

1.16. NEKIEKYBINIAI, MIŠRŪS IR NEGRIEŽTAI APIBRĖŽTI MODELIAI. EKSPERTINĖS SISTEMOS IR JŲ TAIKYMAS. „KOLEKTYVINIO PROTO“ SISTEMOS

Sistemotyros mokslas pripažįsta, jog sudėtingose situacijose ne visada pavyksta visas nagrinėjamą sistemą sudarančių esybių ir joje vykstančių procesų mus dominančias charakteristikas bei visus mus dominančius ryšius išmatuoti, objektyviai įvertinant tas charakteristikas kiekybiškai bei išreiškiant tuos ryšius analitiškai.

Sistemotyra taip pat pripažįsta, kad žmogus, naudodamasis vien tik savo jutimo organais bei sukaupia patirtimi, **sugeba atlikti** nors ir ne ypatingai tikslaus, ne ypatingai objektyvaus, tačiau **universalaus ir unikalaus „matavimo prietaiso“** – esybių, jų savybių, santykių tarp jų, sistemose vykstančių procesų **kokybinio ir kiekybinio vertintojo – funkcijas**. Todėl sisteminiai analitikai stengiasi ta žmogaus savybę naudoti kartu su visomis kitomis matavimo priemonėmis, kartu su visais kitais vertinimo metodais. Įvairių metodų, kurie galėtų duoti vertingą informaciją bei kitus naudingus rezultatus, **kompleksinis taikymas, jų sintezė – būdingas sisteminės metodologijos bruožas**.

Sistemotyra užsiima ne tik kiekybinių, bet ir nekiekybinių bei mišrių modelių kūrimu, nagrinėjimu bei panaudojimu, todėl sistemotyroje naudojamosi ne tik objektyvių matavimų rezultatai, bet ir **ekspertiniais įverčiais, kurie gali būti ir kiekybiniai, ir kokybiniai**. Sistemotyroje todėl naudojamosi **ne tik dedukciniais samprotavimais, bet ir indukcija, analogija, intuicija, euristiniais metodais bei kitais artutiniais samprotavimais**, bandoma naudoti ir L. Zadeh įvestomis **negriežtai apibrėžiamomis (difuzinėmis) aibėmis** bei tokių aibių teorijos pagrindu sukurtu matematiniu aparatu – **negriežtai apibrėžiamomis operacijomis, negriežta logika bei negriežtais algoritmais**.

Ir taip daroma **ne tik todėl, kad ne visada pavyksta viską tiksliai apibrėžti ir išmatuoti, bet ir todėl (ir tai yra pagrindinė priežastis), kad realiame pasaulyje egzistuoja tokie objektai ir procesai, kurių modeliavimui geriau tinka ir tuos objektus bei procesus adekviau atspindi kaip tik negriežtai apibrėžtos sąvokos ir operacijos**.

Pavyzdžiui, negriežtai apibrėžtas teiginys, kad gimstančių vienu metu mergaičių ir berniukų skaičių santykis būna lygus apytikriai $\frac{13}{14}$, adekviau (teisingiau, tikriau) atspindi tikrovę negu griežtai

apibrėžtas teiginys, kad tas santykis yra lygus tiksliai $\frac{13}{14}$.

Kai realių objektų bei procesų charakteristikos tikrovėje nėra griežtai apibrėžtos, o „išblukusios“ bei „išsibarsčiusios“, tai ir tų objektų bei procesų matematiniams modeliams turėtų būti būdingas tam tikras neapibrėžtumas „išblukimas“ bei „išsibarstymas“.

Tai reiškia, kad sistemotyrai nepakanka tradicinio klasikinės matematikos matematinio aparato ir tenka jį plėsti, kad galėtume sudarinėti ne tik kiekybinius, bet ir nekiekybinius bei mišrius objektų ir sistemų modelius.

Šiame skyriuje ir bus nagrinėjami kai kurie nekiekybiniai modeliai, ekspertinės ir nekiekybinės informacijos apdorojimo bei panaudojimo metodai, skaitytojas bus supažindintas su L. Zadeh „negriežtai apibrėžtos matematikos“ idėjomis, su griežtos ir negriežtos matematikos metodų bei dirbtinio ir natūralaus intelekto sinteze „kolektyvinio proto“ sistemose.

Pradėsiu nuo klasikinės matematinės logikos modelių, vėliau pereisiu prie kitų nekiekybinių bei mišrių modelių, o pabaigoje supažindinsiu su jau minėtosios „negriežtai apibrėžtos matematikos“ pradinėmis, su dirbtinio intelekto ir ekspertinėmis sistemomis bei jų taikymu.

Laikysiu, kad skaitytojui žinomos pagrindinės loginės operacijos (konjunkcija, disjunkcija, loginis neigimas, materialioji implikacija, griežtoji disjunkcija ir t. t.). Jei kai kurie skaitytojai tas operacijas primiršo, ar iš viso nebuvo su jomis susipažinę, tai apie jas gali pasiskaityti knygelėse [51, 52, 100, 110] bei knygoje [58, 246, 247]. Teiginių algebros dviejų argumentų funkcijos aprašytos ir šioje mokymo priemonėje (žiūr. 316-ąją lentelę). Svarbiausieji Bulio algebros dėsniai pateikti 1.16.1.2.6. skyrelio pradžioje.

1.16.1. Loginiai modeliai. Taikomosios matematinės logikos uždaviniai. Matematinė logika ir matematika

Ryšių tarp įvykių, procesų bei esybių aprašymui gali būti reikalinga **ne tik kiekybinės matematikos, bet ir matematinės logikos kalba**, nes tuose ryšiuose gali pasireikšti ne tik kiekybiniai, bet ir **loginiai santykiai, loginės priklausomybės**.

Pavyzdžiui, kai kurie įvykiai gali vykti tik kartu; kai kurie kiti įvykiai įvykti kartu niekada negali; kai kurių įvykių atžvilgiu galima pasakyti, kad bent vienas jų būtinai įvyks; kai kurie įvykiai gali būti surišti taip, kad vieno jų įvykimas būtinai iššaukia kitą įvykį, nes yra jo priežastis ir t. t.

Tokių **loginių ryšių** pažymėjimui matematinėje logikoje įvedami mums jau žinomi ženklai (loginės jungtys): „ $\wedge$ “, arba „ $\&$ “, reiškiantys **konjunkciją** („ir“); „ $\vee$ “ – reiškiantis **disjunkciją** („arba“); „ $\neg$ “ – reiškiantis **loginį neigimą***, kartais dar vadinamą **inversija** („ne“); „ $\dot{\vee}$ “, arba „ $\oplus$ “ – reiškiantys **loginį nesutapimą**, arba **griežtąją disjunkciją** („būtinai arba vienas arba kitas, bet ne abu kartu“); „ $\rightarrow$ “, arba „ $\supset$ “, arba „ $\Rightarrow$ “, arba „ $\leftarrow$ “ – reiškiantys **implikaciją** („jei bus vienas, tai bus ir kitas“); „ $\leftrightarrow$ “, arba „ $\Leftrightarrow$ “, arba „ $\sim$ “ – reiškiantys **ekvivalentumą** („pirmas logiškai sutampa su antru“); „ $\circ$ “, arba „ $\uparrow$ “ – reiškiantys **disjunkcijos neigimą** („nei vienas, nei kitas“); „/“ – **Šeferio štrichas** – reiškiantis **konjunkcijos neigimą** ir t. t. Šie ženklai, išreikšdami tam tikrus loginius santykius, yra ir tam tikrų loginių operacijų tarp teiginių ir predikatų žymenys, t. y. loginiai operatoriai.

Žymėdami teiginius bei predikatus – nehomogenines logines funkcijas – ternarinės kalbos atviromis formulėmis, kaip tai darėme 1.5. ir kituose šios mokymo priemonės skyriuose, ir naudodamiesi loginių operacijų ženklais, mes galime konstruoti sudėtingus teiginius bei predikatus, formaliai aprašančius sudėtingas situacijas, t. y., kurti tų **situacijų loginius modelius**. Pavyzdžiui, tokiu būdu gali būti sudaromi **loginiai normatyviniai, motyvaciniai ir situaciniai modeliai**, apie kuriuos jau buvo rašyta 1.15. skyriuje ir bus kalbama šiame, t. y. 1.16., skyriuje.

Apskliausdami teiginius ir predikatus skliausteliais „ $\langle \rangle$ “, mes galime **konstruoti įvairias sąvokas – esybių, jų savybių bei santykių tarp jų koncepcinius modelius**, atspindėdami tokiuose modeliuose ne tik kiekybinius, bet ir loginius ryšius.

* Gana dažnai loginis neigimas žymimas dar ir ženkleliu „ $\sim$ “ ar brūkšniu virš to teiginio, kuris yra paneigiamas, pavyzdžiui, $\neg A \equiv \overline{A}$, $\neg(A \vee B) \equiv \overline{A \vee B}$. **Klasikinėje dvireikšmėje logikoje neįmanoma išreikšti skirtumo tarp vidinio ir išorinio neigimų**, todėl joje visi trys ką tik minėti loginio neigimo žymenys yra ekvivalentūs. Tačiau trireikšmėje logikoje, kaip buvo parodyta 1.5.4. skyrelyje, ženkleliai „ $\neg$ “ ir „ $\sim$ “ žymi skirtingas operacijas: ženklelis „ $\neg$ “ – vidinį, o ženklelis „ $\sim$ “ – išorinį neigimą.

Tiesa, ne visus ryšius, kuriuos galima būtų laikyti loginiais, pavyksta pakankamai adekvačiai išreikšti, naudojantis vien tik klasikinės matematinės logikos kalba, nes ne visus ryšius pavyksta aprašyti dvejetainėmis teisingumo lentelėmis.

Visų pirma, ne kiekvieno teiginio reikšmė gali būti tik absoliučiai teisinga (ir žymima loginiu vienetu) arba absoliučiai neteisinga (ir žymima loginiu nuliu – loginio vieneto neigimu), nes gali būti ir tokių teiginių, kurie kartais gali būti teisingi, kartais – neteisingi. Pavyzdžiui, teiginys „Visi žmonės yra mirtingi“ yra absoliučiai teisingas, tačiau teiginys „Šis žmogus rytoj mirs“ gali būti kartais teisingas, kartais – neteisingas. Apie tokių teiginių teisingumą ar neteisingumą galima teigti tik su tam tikra tikimybe. **Pasitaiko ir tokių teiginių, kurių teisingumo (ar neteisingumo) įvertinti nesame šiuo metu pajėgūs net „tikimybiskai“, nes jie nėra statistikai stabilūs.**

Visais tokiais atvejais klasikinės dvireikšmės matematinės logikos jau nebepakanka ir tenka plėsti matematinės logikos aparatą, pereinant prie neklasikinių daugiareikšmių logikų, o taip pat prie tikimybės logikos, kurioje klasikinė matematinė logika tampa daliniu atveju, atspindinčiu kraštutines – idealias – situacijas. Naudojamasi taip pat ir modalinėmis logiškėmis bei difuzine L. Zadeh logika.

Tikimybės logikoje kintamo teiginio X galima logine reikšme tampa to teiginio teisingumo tikimybė x , t. y. skaičius iš segmento $[0; 1]$. Su teiginiu X ir jų teisingumo matais – skaičiais x – galima atlikti ir logines, ir kiekybines (aritmetines) operacijas, apie ką jau buvo trumpai rašyta 1.5. skyriuje.

Perėjimą nuo loginių prie aritmetinių operacijų nusako formulės 1÷3:

1) $X_1 \wedge X_2 = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}$, kur x_1 – tikimybė, kad teiginys X_1 yra teisingas, o $\frac{x_2}{x_1}$ – sąlyginė tikimybė, kad teiginys X_2 yra teisingas, kai teiginys X_1 yra teisingas; kai teiginiai X_1 ir X_2 yra nepriklausomi, tai loginė daugyba (konjunkcija) sutampa su aritmetine daugyba, t. y. $X_1 \wedge X_2 = x_1 \cdot x_2$, nes tuo atveju $\frac{x_2}{x_1} = x_2$;

2) $X_1 \vee X_2 = x_1 + x_2 - X_1 \wedge X_2 = x_1 + x_2 - x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}$;

3) $\neg X_1 = 1 - x_1$.

Šių trijų formulių pilnai pakanka, kad bet kokią klasikinės ar tikimybės matematinės teiginių logikos formulę būtų galima pervesti į kiekybinės algebros bei aritmetikos struktūrą ir apskaičiuoti jos loginę reikšmę, jei tik žinomos elementarių teiginių, iš kurių yra sudarytas sudėtingas teiginys, reikšmės. Tai išplaukia iš tos aplinkybės, kad **konjunkcija, disjunkcija ir neigimas sudaro pilną loginių operacijų rinkinį**, kuriuo naudojantis galima išreikšti bet kurią klasikinės matematinės logikos formulę. Šios trys formulės galioja ne tik tikimybės logikoje, bet ir pačioje klasikinėje matematinėje logikoje, kai x_1 ir x_2 yra dvejetainiai vienaženkliai skaičiai 0 arba 1.

Taigi, pirmąją klasikinės matematinės logikos trūkumą pavyksta įveikti, įvedant teiginio X teisingumo tikimybės x sąvoką ir klasikinę matematinę logiką išplečiant iki tikimybės logikos bei įvedant teiginio teisingumo neapibrėžtumo ženklą tiems atvejams, kai teiginio teisingumas yra toks neapibrėžtas, kad net jo teisingumo ar neteisingumo tikimybės nustatyti neįmanoma.

Tačiau ir perėjimas prie tikimybinės logikos (o taip pat ir prie L. Zadeh pasiūlytos „difuzinės logikos“, apie kurią bus kalbama 1.16.2. poskyryje) **neišsprendžia visų loginių ryšių adekvataus išreiškimo formalizuota matematinės logikos kalba problemų.**

Pavyzdžiui, su dideliais sunkumais susiduriame, bandydami adekvačiai išreikšti **priežastinius (kauzalinius) ryšius** bei **loginį išvedamumą (dedukciją).**

Atrodytų, jog tokių ryšių aprašymui tinka mūsų minėtoji implikacija $X_1 \rightarrow X_2$, reiškianti, jog iš teiginio X_1 teisingumo formaliai išplaukia teiginio X_2 teisingumas: kai sudėtingas teiginys $X_1 \rightarrow X_2$ yra teisingas, tai teiginys X_2 negali būti neteisingas, jei teiginys X_1 yra teisingas. Deja, implikacija ne visada reiškia priežastį.

Implikacija turi keletą modifikacijų, iš kurių labiausiai paplitusi yra taip vadinamoji „**materialioji implikacija**“. Ši implikacijos modifikacija klasikinėje matematinėje logikoje apibrėžiama dvejetainė lentele, turinčia keturias eilutes, kuriose implikacija $X_1 \rightarrow X_2$ yra ekvivalenti 0 tada ir tik tada, kada $X_1 \Leftrightarrow 1$ ir $X_2 \Leftrightarrow 0$, o visose kitose eilutėse implikacija $X_1 \rightarrow X_2$ yra ekvivalenti 1. Kartais, kad „**materialiąją implikaciją**“ atskirtume nuo kitų implikacijos modifikacijų, ją žymėsime ženklų „ $\supset$ “, ženklą „ $\rightarrow$ “ palikdami bendram implikacijos žymėjimui. Šiaip gi ženklų „ $\rightarrow$ “ dažniausiai žymėsime materialiąją implikaciją. Ir tik tuo atveju, kai ženklų „ $\rightarrow$ “ bus žymima, pavyzdžiui, Akermano „**stiprioji implikacija**“ ar Zinovjevo „**sąlyginumo (išvedamumo) operatorius**“, materialiąją implikaciją žymėsime ženklų „ $\supset$ “.

Kai tarp teiginių X_1 ir X_2 teisingumo egzistuoja priežastinis ryšys ir iš teiginio X_1 teisingumo kauzaliai būtinai išplaukia teiginio X_2 teisingumas, tai materialiąją implikaciją $X_1 \supset X_2$, naudojantis jos apibrėžimu, tikrai galima laikyti teisinga, nes atvejis, kada ji būtų neteisinga, yra negalimas. Todėl tokiais atvejais materialioji implikacija, atrodo, lyg ir tiktų priežastinių ryšių vaizdavimui, kuo neretai ir naudojamosi, sudarant situacijų loginius modelius.

Tačiau **materialioji implikacija gali būti teisinga ir tada, kada tarp teiginių X_1 ir X_2 jokio priežastinio loginio ryšio nėra.** Pavyzdžiui, kai teiginys X_1 yra teiginys „geležis sunkesnė už vandenį“, o teiginys X_2 – teiginys „Vilnius – Lietuvos sostinė“, tai teiginys $X_1 \supset X_2$ pagal materialios implikacijos apibrėžimą yra lygus 1. Tačiau šiuo atveju iš implikacijos $X_1 \supset X_2$ teisingumo neišplaukia, jog tarp teiginių X_1 ir X_2 teisingumo egzistuoja priežastinis ryšys, nes iš to, kad geležis sunkesnė už vandenį, logiškai neišplaukia, jog Vilnius – Lietuvos sostinė. Tarp šių teiginių neegzistuoja jokio **semantinio ryšio**. Tokių pavyzdžių galima surasti labai daug. Taigi, **materialiosios implikacijos teisingumas negali garantuoti priežastinio ryšio buvimo.** Teiginiai „ $X_1 \supset X_2 \Leftrightarrow 1$ “ ir „ X_1 teisingumas yra X_2 teisingumo priežastis“ nėra adekvatūs: antrasis teiginys yra stipresnis ir todėl labiau informatyvus už pirmąjį. Iš to išplaukia, jog, **išreikšdami priežastinius ryšius implikacijomis „ $\supset$ “, mes gauname modelius, kurie yra teisingi, tačiau kartais gali būti silpnesni už tikrovę ir todėl gali būti nepilnai adekvatūs jai.**

Nors **logiczmo mokyklos**, apie kurią bus kalbama 1.16.1.5.5.6. skyrelyje, pradininkai B.Raselas (B.Russell) ir A.Vaithedas (A.Whitehead) savo fundamentaliame 3-jų tomų veikale „Principia Mathematica“ ir materialiąją implikaciją $A \supset B$ laikė loginės išvados „Iš teiginio A teisingumo išplaukia teiginio B teisingumas“ matematiniu modeliu, o klasikinį teiginių skaičiavimą – loginio išvedimo teorija, daugumai šiuolaikinių logikų atrodo, kad **su tokia „Principia Mathematica“ autorių nuomone galima sutikti tik ne visada.**

Daugelis logikų teigia, kad tokios formulės kaip $A \supset (B \supset A)$, $\neg A \supset (A \supset B)$, $\neg (A \supset B) \supset (B \supset A)$ ir pan., nors jos klasikinėje teiginių algebroje ir yra tapaciai lygios

loginiam vienetai, reiškiančiam tiesą, ir yra išvedamos klasikiniame teiginių skaičiavime, negali būti laikomos logiškai teisingomis, jei materialiąją implikaciją „ $\supset$ “ interpretuotume kaip kauzalinio loginio išvedimo operaciją, implikuojančią priežastinio ryšio buvimą. Juk formulė $A \supset (B \supset A)$, interpretuojant ženklą „ $\supset$ “ kaip „logiškai išplaukia“, reikštų, kad bet koks teisingas teiginys A logiškai išplaukia iš bet kokio teiginio B. Pavyzdžiui, priėmę, kad A yra teiginys „Vilnius – Lietuvos sostinė“, o B – teiginys „Nemunas įteka į Kaspijos jūrą“, gautume, jog iš to, kad A – teisingas teiginys, išplaukia teiginio $B \supset A$ teisingumas, t. y. teisingumas teiginio, kad iš teiginio „Nemunas įteka į Kaspijos jūrą“ logiškai išplaukia teiginys „Vilnius – Lietuvos sostinė“. Ne mažiau paradoksaliai skambėtų ir formulės $\neg A \supset (A \supset B)$ interpretacija: „Jei teiginys A neteisingas, tai iš jo logiškai išplaukia bet koks teiginys B“. Paradoksali ir trečiosios formulės $\neg(A \supset B) \supset (B \supset A)$ interpretacija: „Jei iš teiginio A neišplaukia teiginys B, tai iš teiginio B išplaukia teiginys A“.

Panašios formulės buvo pavadintos „**materialiosios implikacijos paradoksaus**“. Tokių paradoksų egzistavimas klasikiniame teiginių skaičiavime rodo, kad **materialiąją implikaciją negalima laikyti pakankamai adekvačiu loginio išvedimo procedūros modeliu, o galima laikyti tik nepilnu ir todėl apytikriu jos analogu**, leidžiančiu išvesti ne tik visas logiškai išvedamas formules, bet dar ir visą eilę „paradoksalių“ formulių, vaizduojančių „loginius ryšius“ tarp tokių teiginių, tarp kurių tokių loginių ryšių, kuriuos būtų galima laikyti priežastiniais ryšiais, iš tikrųjų nėra.

Kad materialioji implikacija $A \supset B$ nėra pilnai ekvivalenti sudėtingam teiginiui „Iš teiginio A teisingumo logiškai išplaukia teiginio B teisingumas“, galima spręsti ir iš to, kad sudėtinga materialioji implikacija $[(\text{Iš teiginio A teisingumo logiškai išplaukia teiginio B teisingumas}) \supset (A \supset B)]$ visada lygi loginiam vienetai, o atvirkštinė implikacija $[(A \supset B) \supset (\text{Iš teiginio A teisingumo logiškai išplaukia teiginio B teisingumas})]$ gali kartais būti lygi loginiam vienetai, o kartais – ir loginiam nuliui.

Pavyzdžiui, jei teiginys A yra teiginys „Onutė K. yra Jono K. žmona“, o teiginys B – teiginys „Onutė K. pažįsta Joną K.“, tai abi minėtos sudėtingos implikacijos lygios loginiam vienetai, nes teiginys „Iš teiginio A teisingumo išplaukia teiginio B teisingumas“ šiuo atveju yra teisingas ne tik formaliai, bet ir kontensyviai, t. y. jo loginė reikšmė lygi loginiam vienetai ne tik formaliai, bet ir pagal prasmę, o taip pat lygi loginiam vienetai ir materialiosios implikacijos $A \supset B$ reikšmė, kadangi tokios situacijos, kad A būtų lygu loginiam vienetai, o B – loginiam nuliui, šiuo atveju būti negali (t. y. Onutė K., būdama Jono K. žmona, negali jo nepažinti).

Tačiau, jei teiginys A bus jau minėtasis teiginys „geležis sunkesnė už vandenį“, o teiginys B – teiginys „Vilnius – Lietuvos sostinė“, tai sudėtinga materialioji implikacija $[(\text{Iš teiginio „geležis sunkesnė už vandenį“ teisingumo logiškai išplaukia teiginio „Vilnius – Lietuvos sostinė“ teisingumas}) \supset (\text{geležis sunkesnė už vandenį} \supset \text{„Vilnius – Lietuvos sostinė“})]$ bus lygi loginiam vienetai, o materialioji implikacija $[\text{geležis sunkesnė už vandenį} \supset (\text{„Vilnius – Lietuvos sostinė“}) \supset (\text{Iš teiginio „geležis sunkesnė už vandenį“ teisingumo logiškai išplaukia teiginio „Vilnius – Lietuvos sostinė“ teisingumas})]$ bus lygi loginiam nuliui, nes šiuo atveju teiginys „Iš teiginio A teisingumo logiškai išplaukia teiginio B teisingumas“ nėra teisingas, kadangi (nors A ir B teisingi) teiginys B logiškai neišplaukia iš A, o materialioji implikacija $A \supset B$ yra lygi loginiam vienetai.

