščiavidurį kūgį. Tai predikatas $P_6(x,y,z) \wedge P_7(x,y,z)$, kur $P_6(x,y,z)$ – predikatas, aprašantis didžiojo (pilnojo) kūgio vidų, o $P_7(x,y,z)$ – predikatas, aprašantis mažojo (tuščiojo) kūgio išorę:

$$P_6(x,y,z) = \left\{ \left[x^2 + y^2 \leq \left(\frac{c}{2} + \frac{b-z}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \wedge \left(b \leq z \leq b + \frac{c\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

$$P_7(x,y,z) = \left\{ \left[x^2 + y^2 \geq \left(\frac{c}{2} + \frac{b-d-z}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \wedge \left(b \leq z \leq b + \frac{c\sqrt{3}}{2} - d \right) \right\}.$$

Rutuliuką kūgio viršuje aprašo predikatas $P_8(x,y,z) = [x^2 + y^2 + (z - b - \frac{c\sqrt{3}}{2})^2 \leq 0,25d^2]$.

Predikatą $P_9(x,y,z)$, aprašantį visą dangtį, gausime iš predikatų $P_2(x,y,z)$, $P_5(x,y,z)$, $P_6(x,y,z)$, $P_7(x,y,z)$ ir $P_8(x,y,z)$.

$$P_9(x,y,z) = [P_2(x,y,z) \wedge P_5(x,y,z)] \vee [P_6(x,y,z) \wedge P_7(x,y,z)] \vee P_8(x,y,z).$$

Jei rutuliuko spindulys r būtų didesnis už d ir mes norėtume, kad kūgio viduje išpjova išliktų kūgio (o ne nupjauto kūgio) formos, tai predikatą $P_9(x,y,z)$ turėtume sudaryti taip:

$$P_9(x,y,z) = [P_2(x,y,z) \wedge P_5(x,y,z)] \vee \{ [P_6(x,y,z) \vee P_8(x,y,z)] \wedge P_7(x,y,z) \}.$$

Visą rašalinę (uždarytą dangčiu, tačiau be rašalo) aprašytą predikatą $P_{10}(x,y,z) = P_4(x,y,z) \vee P_9(x,y,z)$, t. y. visos rašalinės matematinis modelis būtų $\langle P_{10}(x,y,z) \rangle = \langle P_4(x,y,z) \rangle \cup \langle P_9(x,y,z) \rangle$.

Norėdami gauti rašalinės projekcijų matematinius aprašymus, galėtume pasinaudoti kvantifikavimo operacijomis $\exists z$, $\exists x$, $\exists y$: pirmoji leistų gauti rašalinės bei jos dangčio planą (vaizdą iš viršaus), antroji – rašalinės bei jos dangčio fasadą (vaizdą iš priekio), trečioji – vaizdą iš šono.

[vedus taip vadinamas **R–funkcijas** [250], galima **pereiti nuo loginių modelių, išreikštų sudėtingais predikatais, prie matematinių modelių, išreikštų klasikinės kiekybinės algebros kalba**, t. y. algebrinėmis lygybėmis bei nelygybėmis, arba, kitaip tariant, elementariais predikatais.

R–funkcija, atitinkanti predikatą $P(x,y,z)$, vadinasi funkcija $f_P(x,y,z)$, tenkinanti tokias sąlygas:

1) $f_P(x,y,z) \geq 0$ visuose taškuose (x,y,z) , kuriuose $P(x,y,z)=1$,

2) $f_P(x,y,z) \leq 0$ visuose taškuose (x,y,z) , kuriuose $P(x,y,z)=0$.

Pavyzdžiui, predikatą $P_1(x) = (-a \leq x \leq a)$ atitinka funkcija $f_{P_1}(x) = (a^2 - x^2)$, predikatą $P_2(y) = (0 \leq y \leq 6)$ – funkcija $f_{P_2}(y) = 9 - (y-3)^2$, o predikatą $P_3(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 \leq 16)$ – funkcija $\boxed{} = 16 - x^2 - y^2 - z^2$.

Nesunku įrodyti, jog predikato neigimo operaciją atitinka jo R–funkcijos ženklo keitimas į priešingą, t. y. R–funkcijos daugyba iš (-1) . Pavyzdžiui, predikato $P_1(x) = (-a \leq x \leq a)$ neiginį $\neg P_1(x) = [(x < -a) \vee (x > a)]$ atitinka funkcija $f_{\neg P_1}(x) = -f_{P_1}(x) = -x^2 + a^2$.

Tarkime, kad predikatą $P_1(x,y,z)$ atitinka funkcija $f_1(x,y,z)$, predikatą $P_2(x,y,z)$ – funkcija $f_2(x,y,z)$, predikatą $[P_1(x,y,z) \wedge P_2(x,y,z)]$ – funkcija $f_{\wedge}(x,y,z)$, o predikatą $[P_1(x,y,z) \vee P_2(x,y,z)]$ – funkcija $f_{\vee}(x,y,z)$. Rasime, kaip priklauso $f_{\wedge}(x,y,z)$ ir $f_{\vee}(x,y,z)$ nuo $f_1(x,y,z)$ ir $f_2(x,y,z)$.

Klasikinėje matematinėje logikoje (ir daugumoje neklasikinių logikų) galioja lygybės:

$$1) P_1(x,y,z) \wedge P_2(x,y,z) = \min[P_1(x,y,z); P_2(x,y,z)],$$

$$2) P_1(x,y,z) \vee P_2(x,y,z) = \max[P_1(x,y,z); P_2(x,y,z)].$$

Atsižvelgdami į šias lygybes ir į R–funkcijos apibrėžimą, gauname, jog:

$$1) f_{\wedge}(x,y,z) = \min[f_1(x,y,z); f_2(x,y,z)];$$

$$2) f_{\vee}(x,y,z) = \max[f_1(x,y,z); f_2(x,y,z)].$$

Kadangi bet kokiems dydžiams A ir B galioja lygybės:

$$\min(A,B)+\max(A,B)=A+B,$$

$$\min(A,B)\cdot\max(A,B)=A\cdot B,$$

tai iš Vietos teoremos apie kvadratinės lygties šaknų savybes išplaukia, jog $f_{\wedge}(x,y,z)$ ir $f_{\vee}(x,y,z)$ yra lygties $v^2 - [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)] \cdot v + f_1(x,y,z) \cdot f_2(x,y,z) = 0$ šaknys.

Užrašysime tą lygtį kompaktiškiau: $v^2 - (f_1 + f_2) \cdot v + f_1 \cdot f_2 = 0$.

Iš šios lygties gauname, jog jos šaknys yra

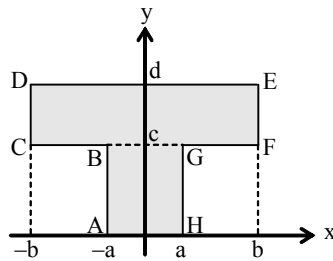
$$v_{1,2} = \frac{f_1 + f_2 \pm \sqrt{(f_1 + f_2)^2 - 4 \cdot f_1 \cdot f_2}}{2} = \frac{f_1 + f_2 \pm |f_1 - f_2|}{2}.$$

Kadangi $|f_1 - f_2| \geq 0$ ir $\max(f_1, f_2) \geq \min(f_1, f_2)$, tai $f_{\wedge} = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2}$ ir $f_{\vee} = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2}$.

Kadangi bet kuri loginė formulė gali būti išreikšta Bulio algebroje, naudojantis elementariais teiginiais bei predikatais ir operatoriais „ $\neg$ “, „ $\wedge$ “ ir „ $\vee$ “, tai formulių, pakeičiančių logines operacijas „ $\neg$ “, „ $\wedge$ “ ir „ $\vee$ “ kiekybinės algebros operacijomis, pilnai pakanka, kad bet kokią sudėtingą predikatą paverstume elementariu predikatu – lygybe ar nelygybe.

Pailiustruosime aprašytąjį pervedimo procedūrą konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog duota plokščia figūra ABCDEFGH, sudaryta iš dviejų stačiakampių ABGH ir CDEF (žiūr. 376 pav.), kur $a=5$, $b=15$, $c=12$, $d=20$.



376 pav.

Šią figūrą aprašo predikatas $P(x,y) = \{ [(-a \leq x \leq a) \wedge (0 \leq y \leq c)] \vee [(-b \leq x \leq b) \wedge (c \leq y \leq d)] \} = \{ [P_1(x) \wedge P_2(y)] \vee [P_3(x) \wedge P_4(y)] \}$:

Predikatą $P_1(x)$ atitinka funkcija $f_1(x) = a^2 - x^2$, predikatą $P_2(y)$ – funkcija $f_2(y) = \frac{c^2}{4} - \left(y - \frac{c}{2}\right)^2$,

predikatą $P_3(x)$ – funkcija $f_3(x) = b^2 - x^2$, predikatą $P_4(y)$ – funkcija $f_4(y) = \frac{(d-c)^2}{4} - \left(y - \frac{d+c}{2}\right)^2$.

Predikatą $P_1(x) \wedge P_2(y)$ atitinka funkcija $f_5(x,y) = \frac{1}{2} \cdot [f_1(x) + f_2(y) - |f_1(x) - f_2(y)|]$.

Predikatą $P_3(x) \wedge P_4(y)$ atitinka funkcija $f_6(x,y) = \frac{1}{2} \cdot [f_3(x) + f_4(y) - |f_3(x) - f_4(y)|]$.

Visą 376 pav. pavaizduotą figūrą ABCDEFGH aprašo R-funkcija $f_7(x,y) = \frac{1}{2} \cdot [f_5(x,y) + f_6(x,y) + |f_5(x,y) - f_6(x,y)|]$. Kitaip tariant, šios figūros matematinis modelis yra formulė $\langle f_7(x,y) \geq 0 \rangle$.