Siūlyčiau skaitytojui, įstatinėjant vietoj A ir B konkrečius teiginius, įsitikinti, kad pirmoji sudėtinga implikacija visada bus lygi loginiam vienetai, o antroji – ne visada, t. y. įsitikinti, kad sudėtingas teiginys „Iš teiginio A teisingumo logiškai

išplaukia teiginio B teisingumas“ yra logiškai stipresnis (ir informatyvesnis) už sudėtingą teiginį „ $A \supset B$ “, reiškiantį materialiąją implikaciją tarp teiginių A ir B.

Tai reiškia, jog, **sudarydami situacijų loginius modelius ir pakeisdami priežastinius ryšius materialiosiomis implikacijomis „ $\supset$ “, mes gauname modelius, kurie, būdami formaliai teisingi, nėra pilnai adekvatūs tikrovei.**

Buvo įvairių bandymų tobulinti materialiąją implikaciją, kuriant kitas implikacijos modifikacijas, kurios geriau tiktų priežastinių ryšių formaliam modeliavimui, t. y. kurioms nebūtų būdingi minėtieji implikacijos paradoksai.

Vienas tokių bandymų – **Ljuiso, arba Lujo (Lewis C. I.), „griežtoji“ implikacija**, kurios apibrėžimui naudojamosi **modalinės logikos** simbolika [247, 248]. Siekimas sukurti loginę sistemą, kurioje nebūtų implikacijos paradoksų, buvo viena pagrindinių priežasčių, paskatinusių C. I. Ljuisą atkreipti dėmesį į dar iš Antikos laikų žinomus modalumus „galima“ bei „būtina“ ir pradėti kurti **matematinės modalinės logikos** sistemas. Tokias sistemas mes nagrinėsime šios mokymo priemonės 1.16.1.5.7. skyrelyje.

Ljuiso „griežtoji“ implikacija žymima ženklu „ $\prec$ “ (arba „ $\Rightarrow$ “) ir apibrėžiama formule $X_1 \prec X_2 \Leftrightarrow \neg \Diamond (X_1 \wedge \neg X_2)$, kur „ $\Leftrightarrow$ “ reiškia „sutampa pagal apibrėžimą“, „ $\Diamond$ “ – modalinis operatorius, reiškiantis tą patį, ką ir žodžiai „gali būti“, ir todėl vadinamas „galimybės modaliniu operatoriumi“. Iš tokio apibrėžimo išplaukia, jog Ljuiso „griežtoji“ implikacija yra teisinga tada ir tik tada, kada nėra galima, jog teiginiai X_1 ir $\neg X_2$ būtų abu teisingi vienu metu. Kadangi daugelyje modalinių logikų laikoma, kad $\neg \Diamond \neg P(x) \Leftrightarrow \Box P(x)$, kur „ $\Box$ “ modalinis operatorius „būtina“, tai Ljuiso „griežtoji“ implikacija dažnai apibrėžiama ir formule $X_1 \prec X_2 \Leftrightarrow \Box (X_1 \supset X_2)$, reiškiančia, jog iš X_1 „griežtai išplaukia“ X_2 tada ir tik tada, kada būtina, kad materialioji implikacija $X_1 \supset X_2$ būtų teisinga.

Nors Ljuiso „griežtoji“ implikacija šiek tiek labiau tinka priežastinių ryšių, t. y. **ryšių ne tik sintaktinių tarp teiginių X_1 ir X_2 teisingumo ar neteisingumo, bet ir semantinių ryšių tarp tų teiginių prasmės**, atvaizdavimui negu materialioji implikacija, tačiau vis dėlto galima rasti pavyzdžių, kada „griežtoji“ implikacija yra teisinga, o priežastinis ryšys tarp teiginių arba neegzistuoja arba abejotinas. Pavyzdžiui, Ljuiso sistemoje gali būti išvestos paradoksalios formulės $\Box A \prec (B \prec A)$ ir $\neg \Diamond A \prec (A \prec B)$, reiškiančios: 1) „Jei teiginys A būtinai teisingas, tai jis išplaukia iš bet kokio teiginio B“ ir 2) „Jei teiginys A negali būti teisingas, tai iš jo išplaukia bet koks teiginys B“. Kaip matome, Ljuiso „griežtosios“ implikacijos paradoksai ne taip jau ir skiriasi nuo materialiosios implikacijos paradoksų.

Panašiai, tik naudodamasis ne modaline logika, o klasikinės logikos aksiomų schemomis, apie kurias bus kalbama 1.16.1.5.2. skyrelyje, Akermanas apibrėžia „stipriąją“ implikaciją, žymėdamas tokią implikaciją įprastu implikacijos ženklu „ $\rightarrow$ “ [247]. **Akermano „stiprioji implikacija“** ir teiginių skaičiavimas, besiremiantis tokia implikacija, neleidžia išvesti „materialiosios implikacijos paradoksų“, tačiau tame skaičiavime neišvedama ir eilė kitų formulų, laikomų teisingomis, t. y. Akermano sistema nėra pakankamai pilna.

Dar vienas bandymas priartėti prie formalaus priežastinių ryšių vaizdavimo yra taip vadinamoji **kauzalinė implikacija** (nuo lotyniško žodžio „causa“, reiškiančio priežastį). Ši implikacija apibrėžiama modalinės logikos priemonėmis, t. y. naudojantis modaliniais kauzalinės galimybės ir kauzalinės būtinybės bei jų neigimo operatoriais, ir žymima ženklu „ $\perp$ “ [247].

Tačiau ir kauzalinė implikacija $X_1 \perp X_2$, pagal formalų jos apibrėžimą reiškianti teiginį „jei teiginys X_1 yra teisingas, tai iš to kauzaliai išplaukia (privalo išplaukti), jog ir teiginys X_2 yra teisingas“, taip pat turi trūkumų ir paradoksų. Pavyzdžiui, iš kauzaliai negalimo teiginio kauzaliai išplaukia bet koks teiginys, o kauzaliai leistinas teiginys kauzaliai išplaukia iš bet kokio teiginio.

Yra ir daugiau bandymų atvaizduoti priežastinius ryšius matematinės logikos priemonėmis. Man atrodo, kad labiausiai artimas priežastiniam loginiam išvedimui formalias logines sistemas pavyko sukonstruoti logikui A. A. Zinovjevui (žiūr., pavyzdžiui, [249]), iškėlusiam reikalavimą, kad „išvada būtų susieta su prielaidomis ne tik atitinkamais struktūriniais (sintaktiniais) ryšiais, bet tam tikra prasme – ir turiniu, t. y. turėtų bendrų argumentų (teiginių, predikatų), tačiau ir A. A. Zinovjevo sistemos – ne be trūkumų. Taigi, tokio **visiškai tobulo sprendinio, kuris tenkintų visus visais atžvilgiais, iki šiol nerasta**. Pagrindinė sunkumų priežastis glūdi tame, kad **priežastiniai ryšiai gali būti ne tik tarp sistemų bei procesų struktūrų, bet ir tarp jų turinio, t. y. gali būti ne tik sintaktiniai, bet ir semantiniai**. Natūraliose kalbose tokie ryšiai gali būti išreiškiami ne tik tiesiogiai, bet ir netiesiogiai – kaip **ryšiai tarp sąvokų prasmų, kaip ryšiai netiesiogiai išplaukiantys iš konteksto, iš intonacinių akcentų ir pan.** Todėl, norint turėti galimybę išreikšti visus galimus realiame pasaulyje ryšius formalioje kalboje, reikia sukurti atitinkamas priemones, ir tos **priemonės negali būti vien tik sintaktinėmis. Reikalingos ir priemonės, formalizuojančios semantinius ryšius**. Tam tikrą žingsnį šia kryptimi kaip tik ir padarė ką tik minėtasis A. A. Zinovjevas savo „kompleksinėje logikoje“ [249].

Kuriant formalius loginius sudėtingų sistemų modelius, susiduriama ir su kitais sunkumais, su kitomis sunkiai sprendžiamomis ir iki šiol iki galo neišspręstomis problemomis. Tokių problemų pavyzdžiai: **indukcinių samprotavimų formalizavimo, tikimybinės ir indukcinės logikų suderinimo, matematinės logikos kalbos ir aparato turtinimo bei plėtimo**, siekiant aprėpti ta kalba ir aparatu **ne tik situacijų, bet ir procesų loginių modelių kūrimą ir nagrinėjimą**, problemos. Dalį tų sunkumų pavyksta įveikti neklasikinėse logikose, tačiau yra ir tokių, kurie taip ir lieka neįveikti, nes, bandant juos įveikti, susiduriama su naujomis problemomis.

Tai ir natūralu: mūsų sudaromi **formalūs modeliai niekada negalės adekvačiai atspindėti visos realaus pasaulio įvairovės, nes jie visada neišvengiamai yra baigtiniai, o realus pasaulis – neišsemiamas**. Šį filosofinį teiginį patvirtina ir garsioji **K. Gödelio teorema*** apie pakankamai sudėtingų formalųjų sistemų formalųjį nepilnumą.

Todėl mūsų sudaromi modeliai yra tik tam tikros abstrakcijos, geriau ar blogiau atspindinčios tai, kas iš to, ką mes pasaulyje galime pastebėti, mus labiau domina, mums atrodo labiau esminiu ar stebinančiu. **Ir visuomet bus neišspręstų problemų bei įvairių neaiškumų ir jų skaičius net daugės**, didėjant pažinimo apimčiai (žiūr. 1.6.1. skyrelyje 35 pav.).

Bet tai nereiškia, jog turimomis ir kuriamomis matematinės logikos priemonėmis negalima spręsti ir išspręsti daug uždavinių, turinčių teorinę bei praktinę reikšmę.

Tokius **loginius uždavinius sąlyginai galima suskirstyti į keturias klases**, panašias į tas, kurias nagrinėjome 1.13.1. skyrelyje.

* Apie tą teoremą bus kalbama 1.16.1.5.5. skyrelyje.

1.16.1.1. Pirmosios klasės loginiai uždaviniai

Pirmajai klasei priklauso **loginių funkcijų** – sudėtingų teiginių bei predikatų – **reikšmių apskaičiavimo uždaviniai**. Kitaip tariant, tai – **loginių blokų išėjimų trajektorijų apskaičiavimas, žinant tų blokų įėjimo trajektorijas, pradinės būsenas ir matematinius modelius** – išėjimų ir perėjimų funkcijas arba tas funkcijas realizuojančias logines schemas.

Šioje klasėje galima išskirti tokius uždavinių **poklasius**:

- 1) **klasikinės logikos sudėtingų teiginių reikšmių apskaičiavimo uždaviniai**;
- 2) **loginių schemų išėjimų bei fazinių trajektorijų apskaičiavimo uždaviniai**;
- 3) **neklasikinių daugiareikšmių logikų sudėtingų teiginių reikšmių apskaičiavimo uždaviniai**;
- 4) **tikimybinės teiginių logikos funkcijų reikšmių bei sudėtingų reiškinių tikimybių apskaičiavimo uždaviniai**;
- 5) **sudėtingų predikatų reikšmių apskaičiavimo uždaviniai**.

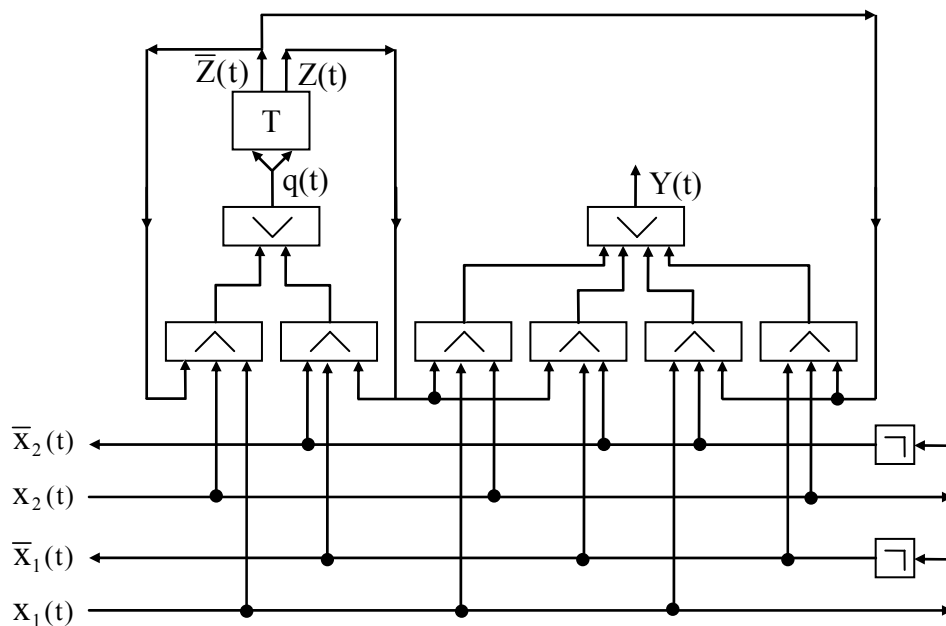
Sprendžiant **pirmojo poklasio** uždavinius, apskaičiuojamos duotųjų sudėtingų teiginių loginės reikšmės, atitinkančios duotąsias elementarių teiginių – loginių funkcijų argumentų – reikšmes.

Šio poklasio uždavinio pavyzdys: apskaičiuoti sudėtingo teiginio $\{[(X_1 \wedge \bar{X}_2) \rightarrow (X_2 \wedge \bar{X}_3)] / [(X_3 \oplus \bar{X}_1) \wedge (\bar{X}_2 \leftrightarrow X_1)] \circ \{[(1 \wedge X_3) \vee (X_2 \rightarrow 0)] \oplus [(0/X_3) / (\bar{X}_1 \circ 1)]\}$ loginę reikšmę Y, kai $X_1=1, X_2=0, X_3=1$.

$Y = \{[(1 \wedge \bar{0}) \rightarrow (0 \wedge \bar{1})] / [(1 \oplus \bar{1}) \wedge (\bar{0} \leftrightarrow 1)] \circ \{[(1 \wedge 1) \vee (0 \rightarrow 0)] \oplus [(0/1) / (\bar{1} \circ 1)]\} = [(1 \rightarrow 0) / (1 \wedge 1)] \circ [(1 \vee 1) \oplus \oplus (1/0)] = (0/1) \circ (1 \oplus 1) = 1 \circ 0 = 0$.

Antrojo poklasio uždaviniuose apskaičiuojamos duotosios loginės schemas išėjimų bei fazinės trajektorijos, atitinkančios duotąją pradinę būseną ir įėjimo trajektoriją.

Tokio uždavinio pavyzdys parodytas 353 pav. Jame vaizduojama loginė schema, kuria naudojantis reikia rasti tos schemas išėjimo trajektoriją, atitinkančią duotąją pradinę būseną ir duotąją įėjimų trajektoriją.



353 pav.

Analiziškai šį uždavinį galima suformuluoti taip: reikia rasti loginės funkcijos $Y(t) = [X_1(t) \wedge X_2(t) \wedge Z(t)] \vee [\bar{X}_1(t) \wedge \bar{X}_2(t) \wedge Z(t)] \vee [X_1(t) \wedge \bar{X}_2(t) \wedge \bar{Z}(t)] \vee [\bar{X}_1(t) \wedge X_2(t) \wedge \bar{Z}(t)]$ reikšmes,

kai $Z(0)=0$, $Z(t+1)=\left[\overline{Z}(t) \wedge q(t)\right] \vee\left[Z(t) \wedge \overline{q}(t)\right]=\left[\overline{Z}(t) \wedge\left[\left(X_1(t) \wedge X_2(t) \wedge \overline{Z}(t)\right) \vee\left(\overline{X}_1(t) \wedge \overline{X}_2(t) \wedge Z(t)\right)\right]\right] \vee$
 $\vee\left\{Z(t) \wedge\left[\left(X_1(t) \wedge X_2(t) \wedge \overline{Z}(t)\right) \vee\left(\overline{X}_1(t) \wedge \overline{X}_2(t) \wedge Z(t)\right)\right]\right\}=\left[\overline{Z}(t) \wedge X_1(t) \wedge X_2(t)\right] \vee\left[Z(t) \wedge \overline{X}_1(t) \wedge X_2(t)\right] \vee$
 $\vee\left[Z(t) \wedge X_1(t) \wedge \overline{X}_2(t)\right] \vee\left[Z(t) \wedge X_1(t) \wedge X_2(t)\right]=\left[X_1(t) \wedge X_2(t)\right] \vee\left[Z(t) \wedge X_1(t)\right] \vee\left[Z(t) \wedge X_2(t)\right]$ ir įėjimų trajektorijų $X_1(t)$ bei $X_2(t)$ pradinės atkarpos duotos šioje lentelėje:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$X_1(t)$	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
$X_2(t)$	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

Nesunku nustatyti (naudojantis schema arba formulėmis), kad, sprendami šį uždavinį, gausime tokią išėjimo trajektorijos pradinę atkarpą:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Y(t)$	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1

Siūlyčiau skaitytojui patikrinti, ar teisingai apskaičiuota ši pradinė išėjimo trajektorijos atkarpa ir tuo pačiu metu apskaičiuoti fazinės trajektorijos pradinę atkarpą.

Trečiojo poklasio uždaviniuose apskaičiuojamos sudėtingų teiginių loginės reikšmės daugiareikšmėje logikoje, atitinkančios duotąsias elementarių teiginių sudarančių tą sudėtingą teiginį, reikšmes.

Apskaičiuosime sudėtingo teiginio $Y=\left(X_1 \rightarrow \overline{X}_3\right) \vee\left[\left(X_2 \wedge \overline{X}_1\right) \leftrightarrow\left(X_3 \vee \overline{X}_2\right)\right]$ loginę reikšmę, atitinkančią tokias elementarių teiginių logines reikšmes J.Lukasevičiaus trireikšmėje logikoje: $X_1=\alpha$ („teisinga“), $X_2=\beta$ („klaidinga“), $X_3=\gamma$ („neapibrėžta“).

$$Y=\left(\alpha \rightarrow \overline{\gamma}\right) \vee\left[\left(\beta \wedge \overline{\alpha}\right) \leftrightarrow\left(\gamma \vee \overline{\beta}\right)\right]=\left(\alpha \rightarrow \gamma\right) \vee\left[\left(\beta \wedge \beta\right) \leftrightarrow\left(\gamma \vee \alpha\right)\right]=\gamma \vee\left(\beta \leftrightarrow \alpha\right)=\gamma \vee \beta=\gamma .$$

Gavome, kad nagrinėjamas sudėtingas teiginys Y , esant duotoms elementarių teiginių X_1 , X_2 ir X_3 loginėms reikšmėms, trireikšmėje logikoje turi neapibrėžtą loginę reikšmę γ , t. y. nėra nei būtinai teisingas, nei būtinai klaidingas.

Ketvirtojo poklasio uždaviniuose apskaičiuojamos sudėtingų teiginių teisingumo tikimybės, esant duotoms elementarių teiginių sudarančių tą sudėtingą teiginį, teisingumo tikimybėms.

Šio poklasio tipinio uždavinio pavyzdys: apskaičiuoti sudėtingo teiginio $Y \Leftrightarrow\left(X_1 \rightarrow X_2\right) \wedge \wedge\left(X_2 \oplus X_3\right) \vee\left(X_1 / \overline{X}_3\right)$ teisingumo tikimybę $Y=y$, kai elementarūs teiginiai X_1 , X_2 ir X_3 yra nepriklausomi ir turi tokias jų teisingumo tikimybes: $X_1=x_1=0,6$, $X_2=x_2=0,5$, $X_3=x_3=0,8$.

Šio tipo uždavinių sprendimo procesą galima suskirstyti į 3 etapus.

Pirmajame etape duotasis elementarus teiginys, naudojantis klasikinės matematinės logikos aparatu, maksimaliai supaprastinamas, pavyzdžiui, iš formulės $Y \Leftrightarrow\left(X_1 \rightarrow X_2\right) \wedge\left(X_2 \oplus X_3\right) \vee\left(X_1 / \overline{X}_3\right)$ gaunama formulė $Y=\left(\overline{X}_1 \rightarrow X_2\right) \wedge\left(X_2 \overline{X}_3 \vee \overline{X}_2 X_3\right) \vee\left(\overline{X}_1 \vee X_3\right)=X_2 \overline{X}_3 \vee \overline{X}_1 \overline{X}_2 X_3 \vee \overline{X}_1 \vee X_3=X_2 \vee \overline{X}_1 \vee \vee X_3$.

Antrajame etape, naudojantis 1.16.1. skyrelyje paminėtomis perėjimo formulėmis, pereinama nuo loginių formulių prie aritmetinių, pavyzdžiui, $Y=\left(\overline{X}_1 \vee X_2\right) \vee X_3=\overline{X}_1+X_2-\overline{X}_1 \wedge X_2+X_3-\left(\overline{X}_1 \vee X_2\right) X_3=$
 $=1-x_1+x_2-\left(1-x_1\right) x_2+x_3-\overline{X}_1 X_3 \vee X_2 X_3=1-x_1+x_2-x_2+x_1 x_2+x_3-\left(1-x_1\right) x_3-x_2 x_3+\overline{X}_1 X_3 X_2 X_3=1-x_1+x_1 x_2+x_3-$
 $-x_3+x_1 x_3-x_2 x_3+\overline{X}_1 X_2 X_3=1-x_1+x_1 x_2+x_1 x_3-x_2 x_3+\left(1-x_1\right) x_2 x_3=1-x_1+x_1 x_2+x_1 x_3-x_1 x_2 x_3$.

Trečiajame etape įstatomos elementariųjų teiginių teisingumo tikimybių konkrečios reikšmės į antrajame etape gautą formulę ir apskaičiuojama duotojo sudėtingo teiginio teisingumo tikimybė, pavyzdžiui, $y=1-0,6+0,6 \cdot 0,5+0,6 \cdot 0,8-0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,8=0,94$.

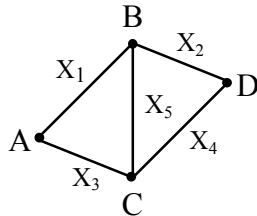
Kaip matome, šiuo atveju gavome, kad sudėtingo teiginio teisingumo tikimybė yra gana didelė, nors elementariųjų teiginių, įeinančių į sudėtingą teiginį, teisingumo tikimybės yra mažesnės.

Šiek tiek sudėtingiau spręsti šio tipo uždavinius, kai elementarūs teiginiai yra priklausomi (koreliuoti). Tuomet jau nebepakanka elementarių teiginių besąlyginio teisingumo tikimybių žinojimo, nes reikia žinoti jau ir sąlygines tikimybes.

Tarkime, jog reikia apskaičiuoti ką tik išnagrinėtojo sudėtingo teiginio Y teisingumo tikimybę, kai elementarūs teiginiai $X_1=x_1=0,6$, $X_2=x_2=0,5$ ir $X_3=x_3=0,8$ yra koreliuoti ir sąlyginės tikimybės yra tokios: $x_2 / X_1=0,4$, $x_3 / X_1=0,98$, $x_3 / X_1 \wedge X_2=0,85$.