Išstatysime į gautas formules konkrečias parametrų a , b , c ir d reikšmes. Gausime, jog $f_1(x) = 25 - x^2$; $f_2(y) = 36 - (y-6)^2 = 36 - y^2 + 12y - 36 = y(12-y)$; $f_3(x) = 225 - x^2$; $f_4(y) = \frac{8^2}{4} - \left(y - \frac{32}{2}\right)^2 = 16 - (y-16)^2 = 16 - y^2 + 32y - 256 = 32y - y^2 - 240$; $f_5(x,y) = \frac{1}{2} [25 - x^2 + 12y - y^2 - |25 - x^2 - 12y + y^2|]$; $f_6(x,y) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [255 - x^2 + 32y - y^2 - 240 - |255 - x^2 - 32y + y^2 + 240|] = \frac{1}{2} [32y - x^2 - y^2 - 15 - |465 - x^2 + y^2 - 32y|]; \\
f_7(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [25 - x^2 + 12y - y^2 - |25 - x^2 - 12y + y^2|] + \frac{1}{2} [32y - x^2 - y^2 - 15 - |465 - x^2 + y^2 - 32y|] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} [25 - x^2 + 12y - y^2 - |25 - x^2 - 12y + y^2|] - [32y - x^2 - y^2 - 15 - |465 - x^2 + y^2 - 32y|] \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 10 - 2x^2 - 2y^2 + 44y - |25 - x^2 - 12y + y^2| - |465 - x^2 + y^2 - 32y| + |40 - 20y - |25 - x^2 - 12y + \right. \\
&\quad \left. + y^2| + |465 - x^2 + y^2 - 32y| \right\}.
\end{aligned}$$

Stačiakampio ABGH modelį sudaro formulė $\langle f_5(x, y) \geq 0 \rangle$, o jo kontūro ABGH modelį – formulė $\langle f_5(x, y) = 0 \rangle$, t. y. formulė $\langle 25 - x^2 + 12y - y^2 - |25 - x^2 - 12y + y^2| = 0 \rangle$.

Stačiakampio CDEF matematinį modelį sudaro formulė $\langle f_6(x, y) \geq 0 \rangle$, o to stačiakampio kontūro CDEF modelį – formulė $\langle f_6(x, y) = 0 \rangle$, t. y. formulė $\langle 32y - x^2 - y^2 - 15 - |465 + y^2 - x^2 - 32y| = 0 \rangle$.

Visos figūros ABCDEFGH matematinis modelis yra formulė $\langle 10 - 2x^2 - 2y^2 + 44y - |25 - x^2 - 12y + y^2| - |465 - x^2 + y^2 - 32y| + |40 - 20y - |25 - x^2 - 12y + y^2| + |465 - x^2 + y^2 - 32y| \geq 0 \rangle$, o jos kontūro ABCDEFGH matematinis modelis – formulė $\langle 10 - 2x^2 - 2y^2 + 44y - |25 - x^2 - 12y + y^2| - |465 - x^2 + y^2 - 32y| + |40 - 20y - |25 - x^2 - 12y + y^2| + |465 - x^2 + y^2 - 32y| = 0 \rangle$.

Patikrinsime gautus modelius.

Taško A koordinatės: $x=-5$, $y=0$. Įstatome tas koordinačių reikšmes į stačiakampio ABGH modelį, t. y. apskaičiuojame funkcijos $f_5(x, y)$ reikšmę. Gauname $2f_5(x, y) = 25 - 25 + 12 \cdot 0 - 0^2 - |25 - 25 - 12 \cdot 0 - 0^2| = 0 - 0 = 0$, ką ir turėjome gauti.

Jei būtume įstatę taško A koordinatės į funkciją $f_6(x, y)$, tai būtume gavę: $2f_6(x, y) = 32 \cdot 0 - 25 - 0^2 - 15 - |465 - 25 + 0| = -40 - 440 = -480 < 0$, ką ir turėjome gauti, nes šis taškas nepriklauso stačiakampio CDEF vidui, nei jo kontūrai.

Įstatę taško A koordinačių reikšmes į funkciją $f_7(x, y)$ gautume: $4f_7(x, y) = 10 - 50 - 0 - 0 - |25 - 25 - 0 + 0| - |465 - 25 + 0 - 0| + |40 - 0 - |25 - 25 - 0 + 0| + |465 - 25 + 0 - 0|| = -40 - 0 - 440 + |40 - 0| + |440| = -480 + 480 = 0$, ką ir turėjome gauti, nes taškas A priklauso kontūrai ABCDEFGH.

Nesunku įsitikinti, kad, įstatę $x=0$, $y=12$ į formules $f_5(x, y)$, $f_6(x, y)$ ir $f_7(x, y)$, gautume $f_5(x, y)=0$ ir $f_6(x, y)=0$, o $f_7(x, y)>0$.

Iš to, kas buvo pasakyta anksčiau, išplaukia, kad **kiekvieną geometrinę figūrą, apribotą baigtiniu kiekiu analiziškai aprašomų paviršių (ar kreivių, jų tarpe – galbūt, tiesių), galima aprašyti vienu predikatu; kad, naudojantis matematinės logikos ir analizinės geometrijos aparatu, galima sudaryti brėžinių, piešinių, skulptūrų matematinius modelius, o įvedus dar vieną argumentą – laiką t – ir judančių daugiamatį figūrų matematinius modelius.**

Tai reiškia, jog animacinius filmukus irgi galima aprašyti matematine kalba, jungiančia laiko funkcijas ir predikatus bei loginių ir klasikinės matematinės analizės operacijų ženklus ir matematines formules.

1.16.1.3.4. Tekstinių loginių uždavinių loginių lygčių bei jų sistemų sudarymo uždaviniai

Kaip jau buvo minėta 1.16.1.2. skyrelyje trečiosios klasės loginius uždavinius tenka spręsti ir sprendžiant žodinius (tekstinius) antrosios klasės loginius

uždavinius, nes tokiais atvejais, prieš pradedant spręsti logines lygtis bei jų sistemas, tas lygtis, matematiškai aprašančias probleminę situaciją, dar reikia susidaryti, t. y. išspręsti trečiosios klasės loginį uždavinį.

Kaip pavyzdį išspręsimė uždavinį, paimtą iš B.Kordemskio knygos „Математическая смекалка“:

„Traukiniu iš Maskvos į Leningradą važiuoja trys keleiviai: Ivanovas, Petrovas ir Sidorovas. Tokias pat pavardes turi ir traukinį aptarnaujančios brigados darbuotojai: mašinistas, pečkuryr ir konduktorius.

Reikia nustatyti mašinisto pavardę, jei žinoma, kad:

- 1) keleivis Ivanovas gyvena Maskvoje;
- 2) konduktorius gyvena pusiaukelėje tarp Maskvos ir Leningrado;
- 3) keleivis, turintis tą pačią pavardę kaip ir konduktorius, gyvena Leningrade;
- 4) tas keleivis, kuris gyvena arčiausiai konduktoriaus, gauna algą, lygiai trigubai didesnę už konduktoriaus algą;

5) keleivio Petrovo mėnesinė alga yra lygiai 200 rublių;

6) traukinio brigados darbuotojas Sidorovas neseniai išlošė biliardo partiją prieš pečkūrį.“

Probleminės situacijos matematinio modelio sudarymą (t. y. trečiosios klasės loginio uždavinio sprendimą) pradėsime nuo formalizuotų žymenų, reiškiančių teiginius bei jų indeksus, įvedimo:

1) indeksu $i=1, 2, 3$ žymėsime keleivių ir traukinio brigados darbuotojų pavardes: 1 – Ivanovas (I), 2 – Petrovas (P), 3 – Sidorovas (S);

2) indeksu $j=1, 2, 3$ žymėsime keleivių gyvenamąsias vietas: 1 – Maskva (M), 2 – Leningradas (L), 3 – tarpinė stotis (T);

3) indeksu $k=1, 2, 3$ žymėsime traukinio brigados darbuotojų pareigas: 1 – mašinistas (m), 2 – pečkuryr (p), 3 – konduktorius (k);

4) kintamuoju $x_{i,j}$ žymėsime teiginį „keleivis pavarde i gyvena gyvenvietėje j “;

5) kintamuoju $y_{i,k}$ žymėsime teiginį „traukinio brigados darbuotojas, turintis pavardę i , užima pareigas k “.

Naudodamiesi įvestais teiginių žymėjimais, išreikšime santykius, egzistuojančius nagrinėjamoje probleminėje situacijoje, t. y. sudarysime loginių lygčių sistemą – probleminės situacijos matematinį modelį:

1) iš uždavinio teksto pirmosios sąlygos išplaukia lygybė $x_{1,1}=1$, kurią žymėsime numeriu (1);

2) iš antrosios, ketvirtosios ir penktosios sąlygos išplaukia, jog Petrovas negali gyventi vietovėje T, nes 200 rublių nesidalina iš 3; todėl gauname, jog $x_{2,3}=0$, ir žymėsime šią lygybę numeriu (2);

3) iš trečiosios sąlygos gauname, jog jei konduktoriaus pavardė yra i , tai teiginiai $y_{i,3}$ ir $x_{i,2}$ yra vienu metu arba abu teisingi arba neteisingi, t. y. gauname lygtį $y_{i,3} \leftrightarrow x_{i,2}=1$, iš kurios išplaukia trys lygtys: $y_{1,3} \leftrightarrow x_{1,2}=1$ (3), $y_{2,3} \leftrightarrow x_{2,2}=1$ (4), $y_{3,3} \leftrightarrow x_{3,2}=1$ (5);

4) iš šeštosios sąlygos gauname lygybę $y_{3,2}=0$, kurią pažymėsime numeriu (6).

Be šių tekste tiesiogiai nurodytų ir išvardintų santykių, kuriuos matematiškai aprašėme formulėmis (1÷6), egzistuoja dar eilė tiesiogiai neišvardintų, bet išplaukiančių iš konteksto santykių. Išreikšime juos matematinės logikos kalba:

1) visų pirma, kiekvienoje iš išvardintų gyvenviečių M, L ir T būtinai gyvena nors vienas keleivis, o tai reiškia, jog $\bigvee_{i=1}^3 x_{i,j}=1$; kadangi gyvenviečių j yra trys, tai gauname tris lygtis:

$$x_{1,1} \vee x_{2,1} \vee x_{3,1}=1(7), \quad x_{1,2} \vee x_{2,2} \vee x_{3,2}=1(8), \quad x_{1,3} \vee x_{2,3} \vee x_{3,3}=1(9);$$

2) kiekvienas keleivis (I, P ir S) gyvena nors vienoje iš gyvenviečių M, L ir T, todėl $\bigvee_{j=1}^3 x_{i,j}=1$,

iš kur išplaukia dar trys lygtys: $x_{1,1} \vee x_{1,2} \vee x_{1,3}=1(10)$, $x_{2,1} \vee x_{2,2} \vee x_{2,3}=1(11)$, $x_{3,1} \vee x_{3,2} \vee x_{3,3}=1(12)$;

3) kiekvienas traukinio brigados darbuotojas, turintis pavardę i (I, P arba S) užima nors vieną iš pareigų k (m, p arba k), todėl $\bigvee_{k=1}^3 y_{i,k}=1$, iš kur išplaukia trys lygtys: $y_{1,1} \vee y_{1,2} \vee y_{1,3}=1(10)$,

$$y_{2,1} \vee y_{2,2} \vee y_{2,3}=1(14), \quad y_{3,1} \vee y_{3,2} \vee y_{3,3}=1(15);$$

4) kiekvieną iš išvardintų pareigų k (m, p ir k) užima nors vienas darbuotojas, t. y. arba I, arba P, arba S, todėl $\bigvee_{i=1}^3 y_{i,k}=1$, iš kur išplaukia dar trys lygtys: $y_{1,1} \vee y_{2,1} \vee y_{3,1}=1(16)$, $y_{1,2} \vee y_{2,2} \vee y_{3,2}=1(17)$,

$$y_{1,3} \vee y_{2,3} \vee y_{3,3} = 1(18);$$

5) kiekvienoje iš gyvenviečių M, L ir T gyvena tik vienas keleivis, t. y. vienu metu negali gyventi kartu daugiau negu vienas iš keleivių I, P ir S, todėl $x_{i,j} \wedge x_{r,j} = 0$, kur $r = 1, 2, 3, r \neq i$; iš šios lygties išplaukia devynios konkrečios lygtys: $x_{1,1} \wedge x_{2,1} = 0(19)$, $x_{1,1} \wedge x_{3,1} = 0(20)$, $x_{2,1} \wedge x_{3,1} = 0(21)$, $x_{1,2} \wedge x_{2,2} = 0(22)$, $x_{1,2} \wedge x_{3,2} = 0(23)$, $x_{2,2} \wedge x_{3,2} = 0(24)$, $x_{1,3} \wedge x_{2,3} = 0(25)$, $x_{1,3} \wedge x_{3,3} = 0(26)$, $x_{2,3} \wedge x_{3,3} = 0(27)$;

6) kadangi kiekvienas keleivis gyvena tik vienoje iš gyvenviečių, tai $x_{i,j} \wedge x_{i,r} = 0$, kur $r = 1, 2, 3, r \neq j$; iš šios lygties išplaukia devynios konkrečios lygtys: $x_{1,1} \wedge x_{1,2} = 0(28)$, $x_{1,1} \wedge x_{1,3} = 0(29)$, $x_{1,2} \wedge x_{1,3} = 0(30)$, $x_{2,1} \wedge x_{2,2} = 0(31)$, $x_{2,1} \wedge x_{2,3} = 0(32)$, $x_{2,2} \wedge x_{2,3} = 0(33)$, $x_{3,1} \wedge x_{3,2} = 0(34)$, $x_{3,1} \wedge x_{3,3} = 0(35)$, $x_{3,2} \wedge x_{3,3} = 0(36)$;

7) kadangi kiekvienas traukinio brigados darbuotojas i užima tik vienas pareigas k, tai $y_{i,k} \wedge y_{i,r} = 0$, kur $r = 1, 2, 3, r \neq k$; iš šios lygties išplaukia devynios konkrečios lygtys: $y_{1,1} \wedge y_{1,2} = 0(37)$, $y_{1,1} \wedge y_{1,3} = 0(38)$, $y_{1,2} \wedge y_{1,3} = 0(39)$, $y_{2,1} \wedge y_{2,2} = 0(40)$, $y_{2,1} \wedge y_{2,3} = 0(41)$, $y_{2,2} \wedge y_{2,3} = 0(42)$, $y_{3,1} \wedge y_{3,2} = 0(43)$, $y_{3,1} \wedge y_{3,3} = 0(44)$, $y_{3,2} \wedge y_{3,3} = 0(45)$;

8) kadangi kiekvienas pareigas k užima tik vienas brigados darbuotojas i, tai $y_{i,k} \wedge y_{r,k} = 0$, kur $r = 1, 2, 3, r \neq i$; iš šios lygties išplaukia devynios konkrečios lygtys: $y_{1,1} \wedge y_{2,1} = 0(46)$, $y_{1,1} \wedge y_{3,1} = 0(47)$, $y_{2,1} \wedge y_{3,1} = 0(48)$, $y_{1,2} \wedge y_{2,2} = 0(49)$, $y_{1,2} \wedge y_{3,2} = 0(50)$, $y_{2,2} \wedge y_{3,2} = 0(51)$, $y_{1,3} \wedge y_{2,3} = 0(52)$, $y_{1,3} \wedge y_{3,3} = 0(53)$, $y_{2,3} \wedge y_{3,3} = 0(54)$.

Sudarytos penkiasdešimt keturios loginės lygybės (loginės lygtys) ir sudaro probleminės situacijos loginį matematinį modelį – trečiosios klasės loginio uždavinio sprendinį.

Dabar belieka išspręsti gautą loginių lygčių sistemą, t. y. išspręsti antrosios klasės loginį uždavinį.

Sprendžiant šį uždavinį būtų galima suvesti visas ką tik sudarytas 54 klasikinės teiginių algebros lygtis į vieną lygtį su 18 kintamųjų ir rasti jos bendrąjį sprendinį 1.16.1.2 skyrelyje aprašytu metodu, o po to ir visus dalinius sprendinius.

Tačiau, kadangi šiuo nagrinėjamu atveju lygtis sudaro tik kintamieji $x_{i,j}$ bei $y_{i,j}$ be neapibrėžtųjų koeficientų (A, B, C ir pan.), tai nėra reikalo ieškoti bendrojo sprendinio – nežinomųjų $x_{i,j}$ bei $y_{i,j}$ priklausomybės nuo koeficientų A, B, C ir t. t. Šiuo atveju tikslinga pasinaudoti 1.16.1.2 skyrelyje pateikta pastaba apie loginių lygčių bei jų sistemų sprendimo būdą, naudojantis loginių funkcijų savybėmis. Šis būdas yra mažiau algoritmizuotas, nes, parenkant racionalesnę lygčių sprendinio seką, naudojamosi euristika, tačiau, sprendžiant šią sistemą „rankiniu būdu“, leidžia greičiau ir lengviau gauti sprendinį, negu suvedant visas lygtis į vieną ir sprendžiant 18 kintamųjų loginę lygtį kintamųjų nuoseklaus eliminavimo metodu.

1) Iš lygčių (1), (19), (20), (28), (29) gauname, jog $x_{2,1} = 0(55)$, $x_{3,1} = 0(56)$, $x_{1,2} = 0(57)$, $x_{1,3} = 0(58)$.

2) Pasinaudodami ką tik gautu sprendiniu $x_{1,3} = 0$, o taip pat lygtimis (2) ir (9) gauname, jog $x_{3,3} = 1(59)$.

3) Pasinaudodami ką tik gautu sprendiniu $x_{3,3} = 1(59)$ ir lygtimi (36), gauname, kad $x_{3,2} = 0(60)$.

4) Pasinaudodami (60), (57) ir lygtimi (8), gauname, jog $x_{2,2} = 1(61)$.

5) Pasinaudodami (61) ir lygtimi (4), gauname $y_{2,3} = 1(62)$.

6) Pasinaudodami (57) ir lygtimi (3), gauname $y_{1,3} = 0(63)$.

7) Pasinaudodami (60) ir lygtimi (5), gauname $y_{3,3} = 0(64)$.

8) Pasinaudodami (6), (64) ir lygtimi (15), gauname $y_{3,1} = 1(65)$.

9) Pasinaudodami (62) ir lygtimis (41) bei (42), gauname: $y_{2,1} = 0(66)$ ir $y_{2,2} = 0(67)$.

10) Pasinaudodami (67), (6) ir lygtimi (17), gauname $y_{1,2} = 1(68)$.

11) Pasinaudodami (68) ir lygtimi (37), gauname $y_{1,1} = 0(69)$.

Gavome tokį lygčių sistemos sprendinį: $x_{1,1} = 1(1)$, $x_{2,2} = 1(61)$, $x_{3,3} = 1(59)$, $y_{1,2} = 1(68)$, $y_{2,3} = 1(62)$, $y_{3,1} = 1(65)$; o visos kitos $x_{i,j}$ ir $y_{i,k}$ reikšmės lygios 0.

Iššifruodami (interpretuodami) gautąjį sprendinį, gauname, jog keleivis Ivanovas gyvena Maskvoje, keleivis Petrovas – Leningrade, o keleivis Sidorovas – kažkur tarp Maskvos ir Leningrado; mašinisto pavardė yra Sidorovas, pečkurio – Ivanovas, o konduktoriaus – Petrovas. Be to iš uždavinio sąlygos išplaukia, jog konduktorius Petrovas gyvena pusiaukeleje tarp Maskvos ir Leningrado. Kitų brigados darbuotojų gyvenamosios vietos neapibrėžtos: uždavinio sąlygos leidžia jiems gyventi bet kur.

1.16.1.3.5. Tekstiniai motyvacinių modelių sudarymo (nustatymo, paieškos) uždaviniai

Dar vieną grupę tekstinių loginių uždavinių, kuriuos sprendžiant tenka spręsti trečiosios ir antrosios klasės loginius uždavinius (panašiai, kaip tai buvo daroma ką tik

išnagrinėtame pavyzdyje), sudaro **tekstiniai motyvacinio modelio paieškos (nustatymo) uždaviniai**.

Juos sprendžiant tenka:

- 1) sudaryti nagrinėjamos situacijos loginį modelį (trečiosios klasės uždavinys),
- 2) sudaryti asmens, priimančio sprendimą, normatyvinį modelį (trečiosios klasės uždavinys),
- 3) formalia matematinės logikos kalba aprašyti priimtą sprendimą (trečiosios klasės uždavinys),

4) sudaryti loginių lygčių sistemą ir sprendžiant ją, ieškoti minimalios (pačios silpniausios) papildomos prielaidos, kurią reikėtų pridėti prie esamų prielaidų, kad iš jų būtų galima išvesti priimtą sprendimą, kaip iš tų prielaidų išplaukiančią loginę išvadą (1.16.1.2. skyrelyje mūsų jau spręstas antrosios klasės uždavinys),

5) interpretuoti gautą minimalios papildomos prielaidos matematinę formulę kaip minimalų (patį silpniausią) asmens, priėmusio sprendinį, motyvacinį modelį, egzistavusį sprendinio priėmimo metu, t. y. perversi gautą formulę į natūralią kalbą, kurioje buvo aprašytas šis loginis uždavinys (atvirkštinis trečiosios klasės uždavinys).

Norint, kad silpniausio motyvacinio modelio formalią išraišką, gautą Bulio algebros formulės pavidalu, būtų lengviau interpretuoti, t. y. būtų lengviau spręsti **atvirkštinį trečiosios klasės loginį uždavinį**, būna naudinga, dar prieš sprendžiant loginių lygčių sistemą ir sudarant minimalaus motyvacinio modelio matematinę išraišką, pabandyti, naudojantis tekstiniu probleminės situacijos aprašymu, spręsti papildomą trečiosios klasės tiesioginį loginį uždavinį, sudarant **hipotetinį motyvacinį modelį**, kurio turėtų pakakti, kad sprendinį priimantis asmuo priimtų kaip tik tokį sprendinį, kuris buvo priimtas.