Tuomet $Y = \overline{X_1} \vee X_2 \vee X_3 = 1 - x_1 + x_1 \cdot x_2 / X_1 + x_1 \cdot x_3 / X_1 - x_1 \cdot x_2 / X_1 \cdot x_3 / X_1 \wedge X_2 = 1 - 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,9 - 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,976$.

Šiam poklasiui priskiriami ir uždaviniai, kuriuos sprendžiant apskaičiuojamos sudėtingų įvykių tikimybės, atitinkančios duotąsias elementarių įvykių, sudarančių tą sudėtingą įvykį, tikimybės.



354 pav.

Tokio uždavinio pavyzdys: rasti tikimybę, kad pokalbis telefonu tarp punktų A ir D (žiūr. 354 pav.) galės įvykti tuoj pat, kai žinoma, jog tikimybės, kad atitinkamos nepriklausomos ryšių tinklo linijos bus laisvos, yra šios: $p_{AB} = x_1 = 0,5$; $p_{BD} = x_2 = 0,4$; $p_{AC} = x_3 = 0,6$; $p_{CD} = x_4 = 0,2$; $p_{CB} = p_{BC} = x_5 = 0,5$.

Pažymėję teiginį, kad pokalbis tarp punktų A ir D gali įvykti tuoj pat, raide Y, gausime tokią lygybę: $Y = (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)$.

Tikimybės Y reikšmės apskaičiavimo palengvinimui pasižymėsime $X_1 \wedge X_2 = A$, $X_1 \wedge X_5 \wedge X_4 = B$, $X_3 \wedge X_4 = C$, $X_3 \wedge X_5 \wedge X_2 = D$ ir gausime formulę $Y = A \vee B \vee C \vee D = (A \vee B) \vee (C \vee D) = (A \vee B) + (C \vee D) - [(A \vee B) \wedge (C \vee D)] = A + B - (A \wedge B) + C + D - (C \wedge D) - [(A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)]$. Pasinaudosime šia, ką tik išvestąja, formule disjunkcijos $(A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$ apskaičiavimui, žiūrėdami į konjunkcijas $A \wedge C$, $A \wedge D$, $B \wedge C$ ir $B \wedge D$ kaip į paprastus teiginius.

$(A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D) = (A \wedge C) + (A \wedge D) - [(A \wedge C) \wedge (A \wedge D)] + (B \wedge C) + (B \wedge D) - [(B \wedge C) \wedge (B \wedge D)] - \{[(A \wedge C) \wedge (B \wedge C)] \vee [(A \wedge C) \wedge (B \wedge D)] \vee [(A \wedge D) \wedge (B \wedge C)] \vee [(A \wedge D) \wedge (B \wedge D)]\} = (A \wedge C) + (A \wedge D) + (B \wedge C) + (B \wedge D) - (A \wedge C \wedge D) - (B \wedge C \wedge D) - [(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge D)] = (A \wedge C) + (A \wedge D) + (B \wedge C) + (B \wedge D) - (A \wedge C \wedge D) - (B \wedge C \wedge D) - [(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D)]$.

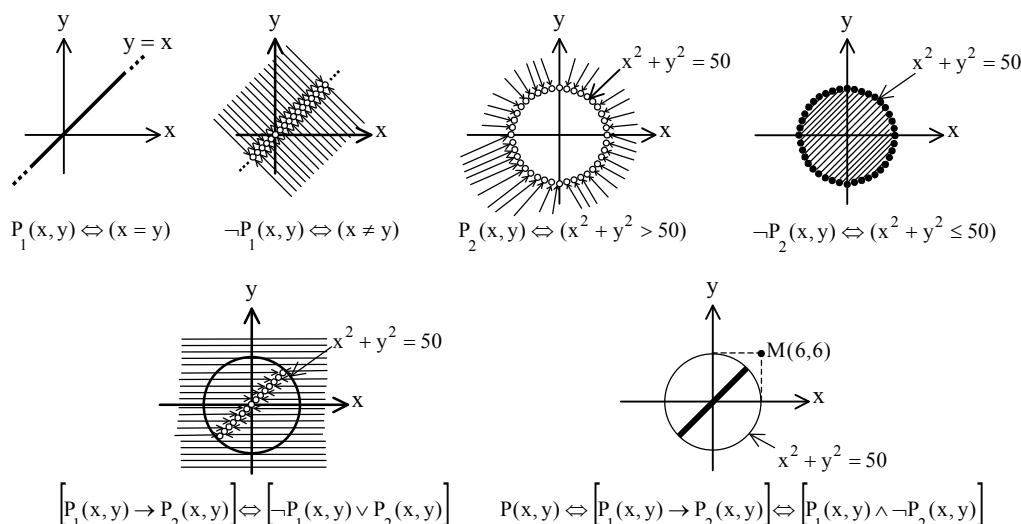
Apskaičiuosime $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D) = (A \wedge B \wedge C) + (A \wedge B \wedge D) - (A \wedge B \wedge C \wedge D) + (A \wedge B \wedge C \wedge D) - \{[(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge D)] \wedge (A \wedge B \wedge C \wedge D)\} = (A \wedge B \wedge C) + (A \wedge B \wedge D) - [(A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D)] = (A \wedge B \wedge C) + (A \wedge B \wedge D) - (A \wedge B \wedge C \wedge D)$.

Todėl $Y = A + B + C + D - (A \wedge B) - (C \wedge D) - (A \wedge C) - (A \wedge D) - (B \wedge C) - (B \wedge D) + (A \wedge C \wedge D) + (B \wedge C \wedge D) + (A \wedge B \wedge C) + (A \wedge B \wedge D) - (A \wedge B \wedge C \wedge D) = (X_1 \wedge X_2) + (X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) + (X_3 \wedge X_4) + (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2) - [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \wedge X_5 \wedge X_4)] - [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_3 \wedge X_4)] - [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] - [(X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_4)] - [(X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] - [(X_3 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] + [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_4)] + [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] + [(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_3 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] + [(X_1 \wedge X_5 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] - [(X_1 \wedge X_2) \wedge X_1 \wedge X_5 \wedge X_4 \wedge (X_3 \wedge X_4) \wedge (X_3 \wedge X_5 \wedge X_2)] = x_1 x_2 + x_1 x_4 x_5 + x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 x_5 - x_1 x_2 x_4 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_4 x_5 - x_2 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_5 + x_3 x_4 + 2 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = x_1 x_2 (1 - x_3 x_4 - x_3 x_5 - x_4 x_5 + 2 x_3 x_4 x_5) + x_1 x_4 (x_5 - x_3 x_5) + x_3 x_4 (1 - x_2 x_5) + x_2 x_3 x_5 = x_1 x_2 [1 - x_3 x_4 (1 - 2 x_5) - x_5 (x_3 + x_4)] + x_1 x_4 x_5 (1 - x_3) + x_3 [x_4 (1 - x_2 x_5) + x_2 x_5] = 0,5 \cdot 0,4 [1 - 0,6 \cdot 0,2 (1 - 1) - 0,5 (0,6 + 0,2)] + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,5 (1 - 0,6) + 0,6 [0,2 (1 - 0,4 \cdot 0,5) + 0,4 \cdot 0,5] = 0,2 (1 - 0,4) + 0,02 + 0,6 (0,16 + 0,2) = 0,12 + 0,02 + 0,216 = 0,356$.

Gavome, jog tikimybės, kad pokalbis tarp punktų A ir D gali įvykti dabar, yra lygi 0,356.

Sprendžiant **penktojo poklasio** uždavinius, apskaičiuojamos paprastų ir sudėtingų predikatų loginės reikšmės, atitinkančios duotąsias predikatų argumentų reikšmes. Kai nagrinėjamas predikatas yra sudėtingas, tai jo loginės reikšmės apskaičiavimas vyksta dviem etapais. Pirmajame etape apskaičiuojamos tą sudėtingą predikatą sudarančių elementarių predikatų loginės reikšmės ir gaunamas sudėtingas teiginys. Antrajame etape apskaičiuojama gautojo sudėtingo teiginio loginė reikšmė. Kai kuriais atvejais, prieš pradedant loginės reikšmės apskaičiavimus, tikslinga sudėtingą predikatą supaprastinti.

Loginio uždavinio, priklausančio penktajam poklasiui, pavyzdys: apskaičiuoti predikato $P(x, y) \Leftrightarrow \neg [P_1(x, y) \rightarrow P_2(x, y)]$ reikšmę taške $x=6$, $y=6$, kai žinoma, jog predikatas $P_1(x, y)$ yra predikatas $x=y$, t. y. $P_1(x, y) \Leftrightarrow (x=y)$, o predikatas $P_2(x, y)$ yra $x^2 + y^2 > 50$, t. y. $P_2(x, y) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 > 50)$ (žiūr. 355 pav.).



355 pav.

Sprendami šį uždavinį gauname: $P(x,y) \Leftrightarrow \neg[P_1(x,y) \rightarrow P_2(x,y)] \Leftrightarrow \neg[\neg P_1(x,y) \vee P_2(x,y)] \Leftrightarrow [P_1(x,y) \wedge \neg P_2(x,y)] \Leftrightarrow [(x=y) \wedge \neg(x^2+y^2 > 50)] \Leftrightarrow [(x=y) \wedge (x^2+y^2 \leq 50)]$.

Todėl $P(6;6) \Leftrightarrow [(6=6) \wedge (36+36 \leq 50)] \Leftrightarrow (1 \wedge 0) \Leftrightarrow 0$.

Taigi predikato $P(x, y)$ reikšmė taške $x=6, y=6$ yra lygi 0. Šis predikatas yra teisingas tiesės $x=y$ atkarpos nuo taško $(x=-5, y=-5)$ iki taško $(x=5, y=5)$ imtinai taškuose, o visuose kituose plokštumos (x, y) taškuose tas predikatas lygus 0.

1.16.1.2. Antrosios klasės loginiai uždaviniai

Antrajai klasei priklauso **loginių lygčių bei jų sistemų sprendimo uždaviniai**, t. y., uždaviniai, kuriuose, **žinodami loginio bloko matematinį modelį ir jo išėjimų trajektorijas, ieškome jo įėjimo trajektorijų**.

Antrosios klasės loginiai uždaviniai yra lyg ir atvirkštiniai pirmosios klasės uždavinių atžvilgiu.

Loginės lygtys bei jų sistemos, sprendžiant antrosios klasės uždavinius, gali būti duotos. Tada mes turime **grynąjį antrosios klasės uždavinį**. Tačiau jos gali būti tiesiogiai ir neduotos, o gali išplaukti iš uždavinio teksto ar net iš pačios probleminės situacijos, kurioje tas antrosios klasės uždavinys kilo. Taip atsitinka, pavyzdžiui, sprendžiant žodinius loginius uždavinius bei gyvenime iškilančias logines problemas. Tuomet, prieš pradedant spręsti antrosios klasės loginį uždavinį, tenka išspręsti **loginių lygčių bei jų sistemų sudarymo uždavinį**, priskiriamą trečiajai loginių uždavinių klasei.

1.16.1.2.1. Klasikinės teiginių algebros lygčių su vienu nežinomuju sprendimas

Pradžioje nagrinėsime grynuosius klasikinės teiginių algebros antrosios klasės uždavinius. Pradėsime nuo **loginės lygties su vienu nežinomuju** sprendimo.

Tarkime, jog turime loginę lygtį $f_1(X)=f_2(X)$, kur $f_1(X)$ ir $f_2(X)$ – klasikinės teiginių algebros teiginiai. Iš jų bent vienas (o dažniau abu) yra sudėtingas teiginys, turintis savo sudėtyje teiginį X (arba $\overline{X}$ arba ir X ir $\overline{X}$), kurio loginę reikšmę mes ir turime nustatyti.

I. Pervesime tą lygtį į formą $\varphi(X)=0$. Tai galima padaryti, pasinaudojant **teorema**: Jei $f_1(X)=f_2(X)$ (1), tai $f_1(X) \cdot \overline{f_2(X)} \vee \overline{f_1(X)} \cdot f_2(X)=0$ (2) ir abi lygtys (1) ir (2) turi tas pačias šaknis.

Irodysime tą teoremą, priėmę, kad lygties (1) šaknų aibę sudaro aibė $\{x^*\}$.

Kadangi X^* – pirmosios lygties šaknis, tai $f_1(X^*) \equiv f_2(X^*)$, t. y., jei $f_1(X^*)=1$, tai ir $f_2(X^*)=1$, o jei $f_1(X^*)=0$, tai ir $f_2(X^*)=0$.

Pirmuoju atveju gauname, jog $\overline{f_1(X^*)} = \overline{f_2(X^*)} = 0$ ir todėl $f_1(X) \cdot \overline{f_2(X)} \vee \overline{f_1(X)} \cdot f_2(X) = 0$, t. y. $X=X^*$ yra ir antrosios lygties šaknis.

Antruoju atveju $\overline{f_1(X^*)} = \overline{f_2(X^*)} = 1$ ir $f_1(X) \cdot \overline{f_2(X)} \vee \overline{f_1(X)} \cdot f_2(X) = 0$, t. y. ir šiuo atveju $X=X^*$ yra ir antrosios lygties šaknis.

Išvada: visos lygties (1) šaknys, sudarančios aibę $\{X^*\}$, yra ir lygties (2) šaknys.

Tarkime dabar, kad $X=X^{**}$ nėra lygties (1) šaknis. Tuomet, kai $f_1(X^{**})=1$, gauname, jog $f_2(X^{**})=0$, o kai $f_1(X^{**})=0$, tai $f_2(X^{**})=1$.

Pirmuoju atveju $f_1(X^{**}) \cdot \overline{f_2(X^{**})} = 1$ ir todėl $f_1(X^{**}) \cdot \overline{f_2(X^{**})} \vee \overline{f_1(X^{**})} \cdot f_2(X^{**}) = 1$, t. y. $X=X^{**}$ netenkina lygties (2).

Antruoju atveju $\overline{f_1(X^{**})} \cdot f_2(X^{**}) = 1$ ir todėl $\overline{f_1(X^{**})} \cdot f_2(X^{**}) \vee f_1(X^{**}) \cdot \overline{f_2(X^{**})} = 1$, iš kur išplaukia, jog ir antruoju atveju $X=X^{**}$ netenkina lygties (2).

Išvada: lygtis (2) negali turėti tokių šaknų, kurios nebūtų ir lygties (1) šaknys. Kai lygties (1) sprendinių aibė $\{X^*\}$ tuščia, tai ir lygtis (2) negali turėti sprendinių.

Bendroji išvada: lygčių (1) ir (2) šaknų aibės sutampa. Kitaip tariant, lygtys (1) ir (2) yra **funkcionaliai ekvivalentios** ir gali skirtis tik savo struktūra.

Pailiustruosiu loginės lygties pervedimą iš formos (1) į formą (2) konkrečiu pavyzdžiu. Vietoj konjunkcijos ženklelio „ $\wedge$ “ naudosime „ $\cdot$ “. Vėliau ir to loginės daugybos ženklo neberašysime, laikydami, kad du šalia vienas kito stovintys teiginių žymenys vaizduoja tų teiginių konjunkciją.

Tarkime, jog turime loginę lygtį $A \cdot X \vee \overline{B} \cdot C = A \cdot B \vee X$, kur A, B ir C – kokios tai loginės konstantos. Pervesime tą lygtį iš formos (1) į formą (2).

$$\begin{aligned} \text{Šiuo atveju } f_1(X) &= A \cdot X \vee \overline{B} \cdot C; f_2(X) = A \cdot B \vee X; \overline{f_1(X)} = (\overline{A \cdot X \vee \overline{B} \cdot C}) = (\overline{A} \vee \overline{X}) \cdot (\overline{B} \vee \overline{C}) = \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \\ &\vee \overline{B} \cdot \overline{X} \vee \overline{C} \cdot \overline{X}, \overline{f_2(X)} = (\overline{A \cdot B \vee X}) = (\overline{A} \vee \overline{B}) \cdot \overline{X} = \overline{A} \cdot \overline{X} \vee \overline{B} \cdot \overline{X}; f_1(X) \cdot \overline{f_2(X)} = (A \cdot X \vee \overline{B} \cdot C) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{X} \vee \overline{B} \cdot \overline{X}) = \\ &= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X} \cdot \overline{X} = \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X} \cdot (\overline{A} \vee 1) = \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X}; \overline{f_1(X)} \cdot f_2(X) = (\overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{X} \vee \overline{C} \cdot \overline{X}) \cdot (A \cdot B \vee X) = \\ &= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot X \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot X \vee A \cdot \overline{B} \cdot \overline{X} \vee A \cdot \overline{C} \cdot \overline{X} \vee A \cdot B \cdot \overline{X} \vee A \cdot B \cdot X = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot X \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot X \vee A \cdot B \cdot \overline{X}. \end{aligned}$$

Todėl gauname tokią lygtį (2): $\overline{B} \cdot C \cdot \overline{X} \vee \overline{A} \cdot B \cdot X \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot X \vee A \cdot B \cdot \overline{X} = 0$. Ją galima pertvarkyti į lygtį $(\overline{A} \cdot B \vee \overline{B} \cdot C) \cdot \overline{X} \vee (\overline{A} \cdot B \vee \overline{A} \cdot \overline{C}) \cdot X = 0$ t. y. į lygtį, turinčią **kanoninę formą** (žiūr. [13]) $\gamma_0 \cdot \overline{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$, kurioje šiuo atveju loginis koeficientas $\gamma_0 = \overline{A} \cdot B \vee \overline{B} \cdot C$, o loginis koeficientas $\gamma_1 = \overline{A} \cdot B \vee \overline{A} \cdot \overline{C}$.

Pervedant loginę lygtį į kanoninę formą gali pasitaikyti atvejų, kada lygtyje (2), t. y. jos disjunktvyvinėje normaliojoje formoje (DNF), gali atsirasti loginės sumos dėmenų, neturinčių savo sudėtyje nei X, nei $\overline{X}$. Tuomet toks dėmuo ϑ pakeičiamas logine suma $\vartheta \cdot (X \vee \overline{X}) = \vartheta \cdot X \vee \vartheta \cdot \overline{X}$, kuri yra tapati ϑ .

Pailiustruosime tai pavyzdžiu.

Tarkime, jog turime lygtį $A \cdot \overline{X} \rightarrow \overline{B} \cdot X = B \cdot \overline{X} \oplus C \cdot \overline{X}$.

1) $f_1(X) = A \cdot \overline{X} \rightarrow \overline{B} \cdot X = \overline{A} \vee X \vee \overline{B} \cdot X = \overline{A} \vee X$, todėl $\overline{f_1(X)} = \overline{A} \cdot \overline{X}$.

2) $f_2(X) = B \cdot \overline{X} \oplus C \cdot \overline{X} = B \cdot \overline{X} \cdot (\overline{C} \vee X) \vee (\overline{B} \vee X) \cdot C \cdot \overline{X} = B \cdot \overline{C} \cdot \overline{X} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X}$, todėl

$$\overline{f_2(X)} = (\overline{B \cdot \overline{C} \cdot \overline{X} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X}}) = (\overline{B} \vee \overline{C} \vee X) \cdot (\overline{B} \vee \overline{C} \vee X) = \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot X \vee \overline{B} \cdot C \vee C \cdot X \vee B \cdot X \vee \overline{C} \cdot X \vee X = B \cdot C \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \vee X.$$

3) $f_1(X) \cdot \overline{f_2(X)} = (\overline{A} \vee X) \cdot (\overline{B} \cdot C \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \vee X) = \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee X$.

4) $\overline{f_1(X)} \cdot f_2(X) = \overline{A} \cdot \overline{X} \cdot (B \cdot \overline{C} \cdot \overline{X} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X}) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{X} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X}$.

Šiuo atveju lygtis (2) bus tokia: $\overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee X \vee A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{X} \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X} = 0$. Joje loginius dėmenis $\overline{A} \cdot B \cdot C$ ir $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, neturinčius savo sudėtyje nei X , nei $\overline{X}$, pakeičiame loginėmis sumomis $\overline{A} \cdot B \cdot C = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot X \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{X}$ ir $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot X \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{X}$.

Tuomet lygtį (2) galima pertvarkyti į lygtį $(\overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee A \cdot B \cdot \overline{C} \vee A \cdot \overline{B} \cdot C) \cdot \overline{X} \vee (\overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee 1) \cdot X = 0$, kurioje $\gamma_0 = \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee A \cdot B \cdot \overline{C} \vee A \cdot \overline{B} \cdot C$, $\gamma_1 = \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee 1 = 1$.

Galima suformuluoti **apibendrinančią teoremą: bet kurią klasikinės teiginių algebros loginę lygtį su vienu nežinomuoju galima pertvarkyti taip, kad gautume funkcionaliai jai ekvivalenčią lygtį, turinčią kanoninę formą $\gamma_0 \cdot \overline{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$** , kurioje γ_0 ir γ_1 – loginės konstantos ar sudėtingi teiginiai, sudaryti tik iš loginių konstantų.

II. Išvesime loginės lygties $\gamma_0 \cdot \overline{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$ sprendinio formulę.

315. lentelė

γ_1	γ_0	$\Psi(\gamma_1, \gamma_0)$
0	0	c_0
0	1	c_1
1	0	c_2
1	1	c_3

Ši formulė turi būti loginių koeficientų γ_0 ir γ_1 loginė funkcija: $X = \Psi(\gamma_1, \gamma_0)$.

Sudarysime tos funkcijos galimų reikšmių lentelę (žiūr. 315-ąją lentelę), kurioje c_0, c_1, c_2, c_3 – mums kol kas dar nežinomos tos funkcijos loginės reikšmės. Jas mes kol kas laikysime **dar neapibrėžtais loginiais koeficientais**.

Naudodamiesi jais, sudarysime funkcijos $X = \Psi(\gamma_1, \gamma_0)$ DNF: $X = c_0 \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_0 \vee c_1 \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \vee c_2 \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \vee c_3 \gamma_1 \gamma_0$. Kadangi $\overline{X} = \overline{\Psi(\gamma_1, \gamma_0)}$, tai funkcijos $\overline{X}$ reikšmės turi būti funkcijos X reikšmių neiginiai. Todėl $\overline{X} = \overline{c_0} \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_0 \vee \overline{c_1} \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \overline{c_2} \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \vee \overline{c_3} \gamma_1 \gamma_0$. Kai $X = \Psi(\gamma_1, \gamma_0)$ yra lygties $\gamma_0 \cdot \overline{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$ sprendinys, tai, įstatę tos funkcijos reikšmes į lygtį, turime gauti tapatybę, t. y. lygybę, išliekančią esant bet kokioms koeficientų γ_0, γ_1 reikšmėms.

Tai ir padės mums nustatyti kol kas dar neapibrėžtų koeficientų c_0, c_1, c_2, c_3 reikšmes (bent jau kai kurias iš jų).

Gauname, jog $\gamma_0 \cdot (\overline{c_0} \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_0 \vee \overline{c_1} \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \overline{c_2} \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \vee \overline{c_3} \gamma_1 \gamma_0) \vee \gamma_1 \cdot (c_0 \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_0 \vee c_1 \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \vee c_2 \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \vee c_3 \gamma_1 \gamma_0) \equiv 0$, iš kur išplaukia, kad $\overline{c_1} \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \overline{c_3} \gamma_1 \gamma_0 \vee c_2 \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \vee c_3 \gamma_1 \gamma_0 \equiv 0$, t. y. $\overline{c_1} \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \vee c_2 \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \vee \gamma_1 \gamma_0 \equiv 0$.

Kad disjunkcija būtų tapaciai lygi 0, turi būti tapaciai lygus 0 kiekvienas šios loginės sumos narys. Todėl gauname tris tapatybes: $\overline{c_1} \overline{\gamma}_1 \gamma_0 \equiv 0$, $c_2 \gamma_1 \overline{\gamma}_0 \equiv 0$, $\gamma_1 \gamma_0 \equiv 0$.

Paskutinė tapatybė – tai loginės lygties $\gamma_0 \cdot \overline{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$ **sprendinio egzistavimo sąlyga**. Kai lygties koeficientai γ_0, γ_1 šios sąlygos netenkina, loginė lygtis negali turėti sprendinio.

Kad, keičiantis γ_0 ir γ_1 reikšmėms, išliktų teisingomis pirmoji ir antroji tapatybės, **būtina ir pakanka, kad $c_1=1, c_2=0$** .

Įstatę tas reikšmes į funkcijos $X = \Psi(\gamma_1, \gamma_0)$ DNF ir atsižvelgdami į lygties $\gamma_0 \cdot \overline{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$ sprendinio egzistavimo sąlygą $\gamma_1 \gamma_0 \equiv 0$, gauname, jog $X = c_0 \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_0 \vee \overline{\gamma}_1 \gamma_0$, kur c_0 – neapibrėžtas loginis koeficientas, galintis būti lygus 0 arba 1.

Todėl gali būti dvi skirtingos funkcijos $X = \Psi(\gamma_1, \gamma_0)$ – du skirtingi **daliniai lygties sprendiniai** (arba nė vieno, kai $\gamma_1 \gamma_0 \neq 0$).

Daliniai sprendiniai, kai, pavyzdžiui, $\overline{\gamma}_1 = 0$, t. y. kai $\gamma_1 = 1$, gali sutapti (susilieti į vieną) ir tuomet, kaip vėliau bus parodyta, $X = X^{(0)} = X^{(1)} = \gamma_0 = 0$, nes kai sprendinys egzistuoja, tai $\gamma_1 \gamma_0 = 0$ ir iš $\gamma_1 = 1$ išplaukia, jog $\gamma_0 = 0$. Daliniai sprendiniai sutampa ir kai $\gamma_0 = 1$. Tuomet $X^{(0)} = X^{(1)} = 1$.

Gautąjį **bendrajį sprendinį** $X = c_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_0 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0$, iš kurio, keičiant c_0 reikšmes, gali būti gauti abu daliniai sprendiniai, galima supaprastinti.

Kadangi $\bar{\gamma}_1 \gamma_0 = c_0 \bar{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0$, nes $c_0 \bar{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0 = \bar{\gamma}_1 \gamma_0 \cdot (c_0 \vee 1) = \bar{\gamma}_1 \gamma_0$, tai gauname, jog $X = c_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_0 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0 = c_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_0 \vee c_0 \bar{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0 = c_0 \bar{\gamma}_1 \cdot (\bar{\gamma}_0 \vee \gamma_0) \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0 = c_0 \bar{\gamma}_1 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0$.

Atsižvelgiant į tai, kad tuo atveju, kai loginė lygtis turi sprendinį, konjunkcija $\gamma_1 \gamma_0 = 0$, bendrojo sprendinio prastinimą galima pratęsti: $X = c_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_0 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0 = c_0 \bar{\gamma}_1 \vee \bar{\gamma}_1 \gamma_0 \vee \gamma_1 \gamma_0 = c_0 \bar{\gamma}_1 \vee \gamma_0$. Vietoj koeficiento c_0 dažnai vartoja laisvai keičiamą loginį kintamąjį Z ir **bendrojo sprendinio formulę užrašoma taip: $X = \gamma_0 \vee Z \cdot \bar{\gamma}_1$** .

Kai $Z=0$, iš bendrojo sprendinio gauname dalinį sprendinį $X^{(0)} = \gamma_0$, o kai $Z=1$, dalinį sprendinį $X^{(1)} = \gamma_0 \vee \bar{\gamma}_1$.

III. Dabar jau galima aprašyti **klasikinės teiginių algebros bet kokios loginės lygties su vienu nežinomuojų sprendimo algoritmą**.

1. Loginę lygtį $f_1(X) = f_2(X)$ pervedame į formą $\varphi(X) = 0$, naudodamiesi tapačiu pertvarkymu $f_1(X) \cdot \overline{f_2(X)} \vee \overline{f_1(X)} \cdot f_2(X) = 0$. Kairiąją šios lygties pusę išreiškiame DNF.

2. Gautos loginės lygties loginius dėmenis ϑ , neturinčius savo sudėtyje nei X , nei $\bar{X}$, naudodamiesi tapatybe $\vartheta = \vartheta \cdot X \vee \vartheta \cdot \bar{X}$, pakeičiame loginėmis sumomis $\vartheta \cdot X \vee \vartheta \cdot \bar{X}$.

3. Gaučioje DNF, grupuodami loginius dėmenis, iškeliamo už skliaustų $\bar{X}$ ir X ir tokiu būdu skliaustų viduje gauname koeficientų γ_0 ir γ_1 , išraiškas, t. y. gauname loginę lygtį kanoninėje formoje $\gamma_0 \cdot \bar{X} \vee \gamma_1 \cdot X = 0$.

4. Tikriname lygties sprendinio egzistavimo sąlygą $\gamma_1 \gamma_0 = 0$, t. y. nustatome, kokias sąlygas turi tenkinti lygties $f_1(X) = f_2(X)$ koeficientai A, B, C, D ir t. t., kad lygtis turėtų sprendinį.

Kai konjunkcija $\gamma_1 \gamma_0$ tapaciai lygi 0, tai lygtis turi sprendinį, esant bet kokioms koeficientų A, B, C, D ir t. t. reikšmėms. Tačiau dažniausiai lygtis turi sprendinį tik esant tam tikroms tų koeficientų reikšmėms, kurias, pateikdami lygties sprendimą, privalome nurodyti. Kartais iš viso negalima surasti koeficientams A, B, C ir t. t. tokių reikšmių, kad gautume lygybę $\gamma_1 \gamma_0 = 0$. Tuomet loginė lygtis negali turėti jokio sprendinio.

5. Kai loginė lygtis gali turėti sprendinį, užrašoma bendrojo sprendinio formulė $X = \gamma_0 \vee Z \cdot \bar{\gamma}_1$ ir gaunami daliniai sprendiniai $X^{(0)} = \gamma_0$, $X^{(1)} = \gamma_0 \vee \bar{\gamma}_1$.

6. Kadangi, pervedant lygtį į kanoninę formą, galėjo būti padaryta klaidų, tai tikrinama, ar gauti daliniai sprendiniai tikrai tenkina pradinę lygtį (1).

Tuo tikslu atskirai apskaičiuojamos funkcijų $f_1(X)$ ir $f_2(X)$ reikšmės $f_1(X^{(0)})$, $f_2(X^{(0)})$, $f_1(X^{(1)})$, $f_2(X^{(1)})$ ir tikrinama, ar, atsižvelgiant į sąlygą $\gamma_1 \gamma_0 = 0$, tenkinamos lygybės $f_1(X^{(0)}) = f_2(X^{(0)})$, $f_1(X^{(1)}) = f_2(X^{(1)})$.

Kai tos lygybės tenkinamos, tai daroma išvada, kad lygtis išspręsta teisingai, o jei netenkinamos, tai ieškoma klaidų ir jos šalinamos.

Pailiustruosiu šio algoritmo taikymą, ieškant pirmosios mūsų jau nagrinėtosios lygties $A \cdot X \vee \bar{B} \cdot C = A \cdot B \vee X$ bendrojo ir dalinių sprendinių ir tikrinant juos.

Kaip anksčiau buvome nustatę, šiuo atveju $\gamma_0 = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C$, $\gamma_1 = \bar{A} \cdot B \vee \bar{A} \cdot \bar{C}$. Patikrinsime sprendinio egzistavimo sąlygą: $\gamma_0 \gamma_1 = (A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C) \cdot (\bar{A} \cdot B \vee \bar{A} \cdot \bar{C}) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$. Tai reiškia, jog šios lygties sprendinys egzistuoja esant bet kurioms koeficientų A, B ir C loginėms reikšmėms.

Rasime bendrąjį sprendinį: $X = \gamma_0 \vee Z \cdot \bar{\gamma}_1 = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C \vee Z \cdot (A \vee \bar{B}) \cdot (A \vee C) = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C \vee Z \cdot A \vee Z \cdot \bar{B} \cdot C = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C \vee Z \cdot A$.

Iš šio bendrojo sprendinio gauname du dalinius sprendinius: $X^{(0)} = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C$, $X^{(1)} = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C \vee A = A \vee \bar{B} \cdot C$.

Patikrinsime sprendinį $X^{(0)}$:

- 1) $f_1(X^{(0)}) = A \cdot X^{(0)} \vee \bar{B} \cdot C = A \cdot (A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C) \vee \bar{B} \cdot C = A \cdot B \vee A \cdot \bar{B} \cdot C \vee \bar{B} \cdot C = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C$;
- 2) $f_2(X^{(0)}) = A \cdot B \vee X^{(0)} = A \cdot B \vee A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C$;
- 3) kadangi $f_1(X^{(0)}) = f_2(X^{(0)})$, tai iš to išplaukia, kad $X^{(0)}$ tikrai yra pradinės lygties sprendinys.

Patikrinsime sprendinį $X^{(1)}$:

- 1) $f_1(X^{(1)}) = A \cdot X^{(1)} \vee \bar{B} \cdot C = A \cdot (A \vee \bar{B} \cdot C) \vee \bar{B} \cdot C = A \vee A \cdot \bar{B} \cdot C \vee \bar{B} \cdot C = A \vee \bar{B} \cdot C$;
- 2) $f_2(X^{(1)}) = A \cdot B \vee X^{(1)} = A \cdot B \vee A \vee \bar{B} \cdot C = A \vee \bar{B} \cdot C$;
- 3) $f_1(X^{(1)}) = f_2(X^{(1)})$, t. y. $X^{(1)}$ tikrai yra pradinės lygties sprendinys.

Bendroji išvada: pirmoji loginė lygtis išspręsta teisingai. Jos bendrasis sprendinys yra $X = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C \vee Z \cdot A$, kuris egzistuoja esant bet kokioms A, B, C reikšmėms. Iš bendrojo sprendinio išplaukia du daliniai sprendiniai $X^{(0)} = A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C$ ir $X^{(1)} = A \vee \bar{B} \cdot C$. Kai $B=1$, tai abu daliniai sprendiniai sutampa: $X^{(0)}=X^{(1)}=A$.

Išspręsimė antrąją lygtį $A \cdot \bar{X} \rightarrow \bar{B} \cdot X = B \cdot \bar{X} \oplus C \cdot \bar{X}$. Mes jau esame gavę, jog šiuo atveju sprendinio egzistavimo sąlyga yra $\gamma_0 = \bar{A} \cdot B \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot C = 0$, nes $\gamma_1 = 1$. Todėl $X = \gamma_0 \vee Z \cdot \bar{\gamma}_1 = \gamma_0 \vee 0 = \gamma_0$, t. y. abu galimi daliniai sprendiniai susilieja į vieną, kuris egzistuoja 4 atvejais: 1) $A=0, B=0, C=1$; 2) $A=0, B=1, C=0$; 3) $A=1, B=0, C=0$; 4) $A=1, B=1, C=1$.

Patikrinsime, ar šiais atvejais $X^* = \bar{A} \cdot B \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot C$ tikrai tenkina pradinę lygtį $A \cdot \bar{X} \rightarrow \bar{B} \cdot X = B \cdot \bar{X} \oplus C \cdot \bar{X}$.

$$\begin{aligned} 1) f_1(X^*) &= A \cdot \bar{X}^* \rightarrow \bar{B} \cdot X^* = \bar{A} \vee X^* \vee \bar{B} \cdot X^* = \bar{A} \vee X^* = \bar{A} \vee \bar{A} \cdot B \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee \\ &\vee A \cdot \bar{B} \cdot C = \bar{A} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot C = \bar{A} \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \vee A \cdot \bar{B} \cdot C \vee A \cdot B \cdot \bar{C} = B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C \vee \bar{A}; \\ 2) f_2(X^*) &= B \cdot \bar{X}^* \oplus C \cdot \bar{X}^* = B \cdot \bar{X}^* \cdot (\bar{C} \vee X^*) \vee (\bar{B} \vee X^*) \cdot C \cdot \bar{X}^* = B \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}^* \vee \bar{B} \cdot C \cdot \bar{X}^* = \\ &= (B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C) \cdot \bar{X}^* = (B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C) \cdot (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \cdot (A \vee B \vee C) \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) \cdot (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) = \\ &= (B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C) \wedge (A \vee \bar{B} \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee B \cdot C) = (B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C) \cdot (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot B \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) \vee \\ &\vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C. \end{aligned}$$

Iš pirmo žvilgsnio neatrodo, kad $f_1(X^*)$ sutaptų su $f_2(X^*)$. Tačiau jei prisimintume sprendinio egzistavimo sąlygą $\bar{A} \cdot B \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot C = 0$, iš kurios išplaukia, jog $\bar{A} \cdot B \cdot C = 0$, $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = 0$, $A \cdot B \cdot \bar{C} = 0$ ir $A \cdot \bar{B} \cdot C = 0$, tai gautume, kad tokiu atveju $f_2(X^*) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \vee A \cdot B \cdot C \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot C =$
 $= \bar{A} \cdot (B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C \vee B \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C}) \vee B \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} \vee A) \vee \bar{B} \cdot C \cdot (\bar{A} \vee A) = \bar{A} \cdot [B \cdot (C \vee \bar{C}) \vee \bar{B} \cdot (C \vee \bar{C})] \vee$
 $\vee B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = \bar{A} \cdot (B \vee \bar{B}) \vee B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = \bar{A} \vee B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C$, t. y., kad $f_2(X^*) = f_1(X^*)$, iš kur išplaukia, jog X^* tikrai yra pradinės lygties šaknis.

Ši patikrinimą galima buvo atlikti ir paprasčiau, prisiminus, kad šiuo atveju $X^* = \gamma_0 = 0$. Įstatę šią reikšmę į lygtį, gauname:

- 1) $f_1(X^*) = A \cdot \bar{X}^* \rightarrow \bar{B} \cdot X^* = A \rightarrow 0 = \bar{A}$,
- 2) $f_2(X^*) = B \cdot \bar{X}^* \oplus C \cdot \bar{X}^* = B \oplus C = B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C$.

Nesunku patikrinti, kad iš keturių atvejų, kai lygtis turi sprendinį pirmuoju ir antruoju atveju $\bar{A}=1$ ir $B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = 1$, t. y. $f_1(0)=f_2(0)$, o trečiuoju ir ketvirtuoju atveju $\bar{A}=0$ ir $B \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = 0$, t. y. vėl gi $f_1(0)=f_2(0)$. Kaip matome, visais keturiais galimais atvejais, kai mūsų nagrinėtoji antroji lygtis

gali turėti sprendinį, tenkinama lygybė $\overline{A} = B \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C$, t. y. $f_1(0)=f_2(0)$. O tai ir reiškia, jog $X=X^*=0$ tikrai yra tos lygties sprendinys.

1.16.1.2.2. Klasikinės teiginių algebros lygties su keliais nežinomaisiais sprendimas

Tarkime, jog mums reikia išspręsti klasikinės teiginių algebros lygtį $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)=f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, turinčią n nežinomųjų, kai $n>1$.

Pradžioje šią lygtį spręsimė nežinomojo X_n atžvilgiu, naudodamiesi mums jau žinomu teiginių algebros lygties su vienu nežinomuoju sprendimo algoritmu, ką tik aprašytu 1.16.1.2.1. skyrelyje, ir kol kas laikydami visus kitus nežinomuosius lyg ir loginėmis konstantomis – lygties su vienu nežinomuoju X_n loginiais koeficientais.

Pervedę lygtį $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)=f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ į kanoninę formą, **gausime loginę lygtį**: $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \cdot \overline{f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)} \vee \overline{f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)} \cdot f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)=0$.

Suradę šios lygties kairiosios pusės DNF, tas konjunkcijas, kurios savo loginių daugiklių tarpe neturi nežinomojo X_n (ar jo neiginio $\overline{X_n}$), jei tokių konjunkcijų atsirastų, padauginsime iš loginės sumos $\overline{X_n} \vee X_n$ ir tokiu būdu gausime DNF, kurioje kiekvienas loginis dėmuo turi loginį daugiklį $X_n^{\alpha_n}$, t. y. arba X_n , kai $\alpha_n=1$, arba $\overline{X_n}$, kai $\alpha_n=0$.

Sugrupavę tos DNF loginius dėmenis, išskelsime už skliaustų $\overline{X_n}$ ir X_n . Disjunkciją, esančią $\overline{X_n}$ loginiu daugikliu, pavadinsime $\gamma_{n,0}$, o disjunkciją, esančią X_n loginiu daugikliu, pavadinsime $\gamma_{n,1}$. Įvedę tokius žymenis, gausime loginę lygtį $\gamma_{n,0} \cdot \overline{X_n} \vee \gamma_{n,1} \cdot X_n = 0$.

Kad ši lygtis turėtų sprendinį, turi būti tenkinama sąlyga $\gamma_{n,0} \cdot \gamma_{n,1} = 0$.

Į lygybę $\gamma_{n,0} \cdot \gamma_{n,1} = 0$ galima žiūrėti kaip į loginę lygtį, turinčią ne daugiau kaip $n-1$ nežinomųjų: jos sudėtyje gali būti tik nežinomieji $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ bei jų neiginiai (kai kurių iš tų nežinomųjų bei jų neiginių gali ir nebūti).

Surandame lygties $\gamma_{n,0} \cdot \gamma_{n,1} = 0$ kairiosios pusės DNF ir, padauginę tas jos konjunkcijas, kurios savo sudėtyje neturi X_{n-1} ar $\overline{X_{n-1}}$, iš loginės sumos $\overline{X_{n-1}} \vee X_{n-1}$ bei išskėlę už skliaustų $\overline{X_{n-1}}$ ir X_{n-1} , gauname lygtį $\gamma_{n-1,0} \overline{X_{n-1}} \vee \gamma_{n-1,1} X_{n-1} = 0$.

Kad ši loginė lygtis turėtų sprendinį, būtina ir pakankama, kad $\gamma_{n-1,0} \cdot \gamma_{n-1,1} = 0$.

Į šią lygtį galima žiūrėti kaip į loginę lygtį, turinčią ne daugiau kaip $n-2$ nežinomųjų, ir iš jos analogišku būdu gauti loginę lygtį $\gamma_{n-2,0} \overline{X_{n-2}} \vee \gamma_{n-2,1} X_{n-2} = 0$.

Kad ši lygtis turėtų sprendinį, turi būti tenkinama lygybė $\gamma_{n-2,0} \cdot \gamma_{n-2,1} = 0$, į kurią galima žiūrėti kaip į loginę lygtį turinčią ne daugiau kaip $n-3$ nežinomuosius.

Tęsdami šią procedūrą, anksčiau ar vėliau gausime lygtį $\gamma_{1,0} \overline{X_1} \vee \gamma_{1,1} X_1 = 0$, kurioje loginiai daugikliai $\gamma_{1,0}$ ir $\gamma_{1,1}$ jau nebeturės savo sudėtyje nežinomųjų, o tik logines konstantas.

Gali būti taip, kad, esant kai kurioms (ar net visoms galimoms) tų konstantų reikšmėms, konjunkcija $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$, tačiau gali būti ir taip, kad neegzistuoja jokių tų loginių konstantų reikšmių, kad konjunkcija $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1}$ būtų lygi 0. Pradžioje išnagrinėsime pirmąjį atvejį.

Jei esant kai kurioms loginių konstantų reikšmėms $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$, tai loginė lygtis $\gamma_{1,0} \bar{X}_1 \vee \gamma_{1,1} X_1 = 0$ turi sprendinį $X_1 = \gamma_{1,0} \vee Z_1 \bar{\gamma}_{1,1}$.

Esant tokiai X_1 reikšmei, loginė sandauga $\gamma_{2,0} \cdot \gamma_{2,1}$, iš kurios buvo gauta lygties $\gamma_{1,0} \bar{X}_1 \vee \gamma_{1,1} X_1 = 0$ kairioji pusė $\gamma_{1,0} \bar{X}_1 \vee \gamma_{1,1} X_1$, bus lygi nuliui, t. y. bus tenkinama lygties $\gamma_{2,0} \bar{X}_2 \vee \gamma_{2,1} X_2 = 0$ sprendinio egzistavimo sąlyga $\gamma_{2,0} \cdot \gamma_{2,1} = 0$.

Išsprendę šią lygtį, gausime $X_2 = \gamma_{2,0} \vee Z_2 \bar{\gamma}_{2,1}$, t. y. išreikšime X_2 per X_1 , Z_2 ir logines konstantas.

Įstatę į šią išraišką vietoj X_1 sprendinį $X_1 = \gamma_{1,0} \vee Z_1 \bar{\gamma}_{1,1}$, išreikšime X_2 per logines konstantas ir laisvai pasirenkamas pagalbinių loginių kintamųjų Z_1 ir Z_2 reikšmes, t. y. rasime nežinomojo X_2 reikšmes, tenkinančias duotąją lygtį.

Įstatę surastas X_1 ir X_2 reikšmes į lygtį $\gamma_{3,0} \cdot \gamma_{3,1} = 0$, gausime tapatybę, nes $\gamma_{3,0} \cdot \gamma_{3,1} \equiv \gamma_{2,0} \bar{X}_2 \vee \gamma_{2,1} X_2$. O tai reiškia, jog lygtis $\gamma_{3,0} \bar{X}_3 \vee \gamma_{3,1} X_3 = 0$ turi sprendinį $X_3 = \gamma_{3,0} \vee Z_3 \bar{\gamma}_{3,1}$. Įstatę į šią lygybę jau surastas nežinomųjų X_2 ir X_1 reikšmes, rasime visas galimas nežinomojo X_3 reikšmes, priklausančias nuo pradinės loginės lygties loginių koeficientų, t. y. nuo loginių konstantų, ir nuo loginių kintamųjų Z_3 , Z_2 ir Z_1 laisvai pasirenkamų reikšmių.

Tęsdami šią procedūrą, anksčiau ar vėliau surasime $X_n = \gamma_{n,0} \vee Z_n \bar{\gamma}_{n,1}$ ir išreikšime X_n per logines konstantas ir loginių kintamųjų Z_n , Z_{n-1} , ..., Z_2 , Z_1 laisvai pasirenkamas logines reikšmes.

O tai reiškia, jog tuo atveju, kai $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$, tai ne tik lygtis $\gamma_{1,0} \bar{X}_1 \vee \gamma_{1,1} X_1 = 0$, bet ir pradinė lygtis $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ turi sprendinį.

Antruoju atveju, kai $\gamma_{1,0}$ ir $\gamma_{1,1}$ yra tokios loginės konstantos (paprastos ar sudėtingos, t. y. loginės formulės, sudarytos iš konstantų, sujungtų į formulę operatoriais), kad konjunkcija $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1}$ niekada negali tapti lygi nuliui, lygtis $\gamma_{1,0} \bar{X}_1 \vee \gamma_{1,1} X_1 = 0$ ir pradinė lygtis $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ negalės turėti sprendinio.