Kartais, sprendžiant motyvacinio modelio paieškos uždavinį, tenka susidurti su situacija, kada priimtas sprendinys nėra suderintas su asmens, priimančio sprendinį, normatyviniu modeliu. Tai reiškia, jog šiuo atveju tas asmuo suteikė pirmenybę savo asmeniniams (ar kitų asmenų) interesams, pažeisdamas (atmesdamas) savo pareigybės reikalavimus, t. y. nesilaikydamas savo, kaip sudėtingos sistemos struktūros elemento, normatyvinio modelio. Tokiais atvejais, ieškant motyvacinio modelio, tenka atmesti normatyvinį modelį (ar bent tą jo dalį, kuri prieštarauja priimtam sprendiniui) ir spręsti loginių lygčių sistemą, turinčią mažiau lygčių.

Pasitaiko ir tokių atvejų, kai priimtas sprendinys prieštarauja situaciniam modeliui. Tai reiškia, kad arba asmuo, priimantis sprendinį, nepakankamai susipažino su esama situacija ir priėmė sprendinį, kurio nepajėgs įgyvendinti, arba tas asmuo nėra realistas ir priima sprendinius, neatsižvelgdamas į realias sąlygas. Šiuo atveju priimtas sprendinys arba jo dalis, į kurią būtinai įeina priimto sprendinio dalis, prieštaraujanti realiai situacijai, sudaro to asmens motyvacinį modelį, žinoma, jei tas asmuo priėmė tą sprendinį savo laisva valia be išorinės prievartos ir ne spontaniškai (pavyzdžiui, afekto būsenoje), o gerai apgalvojęs (kas, tiesa, žmonėms, nesiskaitantiems su realybe, nelabai būdinga).

Yra dar vienas svarbus momentas, su kuriuo tenka susidurti, kuriant motyvacinius modelius. Jo esmė tame, kad **asmens motyvacinis modelis ne visada būna pakankamai pastovus. Jis gali keistis, laikui bėgant, ir, kas svarbiausia, daugeliui asmenų net patiems jiems nėra pakankamai apibrėžtas ir žinomas.** Todėl gana dažnai priimami sprendiniai priklauso nuo nuotaikos bei prieš tai buvusių įvykių, o ne tik nuo situacijos dabar ir nuo normatyvinio modelio dabar. Į kai kuriuos kai kurių žmonių priimamus sprendinius veikia ne tik dabartis ir praeitis, bet ir jų laukiama ateitis, jų tikslai bei jų įsitikinimai, kad ateityje bus taip, o ne kitaip. Nieko nuostabaus, kad, sprendžiant motyvacinio modelio sudarymo vienam ir tam pačiam

asmeniui uždavinį, skirtingose situacijose, nagrinėjant skirtingus (ar net prieštarigus) jo priimtus sprendinius, gaunami skirtingi (ir net prieštaringi) motyvaciniai modeliai.

Kuriant motyvacinį modelį, reikia turėti omenyje, kad **žmogus – tai sudėtinga ir daugiau ar mažiau stochastinė sistema. Todėl reikia surinkti pakankamai daug informacijos, išnagrinėti pakankamai daug situacijų ir to žmogaus priimtų sprendinių, kad būtų galima pakankamai patikimai nustatyti, tas jo motyvacinio modelio charakteristikas, kurios dažniausiai išlieka pastovios ir pasireiškia jo sprendimuose.** Statistinės informacijos rinkimas ir jos kvalifikuotas apdorojimas – vienas svarbiausių pakankamai patikimo motyvacinio modelio sudarymo ir jo verificavimo etapų, nes, tik statistikai apdorojus pakankamai daug **momentinių motyvacinių modelių**, galima sudaryti **statistikai pakankamai patikimą apibendrintą motyvacinį modelį**, aprašantį asmens pastoviuosius motyvus.

Tekstinio loginio motyvacinio modelio paieškos uždavinio sprendimą pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu, kuriame situacijos ir priimtų sprendinių aprašymas paimtas iš žurnalo „Mokslas ir gyvenimas“.

„Jūs – sektoriaus vadovas vienoje įstaigoje. Įėjęs į bendrą kambarį, kuriame dirba Jūsų vadovaujami bendradarbiai, Jūs išgirdote, jog vienas jaunas darbuotojas pusbalsiu išsakė savo kaimynui pastabą apie jūsų nelabai tvarkingą išvaizdą – senai lygintas kelnes ir panešiotą apsitrynusį kaklaraištį. Jūs pajutote, kad dar keli darbuotojai išgirdo šią pastabą ir suprato, jog ją išgirdote ir Jūs. Kaip Jūs pasielgsite šioje situacijoje?“

Žurnale nagrinėjami šeši poelgio variantai:

1. Jūs nekreipiate dėmesio į padarytą pastabą.
 2. Jūs į pastabą atsakote, jog svarbiausia yra ne tai, kaip žmogus apsirengęs, o tai, kaip jis elgiasi ir dirba.
 3. Jūs replikuojate, jog kiekvienas žmogus turi teisę rengtis taip, kaip jam patinka.
 4. Jūs dėkojate už pastabą, tačiau nedarote jokių išvadų ir nekeičiate savo išvaizdos.
 5. Jūs dėkojate už pastabą ir pasistengiate artimiausiu metu sutvarkyti savo aprangą.
 6. Jūs papasakojate savo darbuotojams apie panašų įvykį ir po to keičiate pokalbio temą.
- Žurnalistas aprašo, kaip ekspertų grupė vertino šiuos galimus vadovo reakcijos į darbuotojo pastabą variantus.

1. Vertinant pirmąjį variantą ekspertų nuomonės išsiskyrė: vieni tvirtino, kad vadovas neturi reaguoti į smulkmenas, kiti teigė, jog reaguoti šiuo momentu nors ir nebūtina, tačiau atkreipti dėmesį į pastabą vis dėlto reikėjo. Bendras vertinimas – 12 taškų (balų).

2. Antrojo varianto vertinimas: „Jūsų reakcija yra teisinga, tačiau moralizuoti nevertėjo. Psichologiniai tyrimai rodo, kad tokie pamokymai neduoda teigiamo poveikio“. Komisijos vertinimas – 12 taškų.

3. Trečiąjį variantą dauguma ekspertų pripažino netinkamu sprendimu ir paskyrė už jį tik 3 taškus.

4. Ketvirtąjį variantą komisija įvertino taip: „Jūs pasielgėte mandagiai. Vadovas privalo dėkoti pavaldiniams už pastabas ir patarimus net ir tuo atveju, kai jie nemalonūs. Tačiau Jūs kritiką pripažinote tik formaliai, o išvadų nepadarėte. Tai irgi savotiška kritikos slopinimo forma, todėl Jūsų reakciją vertiname tik 18 taškų.“

5. Šį variantą komisija pripažino geriausiu: „Jūs pasielgėte teisingai. Jūs mandagus, pripažįstate kritiką ir darote išvadą iš jos. Vadovas privalo rengtis skoningai ir tvarkingai. Tai nereiškia, jog jis turi vaikytis madų, tačiau vadovo apranga turi būti pavyzdžiu pavaldiniams ir taip rengdamasis vadovas įgyja moralinę teisę reikalauti iš savo pavaldinių tvarkos, disciplinos ir elgesio kultūros“. Bendras komisijos vertinimas – 42 taškai.

6. Šeštąjį variantą komisija įvertino taip: „Nukreipti bendradarbių dėmesį į ką nors kita, išvengiant konfliktines situacijas, – teisinga taktika: Jūs reagavote į darbuotojo pastabą (reiškia, Jūs dėmesingas savo darbuotojams ir jų pastaboms), neužsirūstinote dėl kritikos (o tai būtų buvusi psichologinio konflikto pradžia). Tačiau to nepakanka. Jei Jūs panašiose situacijose stengsitės nukreipti darbuotojų dėmesį ir pervedinėti kalbą į kitą temą, bendradarbiai greitai pastebės tai ir laikys Jus žmogumi, besistengiančiu išvengti atvirų ir nuoširdžių atsakymų“. Šį sprendinį komisija įvertino 33 taškais.

Mes čia neužsiminėsime poelgių vertinimu (ekspertiniams įverčiams ir jų matematiniam apdorojimui skiriamas specialus 1.16.3. skyrelis) ir nenagrinėsime, ar teisingai ekspertai paskirstė balus,

o pabandysime nustatyti, kokiais motyvais vadovavosi sektoriaus vadovas, pasielgdamas vienaip arba kitaip.

Juk kiekvienas iš ankščiau išvardintų sprendinių buvo priimtas toje pačioje situacijoje skirtingų asmenų, užimančių tas pačias pareigas. Tai reiškia, kad **situacinis ir normatyvinis modeliai išliko tie patys, o skirtingi sprendiniai buvo priimti todėl, kad buvo skirtingi tų pareigūnų motyvaciniai modeliai**, skirtingi jų asmeniniai įsitikinimai, skyrėsi vertybių skalės.

Panagrinėsime pirmąjį sektoriaus vadovo reakcijos variantą ir pabandysime nustatyti vadovo motyvacinį modelį, kuriuo jis vadovavosi, priimdamas tokį sprendinį.

Pradžioje įvesim žymenis, kuriais naudodamiesi galėtume aprašyti nagrinėjamąją situaciją ir priimtą sprendinio variantą matematinės logikos formulėmis.

Teiginį „Mano apranga netvarkinga“ pažymėsime raide A, o teiginį „Mano pavaldinys daro man pastabą dėl mano aprangos“ – raide B.

Teiginį „Aš girdėjau pavaldinio pastabą mano adresu“ pažymėsime raide C, o teiginį „Mano pavaldiniai suprato, jog aš tą pastabą girdėjau“ – raide D.

Teiginį „Aš esu sektoriaus vadovas“ pažymėsime raide E, teiginį „Tai yra smulkmena“ – raide F, teiginį „I smulkmenas vadovas neturi kreipti dėmesio ir gaišti laiką į jas reaguodamas“ – raide G, o teiginį „Aš nereaguojau“ – raide H.

Naudodamiesi įvestais žymenimis sudarysime situacinį modelį. Tai formulė $E \wedge A \wedge B \wedge C \wedge D = 1$, aprašanti esamą situaciją.

Sektoriaus vadovo normatyvinį modelį nagrinėjamoje situacijoje sudaro formulė $G \wedge [G \rightarrow (F \rightarrow H)] = 1$, reiškianti, jog: 1) vadovas neturi kreipti dėmesio į smulkmenas ir gaišti laiko; 2) vadovaujantis šia taisykle, vadovas neturi reaguoti į tai, kas yra smulkmena.

Vadovo priimtą sprendinį aprašo teiginys $H = 1$. Vienas galimų hipotetinių motyvacinio modelio variantų šiuo atveju galėtų būti formulė, išreiškianti vadovo nuomonę į tai, kas, jo manymu, yra smulkmena: $(E \wedge A \rightarrow F) \wedge (E \wedge B \wedge C \rightarrow F) \wedge (E \wedge D \rightarrow F) = 1$.

Kad tokio hipotetinio modelio pakaktų sprendiniui $H = 1$ gauti, nesunku įsitikinti.

1. Iš situacinio modelio išplaukia, jog $E = 1, A = 1, B = 1, C = 1, D = 1$.
2. Iš normatyvinio modelio išplaukia, jog $G = 1$ ir $G \rightarrow (F \rightarrow H) = 1$, iš kur išplaukia, jog $F \rightarrow H = 1$.
3. Iš hipotetinio motyvacinio modelio išplaukia, jog $E \wedge A \rightarrow F = 1, E \wedge B \wedge C \rightarrow F = 1, E \wedge D \rightarrow F = 1$.
4. Sujungdami hipotetinį motyvacinį modelį su situaciniu, gauname, jog $F = 1$.
5. Sujungdami šią išvadą su normatyviniu modeliu, gauname jog $H = 1$, t. y. pirmąjį vadovo sprendinio variantą.

Taip pat nesunku įsitikinti, kad mūsų pasirinktas hipotetinis motyvacinis modelis yra ne tik pakankamai, bet ir bereikalingai stiprus reikiamam sprendiniui gauti. Pavyzdžiui, pakaktų ir žymiai silpnescio motyvacinio modelio: $(E \wedge A \rightarrow F) \vee (E \wedge B \wedge C \rightarrow F) \vee (E \wedge D \rightarrow F) = 1$.

Naudodamiesi 1.16.1.2 skyrelyje gauta formule $X = \overline{P_1} \vee \overline{P_2} \vee \dots \vee \overline{P_n} \vee H$, rasime patį silpniausią motyvacinį modelį, pakankamą sprendiniui $H = 1$ gauti.

$$\begin{aligned} X &= \overline{E} \wedge \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \vee \overline{G} \wedge [G \rightarrow (F \rightarrow H)] \vee H = \overline{E} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \overline{G} \vee \overline{G} \vee \overline{F} \vee \overline{H} \vee H = \\ &= \overline{E} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \overline{G} \vee GF\overline{H} \vee H = \overline{E} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \overline{G} \vee GF\overline{H} \vee GF\overline{H} \vee H = \overline{E} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \\ &\vee \overline{D} \vee \overline{G} \vee F\overline{H} \vee H = \overline{E} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \overline{G} \vee F\overline{H} \vee FH \vee H = \overline{E} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \overline{G} \vee F \vee H = \\ &= \overline{E} \wedge \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \overline{G} \vee F \vee H = (E \wedge A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge G) \rightarrow (F \vee H). \end{aligned}$$

Reiškia, sprendiniui $H = 1$ gauti šiuo atveju pakaktų ir žymiai silpnescio motyvacinio modelio, reiškiančio, kad pakaktų, jog sprendinį priimantis asmuo manytų, esą iš teiginių E, A, B, C, D ir G konjunkcijos išplaukia arba tai, kad visa tai smulkmena, arba tai, kad į visa tai reaguoti nereikia.

Gautas rezultatas rodo taip pat tai, kad nagrinėjamo pirmuoju atveju galima buvo supaprastinti ne tik motyvacinį, bet ir normatyvinį modelį.

Supaprastintas normatyvinis modelis būtų $F \rightarrow H = 1$, o supaprastintas silpniausias motyvacinis modelis $(E \wedge B \wedge C \wedge D) \rightarrow (F \vee H) = 1$.

Palieku skaitytojui savarankiškai panagrinėti likusius penkis vadovo reakcijos variantus ir sudaryti atitinkamus motyvacinius modelius.

1.16.1.3.6. Tekstiniai uždaviniai, kurių modelius sudaro mišri (loginius ir kiekybinius santykius vaizduojanti) lygčių sistema

Trečiosios ir antrosios klasės tekstiniai uždaviniai gali būti ir **mišrūs**, t. y. **dalys to uždavinio modelį sudarančių santykių gali būti loginiai, dalis – išreiškiami**

kiekybinės matematikos kalba. Tokių uždavinių sprendime galima išskirti tokius etapus: 1) loginio probleminės situacijos modelio sudarymas; 2) galimų loginio uždavinio sprendimo variantų radimas; 3) gautų variantų analizė kiekybinės matematikos metodais, naudojantis kiekybiniu probleminės situacijos modeliu; 4) analizės rezultatų palyginimas ir tinkamiausio sprendinio parinkimas.

Pailiustruosiu tokio mišraus uždavinio sprendimą konkrečiu pavyzdžiu, kuriame pasinaudosime uždavinio sąlyga, paimta iš A.Kofmano ir R.Forro knygos „Займемся исследованием операций“.

Šiame uždavinyje ieškomas geriausias komponentų rinkinys tranzistorinių radijo imtuvėlių gamybai.

Tas rinkinys turi tenkinti tokias sąlygas:

1) imtuvėlyje gali būti panaudoti tik vieno iš trijų galimų tipų (T_1 , T_2 , T_3) tranzistoriai;
2) imtuvėliai gali turėti medinį (E) arba plastikinį (P) korpusą, bet plastikinio korpuso gabaritai neleidžia pasinaudoti tipo T_2 tranzistoriais ir transformatorium F, tačiau jame vietoj transformatoriaus F galima naudotis specialiu maitinimo bloku A;

3) pasirinkus T_1 tipo tranzistorius, būtina naudotis transformatorium F;

4) tranzistoriams T_2 ir T_3 reikalingas specialus maitinimo blokas;

5) komponentų kainos yra tokios:

T_1 tipo tranzistoriaus – 28 frankai,

T_2 tipo tranzistoriaus – 30 frankų,

T_3 tipo tranzistoriaus – 31 frankas,

transformatoriaus F – 25 frankai,

specialaus maitinimo bloko A – 28 frankai,

medinio korpuso E – 9 frankai,

plastikinio korpuso P – 6 frankai,

visų kitų detalių rinkinio, reikalingo naudojantis T_1 tipo tranzistoriais, kaina – 27 frankai, naudojantis T_2 tipo tranzistoriais – 28 frankai, T_3 tipo tranzistoriais – 25 frankai.

6) pagamintų radijo imtuvėlių pardavimo kaina lygi 110 frankų, kai imtuvėlio korpusas medinis, ir 105 frankai, kai tas korpusas plastikinis.

Sudarysime loginį modelį, išreiškianti sąlygas, kurias turi tenkinti galimi imtuvėlio variantai. Tuo tikslu, naudodamiesi matematinės logikos kalba, įvesime žymenis, reikalingus probleminės situacijos formalizuotam aprašymui, t. y. pažymėsime elementarius teiginius, kuriais naudosimės, sudarydami probleminės situacijos loginį modelį:

1) teiginį „Imtuvėlio gamybai vartosime T_j tipo tranzistorius“ pažymėsime T_j , kur $j = 1, 2, 3$;

2) teiginį „Imtuvėlis bus mediniame korpuse E“, pažymėsime E, o teiginį „Imtuvėlis bus plastikiniame korpuse P“ – žymėsime P;

3) teiginį „Imtuvėlis turės transformatorių F“ pažymėsime žymeniu F, o teiginį „Imtuvėlis turės specialų maitinimo bloką A“ – žymėsime A.

Dabar jau galima matematinės logikos kalba aprašyti sąlygas, kurias turi tenkinti galimi imtuvėlio schemos variantai.

Iš pirmosios sąlygos gauname lygybę $(T_1 \wedge \bar{T}_2 \wedge \bar{T}_3) \vee (\bar{T}_1 \wedge T_2 \wedge \bar{T}_3) \vee (\bar{T}_1 \wedge \bar{T}_2 \wedge T_3) = 1$.

Iš antrosios sąlygos gauname lygybes $E\bar{P} \vee \bar{E}P = 1$ ir $P \rightarrow \bar{T}_2 \bar{F} A = 1$, kurias sujungę į vieną gauname $E\bar{P} \vee \bar{E}P \bar{T}_2 \bar{F} A = 1$.

Iš trečiosios sąlygos gauname lygybę $T_1 \rightarrow F = 1$, t. y. $\bar{T}_1 \vee F = 1$.

Iš ketvirtosios sąlygos išplaukia lygybės $T_2 \rightarrow A = 1$ ir $T_3 \rightarrow A = 1$, kurias sujungdami gauname $\bar{T}_2 \bar{T}_3 \vee A = 1$.

Iš uždavinio konteksto išplaukia, jog $A \wedge F = 0$, t. y. jog $\bar{A} \vee \bar{F} = 1$.

Kadangi visos sąlygos turi būti tenkinamos ne tik atskirai, bet ir kartu, tai gauname lygybę $(T_1 \bar{T}_2 \bar{T}_3 \vee \bar{T}_1 T_2 \bar{T}_3 \vee \bar{T}_1 \bar{T}_2 T_3)(E\bar{P} \vee \bar{E}P \bar{T}_2 \bar{F} A)(\bar{T}_1 \vee F)(\bar{T}_2 \bar{T}_3 \vee A)(\bar{A} \vee \bar{F}) = 1$, t. y. lygybę $A \bar{E} \bar{F} P \bar{T}_1 T_2 \bar{T}_3 \vee A \bar{E} \bar{F} P \bar{T}_1 \bar{T}_2 T_3 \vee A \bar{E} \bar{F} P T_1 \bar{T}_2 \bar{T}_3 \vee A \bar{E} \bar{F} P T_1 T_2 T_3 = 1$.

Iš šios lygybės išplaukia, jog galimi keturi imtuvėlio schemos variantai: 1) $T_1 E F$, 2) $T_2 E A$, 3) $T_3 E A$, 4) $T_3 P A$.

Pasirinkdami kiekybinio optimizavimo modelio optimalumo rodikliu pelną P, gaunamą parduodant pagamintus imtuvėlius, sudarysime to modelio tikslo funkciją $p_i = c_i - s_i \rightarrow \max_i$, kur i – imtuvėlio schemos varianto numeris, c_i – imtuvėlio pardavimo kaina, s_i – imtuvėlio gamybos savikaina

(tiksliau, imtuvėliui pagaminti reikalingų komponenčių kainų suma), p_i – pelnas, gaunamas imtuvėlį parduodant.

Pirmojo tipo imtuvėlio savikaina $s_1=28+9+25+27=89$, pardavimo kaina $c_1=110$, pelnas $p_1=110-89=21$.

Antrojo tipo imtuvėlio savikaina $s_2=30+9+28+28=95$, pardavimo kaina $c_2=110$, pelnas $p_2=110-95=15$.

Trečiojo tipo imtuvėlio savikaina $s_3=31+9+28+25=93$, pardavimo kaina $c_3=110$, pelnas $p_3=110-93=17$.