Apibendrinami, gauname išvadą, kad kai $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$, tai pradinės lygties $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bendrąjį sprendinį sudaro rinkinys formulių: $X_1 = \gamma_{1,0} \vee Z_1 \bar{\gamma}_{1,1}$, $X_2 = \gamma_{2,0} \vee Z_2 \bar{\gamma}_{2,1}$, $X_3 = \gamma_{3,0} \vee Z_3 \bar{\gamma}_{3,1}$, ..., $X_{n-1} = \gamma_{n-1,0} \vee Z_{n-1} \bar{\gamma}_{n-1,1}$, $X_n = \gamma_{n,0} \vee Z_n \bar{\gamma}_{n,1}$, o kai loginė sandauga $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1}$ negali būti lygi 0, tai pradinė lygtis sprendinių neturi.

Visus dalinius pradinės lygties $f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sprendinius galima gauti iš bendrojo, naudojantis tokiu **dalinių sprendinių radimo algoritmu**:

1) suteikiame vektoriaus $\vec{Z} = (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_2, Z_1)$ koordinatėms reikšmes $Z_n = 0$, $Z_{n-1} = 0$, ..., $Z_2 = 0$, $Z_1 = 0$, t. y. sudarome dvejetainį n -ženklį skaičių 00...00, lygų 0 ir įstatome tas kintamųjų $Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_2, Z_1$ reikšmes $Z_n^{(0)} = 0, Z_{n-1}^{(0)} = 0, \dots, Z_2^{(0)} = 0, Z_1^{(0)} = 0$ į bendrojo sprendinio formules;

2) įstatome gautąją konkrečią nežinomojo X_1 reikšmę $X_1^{(0)} = \gamma_{1,0} \vee Z_1^{(0)} \cdot \bar{\gamma}_{1,1} = \gamma_{1,0} \vee 0 \cdot \bar{\gamma}_{1,1} = \gamma_{1,0}$ į nežinomojo X_2 formulę $X_2^{(0)} = \gamma_{2,0} \vee Z_2^{(0)} \cdot \bar{\gamma}_{2,1}$ ir apskaičiuojame konkrečią nežinomojo X_2 reikšmę $X_2^{(0)}$;

3) įstatome gautąsias konkrečias nežinomųjų X_1 ir X_2 reikšmes $X_1^{(0)}$ ir $X_2^{(0)}$ į nežinomojo X_3 formulę ir apskaičiuojame konkrečią jo reikšmę $X_3^{(0)}$;

4÷n-1) kartodami analogiškas procedūras, surandame nežinomųjų $X_4, X_5, \dots, X_{n-1}$ reikšmes $X_4^{(0)}, X_5^{(0)}, \dots, X_{n-1}^{(0)}$;

n) įstatę į formulę $X_n^{(0)} = \gamma_{n,0} \vee Z_n^{(0)} \cdot \bar{\gamma}_{n,1}$ konkrečias nežinomųjų $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ reikšmes $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_{n-1}^{(0)}$, apskaičiuojame konkrečią nežinomojo X_n reikšmę $X_n^{(0)}$ ir užbaigiame pirmojo dalinio sprendinio $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_{n-1}^{(0)}, X_n^{(0)})$ formavimą; suteikiame tam daliniam sprendiniui ir vektoriui $\vec{Z} = \vec{Z}^{(0)} = (Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, \dots, Z_{n-1}^{(0)}, Z_n^{(0)}) = (0, 0, \dots, 0, 0)$ numerį $k=0$, sutampantį su dvejetainio n -ženklis skaičiaus $Z_n^{(0)} \dots Z_1^{(0)}$ reikšme;

n+1÷2n) kartojuame žingsnius 1÷n su kita vektoriaus $\vec{Z}$ reikšme $\vec{Z}^{(1)} = (0, 0, \dots, 0, 0, 1)$, atitinkančia skaičių $k=1$, ir surandame antrąjį dalinį sprendinį, turintį numerį $k=1$;

2n+1÷3n) kartodami žingsnius 1÷n su kita vektoriaus $\vec{Z}$ reikšme $\vec{Z}^{(2)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$, turinčia numerį $k=2$, surandame trečiąjį dalinį sprendinį, turintį numerį $k=2$;

3n+1÷mn) kartodami anksčiau aprašytas procedūras, surandame dalinius sprendinius, turinčius numerius $k=3, 4, \dots, m-1, m$;

mn+1÷(2ⁿ-1)n) kartodami jau aprašytas procedūras, surandame visus likusius galimus dalinius sprendinius, turinčius numerius $k=m+1, m+2, \dots, 2^n-1$, kur dalinis sprendinys $X_1^{(2^n-1)}, X_2^{(2^n-1)}, \dots, X_{n-1}^{(2^n-1)}, X_n^{(2^n-1)}$ atitinka vektoriaus $\vec{Z}$ konkrečią reikšmę $\vec{Z}^{(2^n-1)} = (Z_n^{(2^n-1)}, Z_{n-1}^{(2^n-1)}, \dots, Z_2^{(2^n-1)}, Z_1^{(2^n-1)}) = (1, 1, \dots, 1, 1)$.

Iš to, kas čia pasakyta, išplaukia, jog klasikinės teiginių algebros lygtis, turinti n nežinomųjų, gali turėti 2ⁿ dalinių sprendinių. Tie sprendiniai gaunami, vektoriaus $\vec{Z} = (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_2, Z_1)$ koordinačių $Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_2, Z_1$ reikšmių rinkinių numeriams prabėgant, toms koordinatėms keičiantis, n -ženklis dvejetainis skaičių k reikšmes nuo 0 iki 2ⁿ-1. Kai kurie iš dalinių sprendinių gali sutapti, todėl skirtingų dalinių sprendinių skaičius gali būti (ir dažniausiai būna) ne tik 2ⁿ, bet ir mažesnis. Kartais tas skaičius gali būti lygus net 1, o kai loginė lygtis neturi sprendinių, tai ir 0.

Klasikinės teiginių algebros lygtį, turinčią n nežinomųjų, kai $n \geq 2$, galima spręsti, pradant nebūtinai nuo nežinomojo X_n eliminavimo ir lygties $\gamma_{n,0} \cdot \bar{X}_n \vee \bar{\gamma}_{n,1} \cdot X_n = 0$ sudarymo. Galime pradėti ir nuo kito galo, t. y. nuo X_1 eliminavimo ir lygties $\gamma_{1,0} \cdot \bar{X}_1 \vee \bar{\gamma}_{1,1} \cdot X_1 = 0$ sudarymo, kuri turės sprendinį, kai lygtis $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$, sudaryta iš loginių konstantų ir $n-1$ loginių nežinomųjų $X_2, X_3, \dots, X_{n-1}, X_n$ turės sprendinį.

Spręsdami tą lygtį $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$, pasinaudodami jos sprendinio egzistavimo sąlyga, gausime lygtį $\gamma_{2,0} \cdot \gamma_{2,1} = 0$, turinčią jau tik $n-2$ nežinomuosius ir t. t.

Taip eidami pirmyn, t. y. didindami i lygtyse $\gamma_{i,0} \cdot \bar{X}_i \vee \bar{\gamma}_{i,1} \cdot X_i = 0$, gausime visas lygties su n nežinomųjų bendrojo sprendinio formules: $X_1 = \gamma_{1,0} \vee Z_1 \bar{\gamma}_{1,1}$, $X_2 = \gamma_{2,0} \vee Z_2 \bar{\gamma}_{2,1}$, ..., $X_{n-1} = \gamma_{n-1,0} \vee Z_{n-1} \bar{\gamma}_{n-1,1}$, $X_n = \gamma_{n,0} \vee Z_n \bar{\gamma}_{n,1}$ ir klasikinės teiginių algebros lygties turinčios n nežinomųjų, sprendinio egzistavimo sąlygą $\gamma_{n,0} \cdot \gamma_{n,1} = 0$, kurioje $\gamma_{n,0}$ ir $\gamma_{n,1}$ bus jau loginės konstantos, neturinčios nežinomųjų.

Eidami atgal, t. y. mažindami i nuo n iki 1 , galime apskaičiuoti kiekvienam vektoriaus $\vec{Z}$ koordinačių reikšmių rinkiniui, turinčiam numerį k , konkretias nežinomųjų reikšmes $X_n^{(k)}, X_{n-1}^{(k)}, \dots, X_2^{(k)}, X_1^{(k)}$, priklausančias daliniam sprendiniui, turinčiam tą patį numerį k . Keisdami k nuo 0 iki 2^n-1 (arba nuo 2^n-1 iki 0), gausime visus dalinius sprendinius.

Galima pasirinkti ir kokią nors kitą nežinomųjų X_i eliminavimo iš pradinės lygties, turinčios n nežinomųjų, tvarką, palaipsniui mažinančią likusių lygtyje nežinomųjų skaičių.

Nesunku įsitikinti, kad, pasirinkdami tą ar kitą nežinomųjų eliminavimo tvarką, mes galime gauti skirtingus lygties su n nežinomųjų bendrojo sprendinio formulius rinkinius, tačiau kiekvienu atveju gausime tas pačias dalinių sprendinių aibes, besiskiriančias viena nuo kitos ne pačiais daliniais sprendiniais, sudarančiais tas aibes, o tik galbūt tų dalinių sprendinių numeravimo tvarka.

Kartais, nežinomųjų eliminavimo tvarkos pasirinkimas, sprendžiant klasikinės teiginių algebros lygtį su n nežinomųjų „rankiniu“ būdu, leidžia supaprastinti ir pagreitinti tos lygties sprendimo procesą. Sudarant tokios lygties sprendimo kompiuteriu programą, pasirenkamas nežinomųjų X_i eliminavimas indekso i didėjimo (ar mažėjimo) tvarka.

Kaip pavyzdį, išspręsimė klasikinės teiginių algebros lygtį $A \cdot X_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 = \bar{A} \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3$, turinčią $n=3$ nežinomųjų.

Pervesdami šią lygtį į kanoninę formą, gausime: $(A \cdot X_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3) \cdot (A \vee X_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3) \vee \bar{A} \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 \cdot (\bar{A} \vee \bar{X}_3) \cdot (\bar{B} \vee \bar{X}_1 \vee X_2) \cdot (C \vee X_1 \vee X_3) = 0$.

Sudarysime šios lygties kairiosios pusės DNF:

$$\begin{aligned} & A \cdot X_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{A} \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 \cdot (\bar{B} \cdot C \vee \bar{B} \cdot X_1 \vee \\ & \vee \bar{B} \cdot X_3 \vee C \cdot \bar{X}_1 \vee \bar{X}_1 \cdot X_3 \vee C \cdot X_2 \vee X_1 \cdot X_2 \vee X_2 \cdot X_3) = A \cdot X_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 \vee \\ & \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 = A \cdot X_3 \vee \\ & \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3. \end{aligned}$$

Tarkime, jog pradžioje eliminuosime nežinomąjį X_3 . Pakeitę $B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2$ į $B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \wedge (\bar{X}_3 \vee X_3) = B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot X_3$, gauname lygtį $\gamma_{3,0} \cdot \bar{X}_3 \vee \gamma_{3,1} \cdot X_3 = 0$, kurioje $\gamma_{3,0} = B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2$, $\gamma_{3,1} = A \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2$.

Pasinaudodami lygties sprendinio X_3 egzistavimo sąlyga $\gamma_{3,1} \cdot \gamma_{3,0} = 0$, gauname lygtį jau tik su dviem nežinomaisiais $(B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A) \cdot (B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2) = 0$, kuri, pertvarkius jos kairiąją pusę į DNF, tampa lygtimi $B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 = 0$.

Eliminuojant nežinomuosius indekso i mažėjimo tvarka, reikėtų eliminuoti nežinomąjį X_2 . Tačiau galima eliminuoti ir nežinomąjį X_1 , kas leistų išspręsti lygtį paprasčiau ir greičiau. Pasirinksim pastarąjį variantą ir eliminuosime X_1 .

Gauname $\gamma_{1,0} = A \cdot \bar{C}$ ir $\gamma_{1,1} = B \cdot \bar{X}_2$, iš kur, pasinaudodami sprendinio X_1 egzistavimo sąlyga, gauname lygtį $A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_2 = 0$, turinčią jau tik vieną nežinomąjį.

Kadangi $\gamma_{2,0} = A \cdot B \cdot \bar{C}$ ir $\gamma_{2,1} = 0$, tai sprendinys egzistuoja visada, nes $\gamma_{2,0} \cdot \gamma_{2,1} \equiv 0$.

Todėl visada egzistuoja ir pradinės lygties $A \cdot X_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 = \bar{A} \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3$ sprendinys.

Surasime tos lygties bendrąjį sprendinį:

$$1) X_2 = \gamma_{2,0} \vee Z_2 \cdot \bar{\gamma}_{2,1} = A \cdot B \cdot \bar{C} \vee Z_2 \cdot 0 = A \cdot B \cdot \bar{C} \vee Z_2;$$

$$2) X_1 = A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot (\bar{B} \vee X_2) = A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot (\bar{B} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee Z_2) = A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot \bar{B} \vee Z_1 \cdot A \cdot B \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot Z_2 = A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot \bar{B} \vee Z_1 \cdot Z_2;$$

$$3) X_3 = B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \vee Z_3 \cdot \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{X}_1 \vee X_2).$$

Nežinomojo X_3 reikšmės apskaičiavimui mums prireiks ne tik X_1 ir X_2 , bet ir $\bar{X}_1$ bei $\bar{X}_2$ reikšmių. Surasime jas, o taip pat $X_1 \cdot \bar{X}_2$, $\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$ ir t. t.

$$\bar{X}_1 = (\bar{A} \vee C) \cdot (\bar{Z}_1 \vee B) \cdot (\bar{Z}_1 \vee \bar{Z}_2) = (\bar{A} \vee C) \cdot (\bar{Z}_1 \vee B \cdot \bar{Z}_2) = \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee$$

$$\vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2;$$

$$\bar{X}_2 = \bar{Z}_2 \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C);$$

$$X_1 \cdot \bar{X}_2 = (A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot \bar{B} \vee Z_1 \cdot Z_2) \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) = \bar{Z}_2 \cdot (A \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1) \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) =$$

$$= \bar{Z}_2 \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot Z_1 \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1 \vee \bar{B} \cdot C \cdot Z_1) = \bar{Z}_2 \cdot (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1);$$

$$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 = (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2) \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) = \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee$$

$$\vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{B} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2 = \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee$$

$$\vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2;$$

$$\bar{X}_1 \cdot X_2 = (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2) \cdot (A \cdot B \cdot \bar{C} \vee Z_2) = \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2;$$

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{X}_1 \vee X_2) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2 \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee Z_2) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee$$

$$\vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee C \cdot \bar{Z}_2 \vee A \cdot \bar{C} \vee Z_2) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee C \vee A \cdot \bar{C} \vee Z_2) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee$$

$$\vee \bar{A} \vee C \vee \bar{C} \vee Z_2) = \bar{A}.$$

$$\text{Dabar jau galime apskaičiuoti nežinomojo } X_3 \text{ reikšmę } X_3 = B \cdot \bar{Z}_2 \cdot (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1) \vee$$

$$\vee A \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2) \vee \bar{C} \cdot (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2) \vee$$

$$\vee \bar{A} \cdot C \cdot (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2) \vee Z_3 \cdot \bar{A} = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_2 \vee 0 \vee 0 \vee$$

$$\vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee Z_3 \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot (\bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee Z_3).$$

$$\text{Patikrinsime, ar bendrasis sprendinys tenkina pradinę lygtį. Tuo tikslu apskaičiuosime } \bar{X}_3,$$

$$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 \text{ ir } \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3.$$

$$\bar{X}_3 = A \vee (C \vee Z_1 \vee Z_2) \cdot (\bar{B} \vee C \vee Z_2) \cdot (\bar{C} \vee Z_1 \vee \bar{Z}_2) \cdot \bar{Z}_3 = A \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \vee Z_2 \vee \bar{B} \cdot Z_1) \cdot (\bar{C} \vee Z_1 \vee$$

$$\vee \bar{Z}_2) = A \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot Z_1 \vee C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{C} \cdot Z_2 \vee Z_1 \cdot Z_2 \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot Z_1 \vee \bar{B} \cdot Z_1 \vee \bar{B} \cdot Z_1 \cdot \bar{Z}_2) = A \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot Z_1 \vee$$

$$\vee C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{C} \cdot Z_2 \vee Z_1 \cdot Z_2 \vee \bar{B} \cdot Z_1);$$

$$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 = (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2) \cdot [A \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot Z_1 \vee C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{C} \cdot Z_2 \vee Z_1 \cdot Z_2 \vee$$

$$\vee \bar{B} \cdot Z_1)] = A \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \vee A \cdot B \cdot C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{Z}_3 \cdot (\bar{A} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot Z_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \wedge$$

$$\wedge \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot C \cdot Z_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2) = A \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \vee A \cdot B \cdot C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \wedge$$

$$\wedge Z_2 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2);$$

$$\bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 = (\bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2) \cdot [A \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot Z_1 \vee C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{C} \cdot Z_2 \vee Z_1 \cdot Z_2 \vee \bar{B} \cdot Z_1)] =$$

$$= \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot (\bar{A} \vee C) \cdot [A \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot Z_1 \vee C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{C} \cdot Z_2 \vee Z_1 \cdot Z_2 \vee \bar{B} \cdot Z_1)] = A \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot \bar{Z}_3 \wedge$$

$$\wedge (\bar{A} \cdot \bar{C} \vee 0) = A \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot \bar{Z}_3 = \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot (A \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_3).$$

Istatę gautąsias reikšmes į kairiąją ir dešiniąją pradinės lygties puses, gauname:

$$A \cdot X_3 \vee B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_3 = A \cdot \bar{A} \cdot (\bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee B \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee Z_3) \vee B \cdot \bar{Z}_2 \wedge$$

$$\wedge (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1) \vee \bar{C} \cdot [A \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \vee A \cdot B \cdot C \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{Z}_3 \cdot (C \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee B \cdot C \cdot \bar{Z}_2)] =$$

$$= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee \bar{Z}_3 \cdot (0 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee 0) = \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot \bar{Z}_3;$$

$$\bar{A} \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_3 = \bar{A} \cdot (A \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_3) \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 = \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot \bar{Z}_3.$$

Kaip matome, bendrasis sprendinys tenkina pradinę lygtį, nes įstatę X_1 , X_2 ir X_3 reikšmes į kairiąją ir dešiniąją pradinės lygties puses, gavome tapatybę $\bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot \bar{Z}_3 \equiv \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot \bar{Z}_3$.

Surasime dalinius lygties sprendinius:

1) $k=0$, t. y. $Z_3=0$, $Z_2=0$, $Z_1=0$:

$$X_1^{(0)} = A \cdot \bar{C}, X_2^{(0)} = A \cdot B \cdot \bar{C}, X_3^{(0)} = \bar{A} \cdot (\bar{C} \vee B \cdot \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{C};$$

2) $k=1$, t. y. $Z_3=0$, $Z_2=0$, $Z_1=1$:

$$X_1^{(1)} = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \vee 0 = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B}, X_2^{(1)} = A \cdot B \cdot \bar{C}, X_3^{(1)} = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C};$$

3) $k=2$, t. y. $Z_3=0, Z_2=1, Z_1=0$:

$$X_1^{(2)} = A \cdot \bar{C}, X_2^{(2)} = A \cdot B \cdot \bar{C} \vee 1 = 1, X_3^{(2)} = \bar{A} \cdot (0 \vee 0 \vee C) = \bar{A} \cdot C;$$

4) $k=3$, t. y. $Z_3=0, Z_2=1, Z_1=1$:

$$X_1^{(3)} = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee 1 = 1, X_2^{(3)} = 1, X_3^{(3)} = \bar{A} \cdot (0 \vee 0 \vee 0 \vee 0) = 0;$$

5) $k=4$, t. y. $Z_3=1, Z_2=0, Z_1=0$:

$$X_1^{(4)} = A \cdot \bar{C}, X_2^{(4)} = A \cdot B \cdot \bar{C}, X_3^{(4)} = \bar{A} \cdot (\bar{C} \vee B \cdot \bar{C} \vee 0 \vee 1) = \bar{A};$$

6) $k=5$, t. y. $Z_3=1, Z_2=0, Z_1=1$:

$$X_1^{(5)} = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B}, X_2^{(5)} = A \cdot B \cdot \bar{C}, X_3^{(5)} = \bar{A} \cdot (0 \vee B \cdot \bar{C} \vee 0 \vee 1) = \bar{A};$$

7) $k=6$, t. y. $Z_3=1, Z_2=1, Z_1=0$:

$$X_1^{(6)} = A \cdot \bar{C}, X_2^{(6)} = 1, X_3^{(6)} = \bar{A} \cdot (0 \vee 0 \vee C \vee 1) = \bar{A};$$

8) $k=7$, t. y. $Z_3=1, Z_2=1, Z_1=1$:

$$X_1^{(7)} = 1, X_2^{(7)} = 1, X_3^{(7)} = \bar{A} \cdot (0 \vee 0 \vee 0 \vee 1) = \bar{A};$$

Jei būtume pasinaudoję kita nežinomųjų eliminavimo tvarka, pavyzdžiui, jei po to, kai eliminavome X_3 , būtume eliminavę ne X_1 , o X_2 ir tik po to X_1 , tai iš lygties $B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 = 0$ būtume gavę lygtį $B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 = 0$.

Tuomet $\gamma_{2,0} = B \cdot X_1 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1$, $\gamma_{2,1} = A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1$, iš kur, pasinaudodami sprendinio X_2 egzistavimo sąlyga, būtume gavę lygtį $(B \cdot X_1 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1) \cdot A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 = 0$, t. y. lygtį $A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 = 0$.

Kadangi $\gamma_{1,0} = A \cdot \bar{C}$ ir $\gamma_{1,1} = 0$, tai šios lygties (o kartu ir pradinės lygties) sprendinys visada egzistuoja.