Ketvirtojo tipo imtuvėlio savikaina $s_4=31+6+28+25=90$, pardavimo kaina $c_4=105$, pelnas $p_4=105-90=15$.

Kadangi $\max_i p_i = p_1 = 21$, tai pasirenkame pirmąjį imtuvėlių schemas tipą, t. y. imtuvėlius mediniame korpusė E, turinčius transformatorių F ir tranzistorių T_1 .

1.16.1.3.7. Tekstiniai klasių logikos taikymo uždaviniai

Pateiksiu dar vieną trečios klasės uždavinio pavyzdį. Tai uždavinys, priklausantis **klasių logikos aritmetinio bei algebrinio taikymo uždavinių grupei**.

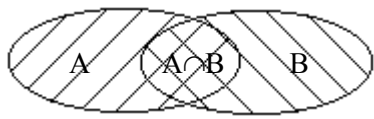
Klasėmis vadinsime objektų aibes, kurias žymėsime lotyniškais raidėmis A, B, C,... Tomis pačiomis raidėmis žymėsime ir teiginius (predikatus), teigiančius, jog mūsų nagrinėjami objektai priklauso tai klasei (pavyzdžiui, klasei A). Didžiosiomis lotyniškais raidėmis, paimitomis į kvadratinis skliaustus, žymėsime tų objektų skaičių atitinkamose klasėse (aibėse).

Pasinaudodami susitarimu, jog A reiškia ir aibę ir teiginį (predikatą), gausime, jog $\langle A \wedge B \rangle = A \cap B$, $\langle A \vee B \rangle = A \cup B$, $\langle \neg A \rangle = \neg A$, iš kur išplaukia, kad $[A \cap B] = [\langle A \wedge B \rangle]$, $[A \cup B] = [\langle A \vee B \rangle]$, $[\neg A] = [\langle \neg A \rangle]$.

Užrašymo paprastumo dėlei priimsime tokius žymėjimus $[\langle A \wedge B \rangle] = [A \wedge B]$, $[\langle A \vee B \rangle] = [A \vee B]$, $[\langle \neg A \rangle] = [\neg A]$, reiškiančius objektų skaičių atitinkamose aibėse, kuriose teiginiai $A \wedge B$, $A \vee B$ bei $\neg A$ yra teisingi.

Tuomet gausime: $[A \cap B] = [A \wedge B]$, $[A \cup B] = [A \vee B]$, $[\neg A] = [\neg A]$.

Išvesime klasių logikos lygybę $[A \vee B] = [A] + [B] - [A \wedge B]$, leidžiančią pereiti nuo matematinės logikos formulių prie aritmetinių bei algebrinių formulių.



377 pav.

Iš 377 pav. matyti, kad formulė $[A \cup B] = [A] + [B] - [A \cap B]$ yra tikrai teisinga, nes, sudedant skaičius $[A]$ ir $[B]$ sumoje $[A] + [B]$, skaičius $[A \cap B]$ pasikartoja du kartus.

Lygybė $[A \cup B] = [A] + [B] - [A \cap B]$ galioja ir tam atvejui, kai aibės A ir B neturi bendrų elementų bei sutampa, o taip pat ir tiems atvejams, kai viena ar abi iš aibių A ir B yra tuščios.

Iš formulės $[A \cup B] = [A] + [B] - [A \cap B]$, naudodamiesi susitarimu priimtais žymėjimais, gauname mums reikalingą formulę $[A \vee B] = [A] + [B] - [A \wedge B]$, analogišką mums jau žinomai tikimybinės logikos formulei $[X_1 \vee X_2] = x_1 + x_2 - [X_1 \wedge X_2]$.

Išvestoji formulė leidžia, apskaičiuojant aibių elementų skaičių, naudotis matematinės logikos aparatu, t. y. spręsti klasių logikos uždavinius.

Išspręsimė vieną konkretų klasių logikos uždavinėlį. Į tarptautinę onkologų konferenciją Vilniuje atvyko $n=50$ dalyvių. Iš anketų, kurias jie užpildė, paaiškėjo, kad anglų kalbą moka $a=32$ dalyviai, lietuvių kalbą moka $b=40$ dalyvių ir prancūzų kalbą moka $c=18$ dalyvių. Taip pat paaiškėjo, kad tarp konferencijos dalyvių neatsirado nė vieno, kalbančio angliškai, kuris mokėtų ir prancūzų kalbą.

Norėdami formalizuoti uždavinio sąlygų užrašymą, t. y. sudaryti uždavinio matematinį modelį, pažymėsime:

3) L – teiginį „konferencijos dalyvis moka lietuviškai“, o taip pat tokių dalyvių aibę.

1) $[A \vee P \vee L] = n = 50$; 2) $[A] = a = 32$; 3) $[L] = b = 40$; 4) $[P] = c = 18$; 5) $A \cap P = \emptyset$, т. е. $[A \cap P] = 0$;

Naudojantis šiuo modeliu reikia apskaičiuoti: 1) konferencijos dalyvių mokančių tik lietuviškai, skaičių $x = [\bar{A} \wedge \bar{P} \wedge L]$, 2) nemokančių lietuviškai konferencijos dalyvių skaičių $y = [(A \wedge P \wedge \bar{L}) \vee (\bar{A} \wedge P \wedge \bar{L}) \vee (A \wedge \bar{P} \wedge \bar{L}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{P} \wedge \bar{L})] = [(P \wedge \bar{L}) \vee (\bar{P} \wedge \bar{L})] = [\bar{L}]$.

$$2) y = [(A \wedge P \wedge \bar{L}) \vee (\bar{A} \wedge P \wedge \bar{L}) \vee (A \wedge \bar{P} \wedge \bar{L}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{P} \wedge \bar{L})] = [(P \wedge \bar{L}) \vee (A \wedge \bar{L}) \vee 0] = [P \wedge \bar{L}] + [A \wedge \bar{L}] - [(P \wedge \bar{L}) \wedge (A \wedge \bar{L})] = [P \wedge \bar{L}] + [A \wedge \bar{L}] - [A \wedge P \wedge \bar{L}] = [P \wedge \bar{L}] + [A \wedge \bar{L}] - 0 = [P \wedge \bar{L}] + (A \wedge \bar{L}),$$

nes $A \wedge P = 0$.

$$4) \mathbf{c} = [\mathbf{P}] = [(\mathbf{P} \wedge \mathbf{L}) \vee (\mathbf{P} \wedge \bar{\mathbf{L}})] = [\mathbf{P} \wedge \mathbf{L}] + [\mathbf{P} \wedge \bar{\mathbf{L}}] - [\mathbf{P} \wedge \mathbf{L} \wedge \bar{\mathbf{L}}] = [\mathbf{P} \wedge \mathbf{L}] + [\mathbf{P} \wedge \bar{\mathbf{L}}], \text{ I\AA kur} \\ [\mathbf{P} \wedge \bar{\mathbf{L}}] = \mathbf{c} - [\mathbf{P} \wedge \mathbf{L}].$$

$$\begin{aligned} 6) \text{ b} = [\text{L}] &= [\text{LAP} \vee \text{LAP} \bar{\text{P}} \vee \text{L} \bar{\text{A}} \text{P} \vee \text{L} \bar{\text{A}} \bar{\text{P}}] = [\text{AL} \vee \text{PL} \vee \bar{\text{A}} \bar{\text{P}} \text{L}] = [\text{AL} \vee \text{PL}] + [\bar{\text{A}} \bar{\text{P}} \text{L}] - \\ &- [(\text{AL} \vee \text{PL}) \bar{\text{A}} \bar{\text{P}} \text{L}] = [\text{AL}] + [\text{PL}] - [\text{APL}] + [\bar{\text{A}} \bar{\text{P}} \text{L}] - 0 = [\text{AL}] + [\text{PL}] - 0 + x, \text{ i\u0161 kur } [\text{AL}] + [\text{PL}] = \\ &= \text{b} - x = \text{b} - n + a + c. \end{aligned}$$

Palieku skaitytojai pabandyti įsitikinti, ar pakanka pateiktų duomenų nustatymui, kiek tarp konferencijos dalyvių yra: 1) mokančių tik angliškai, 2) mokančių tik prancūziškai, 3) mokančių angliškai ir lietuviškai, 4) mokančių prancūziškai ir lietuviškai.

1.16.1.3.8. Loginio modeliavimo ir loginio projektavimo taikymai

Pirmajai grupei priklauso mūsų čia išnagrinėti ventiliinių schemų loginės analizės bei ventiliinių schemų, o taip pat kombinacinių loginių schemų bei baigtinių automatų išorinių matematinių modelių sudarymo uždaviniai. Šiai grupei priskirtini ir sudėtingo kūno formos matematinio modelio sudarymo uždaviniai, o taip pat tekstinių loginių uždavinių lygčių sistemų, situacinių, pareigūnų normatyvinių ir motyvacinių modelių sudarymo uždaviniai. Pirmajai grupei priklauso ir tekstiniai klasių logikos

taikymo uždaviniai, nors pats tokių uždavinių, o taip pat ir tekstinių loginių uždavinių sprendimas, kai lygčių sistemos jau sudarytos, priklauso antrajai loginių uždavinių klasei – loginių lygčių ir jų sistemų sprendinio uždavinių klasei, kurią mes nagrinėjome 1.16.1.2. skyrelyje.

Loginio projektavimo uždavinių pavyzdžiais gali būti baigtinių automatų vidinių modelių pagal duotus išorinius modelius sudarymo uždaviniai (žiūr., „elektroninio užrakto“, dvejetainio n–skilčio lygiagretaus ir nuoseklaus veikimo sumatoriaus vidinių modelių sudarymo uždavinius), ventilinių schemų sintezės uždaviniai, o taip pat radijo imtuvo schemas išrinkimo uždavinys, kuriam būdingas loginės analizės metodų taikymas projektavimo tikslams.

Loginis projektavimas plačiai taikomas kompiuterinės ir kitos diskretinės elektroninės technikos projektavimo praktikoje, o **loginis deskriptinis modeliavimas** pradėtas taikyti sudėtingų sistemų imitaciniame modeliavime.

Loginis deskriptinis ir normatyvinis modeliavimas, loginė analizė ir loginė sintezė dažniausiai yra taikomi kartu su kiekybinės matematikos metodais ir šiuolaikinėse sudėtingose **kompleksinėse automatizuotose sisteminio modeliavimo ir sisteminio projektavimo sistemose** tampa galingu ir efektyviu matematiniu instrumentu. Tokias sistemas ir tokio instrumento taikymus mes nagrinėsime antrojoje šios mokymo priemonės dalyje.

1.16.1.4. Ketvirtosios klasės loginiai uždaviniai

Loginio projektavimo uždaviniai, priklausantys ką tik nagrinėjusiai trečiajai loginių uždavinių klasei, kaip jau buvo anksčiau minėta, neretai duoda ne vieną, o keletą (kartais ir gana daug) funkcionaliai ekvivalenčių, tačiau turinčių skirtingas struktūras, sprendinių.

Pavyzdžiui, mūsų jau ne kartą nagrinėto dvejetainio vienaskilčio sumatoriaus, turinčio tris įėjimus ir du išėjimus, išėjimo funkcijos, pateiktos tobulioje disjunktinėje normaliojoje formoje yra tokios: $y_1 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$, $y_2 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Tokių funkcijų realizavimui reikėtų 8 konjunktorių, turinčių po tris įėjimus, dviejų disjunktorių, turinčių po keturis įėjimus ir trijų invertorių, t. y. $(8 \times 3) + (2 \times 4) = 32$ diodų, 3 tranzistorių ir ne mažiau 16 rezistorių.

Funkciją y_2 galima supaprastinti, „suklijuojant“ jos **vieneto konstituentes**.^{*} Tuomet gautume $y_2 = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$, ir sumatoriaus realizavimui prireiktų jau tik $(4 \times 3) + (3 \times 2) + 4 + 3 = 25$ diodų, 3 tranzistorių ir 15 rezistorių.

Vėliau pamatysime, jog šio sumatoriaus schemą galima dar labiau supaprastinti, gaunant schemą, kurioje yra tik 18 diodų, 1 tranzistorius ir 10 rezistorių.

Schema, kuri turi mažiau detalių yra ne tik pigesnė, bet dažnai yra ir patikimesnė bei greičiau veikianti. Todėl svarbu mokėti minimizuoti logines funkcijas bei jų sistemas ir tokiu būdu optimizuoti tas funkcijas realizuojančias schemas, mažinti jų kainą, didinti patikimumą ir veikimo greitį.

Loginių funkcijų minimizavimo uždaviniai ir sudaro ketvirtąją loginių uždavinių klasę.

^{*} Elementarių teiginių ir jų neiginių žymenis raidėmis ir raidėmis su brūkšniu viršuje gana dažnai vadina **literomis**, literų konjunkcijas – **konjunktais**, literų disjunkcijas – **disjunktais**. Konjunktai, kurių disjunktija sudaro loginės funkcijos YDNF, vadinami **vieneto konstituentėmis**, o disjunktai, kurių konjunkcija sudaro funkcijos TKNF, vadinami **nulio konstituentėmis**.

Šiame skyrelyje mes nagrinėsime kai kuriuos tokių uždavinių sprendimo metodus.

Projektuojant diskretaus veikimo schemas, realizuojančias tuos ar kitus mums reikalingus algoritmus (pavyzdžiui, skaičiavimo, automatinio valdymo ir pan.), jau projektavimo pradžioje tenka apsispręsti, **kokiais loginiais elementais naudosimės sintezuodami tą schemą**, kitaip tariant, **kokia logikos algebros kalba bus naudojama tos schemos matematiniam aprašymui**.

Gana dažnai naudojamos Bulio algebra, kurios pagrindą sudaro trys loginės operacijos: konjunkcija ($\wedge$, arba $\&$), disjunkcija ($\vee$) ir loginis neigimas (inversija), kuris, kaip jau ne kartą buvome minėję, žymimas ir $\neg$, ir brūkšneliu virš teiginio ar predikato (o kartais ir ženkliu $\sim$, nors tas ženklas vartojamas ir kitų loginių operacijų žymėjimui). Šiame skyrelyje mes taip pat naudosimės ta algebra, nors, žinoma, elektroninių diskretaus veikimo schemų projektavimo praktikoje naudojamos ir kitos loginės algebros: slenkstinė, mažoritarinė, Šeferio, Vebo, Žegalkino ir t. t.

Išsirinkus logikos algebrą, reikia dar apsispręsti, **kokioje formoje bus ieškomos minimalios loginių funkcijų išraiškos**.

Pavyzdžiui, mūsų pasirinktoje Bulio algebroje galima ieškoti minimalių funkcijų disjunktinių normalių formų (DNF) bei konjunktinių normalių formų (KNF) klasėse, tai yra ieškoti taip vadinamų MDNF bei MKNF. Tačiau galima ieškoti minimalių išraiškų ir trumpiausių konjunktinių ir disjunktinių formų klasėse, spręsti faktorizavimo ir absoliutaus minimizavimo uždavinius.

Šio skyrelio pradžioje užsiimsime MDNF paieška.

Kokios nors loginės funkcijos **minimaliąja disjunktine normaliąja forma (MDNF)** vadinama tokia tos funkcijos DNF (elementariųjų konjunktijų disjunkcija), kurioje elementarių teiginių bei jų neiginių (įskaitant jų pasikartojimus skirtingose konjunktijose) skaičius yra minimalus.

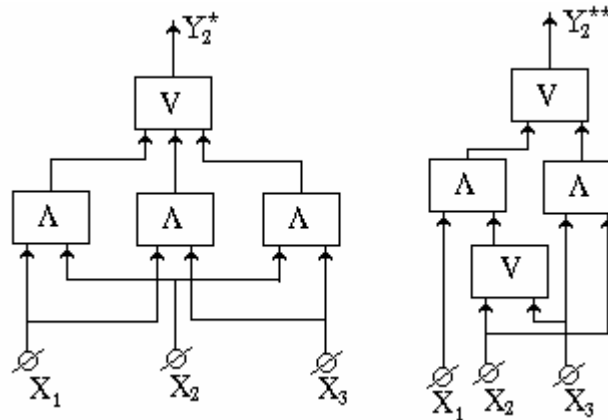
Pavyzdžiui, ką tik nagrinėtos funkcijos $Y_2 = \overline{X_1}X_2X_3 \vee X_1\overline{X_2}X_3 \vee X_1X_2\overline{X_3} \vee X_1X_2X_3$ MDNF yra funkcija $Y_2^* = X_1X_2 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3$, nes: 1) funkcija Y_2^* yra funkcionaliai ekvivalenti funkcijai Y_2 (t.y., turi tą pačią funkcijos reikšmių lentelę, arba, kitaip tariant, esant vienodoms argumentų reikšmėms, funkcijos Y_2^* ir Y_2 priima vienodas reikšmes); 2) funkcija Y_2^* yra elementariųjų konjunktijų disjunkcija (t. y., DNF); 3) funkcijoje Y_2^* jau nebegalima sumažinti elementarių teiginių skaičiaus, nepažeidžiant pirmosios ar antrosios sąlygos.

Išskeldami vienodus daugiklius už skliaustų, mes dar galėtume, nepažeisdami pirmojo reikalavimo, šiek tiek minimizuoti šią funkciją, gaudami, pavyzdžiui, funkcionaliai ekvivalenčią jai funkciją $Y_2^{**} = X_1(X_2 \vee X_3) \vee X_2X_3$, kurioje būtų jau ne šeši, o penki elementarūs teiginiai ir kurios realizacijai prireiktų jau ne devynių, o aštuonių didučių, tačiau Y_2^{**} jau nebebūtų DNF, t. y. netenkintų antrojo reikalavimo. Todėl Y_2^{**} būtų ne MDNF, o **faktorizuota funkcijos Y_2 forma (FF)**.

Iš pirmo žvilgsnio galėtų atrodyti, kad nėra prasmės ieškoti MDNF, o geriau iškart eiti prie FF, tuo labiau, kad ne visuomet iš MDNF gali būti gauta FF, tačiau MDNF, net tuo atveju, kai joje yra daugiau elementų negu FF, gali turėti kai kurių privalumų, lyginant su FF. Kad tai suvoktume, pavaizduosime schemas, realizuojančias Y_2^* ir Y_2^{**} (žiūr. 378 pav.).

Funkcijos Y_2^* schemoje signalai X_1, X_2, X_3 , patekę į schemą, praeina vienodo ilgio (ir laiko trukmės) kelią, suformuodami išėjimo signalą; funkcijos Y_2^{**} schemoje

signalų keliai nevienodi, ir todėl, greitai keičiantis signalų reikšmėms, gali būti pažeista jų koherentiškumo sąlyga, t. y. gali susitikti signalai priklausantys skirtingiems schemos veikimo taktams (vaizdžiai tariant, vienas signalas pateiktų informaciją apie „šiandieną“, o kitas apie „vakardieną“) ir todėl schema suveiktų neteisingai. Be to, siekiant maksimizuoti schemų veikimo greitį, funkcijos Y_2^* schema, aišku, bus pranašesnė už funkcijos Y_2^{**} schemą.



378 pav.

Išnagrinėtasis pavyzdėlis paaiškina, kodėl neretai MDNF paieškos būna aktualesnės negu FF paieškos.

Egzistuoja nemažai MDNF gavimo metodų. Mes čia panagrinėsime tik kai kuriuos.

1.16.1.4.1. Euristinis MDNF radimo metodas

Vienas jų – **euristinis metodas** (nuo graikiško žodžio „eurika“ – „atradau“). Šio metodo esmę sudaro jau mums žinomų Bulio algebros tapatybių (žiūr. 1.16.1.2.6. skyrelį, o taip pat [52, 100]) panaudojimas, suključuojant suključojamas vieneto konstituentės bei kitas elementarias konjunkcijas ir absorbuojant tas pertvarkomos formulės dalis, kurios gali būti absorbuotos likusiomis dalimis. Kartais, prieš pradėdant ką nors klijuoti bei absorbuoti, tenka pasinaudoti ir operacijomis, esančiomis atvirkštinėmis suključavimui bei absorbcijai.

Pailiustruosiu tai trumpu pavyzdėliu.

Tarkime, mums reikia surasti funkcijos $f(A, B, C, D) = ABC \vee \overline{AC} \vee \overline{BC} \vee AB\overline{D}$ MDNF.

Pradinėje šios funkcijos formoje mes nieko negalime nei suključuoti, nei absorbuoti. Tačiau, pasinaudodami operacija, atvirkštine suključavimui, konjunkciją $\overline{BC}$ galime pakeisti tapačia jai dviejų konjunkcijų disjunkcija: $\overline{BC} \equiv \overline{ABC} \vee \overline{AB\overline{C}}$, o pasinaudodami operacija, atvirkštine absorbcijai, konjunkciją $\overline{AC}$ taip pat galime pakeisti dviejų konjunkcijų disjunkcija: $\overline{AC} \equiv \overline{AC} \vee \overline{ABC}$. Tuomet gausime $f(A, B, C, D) = \underline{ABC} \vee \overline{AC} \vee \underline{\overline{ABC}} \vee \underline{\overline{AB\overline{C}}} \vee \overline{AB\overline{D}} \equiv \underline{AB} \vee \overline{AC} \vee \underline{\overline{AB}} \vee \overline{AB\overline{D}} = B \vee \overline{AC} \vee \overline{AB\overline{D}} \equiv B(1 \vee \overline{AD}) \vee \overline{AC} \equiv B \vee \overline{AC}$. Gautoji formulė, turinti tik tris teiginius, ir yra nagrinėjamos funkcijos, turinčios 10 teiginių, MDNF.