Surasime bendrąjį sprendinį:

$$\begin{aligned} X_1 &= A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot \bar{0} = A \cdot \bar{C} \vee Z_1; X_2 = B \cdot X_1 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \vee Z_2 \cdot (\bar{A} \vee C \vee X_1) = A \cdot B \cdot \bar{C} \vee \\ &\vee B \cdot Z_1 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \vee C) \vee Z_2 \cdot (\bar{A} \vee C \vee A \cdot \bar{C} \vee Z_1) = A \cdot B \cdot \bar{C} \vee B \cdot Z_1 \vee Z_2 \cdot (\bar{A} \vee C \vee A \vee Z_1) = \\ &= A \cdot B \cdot \bar{C} \vee B \cdot Z_1 \vee Z_2; \end{aligned}$$

Kaip matome, gavome jau kitokias bendrojo sprendinio formules X_1 ir X_2 reikšmių apskaičiavimui. Surasime X_3 reikšmės apskaičiavimo formulę. Tuo tikslu pradžioje apskaičiuosime $X_1 \cdot \bar{X}_2$, $\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$, $\bar{X}_1 \cdot X_2$ ir $\bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{X}_1 \vee X_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \vee C); \\ \bar{X}_2 &= \bar{Z}_2 \cdot (\bar{B} \vee \bar{Z}_1) \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) = \bar{Z}_2 \cdot (\bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee C \cdot \bar{Z}_1); \\ X_1 \cdot \bar{X}_2 &= (A \cdot \bar{C} \vee Z_1) \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee C \cdot \bar{Z}_1) = \bar{Z}_2 \cdot (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1); \\ \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 &= \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \vee C) \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee C \cdot \bar{Z}_1) = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\underline{\bar{A} \cdot \bar{B}} \vee \bar{A} \vee \underline{\bar{A} \cdot C} \vee \underline{\bar{B} \cdot C} \vee \underline{\bar{A} \cdot C} \vee \underline{\bar{B} \cdot C}) = \\ &= \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{A} \vee C); \\ \bar{X}_1 \cdot X_2 &= \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \vee C) \cdot (A \cdot B \cdot \bar{C} \vee B \cdot Z_1 \vee Z_2) = \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \cdot Z_2 \vee C \cdot Z_2) = \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot (\bar{A} \vee C); \\ \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{X}_1 \vee X_2) &= \bar{A} \cdot [\bar{B} \vee \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \vee C) \vee A \cdot B \cdot \bar{C} \vee B \cdot Z_1 \vee Z_2] = \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{Z}_1 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \vee \\ &\vee A \cdot \bar{C} \vee Z_1 \vee Z_2) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee Z_1 \vee Z_2 \vee \bar{A} \vee C \vee A) = \bar{A}. \end{aligned}$$

Dabar jau galime rasti X_3 formulę:

$$\begin{aligned} X_3 &= B \cdot X_1 \cdot \bar{X}_2 \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{X}_1 \cdot X_2 \vee Z_3 \cdot \bar{A} \cdot (\bar{B} \vee \bar{X}_1 \vee X_2) = B \cdot \bar{Z}_2 \wedge \\ &\wedge (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot Z_1) \vee A \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot (\bar{A} \vee C) \vee \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{A} \vee C) \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \cdot (\bar{A} \vee C) \vee Z_3 \cdot \bar{A} = 0 \vee \\ &\vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee \bar{A} \cdot C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee Z_3 \cdot \bar{A} = \bar{A}(\bar{C} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \vee C \cdot \bar{Z}_1 \cdot Z_2 \vee Z_3). \end{aligned}$$

X_3 apskaičiavimo bendrąją formulę taip pat gavome kitokią negu pirmuoju atveju, kada eliminavome nežinomuosius kita tvarka.

Rasime dalinius sprendinius:

$$1) \quad k=0: X_1^{(0)} = A \cdot \bar{C}, X_2^{(0)} = A \cdot B \cdot \bar{C}, X_3^{(0)} = \bar{A} \cdot \bar{C};$$

$$2) \quad k=1: X_1^{(1)} = 1, X_2^{(1)} = A \cdot B \cdot \bar{C} \vee B = B, X_3^{(1)} = 0;$$

$$3) \quad k=2: X_1^{(2)} = A \cdot \bar{C}, X_2^{(2)} = 1, X_3^{(2)} = \bar{A} \cdot C;$$

- 4) $k=3$: $X_1^{(3)} = 1$, $X_2^{(3)} = 1$, $X_3^{(3)} = 0$;
- 5) $k=4$: $X_1^{(4)} = A \cdot \overline{C}$, $X_2^{(4)} = A \cdot B \cdot \overline{C}$, $X_3^{(4)} = \overline{A}$;
- 6) $k=5$: $X_1^{(5)} = 1$, $X_2^{(5)} = A \cdot B \cdot \overline{C} \vee B = B$, $X_3^{(5)} = \overline{A}$;
- 7) $k=6$: $X_1^{(6)} = A \cdot \overline{C}$, $X_2^{(6)} = 1$, $X_3^{(6)} = \overline{A}$;
- 8) $k=7$: $X_1^{(7)} = 1$, $X_2^{(7)} = 1$, $X_3^{(7)} = \overline{A}$.

Lygindami dalinius sprendinius, gautus eliminuojant nežinomuosius viena tvarka, su kitais daliniais sprendiniais, gautus eliminuojant nežinomuosius kita tvarka, pastebime įdomų reiškinį: **daliniai sprendiniai, visiškai sutapdami pozicijose $k=0, 2, 3, 4, 6, 7$, nepilnai sutampa pozicijose $k=1$ ir $k=5$. Atrodytų, kad, sprenddami duotąją lygtį su trim nežinomaisiais dviem truputį skirtingais būdais, mes gavome iš viso jau ne $2^3=8$, o 10 skirtingų dalinių sprendinių.** Visi tie daliniai sprendiniai (ką nesunku patikrinti) tikrai tenkina pradinę lygtį. Išeitų, kad, sprenddami lygtį vienu iš būdų, mes gavome lyg ir ne visus galimus dalinius sprendinius, o tai reiškia, jog pabandžius spręsti šią lygtį, eliminuojant kintamuosius dar kita tvarka, mes galbūt galėtume surasti dar ir kitų dalinių sprendinių formulių, nesutampančių su jau turimais. Kad taip tikrai atsitinka, nesunku įsitikinti, pabandžius pradžioje eliminuoti ne nežinomąjį X_3 , o, pavyzdžiui, X_2 arba X_1 .

Kyla klausimas, iš kur atsirado šis prieštaravimas teorijai, teigiančiai, jog klasikinės teiginių algebros lygtis, turinti n nežinomųjų, gali turėti ne daugiau negu 2^n skirtingų dalinių sprendinių, gaunamų iš bendrojo sprendinio, perrenkant visas galimas laisvai keičiamų kintamųjų $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}, Z_n$ logines reikšmes?

Atsakymas į šį klausimą yra toks: **jokio prieštaravimo teorijai nėra, o čia pastebėtas dalinių sprendinių nesutapimas išplaukia iš to, kad mes kol kas suradome ne pačius dalinius lygties sprendinius, o tik jų formules, išreiškiančias dalinių sprendinių priklausomybes nuo duotosios lygties parametrų A, B ir C , kuriuos galima interpretuoti kaip duotosios lygties laisvuosius nežinomuosius. Todėl galima sakyti, kad duotoji lygtis turi ne 3, o 6 nežinomuosius ir pilnas dalinių sprendinių, kuriuos sudaro X_1, X_2, X_3, A, B ir C reiškiniai, skaičius gali siekti iki $2^6=64$.**

Kadangi, kaip jau buvome gavę anksčiau, nagrinėdami duotosios lygties sprendinio egzistavimo sąlygą, sprendinys egzistuoja, esant bet kokioms lygties parametrų A, B ir C reikšmėms, tai galimi $2^3=8$ tų parametrų reikšmių rinkiniai. Jei įstatytume bet kurio tokio rinkinio reikšmes į dalinių sprendinių formules, gautas dviem būdais, tai nesunkiai įsitikintume, jog **daliniai sprendiniai, gauti kiekvienu iš tų būdų, sutampa, kaip tai ir išplaukia iš teorijos.**

Pavyzdžiui, jei į dalinių sprendinių formules, gautas kaip pirmuoju, taip ir antruoju būdu, įstatytume $A=0, B=0, C=0$, tai gautume septynis skirtingus dalinius sprendinius (nežinomųjų X_1, X_2, X_3 reikšmių rinkinius): $(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$. Jie būtų tie patys tiek pirmajam, tiek antrajam būdui.

Jei įstatytume $A=0, B=0, C=1$, tai gautume vėl septynis skirtingus dalinius sprendinius: $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)$. Jie irgi būtų tie patys kaip pirmuoju, taip ir antruoju atveju.

Jei įstatytume į dalinių sprendinių formules, gautas kaip ir pirmuoju, taip ir antruoju būdu, $A=0, B=1, C=0$, tai gautume po penkis dalinius sprendinius: $(0,0,1), (0,1,0), (1,1,0), (0,1,1)$ ir $(1,1,1)$. Penkis dalinius sprendinius gautume ir įstatę $A=0, B=1, C=1$, o jei įstatytume $A=1, B=0, C=1$, tai gautume jau tik keturis skirtingus dalinius sprendinius: $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)$. Įstatę $A=1, B=1, C=1$, gautume dar mažiau skirtingų dalinių sprendinių – tik tris: $(0,0,0), (1,1,0), (0,1,0)$, o įstatę $A=1, B=0, C=0$ – tik du: $(1,0,0)$ ir $(1,1,0)$. Visų mažiausiai dalinių sprendinių duotoji lygtis turėtų tuo atveju, kai $A=1, B=1, C=0$. Tuomet egzistotų tik vienas dalinis sprendinys $(1,1,0)$, t. y. $X_1=1, X_2=1$ ir $X_3=0$.

Rekomenduočiau skaitytojui pačiam įsitikinti čia pateiktų rezultatų teisingumą, o taip pat ir tuo, kad, **sprendami lygtį įvairiais būdais, galime gauti įvairias bendrųjų ir dalinių sprendinių formules, tačiau pačios tų dalinių sprendinių reikšmės, gaunant jas bet kuriuo būdu, bus tos pačios.**

Taigi, tame fakte, kad, sprendami lygtį skirtingais būdais, gavome ne visiškai sutampančias dalinių sprendinių formules, jokio paradokso nėra, o yra tik paradokso regimybė.

1.16.1.2.3. Klasikinės teiginių algebros lygčių sistemų sprendimas

Tarkime, jog turime loginių lygčių sistemą:

Pasinaudodami jau žinomais metodais, šios sistemos lygtis pervesime į formą, kurioje dešiniojos pusės lygtis 0:

Kadangi teiginys $A \vee B \vee C \vee \dots \vee N = 0$ ekvivalentus teiginiui $(A=0) \wedge (B=0) \wedge (C=0) \wedge \dots \wedge (N=0)$, nes disjunkcija lygi 0 tada ir tik tada, kada kiekvienas loginės sumos narys lygus 0, tai lygčių sistema yra ekvivalenti vienai loginei lygčiai $f_{11}(\dots) f_{12}(\dots) \vee f_{11}(\dots) f_{12}(\dots) \vee \dots \vee f_{n1}(\dots) f_{n2}(\dots) \vee f_{n1}(\dots) f_{n2}(\dots) = 0$, turinčiai n kintamųjų.

Todėl klasikinėje teiginių algebroje loginių lygčių sistemos sprendimą galima suvesti į vienos lygties sprendimą (ir atvirkščiai), iš kur išplaukia loginių lygčių sistemos sprendimo algoritmas

Pailiustruosiu šio algoritmo taikymą, išsprendamas konkrečią dviejų kintamųjų loginę lygtį (tiksliau, loginių lygčių sistemą). Tarkime, jog duota loginių lygčių sistema

1. Pertvarkome pirmąją lygtį į $\varphi_1(X_1, X_2) = 0$ tipo lygtį:

2. Pavedame antrąją lygtį į formą $\phi_2(X_1, X_2) = 0$:

3. Sujungiame pirmąją lygtį $\varphi_1(X_1, X_2) = 0$ ir antrąją lygtį $\varphi_2(X_1, X_2) = 0$ į vieną lygtį $\varphi(X_1, X_2) = \varphi_1(X_1, X_2) \vee \varphi_2(X_1, X_2) = 0$. Gauname:

4. Kanoninė lygties forma: $\overline{X}_2 \cdot (\overline{A} \cdot X_1 \vee A \cdot C \cdot X_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{B} \cdot X_1) \vee X_2 \cdot (\overline{A} \cdot X_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{B} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{A} \cdot B \vee \overline{A} \cdot \overline{C}) = 0$, iš kur gauname,

$$\begin{aligned} &= \overline{A} \cdot X_1 \vee A \cdot C \cdot X_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot X_1 = \overline{A} \cdot X_1 \vee \\ &\vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{B} \cdot X_1, \gamma_{2,1} = \overline{A} \cdot X_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{B} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{A} \cdot B \vee \\ &= \overline{A} \cdot X_1 \vee \overline{A} \wedge (\overline{B} \vee B) \vee \overline{B} \cdot \overline{X}_1 \vee \overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{A} \vee \overline{B} \cdot \overline{X}_1. \end{aligned}$$

6. Sprendinio egzistavimo sąlyga $\gamma_{1,0} \cdot \gamma_{1,1} = 0$: $(\overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C}) \cdot \overline{A} = 0$, t. y. $\overline{A} \cdot \overline{C} = 0$. Tai reiškia, kad nagrinėjamos lygčių sistemos sprendinys gali egzistuoti (ir būtinai egzistuoja) tik tada, kada arba A arba C arba ir A ir C kartu yra teisingi teiginiai. Nuo teiginio B reikšmės sprendinio egzistavimas

nepriklauso.

$$7. \text{ Randame bendrąją } X_1 \text{ reikšmę } X_1^* = \gamma_{1,0} \vee Z_1 \cdot \bar{\gamma}_{1,1} = \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A.$$

Kadangi tais atvejais, kai sprendinys egzistuoja, $\bar{A} \cdot \bar{C} = 0$, tai sprendinį X_1^* galima supaprastinti: $X_1^* = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A$.

$$8. \text{ Randame } \gamma_{2,0}^* = \bar{A} \cdot X_1^* \vee C \cdot X_1^* \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{C} \cdot \bar{X}_1^* \vee \bar{B} \cdot X_1^* = \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee (\bar{A} \vee C \vee \vee \bar{B}) \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A) \vee \bar{C} (B \vee C) \cdot (\bar{Z}_1 \vee \bar{A}) = \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot \bar{B} \vee \vee \bar{Z}_1 \cdot B \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot (C \vee \bar{B}) \vee \bar{Z}_1 \cdot B \cdot C = \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot (C \vee \bar{B}) \vee \vee \bar{Z}_1 \cdot B \cdot \bar{C} \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot C \vee Z_1 \cdot A \cdot \bar{B} \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{C}. \text{ Kadangi } \bar{A} \cdot \bar{C} = 0, \text{ tai } \gamma_{2,0}^* = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot (C \vee \bar{B}) \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{C}.$$

$$9. \text{ Randame } \gamma_{2,1}^* = \bar{A} \vee \bar{B} \cdot \bar{X}_1^* = \bar{A} \vee \bar{B} \cdot (B \vee C) \cdot (\bar{Z}_1 \vee \bar{A}) = \bar{A} \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{B} \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = \bar{A} \vee \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{B} \cdot C.$$

$$10. \text{ Randame } X_2^* = \gamma_{2,0}^* \vee Z_2 \cdot \bar{\gamma}_{2,1}^* = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot (C \vee \bar{B}) \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{C} \vee Z_2 \cdot A \cdot (Z_1 \vee B \vee \bar{C}) = = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot C \vee Z_1 \cdot A \cdot \bar{B} \vee \bar{Z}_1 \cdot \bar{C} \vee Z_2 \cdot Z_1 \cdot A \vee Z_2 \cdot A \cdot B \vee Z_2 \cdot A \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee Z_1 \cdot A \cdot (\bar{B} \vee C \vee \vee Z_2) \vee Z_1 \cdot \bar{C} \vee Z_2 \cdot (A \cdot B \vee \bar{C}) = \bar{C} \cdot (\bar{B} \vee \bar{Z}_1 \vee Z_2) \vee Z_1 \cdot A \cdot (\bar{B} \vee C) \vee Z_2 \cdot A \cdot (B \vee Z_1).$$

11. Randame dalinius sprendinius

$$11.1. \text{ Kai } Z_2=0 \text{ ir } Z_1=0, \text{ tai } X_1=X_1^{(0,0)}=\bar{B} \cdot \bar{C}; X_2=X_2^{(0,0)}=\bar{C}.$$

11.2. Kai $Z_2=0$ ir $Z_1=1$, tai $X_1=X_1^{(0,1)}=\bar{B} \cdot \bar{C} \vee A = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \vee A \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \vee \vee \bar{C} = A \vee \bar{C}$. Tačiau, egzistuojant sprendiniui, $\bar{A} \cdot \bar{C} = 0$, iš kur gauname, jog $A = A \vee A \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{C} = = A \vee \bar{C}$. Todėl $X_1^{(0,1)}$ reikšmę galima dar supaprastinti ir gauti $X_1^{(0,1)}=A$. $X_2^{(0,1)}=\bar{C} \cdot \bar{B} \vee \vee A \cdot \bar{B} \vee A \cdot C$. Kadangi $\bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot C = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot C \vee A \cdot \bar{B} \cdot C = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot C \vee A \cdot \bar{B}$, tai $X_2^{(0,1)}$ galima išreikšti paprasčiau: $X_2^{(0,1)} = A \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C}$.

$$11.3. \text{ Kai } Z_2=1 \text{ ir } Z_1=0, \text{ tai } X_1=X_1^{(1,0)}=\bar{B} \cdot \bar{C}, \text{ o } X_2=X_2^{(0,1)}=\bar{C} \vee A \cdot B.$$

$$11.4. \text{ Kai } Z_2=1 \text{ ir } Z_1=1, \text{ tai } X_1=X_1^{(1,1)}=\bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \text{ ir } X_2^{(1,1)}=\bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \vee A \cdot C \vee A = A \vee \bar{C}.$$

Tačiau 11.2. pastraipoje mes buvome gavę, kad egzistuojant sprendiniui $\bar{B} \cdot C \vee A = A \vee \bar{C} = A$, todėl $X_1^{(1,1)}=A$ ir $X_2^{(1,1)}=A$.

12. Patikrinsime gautus dalinius sprendinius.

$$12.1. \text{ Kai } X_1=X_1^{(0,0)}=\bar{B} \cdot \bar{C} \text{ ir } X_2=X_2^{(0,0)}=\bar{C}, \text{ tai:}$$

$$a) f_{1,1}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = A \cdot X_1^{(0,0)} \vee B \cdot \bar{X}_1^{(0,0)} \cdot \bar{X}_2^{(0,0)} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee B \cdot (B \vee C) \cdot \bar{C} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \vee B \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{C} = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{C} = \bar{C};$$

$$b) f_{1,2}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = C \cdot \bar{X}_2^{(0,0)} \rightarrow \bar{A} \cdot X_1^{(0,0)} = C \cdot C \rightarrow \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{C};$$

$$c) f_{2,1}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = B \cdot \bar{X}_2^{(0,0)} \rightarrow \bar{A} \cdot (X_1^{(0,0)} \vee X_2^{(0,0)}) = B \cdot C \rightarrow \bar{A} \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{C}) = \bar{B} \vee \bar{C} \vee \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{C} = \bar{B} \vee \bar{C};$$

$$d) f_{2,2}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = A \cdot X_2^{(0,0)} \vee \bar{B} \cdot C \cdot \bar{X}_1^{(0,0)} = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C \cdot (B \vee C) = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = = A \cdot \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{C} = \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{C} \vee \bar{B} \cdot C = \bar{B} \vee \bar{C}.$$

Gavome, jog

$$f_{1,1}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = f_{1,2}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = \bar{C},$$

$$f_{2,1}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = f_{2,2}(X_1^{(0,0)}, X_2^{(0,0)}) = \bar{B} \vee \bar{C}.$$

Tai reiškia, jog dalinis sprendinys $X_1^{(0,0)}=\bar{B} \cdot \bar{C}$, $X_2^{(0,0)}=\bar{C}$ surastas teisingai.

$$12.2. \text{ Kai } X_1=X_1^{(0,1)}=A \text{ ir } X_2=X_2^{(0,1)}=A \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C}, \text{ tai:}$$

$$a) f_{1,1}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) = A \cdot X_1^{(0,1)} \vee B \cdot \bar{X}_1^{(0,1)} \cdot X_2^{(0,1)} = A \cdot A \vee B \cdot \bar{A} \cdot (A \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C}) = A \vee 0 = A;$$

$$b) f_{1,2}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) = C \cdot \bar{X}_2^{(0,1)} \rightarrow \bar{A} \cdot X_1^{(0,1)} = C \cdot (\bar{A} \vee \bar{C}) \cdot (B \vee C) \rightarrow \bar{A} \cdot A = \bar{A} \cdot C \rightarrow 0 = = (\bar{A} \cdot C \vee \bar{A} \cdot \bar{C}) \rightarrow 0 = \bar{A} \rightarrow 0 = A \vee 0 = A;$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f_{2,1}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) &= B \cdot \overline{X_2^{(0,1)}} \rightarrow \overline{A} \cdot (X_1^{(0,1)} \vee X_2^{(0,1)}) = \overline{B} \vee X_2^{(0,1)} \vee \overline{A} \cdot X_1^{(0,1)} \vee \overline{A} \cdot X_2^{(0,1)} = \\ &= \overline{B} \vee X_2^{(0,1)} \vee \overline{A} \cdot X_1^{(0,1)} = \overline{B} \vee A \cdot C \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \wedge A = A \cdot C \vee \overline{B}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad f_{2,2}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) &= A \cdot X_2^{(0,1)} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X_1^{(0,1)}} = A \cdot (A \cdot C \vee \overline{B} \cdot \overline{C}) \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{A} = A \cdot C \vee \\ &\vee A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot C \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee A \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot C \vee \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee \\ &\vee A \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot C \vee \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot C \vee \overline{B}. \end{aligned}$$

$$\text{Gavome, jog } f_{1,1}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) = f_{1,2}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) = A,$$

$$f_{2,1}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) = f_{2,2}(X_1^{(0,1)}, X_2^{(0,1)}) = A \vee \overline{B}.$$

Tai reiškia, jog **dalinis sprendinys** $X_1^{(0,0)}=A, X_2^{(0,0)}=A \cdot C \vee \overline{B} \cdot \overline{C}$ surastas teisingai.

12.3. Kai $X_1=X_1^{(1,0)}=\overline{B} \cdot \overline{C}, X_2=X_2^{(1,0)}=A \cdot B \vee \overline{C}$, tai:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_{1,1}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) &= A \cdot X_1^{(1,0)} \vee B \cdot \overline{X_1^{(1,0)}} \cdot X_2^{(1,0)} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee B \cdot (B \vee C) \cdot (A \cdot B \vee \overline{C}) = \\ &= A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee A \cdot B \vee B \cdot \overline{C} = A \cdot B \vee A \cdot B \cdot \overline{C} \vee A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee B \cdot \overline{C} = A \cdot B \vee A \cdot \overline{C} \vee B \cdot \overline{C} \vee \\ &\vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee B \cdot \overline{C} = A \cdot B \vee \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} = A \cdot B \vee \overline{C}; \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad f_{1,2}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) = C \cdot \overline{X_2^{(1,0)}} \rightarrow \overline{A} \cdot X_1^{(1,0)} = \overline{C} \vee A \cdot B \vee \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = A \cdot B \vee \overline{C};$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f_{2,1}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) &= B \cdot \overline{X_2^{(1,0)}} \rightarrow \overline{A} \cdot (X_1^{(1,0)} \vee X_2^{(1,0)}) = \overline{B} \vee X_2^{(1,0)} \vee \overline{A} \cdot X_1^{(1,0)} \vee \overline{A} \cdot X_2^{(1,0)} = \\ &= \overline{B} \vee X_2^{(1,0)} \vee \overline{A} \cdot X_1^{(1,0)} = \overline{B} \vee A \cdot B \vee \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{B} \vee A \cdot \overline{B} \vee A \cdot B \vee \overline{C} = A \vee \overline{B} \vee \overline{C}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad f_{2,2}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) &= A \cdot X_2^{(1,0)} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X_1^{(1,0)}} = A \cdot (A \cdot B \vee \overline{C}) \vee \overline{B} \cdot C \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee \\ &\vee A \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C = A \cdot B \vee A \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C = A \cdot B \vee \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C = A \cdot B \vee \overline{C} \vee \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C = A \cdot B \vee \overline{C} \vee \\ &\vee \overline{B} = A \cdot B \vee \overline{C} \vee \overline{B} \vee A \cdot \overline{B} = A \vee \overline{B} \vee \overline{C}; \end{aligned}$$

Gavome, jog

$$f_{1,1}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) = f_{1,2}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) = A \vee \overline{B} \vee \overline{C},$$

$$f_{2,1}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) = f_{2,2}(X_1^{(1,0)}, X_2^{(1,0)}) = A \vee \overline{B} \vee \overline{C}.$$

Tai reiškia, jog **dalinis sprendinys** $X_1^{(1,0)}=\overline{B} \cdot \overline{C}, X_2^{(1,0)}=A \cdot B \vee \overline{C}$ surastas teisingai.

12.4. Kai $X_1=X_1^{(1,1)}=A$ ir $X_2=X_2^{(1,1)}=A$, tai:

$$\text{a)} \quad f_{1,1}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) = A \cdot X_1^{(1,1)} \vee B \cdot \overline{X_1^{(1,1)}} \cdot X_2^{(1,1)} = (A \wedge A) \vee B \cdot \overline{A} \cdot A = A;$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f_{1,2}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) &= C \cdot \overline{X_2^{(1,1)}} \rightarrow \overline{A} \cdot X_1^{(1,1)} = C \cdot \overline{A} \rightarrow (\overline{A} \wedge A) = C \cdot \overline{A} \rightarrow 0 = \overline{C} \vee A \vee 0 = \\ &= A \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \vee A = A \vee A \cdot C \vee A \cdot \overline{C} = A; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f_{2,1}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) &= B \cdot \overline{X_2^{(1,1)}} \rightarrow \overline{A} \cdot (X_1^{(1,1)} \vee X_2^{(1,1)}) = B \cdot \overline{A} \rightarrow \overline{A} \cdot (A \vee A) = B \cdot \overline{A} \rightarrow 0 = \\ &= \overline{B} \vee A; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad f_{2,2}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) &= A \cdot X_2^{(1,1)} \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{X_1^{(1,1)}} = (A \wedge A) \vee \overline{B} \cdot C \cdot \overline{A} = A \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = A \vee \\ &\vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = A \vee \overline{A} \cdot \overline{B} = A \vee A \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} = A \vee \overline{B}. \end{aligned}$$

Gavome, jog

$$f_{1,1}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) = f_{1,2}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) = A,$$

$$f_{2,1}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) = f_{2,2}(X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}) = A \vee \overline{B}.$$

Tai reiškia, jog **dalinis sprendinys** $X_1^{(1,1)}=A, X_2^{(1,1)}=A$ surastas teisingai.

Bendroji išvada: **lygčių sistema išspręsta teisingai**. Ši sistema turi 4 dalinius sprendinius, kurie išplaukia iš bendrojo sprendinio $X_1^* = \overline{B} \cdot \overline{C} \vee Z_1 \cdot A, X_2^* = \overline{C}(\overline{B} \vee \overline{Z_1} \vee Z_2) \vee Z_1 \cdot A(\overline{B} \vee C) \vee \vee Z_2 \cdot A(B \vee Z_1)$.

Sprendžiant klasikinės teiginių algebros antrojo tipo uždavinius, ne visuomet būtina naudotis aukščiau aprašytu loginių lygčių ir jų sistemų bendrojo sprendinio radimo algoritmu.

Kai kuriais atvejais loginės lygties sprendinį galima rasti žymiai paprasčiau.

Pavyzdžiui, loginė lygtis $AX_1\overline{X_2}X_3=1$ gali turėti tik vieną sprendinį $X_1=1, X_2=0, X_3=1$, kuris egzistuoja tada ir tik tada, kada $A=1$. Analogiškai gauname, jog

lygtis $B \vee X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3 = 0$ gali turėti tik vieną sprendinį $X_1=0, X_2=1, X_3=0$, kuris egzistuoja tada ir tik tada, kai $B=0$.

Todėl, **sprendžiant teiginių algebros lygčių sistemas, ne būtina iškart visas lygtis suvesti į vieną sudėtingą lygtį ir po to naudotis bendrojo sprendinio radimo algoritmu. Dažnai, analizuojant turimas lygtis, dalies kintamųjų reikšmes pavyksta nustatyti, sprendžiant atskiras paprastas lygtis, o po to, gautus sprendinius įstačius į likusias lygtis, galima spręsti jau žymiai paprastesnę lygčių sistemą.** Tik tais atvejais, kai nepavyksta rasti visų sprendinių paprastesniais būdais, naudojamosi „sunkiąja artilerija“ – loginė lygtis ar jų sistema sprendžiama, naudojantis bendrojo sprendinio radimo algoritmu.

1.16.1.2.4. Klasikinės teiginių algebros lygčių bei jų sistemų sprendimo algoritmų taikymai

Loginių lygčių bei jų sistemų sprendimo metodą galima taikyti **stipriausios išvados, išplaukiančios iš duotųjų prielaidų, radimo algoritmo sukonstravimui ir pagrindimui.**

Teiginį A vadinsime **nesilpnesniu** už teiginį B , jei implikacija $A \rightarrow B$ – teisingas teiginys.

Jei tuo pačiu metu atvirkštinė implikacija $B \rightarrow A$ nėra teisingas teiginys, tai teiginį A vadinsime **griežtai stipresniu** (arba, tiesiog, **stipresniu**) už teiginį B .

Kai yra teisingos abi implikacijos $A \rightarrow B$ ir $B \rightarrow A$, tai teiginius A ir B vadinsime **logiškai ekvivalenčiais** (arba, tiesiog, **ekvivalenčiais**), ką žymėsime $A \leftrightarrow B$, arba $A \Leftrightarrow B$.

Šias sąvokas galima taikyti ir sudėtingesniems teiginiams, t. y. klasikinės teiginių algebros funkcijoms.

Funkciją $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vadinsime **ne silpnesne** už funkciją $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, jei visoms galimoms tų funkcijų argumentų (elementariųjų teiginių $X_1, X_2, \dots, X_n$) reikšmėms sudėtingas teiginys $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bus teisingas, t. y., jei bus teisinga lygybė $\forall X_1 \dots \forall X_n [F_1(X_1, \dots, X_n) \rightarrow F_2(X_1, \dots, X_n)] = 1$.

Funkciją $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, ne silpnesnę už funkciją $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, vadinsime **stipresne** už funkciją $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, jei egzistuoja bent vienas argumentų $X_1, X_2, \dots, X_n$ reikšmių rinkinys, kad atvirkštinė implikacija $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nėra teisingas teiginys.

Kai funkcija $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ yra nesilpnesnė už $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, o ši – nesilpnesnė už $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tai tokias funkcijas vadinsime **funkcionaliai ekvivalenčiomis**. Šiuo atveju sudėtingi teiginiai $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ir $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, galėdami skirtis vienas nuo kito savo struktūra ar savo semantika (prasme), sutaps savo loginėmis reikšmėmis (bus, esant toms pačioms argumentų $X_1, X_2, \dots, X_n$ reikšmėms, kartu arba abu teisingi arba abu neteisingi).

Funkcijas $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ir $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vadinsime **logiškai nepalyginamomis** (arba, tiesiog, **nepalyginamomis**), kai egzistuoja dvi grupės tų funkcijų argumentų reikšmių, kurias įstatę, gautume, jog vienu atveju $F_1(X_1^*, \dots, X_n^*)$ griežtai stipresnis teiginys už teiginį $F_2(X_1^*, \dots, X_n^*)$, kitais atvejais, – kad teiginys $F_2(X_1^{**}, \dots, X_n^{**})$ griežtai stipresnis už teiginį $F_1(X_1^{**}, \dots, X_n^{**})$. Kitaip tariant, funkcijas $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ir $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vadinsime nepalyginamomis funkcijomis, kai sudėtingas teiginys $\{\exists x_1 \dots \exists x_n [F_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \overline{F_2}(x_1, \dots, x_n)] \wedge \exists x_1 \dots \exists x_n [\overline{F_1}(x_1, \dots, x_n) \wedge F_2(x_1, \dots, x_n)]\}$ yra teisingas.

Kai šis teiginys nėra teisingas, tai funkcijos $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ yra **palyginamos**. Tuomet jos gali būti arba funkcionaliai ekvivalenčios arba viena iš jų stipresnė už kitą.

Pailiustruosiu įvestas sąvokas, lygindamas įvairias klasikinės teiginių algebros dviejų argumentų funkcijas $F(X_1, X_0)$: $F_0(X_1, X_0) \equiv 0$; $F_1(X_1, X_0) = X_1 \circ X_0 = \overline{X_1} \wedge \overline{X_0}$; $F_2(X_1, X_0) = X_0 \Delta X_1 = \overline{X_0} \rightarrow X_1 = \overline{X_1} \wedge X_0$; $F_3(X_1, X_0) = (\overline{X_1} \wedge \overline{X_0}) \vee (\overline{X_1} \wedge X_0) = \overline{X_1}$; $F_4(X_1, X_0) = X_1 \Delta X_0 = \overline{X_1} \rightarrow X_0 = X_1 \overline{X_0}$; $F_5(X_1, X_0) = (\overline{X_1} \wedge \overline{X_0}) \vee (X_1 \wedge \overline{X_0}) = \overline{X_0}$; $F_6(X_1, X_0) = X_1 \oplus X_0 = (\overline{X_1} \wedge X_0) \vee (X_1 \wedge \overline{X_0})$; $F_7(X_1, X_0) = X_1 / X_0 = \overline{X_1} \vee \overline{X_0} = \overline{X_1 \wedge X_0}$; $F_8(X_1, X_0) = X_1 \wedge X_0$; $F_9(X_1, X_0) = X_1 \leftrightarrow X_0 = (\overline{X_1} \wedge \overline{X_0}) \vee (X_1 \wedge X_0)$; $F_{10}(X_1, X_0) = (\overline{X_1} \wedge X_0) \vee (X_1 \wedge \overline{X_0}) = X_0$; $F_{11}(X_1, X_0) = X_1 \rightarrow X_0 = \overline{X_1} \vee X_0$; $F_{12}(X_1, X_0) = (X_1 \wedge \overline{X_0}) \vee (X_1 \wedge X_0) = X_1$; $F_{13}(X_1, X_0) = X_0 \rightarrow X_1 = X_1 \vee \overline{X_0}$; $F_{14}(X_1, X_0) = X_1 \vee X_0$; $F_{15}(X_1, X_0) \equiv 1$.

Šių funkcijų reikšmės pavaizduotos lentelėje (žiūr. 316 lentelę).

316. lentelė

X_1	X_0	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Iš 316 lentelės matyti, kad tarp šių 16 funkcijų nėra funkcionaliai ekvivalenčių, t. y., visos šios funkcijos yra skirtingos.

Nesunku įsitikinti, kad, pavyzdžiui, konjunkcija $F_8 = X_1 \wedge X_0$ yra griežtai stipresnė už disjunkciją $F_{14}(X_1, X_0) = X_1 \vee X_0$, o taip pat funkcija $F_1(X_1, X_0) = X_1 \circ X_0$ – už $F_7(X_1, X_0) = X_1 / X_0$. Funkcija F_1 yra ekvivalenti funkcijos F_{14} neigimui (ir atvirkščiai: F_{14} yra ekvivalenti funkcijos F_1 neigimui), o funkcija F_7 yra ekvivalenti funkcijos F_8 neigimui.

Funkcija F_1 yra nepalyginama su F_8 , o taip pat ir su F_{14} . Su funkcijomis F_8 ir F_{14} nepalyginama ir funkcija F_7 .

Funkcija F_0 yra palyginama su kiekviena likusių 15 funkcijų ir yra griežtai stipresnė už kiekvieną iš jų. Kitaip tariant, F_0 yra pati stipriausi funkcija.

Palyginama su kiekviena funkcija yra ir F_{15} . Ji yra pati silpniausioji tarp duotųjų 16 loginių funkcijų, nes kiekviena iš likusiųjų penkiolikos funkcijų yra griežtai stipresnė už F_{15} .

Nesunku įrodyti **teoremą, kad, loginės funkcijos reikšmių lentelėje pakeitę vienetuką nuliu, visuomet gausime naują funkciją, griežtai stipresnę už pirmąją, o pakeitę nulį vienetu – naują funkciją, griežtai silpnesnę už pirmąją (ir tuo labiau – už antrąją).**

Iš stipresnės funkcijos teisingumo išplaukia funkcijos, silpnesnės už tą funkciją, teisingumas, todėl, darant išvadą iš prielaidų, **stengiamasi gauti pačią stipriausiąją išvadą**, nes tuomet, keičiant gautos pačios stipriausios išvados reikšmių lentelėje esančius nulius (jei tokių yra) į vienetukus, automatiškai galima gauti visas kitas (silpnesnes) išvadas, išplaukiančias iš duotųjų prielaidų.

Tarkime, jog mums duotos **prielaidos** (teiginiai, apie kuriuos mes žinome, jog jie teisingi, ar bent jau laikome juos teisingais) $P_1, P_2, \dots, P_n$, ir mes norime rasti iš tų prielaidų išplaukiančią pačią stipriausią išvadą – teiginį, kurį pažymime X .

Kai mes, ieškodami išvados, išplaukiančios iš prielaidų $P_1, P_2, \dots, P_n$, kurios visos šiuo metu yra teisingi teiginiai, samprotaujame teisingai (t. y., nepažeisdami logikos dėsnių) ir gauname išvadą X , tai teiginys $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow X$ turėtų būti teisingas, o tai reiškia, jog mūsų ieškomoji išvada X turėtų tenkinti loginę lygtį $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow X = 1$.

Perverdami šią lygtį į kanoninę formą, gauname $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \bar{X} = 0$, iš kur išplaukia, jog šiuo atveju $\gamma_0 = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$, ir $\gamma_1 = 0$, t. y., kad sprendinys X visada egzistuoja ir yra lygus $X^* = \gamma_0 \vee Z \bar{\gamma}_1 = (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \vee Z$.

Kai $Z=1$, tai gauname $X^* = X^{(1)} = 1$, t. y. pačią silpniausią išvadą, reiškiančią visada teisingą teiginį (kokią nors absoliučią tiesą, kuri, vadovaujantis materialiaja implikacija, išplaukia iš bet kurio teiginio, nepriklausomai nuo jo stiprumo bei teisingumo, taip pat ir nuo to teiginio semantinio turinio).

Norėdami gauti pačią stipriausią išvadą, mes priimame, jog $Z=0$. Tuomet $X^* = X^{(0)} = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$, t. y. **pati stipriausioji išvada, išplaukianti iš duotųjų prielaidų, yra lygi tų prielaidų konjunkcijai.**

Pavyzdžiui iš prielaidų $P_1 = A \rightarrow B$ ir $P_2 = B \rightarrow C$ išplaukia ne tik išvada, jog $A \rightarrow C$, kurią gauname, naudodamiesi silogizmo taisykle, reiškiančią implikacijos tranzityvumą,* bet ir šiek tiek stipresnė išvada $X^{(0)} = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) = (\bar{A} \vee B) \vee (\bar{B} \vee C) = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge C) \vee (B \wedge C) = (\bar{A} \vee B) \vee [C \wedge (\bar{A} \vee B)] = (A \vee B) \rightarrow [C \wedge (A \rightarrow B)]$.

Kad išvada $X^{(0)}$ yra stipresnė už išvadą $A \rightarrow C$, nesunku įsitikinti, sudarius šių funkcijų reikšmių lentelę (žiūr. 317 lentelę).

Kaip matyti iš lentelės, iš funkcijos $X^{(0)}$ galima gauti silpnesnę funkciją $A \rightarrow C$, pakeičiant eilutėse, kur $A=0, B=1, C=0$ ir $A=1, B=0, C=1$, nulius į vienetukus.

317. lentelė

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$X^{(0)} = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	$A \rightarrow C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Iš tos pačios lentelės matyti, jog iš prielaidų $P_1 = A \rightarrow C$ ir $P_2 = B \rightarrow C$ išplaukia ir išvada $(A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$ bei išvada $(\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$, kurios yra silpnesnės už $X^{(0)} = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$, tačiau stipresnės už $A \rightarrow C$ ir nėra palyginamos viena su kita. Žinoma, iš jau minėtų prielaidų galima gauti išvadų, silpnesnių net už išvadą $A \rightarrow C$. Tai būtų išvados $\bar{A} \vee B \vee C = A \rightarrow (B \vee C)$ ir $\bar{A} \vee \bar{B} \vee C = (A \wedge B) \rightarrow C$. Pati silpniausia „išvada“, „išplaukianti“ iš minėtų (ir bet kokių kitų) prielaidų, būtų funkcija, tapachiai lygi vienetui.

Žodžiai „išvada“ ir „išplaukianti“ čia paimti į kabutes todėl, kad toks „išplaukimas“ dėl materialinės implikacijos savybės, paminėtos 1.16.1. skyrelio pradžioje, yra grynai formalus, nepriklausantis nei nuo teiginių A, B, C prasmės, nei nuo semantinių ryšių tarp jų buvimo ar nebuvimo.

Ieškant pačios stipriausios išvados, išplaukiančios iš duotųjų prielaidų, kartais tenka tenkinti papildomus reikalavimus – apribojimus, t. y. tenka ieškoti pačios stipriausios išvados tarp tų išvadų, kurios tenkina minėtuosius reikalavimus.

* Silogizmo taisyklę $\frac{A \rightarrow A, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$, prisiminus, jog klasikinėje logikoje $A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$, $B \rightarrow C \Leftrightarrow \bar{B} \vee C$ ir $A \rightarrow C \Leftrightarrow \bar{A} \vee C$, galima laikyti šio skyrelio pabaigoje aprašytos atkirtos taisyklės (AT) daliniu atveju.

Pavyzdžiui, mūsų ką tik nagrinėtuju atveju galėjo būti pareikalauta, jog gautosios išvados formulėje nebūtų teiginio B, t. y., kad mes rastume tarp iš duotųjų prielaidų $A \rightarrow C$ ir $B \rightarrow C$ išplaukiančių išvadų pačią stipriausią iš tų, kuri nustato tiesioginį santykį tarp teiginių A ir C teisingumo, eliminuojant teiginį B.

Tai mes galėtume padaryti, pasinaudodami 317-ąja lentele, t. y. išrašydami pačios stipriausios išvados $X^{(0)} = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ tobulą DNF (TDNF) ir papildydami ją **minimaliu** vieneto konstituentų skaičiumi (t. y. pakeisdami minimalų skaičių nulių į vienetus) taip, kad „suklijavus“ vieneto konstituentes, būtų galima eliminuoti teiginį B (t. y. pakeisti jį vieneto funkcijos $X^{(0)}$ TDNF vieneto konstituentėse).

Pačios stipriausios išvados $X^{(0)} = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ TDNF yra funkcija (žiūr. 317-ąją lentelę) $X^{(0)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \vee A \cdot B \cdot C$. Nesunku pastebėti, kad, prijungę dvi vieneto konstituentes $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ ir $A \cdot \overline{B} \cdot C$, mes gautume funkciją $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \vee A \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee A \cdot \overline{B} \cdot C = (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) \vee (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot C \vee A \cdot \overline{B} \cdot C) = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} \vee B) \vee \overline{A} \cdot C \wedge (\overline{B} \vee B) \vee A \cdot C \cdot (B \vee \overline{B}) = \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot C \vee A \cdot C = (\overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot C) \vee (A \cdot C \vee A \cdot C) = A \cdot (\overline{C} \vee C) \vee C \cdot (\overline{A} \vee A) = \overline{A} \vee C = A \rightarrow C$.

Kadangi papildomos vieneto konstituentės yra pridedamos prie stipriausios išvados $X^{(0)}$ TDNF tik tam, kad, išskeldami už skliaustų vienodus daugiklius, skliaustų viduje gautume reiškinius $B \vee \overline{B} = 1$, tai tą patį rezultatą būtume gavę $X^{(0)}$ DNF pakeisdami teiginius B bei jų neiginius vienetukais, t. y. iš $X^{(0)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \vee A \cdot B \cdot C$ gaudami $F = (\overline{A} \wedge 1 \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge 1 \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge 1 \wedge C) \vee (A \wedge 1 \wedge C) = \overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot C \vee \overline{A} \cdot C \vee A \cdot C = \overline{A} \vee C$.

Iš čia išplaukia **stipriausios išvados, neturinčios savo formulėje duotųjų teiginių, gavimo algoritmas:**

1) sudarome duotųjų prielaidų konjunkciją $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$, suteikdami jai disjunkcinę normaliąją formą (DNF) ir atlikdami joje visus galimus supaprastinamus („suklijavimus“, absorbcijas ir pan.*);

2) pakeičiame gautojoje DNF eliminuojamuosius elementarius teiginius bei jų neiginius vienetais ir gautąją DNF supaprastiname.

Šio algoritmo taikymą pailiustruosiu pavyzdžiais.

Pirmasis pavyzdys.

Tarkime, jog mums duotos prielaidos $P_1 = A \rightarrow C$, $P_2 = B \leftrightarrow \overline{D}$, $P_3 = \overline{C} \vee D$ ir reikia surasti pačią stipriausią išvadą, išplaukiančią iš tų prielaidų ir neturinčią savo sudėtyje teiginių C ir D (bei jų neiginių).

Tuo tikslu surandame pačią stipriausią išvadą $X^{(0)} = (A \rightarrow C) \wedge (B \leftrightarrow \overline{D}) \wedge (\overline{C} \vee D) = (\overline{A} \vee C) \wedge (B \cdot \overline{D} \vee \overline{B} \cdot D) \wedge (\overline{C} \vee D) = (\overline{A} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot D \vee C \cdot D) \wedge (B \cdot \overline{D} \vee \overline{B} \cdot D) = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot B \cdot \overline{D} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot D \vee \overline{A} \cdot D \cdot \overline{B} \vee C \cdot D \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$ ir pakeičiame joje teiginius C ir D (bei jų neiginius) vienetukais. Gauname $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot 1 \cdot 1 \vee \overline{A} \cdot B \cdot 1 \cdot 1 \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot 1 \cdot 1 \vee A \cdot \overline{B} \cdot 1 \cdot 1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot B \vee A \cdot \overline{B} \vee A \cdot B = \overline{A} \vee B = A \rightarrow B = B \rightarrow \overline{A}$, reiškiančią, jog, galiojant duotoms prielaidoms, teiginiai A ir B surišti santykiu: iš vieno jų teisingumo išplaukia kito neteisingumas.

Antrasis pavyzdys.

Tarkime, jog mums reikia išspręsti pirmojo pavyzdžio uždavinį tuo atveju, kai pasikeičia trečioji prielaida: vietoj $\overline{C} \vee D = 1$ duota, jog $C \vee D = 1$. Analogiškai surandame $X^{(0)} = (A \rightarrow C) \wedge$

* Žiūr. 1.16.1.2.6. skyrelį pradžią.

$\wedge (B \leftrightarrow \bar{D}) \wedge (C \vee D) = C \cdot B \cdot \bar{D} \vee C \cdot \bar{B} \cdot D \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D$, iš kur $F(A, B) = B \vee \bar{B} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} = 1$. Gautas rezultatas rodo, jog, esant duotoms prielaidoms, teiginiai A ir B yra nepriklausomi.