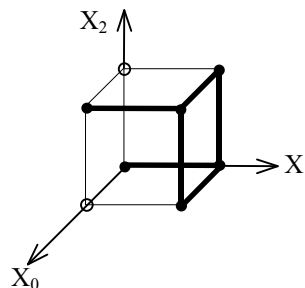
Euristinis metodas, būdamas savotiškai „grakštus“ ir leidžiantis pasireikšti minimizuojančio asmens išradingumui, turi tą trūkumą, kad besinaudojančiam tuo metodu ne visada būna aišku, nuo ko ir kaip pradėti bei kada baigti, nes sudėtingesniais atvejais ne visada būna lengva nustatyti, ar jau pasiekta minimalioji DNF, ar ne.

Pavyzdžiui, nagrinėjamoje funkcijoje $f(A, B, C, D) = ABC \vee \overline{AC} \vee B\overline{C} \vee AB\overline{D}$ mes galėjome pradėti pertvarkymo procesą ir kitaip, pakeisdami $\overline{AC}$ į $\overline{AC} \vee \overline{ABC}$ ir nekeisdami nieko kito. Būtume gavę, jog $f(A, B, C, D) = \underline{ABC} \vee \overline{AC} \vee \underline{ABC} \vee B\overline{C} \vee AB\overline{D} \equiv \underline{BC} \vee \overline{AC} \vee \underline{BC} \vee ABD = B \vee \overline{AC}$, t. y. MDNF būtume gavę greičiau. Tačiau juk buvo galima pradėti ir nuo $B\overline{C}$ pakeitimo į $B\overline{C} \vee AB\overline{C}$, nekeičiant nieko kita. Tuomet būtume gavę, jog $f(A, B, C, D) = \underline{ABC} \vee \overline{AC} \vee \underline{ABC} \vee B\overline{C} \vee \underline{AB\overline{C}} \vee \vee ABD \equiv AB \vee \overline{AC} \vee \underline{B\overline{C}} \vee ABD = AB \vee \overline{AC} \vee B\overline{C}$. Gavusiam tokią funkcijos formą nepatyrusiam minimizuotojui galėtų kilti klausimas, ar ši forma jau minimali, ar ją dar galima toliau minimizuoti.

Siekiant algoritmizuoti MDNF paieškos procedūrą, buvo sugalvota eilė metodų. Kai kurie jų, kaip neapibrėžtųjų koeficientų bei minimizacinių kortelių metodai (žiūr. šios mokymo priemonės autoriaus knygelę [100]), būdami labai paprasti idėjos atžvilgiu, yra gana gremėzdiški praktiniame naudojime, todėl jų čia nenagrinėsiu, o iškart pereisiu prie geometrinio metodo, nes jis padės suprasti Karno kortelių metodą, kuris yra gana patogus praktiniam naudojimui.

1.16.1.4.2. Geometrinis MDNF radimo metodas

Tarkime, jog turime trijų argumentų loginę funkciją $f(X_2, X_1, X_0) = \overline{X_2}\overline{X_1}\overline{X_0} \vee \overline{X_2}X_1\overline{X_0} \vee \overline{X_2}X_1X_0 \vee X_2\overline{X_1}\overline{X_0} \vee X_2\overline{X_1}X_0$. Ją galima pavaizduoti trimatėje erdvėje (X_2, X_1, X_0) , pažymint tuos erdvės taškus, kuriuose funkcija lygi 1, tamsiais rutuliukais, o tuos taškus, kuriuose funkcija lygi 0, šviesiais rutuliukais. Rutuliukai išsidėstys vienetinio trimačio kubo viršūnėse (žiūr. 379 pav.).



379 pav.

Kubo viršūnė, kurioje funkcija lygi 1, galime aprašyti lygtimi $X_2^{\alpha_2} X_1^{\alpha_1} X_0^{\alpha_0} = 1$, kur $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ koordinačių X_2, X_1, X_0 reikšmės toje viršūnėje, o $X_i^{\alpha_i} = \begin{cases} X_i, & \text{kai } \alpha_i = 1, \\ \overline{X_i}, & \text{kai } \alpha_i = 0. \end{cases}$

Pavyzdžiui, koordinačių pradžioje $X_2=0, X_1=0, X_0=0$, todėl kubo viršūnė, esančią koordinačių pradžioje, aprašo lygtis $\overline{X_2}\overline{X_1}\overline{X_0} = 1$. Iš šios lygties išplaukia, jog $\overline{X_2} = 1, \overline{X_1} = 1, \overline{X_0} = 1$, t. y. $X_2=0, X_1=0, X_0=0$, kas atitinka koordinačių reikšmes toje viršūnėje.

Nuo šios viršūnės į dešinę, slinkdami koordinačių ašimi X_1 , rasime kubo viršūnę, turinčią koordinatas: $X_2=0, X_1=1, X_0=0$. Ją aprašo lygtis $\overline{X_2}X_1\overline{X_0} = 1$.

Nesunku pastebėti, kad 379 pav. pavaizduotam kubui būdinga, jog to kubo gretimas viršūnės, gulinčias ant kokios nors koordinačių ašies, atitinka tokios konjunkcijos, kurios gali būti sukljuotos, eliminuojant tą koordinatę, ant kurios ašies tos viršūnės guli.

Pavyzdžiui, ką tik nagrinėtos dvi viršūnės, gulinčios ant koordinačių ašies X_1 ir turinčios lygtis $\overline{X_2}\overline{X_1}\overline{X_0} = 1, \overline{X_2}X_1\overline{X_0} = 1$, gali būti sukljuotos: $\overline{X_2}\overline{X_1}\overline{X_0} \vee$

$\vee \bar{X}_2 X_1 \bar{X}_0 = \bar{X}_2 \bar{X}_0 (\bar{X}_1 \vee X_1) = \bar{X}_2 \bar{X}_0$, t. y. vietoje dviejų gretimų viršūnių dviejų lygčių, kurias sudaro 6 literos – elementarių teiginių bei jų neiginių žymenys, gavome vieną lygtį $\bar{X}_2 \bar{X}_0 = 1$, vaizduojančią kubo briauną ir turinčią savo sudėtyje tik dvi literas.

Klijuodami gretimas viršūnes, vietoj 6 lygčių, vaizduojančių tas viršūnes ir turinčias savo sudėtyje 18 literų, gausime 6 lygtis, vaizduojančias 6 briaunas ir turinčias savo sudėtyje 12 literų. Gretimas lygiagrečias briaunas, priklausančias kuriai nors vienai kubo sienai, taip pat galima suklijuoti ir vietoj dviejų lygčių, vaizduojančių tas briaunas, gauti vieną lygtį, vaizduojančią tą kubo sieną, kuriai priklauso suklijuotos briaunos.

Pavyzdžiui, vertikalias kubo briaunas, turinčias lygtis $X_1 X_0 = 1$ ir $X_1 \bar{X}_0 = 1$, galima suklijuoti į vertikalią kubo sieną, aprašomą lygtimi $X_1 = 1$.

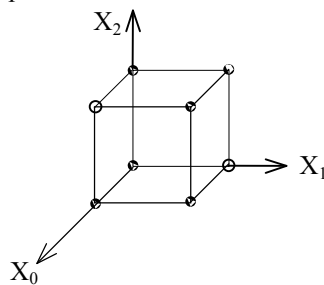
Analogiškai galima suklijuoti ir horizontalias briaunas, turinčias lygtis $X_2 X_1 = 1$ ir $\bar{X}_2 X_1 = 1$ į tą pačią sieną, turinčią lygtį $X_1 = 1$.

Briaunų $X_2 X_0 = 1$ ir $\bar{X}_2 \bar{X}_0 = 1$ suklijuoti į vieną sieną negalima, nes jos nepriklauso vienai sienai.

Tai reiškia, jog 6 kubo viršūnes, kuriose funkcija $f(X_2, X_1, X_0)$ yra lygi 1, galima aprašyti viena kubo sienos lygtimi $X_1 = 1$ ir dviem briaunų lygtimis $X_2 X_0 = 1$ ir $\bar{X}_2 \bar{X}_0 = 1$, t. y. funkciją $f(X_2, X_1, X_0) = \bar{X}_2 \bar{X}_1 \bar{X}_0 \vee \bar{X}_2 X_1 \bar{X}_0 \vee X_2 X_1 \bar{X}_0 \vee X_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee X_2 \bar{X}_1 X_0$ galima supaprastinti, gaunant jos MNDF $f(X_2, X_1, X_0) = X_1 \vee X_2 X_0 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_0$, t. y., sudarant tą funkciją realizuojančią schemą, sunaudoti vietoj $6 \cdot 3 + 6 = 24$ diodų tik $2 \cdot 2 + 3 = 7$ diodus.

Geometrinis metodas patogus tuo, kad, naudojantis juo, iš karto matosi, ką ir kaip galima suklijuoti, kas ką gali absorbuoti, ir todėl nesunku „pamatyti“ ir galimas MDNF.

Pavyzdžiui, atvaizduodami geometriškai funkciją $f(X_2, X_1, X_0) = \bar{X}_2 \bar{X}_1 \bar{X}_0 \vee \bar{X}_2 X_1 \bar{X}_0 \vee X_2 X_1 \bar{X}_0 \vee X_2 X_1 X_0 \vee \bar{X}_2 X_1 X_0 \vee X_2 \bar{X}_1 X_0$, gauname tokį vienetinio kubo „vienetinių“ viršūnių išsidėstymą, koks pavaizduotas 380 pav.



380 pav.

Iš to paveikslėlio iškart matyti, kad galimi 5 skirtingi „vienetinių“ viršūnių suklijavimo variantai, kurių toliau supaprastinti jau nebeįmanoma. Tai reiškia, jog nagrinėjamoji teiginių algebros funkcija turi penkias DNF, atitinkančias taip vadinamas **aklavietes („akligatvines“ DNF)**. Visos jos pavaizduotos 381 pav.

Iš šio paveikslėlio taip pat matyti, kad tarp penkių akligatvinių DNF dvi paskutinės yra MDNF, nes kiekvienos jų užrašymui pakanka 6 literų, kai tuo tarpu pirmųjų trijų „akligatvinių“ DNF atveju kiekvienos užrašymui reikalingos aštuonios literos. Visos penkios akligatvinės DNF yra funkcionaliai ekvivalenčios nagrinėjamai loginei funkcijai, tačiau skiriasi nuo jos savo struktūra bei turi mažesnę teiginių skaičių, t. y. jas realizuojančių schemų realizavimui reikia mažiau diodų, negu jų reiktų pradinę funkciją realizuojančiai schemai.