Trečiasis pavyzdys

Tarkime, jog esamą situaciją aprašo teiginiai: $A \rightarrow C = 1$, $B \leftrightarrow \bar{D} = 1$ ir $\bar{C} \vee D = 1$.

Tarkime taip pat, jog mums duotos loginės funkcijos $F_1 \equiv A \vee C$, $F_2 \equiv B \rightarrow D$ ir reikia nustatyti tarp tų funkcijų esamoje situacijoje esantį sąryšį.

Šį uždavinį formaliai galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} &A \rightarrow C \\ &B \leftrightarrow \bar{D} \\ &\bar{C} \vee D \\ &F_1 \equiv A \vee C \\ &F_2 \equiv B \rightarrow D \\ &\therefore f(F_1, F_2) = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pradžioje surandame } X^{(0)} &= (A \rightarrow C) \cdot (B \leftrightarrow \bar{D}) \cdot (\bar{C} \vee D) \cdot [F_1 \leftrightarrow (A \vee C)] \cdot [F_2 \leftrightarrow (B \rightarrow D)] = \\ &= (\bar{A} \vee C) \cdot (\bar{C} \vee D) \cdot (B \cdot \bar{D} \vee \bar{B} \cdot D) \cdot [\bar{F}_1(A \vee C) \vee F_1(A \vee C)] \cdot [\bar{F}_2(B \rightarrow D) \vee F_2(B \rightarrow D)] = (\bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot D \vee \\ &\vee C \cdot D) \cdot (B \cdot \bar{D} \vee \bar{B} \cdot D) \cdot (\bar{F}_1 \cdot \bar{A} \cdot \bar{C} \vee F_1 \cdot A \vee F_1 \cdot C) \cdot (\bar{F}_2 \cdot B \cdot \bar{D} \vee F_2 \cdot B \vee F_2 \cdot D) = \bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2 \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} \vee \\ &\vee \bar{F}_1 \cdot F_2 \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D \vee F_1 \cdot F_2 \cdot C \cdot \bar{B} \cdot D. \end{aligned}$$

$$\text{Po to surandame } f(F_1, F_2) = \bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2 \vee \bar{F}_1 \cdot F_2 \vee F_1 \cdot F_2 = \bar{F}_1 \vee F_2 = F_1 \rightarrow F_2.$$

Tai reiškia, jog esant situacijai, kurią aprašo prielaidos, iš funkcijos F_1 teisingumo išplaukia funkcijos F_2 teisingumas. Nesunku įsitikinti, kad pačios funkcijos $F_1 = A \vee C$ ir $F_2 = B \rightarrow D$ yra nepriklausomos ir kad ryšys tarp tų funkcijų, kurį aprašo implikacija $F_1 \rightarrow F_2 = 1$, atsiranda todėl, jog situacinis modelis suriša tų funkcijų argumentus. Iš tikrųjų, stipriausioji išvada, išplaukianti iš šių funkcijų yra $[(F_1 = A \vee C) \wedge (F_2 = B \rightarrow D)] = [(F_1(A \vee C) \vee \bar{F}_1 \cdot \bar{A} \cdot \bar{C}) \wedge (F_2(\bar{B} \vee D) \vee \bar{F}_2 \cdot B \cdot \bar{D})] = (A \cdot F_1 \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{F}_1) \wedge (\bar{B} \cdot F_2 \vee D \cdot F_2 \vee B \cdot \bar{D} \cdot \bar{F}_2) = F_1 F_2 (A \cdot \bar{B} \vee A \cdot D \vee \bar{B} \cdot C \vee C \cdot D) \vee \bar{F}_1 \bar{F}_2 (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot D) \vee \bar{F}_1 \bar{F}_2 (A \cdot B \cdot \bar{D} \vee B \cdot C \cdot \bar{D}) \vee \bar{F}_1 \cdot F_2 \cdot A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$. Ieškodami ryšio tarp F_1 ir F_2 , eliminuojame argumentus A, B, C ir D bei jų neiginius ir gauname silpnesnę išvadą $F_1 F_2 \vee \bar{F}_1 F_2 \vee F_1 \bar{F}_2 \vee \bar{F}_1 \bar{F}_2 = F_2 \vee \bar{F}_2 = 1$. Tai ir įrodo, jog pačios funkcijos F_1 ir F_2 yra nepriklausomos ir kad ryšys tarp jų atsiranda tik veikiant situacijai.

Ketvirtasis pavyzdys.

Tarkime, jog turime situaciją, kurią aprašo **situacinis modelis** $A \vee \bar{B} = 1$ ir $AC \oplus B = 1$, t. y. $(A \vee \bar{B}) \cdot (A \cdot C \oplus B) = 1$.

Tarkime, jog toje situacijoje asmuo, kurio **normatyvinis modelis** yra $(C \rightarrow A) \wedge (\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow \bar{C}) = 1$, o **motyvacinis modelis** yra $AC(C \rightarrow \bar{B}) = 1$, turi priimti sprendimą, ką jis turėtų daryti toje situacijoje, kad atliktų savo pareigas, kurias aprašo normatyvinis modelis, ir patenkintų savo asmeninius interesus, kuriuos išreiškia motyvacinis modelis.

Nesunku patikrinti, kad šie modeliai yra **suderinami** ir asmuo gali priimti sprendimą, atitinkantį esamą situaciją ir tenkinantį normatyvinio ir motyvacinio modelių reikalavimus.

Pavyzdžiui, to asmens motyvacinis modelis $AC(\bar{C} \vee \bar{B}) = 1$ (t. y. $AC\bar{B} = 1$, iš kurio išplaukia, jog asmuo norėtų, kad $A=1$, $C=1$, $B=0$) yra suderinamas su jo normatyviniu modeliu $(\bar{C} \vee A) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) = 1$ (iš kurio išplaukia, jog asmuo įvykdys savo pareigas, kai $A \vee \bar{C} = 1$). Tuo nesunku įsitikinti įstačius A, B ir C reikšmes, atitinkančias motyvacinio modelio realizavimo sąlygą, į normatyvinį modelį. Gauname, jog tuomet $A \vee \bar{C}$ būtinai bus lygus 1, t. y. asmens pareigos bus įvykdytos.

Nesunku įsitikinti, jog esamoje situacijoje, kurią aprašo situacinis modelis $(A \vee \bar{B}) \cdot [A \cdot C \cdot \bar{B} \vee (\bar{A} \vee \bar{C}) \cdot B] = 1$, t. y. $A \cdot C \cdot \bar{B} \vee A \cdot \bar{C} \cdot B = 1$, ir motyvacinis, ir normatyvinis modeliai gali būti realizuoti, nes situacinio ir motyvacinio modelio loginė sandauga, bei situacinio ir normatyvinio

modelio loginė sandauga nėra tapačiai lygios 0. nėra tapačiai lygi loginiam nuliui ir visų trijų modelių loginė sandauga.

Asmens galimus sprendinius, neprieštaraujančius jo pareigoms bei esamai situacijai ir tenkinančius jo interesus, kai asmuo sprendinius priima ne spontaniškai, ar veikiamas stiprių emocijų, o apgalvojęs ir pasvėręs savo galimybes, pareigas ir norus, galima interpretuoti kaip logines išvadas, išplaukiančias iš to asmens motyvacinio bei normatyvinio ir situacijos situacinio modelių.

$$\begin{aligned} \text{Rasime pačią stipriausią galimą loginę išvadą } X^{(0)} &= (A \vee \bar{B}) \cdot (A \cdot C \oplus B) \cdot (C \rightarrow A) \wedge \\ &\wedge (\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow \bar{C}) \cdot A \cdot C \cdot (C \rightarrow \bar{B}) = (A \vee \bar{B}) \cdot [A \cdot C \cdot \bar{B} \vee (\bar{A} \vee \bar{C}) \cdot B] \cdot (\bar{C} \vee A) \cdot (A \vee B \vee \bar{C}) \cdot A \cdot C \cdot (\bar{C} \vee \bar{B}) = \\ &= (A \cdot C \cdot \bar{B} \vee A \cdot \bar{C} \cdot B) \cdot A \cdot C \cdot \bar{B} = A \cdot C \cdot \bar{B}. \end{aligned}$$

Gavome, jog asmuo, priimantis sprendinį, turi siekti, kad teiginiai A ir C taptų teisingais, o teiginys B – neteisingas. Tuomet jis pasieks tai, kad bus realizuoti jo motyvacinis ir normatyvinis modeliai. Tai pasiekti įmanoma, nes, esant tokioms teiginių A, B ir C reikšmėms situacinio modelio reikšmė tampa lygi loginiam vienetui.

Kartais gali atsitikti taip, kad motyvacinis ir normatyvinis modeliai prieštarauja vienas kitam. Tuomet tų modelių loginė sandauga bus lygi 0. **Tokioje situacijoje asmuo turi apsispręsti, kas jam yra svarbiau: ar savo pareigų vykdymas, ar savo interesų tenkinimas.** Pirmuoju atveju jis privalėtų keisti savo motyvacinį modelį, pritaikydamas jį prie normatyvinio, antruoju – „užsimerkti“ ir „nematyti“ kai kurių normatyvinio modelio reikalavimų, tuo pačiu rizikuodamas būti nubaustas.

Kartais motyvacinis modelis gali prieštarauti situaciniam modeliui. Tuomet pareigūnas turi ištirti, ar jis pajėgus pakeisti situaciją taip, kad ji taptų jam palankesnė ir priešara išnyktų. Jeigu tokių pakeitimų jis padaryti negali, jis privalo pakeisti motyvacinį modelį, nes be pakeitimų toks modelis negali būti realizuotas.

Gerai sudaryti normatyviniai modeliai neturėtų prieštarauti situaciniams modeliams. Kai tokie atvejai pasitaiko, tai reiškia, jog yra arba kažkas netvarkoje valstybės įstatymuose, ar kituose normatyviniuose dokumentuose, pavyzdžiui, pareigybės pase (pareiginėje instrukcijoje), arba yra susiklosčiusi situacija, kuri prieštarauja nustatyta tvarkai. Tuomet arba reikia keisti situaciją, arba normatyvinius dokumentus.

Situacijos, kuriose tenka ieškoti sprendimų, retai kada gali būti aprašytos naudojantis tik matematinės logikos kalba. Dažniausiai tam prireikia ir kiekybinės matematikos, ir ekspertų nuomonių. Mišraus situacinio modelio sudarymo ir sprendimo priėmimo tokioje situacijoje pavyzdys pateiktas 1.16.1.3.6. skyrelyje, o ekspertų nuomonių taikymo pavyzdys – 1.16.3.4. skyrelyje.

Čia reikėtų paminėti, jog dauguma žmonių priimdami svarbius sprendimus, naudojami ne čia aprašomu loginio išvedimo iš prielaidų, sudarančių jų normatyvinius ir motyvacinius modelius bei esamos situacijos modelį būdu, o analizuodami intuityviai į galvą ateinančius galimus iškilusių problemų sprendimo variantus, pasverdami argumentus „už“ ir „prieš“ ir pasirinkdami tą variantą, kuris sprendimą priimančiam asmeniui atrodo priimtinesnis. Toks sprendimo konstravimo ir priėmimo būdas yra lankstesnis ir lengviau pritaikomas negu loginio išvedimo būdas, nes jis tinka ir nepakankamai apibrėžtose situacijose.

Tokį – antrąjį praktiškąjį – sprendimų radimo ir priėmimo būdą taip pat galima matematizuoti ir kompiuterizuoti. Taip bus parodyta šios mokymo priemonės 1.16.3.4 skyriuje.

Abu čia paminėti sprendimo sprendimų paieškos ir radimo būdai gali vienas kitą papildyti, nes ir nepilnai apibrėžtose situacijose naudinga pabandyti matematiškai aprašyti ir matematine kalba išreikšti tas prielaidas, kurios galėtų būti situacinio, normatyvinio ir motyvacinio modelių sudėtinėmis dalimis. Nors nepakankamai apibrėžtose situacijose šie modeliai nebus pakankamai pilni ir iš jų nebus įmanoma loginio išvedimo būdu gauti galimų sprendimų variantus, tačiau šių nepilnų ir daugumoje atvejų dar tik hipotetinių modelių analizė gali reikšmingai padėti, ieškant antrojo sprendimų priėmimo būdo taikymui reikalingų galimų sprendimo variantų, juos formuluojant ir vertinant, įnešant į pradžioje gana miglotą situaciją daugiau aiškumo, atsirenkant tarp intuityviai kylančių sprendimo idėjų tas, kurios galėtų būti perspektyvesnės.

Loginių lygčių bei jų sistemų sprendimo metodą galima taikyti ir tų prielaidų, kurios mums nėra žinomos, paieškai.

Pavyzdžiui, ne visada žmonės būna suinteresuoti atskleisti tikruosius savo veiklos motyvus, ir jų motyvaciniai modeliai ne visiems gali būti žinomi. Kartais žmogus ir pats ne pilnai suvokia savo veiklos motyvus. Tokiais atvejais, **žinant asmens normatyvinį modelį ir jo sprendinius, priimamus įvairiose situacijose, kurių modelius sudaryti mes sugebame, galima surasti ar bent apytikriai nustatyti jo motyvacinį modelį.**

Ieškant mums nežinomos prielaidos, kuria buvo pasinaudota, priimant sprendinį, **tikslinga ieškoti pačios silpniausios prielaidos**, kurios pakaktų žinomo sprendinio gavimui, nes iš tos – pačios silpniausios – prielaidos, keičiant jos reikšmių lentelėje vienetukus į nulių, galima gauti visas kitas stipresnes prielaidas, kurių tuo labiau pakaks minėtojo sprendinio gavimui.

Tarkime, jog mums žinomos prielaidos $P_1, P_2, \dots, P_k$, o taip pat žinomas priimtas sprendinys S ir reikia rasti nežinomą prielaidą, kurią pažymėsime X .

Tuomet gauname loginę lygtį $P_1 \wedge \dots \wedge P_k \wedge X \rightarrow S = 1$, kurią pertvarę į kanoninę formą gausime lygtį $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_k \wedge X \wedge \bar{S} = 0$. Iš jos išplaukia, jog $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = P_1 P_2 \dots P_k \bar{S}$, o tai reiškia, jog sprendinys $X^* = \gamma_0 \vee Z \cdot \bar{\gamma}_1 = Z(\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_k \vee S)$ visada egzistuoja ir yra lygus arba $X^{(0)} = 0$ arba $X^{(1)} = S \vee \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_k$.

Kadangi mes ieškome silpniausios prielaidos, tai iš dviejų galimų sprendinių pasirenkame $X^* = X^{(1)} = S \vee \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee \dots \vee \bar{P}_k$, t. y. **silpniausioji ieškomoji prielaida yra lygi disjunkcijai, kurią sudaro išvada ir visų kitų prielaidų neiginiai.**

Keisdami prielaidos $X^{(1)}$ reikšmių lentelėje vienetukus į nuliukus, mes galime gauti visas kitas (stipresnes) prielaidas, kurių tuo labiau pakaktų (kartu su prielaidomis $P_1, P_2, \dots, P_k$) išvados S gavimui:

Pailiustruosiu šį algoritmą konkrečiu pavyzdžiu, pasinaudodamas ką tik nagrinėtoju ketvirtuoju išvados gavimo pavyzdžiu.

Tarkime, jog situacijoje, kurią charakterizuoja situacinis modelis $(A \vee \bar{B}) \cdot (A \cdot C \oplus B) = 1$, asmuo, kurio normatyvinis modelis yra $(C \rightarrow A) \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow \bar{C}) = 1$, priėmė sprendinį $S = A \cdot C \cdot \bar{B}$, reiškiantį, jog jis sieks, kad A ir C taptų lygūs vienetui, o B – nuliui.

Surasime minimalų (patį silpniausią iš galimų) jo motyvacinį modelį.

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= S \vee \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 = A \cdot C \cdot \bar{B} \vee \overline{(A \vee \bar{B}) \cdot (A \cdot C \oplus B)} \vee \overline{(C \rightarrow A) \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow \bar{C})} = A \cdot C \cdot \bar{B} \vee \\ &\vee \overline{(A \vee \bar{B})} \vee \overline{(A \cdot C \oplus B)} \vee \overline{(C \rightarrow A)} \vee \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow \bar{C})} = A \cdot C \cdot \bar{B} \vee \bar{A} \cdot B \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \vee \bar{C} \cdot \bar{B} \vee A \cdot C \cdot B \vee \bar{A} \cdot C \vee \\ &\vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = A \cdot C \vee \bar{A} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot B \cdot C = C \vee \bar{A} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} = C \vee \bar{B} \cdot C \vee \bar{A} \vee \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C. \end{aligned}$$

Gavome, jog sprendinio $S = A \cdot C \cdot \bar{B}$ priėmimui, esant duotajai situacijai ir duotajam normatyviniam modeliui, pakaktų labai silpno motyvacinio modelio $X^{(1)} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C = AB \rightarrow C$, t. y. tokios trijų argumentų A, B, C loginės funkcijos, kurios reikšmių lentelė turėtų nulį tik viename taške, kai $A=1, B=1, C=0$, o visuose kituose septyniuose taškuose ta funkcija būtų lygi 1. Tai žymiai silpnesnis motyvacinis modelis negu tas, kuris buvo duotas vienu puslapiu prieš tai minėtajame ketvirtajame pavyzdyje, t. y. negu trijų argumentų loginė funkcija $AC(C \rightarrow \bar{B}) = AC(\bar{C} \vee \bar{B}) = AC\bar{B}$, kurios reikšmių lentelė turi tik vieną vienetuką taške $A=1, B=0, C=1$, o visuose likusiuose septyniuose taškuose (tame tarpe ir jau minėtame taške $A=1, B=1, C=0$) turi nulių.

Keisdami funkcijos $X^{(1)} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$ reikšmių lentelėje esančius septynis vienetukus į nulių, gausime $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7 = 128$ skirtingas logines funkcijas (įskaitant ir funkciją $X^{(1)} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$ bei visas kitas, stipresnes už ją, funkcijas, tame tarpe ir funkciją $AC(C \rightarrow \bar{B})$, ir funkciją, tapachiai lygią nuliui), kurios galėtų būti asmens, priimančio sprendinį esamoje situacijoje, motyvacinio modeliu.

Konkretus pavyzdys, kaip realioje situacijoje nustatomi galimi motyvaciniai modeliai, pateiktas šios mokymo priemonės 1.16.1.3.5. skyrelyje.

Nežinomų prielaidų, neturinčių savo sudėtyje kai kurių elementarių teiginių bei jų neiginių įverčių, gavimo algoritmas yra dualus ieškomo sprendinio, išplaukiančio iš duotųjų prielaidų ir neturinčio savo sudėtyje kai kurių elementarių teiginių bei jų neigimų įverčių, algoritmui. Tas algoritmas aprašytas šių eilučių autoriaus knygelėje [52].

Galima pernesti „tiltuką“ tarp šio skyrelio ir 1.16.1.5.2. bei 1.16.1.5.3. skyrelių, skirtų teiginių skaičiavimui, nes šiame skyrelyje aprašyti išvadų iš duotųjų prielaidų gavimo metodai gali būti panaudoti teiginių skaičiavimo išvedimo taisyklių ir formulų, vadinamų teiginių skaičiavimo teoremais, gavimui bei tų taisyklių ir teoremų teisingumo įrodymui.

Pavyzdžiui, 1.16.1.5.2. skyrelyje „trupmenos“ forma bus pateigta išvedimo taisyklė $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$,

kuri vadinama „modus ponens“ (MP). Šios „trupmenos“ „skaitiklyje“ pateikti du teiginiai A ir $A \rightarrow B$ yra loginio samprotavimo prielaidos, o „vardiklyje“ – iš tų prielaidų išplaukianti išvada, kuri nebūtinai turi būti pati stipriausia. Šiuo atveju ji ir nėra pati stipriausia, ir tai matyti iš jos formos: išvadoje nėra teiginio A įeities, o yra tik teiginio B įeitis.

Pasinaudodami šiame (t. y. 1.16.1.2.4.) skyrelyje aprašytu išvadų, neturinčių tam tikrų raidžių, gavimo algoritmu, rasime iš prielaidų A ir $A \rightarrow B$ išplaukiančią išvadą, neturinčią raidės A.

Pati stipriausioji išvada $X^{(0)} = A \wedge (A \rightarrow B) = A \wedge (\bar{A} \vee B) = 0 \vee (A \wedge B) = A \wedge B$.

Išvadą, neturinčią nesusiprastinančios raidės A, gausime, pakeitę pačioje stipriausioje išvadoje $X^{(0)}$ raidės A (ir jos neiginio, jei tokie būtų) įeitis loginiais vienetais. Gauname, jog $X = 1 \wedge B = B$. Tai sutampa su taisyklės „modus ponens“ „vardikliu“, ir tai įrodo, kad teiginys B tiksliai yra iš teiginių A ir $A \rightarrow B$ išplaukianti išvada, nors ir ne pati stipriausioji.

1.16.1.5.3. skyrelyje, kuriame aprašomos teiginių skaičiavimo natūraliosios dedukcijos sistemos, bus pateikta išvedimo taisyklė $\frac{A \rightarrow B, \bar{B}}{A}$, kuri vadinama „modus tollens“ (MT). Įrodysime, kad ši taisyklė teisinga:

$$1) X^{(0)} = (A \rightarrow B) \wedge \bar{B} = (\bar{A} \vee B) \wedge \bar{B} = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{B}) = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee 0 = \bar{A} \wedge \bar{B},$$

$$2) \text{ išvada, neturinti nesusiprastinančių raidės A ir jos neiginio įečių } X = 1 \wedge \bar{B} = \bar{B}.$$

MT teisingumas įrodytas.

Tame pačiame 1.16.1.5.3. skyrelyje, kalbant apie disjunktų dedukcinę sistemą, bus pateikta atkirtos taisyklė (AT) $\frac{A \vee \bar{B}, B \vee C}{A \vee C}$. Įrodysime jos teisingumą:

$$1) X^{(0)} = (A \vee \bar{B}) \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (\bar{B} \wedge B) \vee (\bar{B} \wedge C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee 0 \vee (\bar{B} \wedge C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (\bar{B} \wedge C);$$

Žiūr. tęsinį 2

1.16.1.2.5. Klasikinės predikatų algebros antrosios klasės uždavinių sprendimo algoritmai

Predikatų algebros sudėtingos lygties, sudarytos iš elementarių predikatų, sujungtų loginių operacijų ženklais, bei tokių lygčių sistemų sprendimo procesą galima suskaidyti į du etapus.

Pirmajame etape, interpretuojant elementarius predikatus kaip kintamus teiginius, 1.16.1.2.1.-1.16.1.2.3. skyreliuose aprašytais metodais nustatomos tų elementarių predikatų loginės reikšmės, tenkinančios duotąją sudėtingą predikatinę lygtį ar jų sistemą.

Antrajame etape, jau žinodami elementarių predikatų logines reikšmes, sudarome klasikinės kiekybinės algebros lygčių bei nelygybių sistemą, kurią sprendami kiekybinės matematikos metodais nustatome elementarių predikatų argumentų – objektinių kintamųjų – galimas kiekybines reikšmes, tenkinančias tas lygtis bei nelygybes.

Tais atvejais, kai elementarūs predikatai priklauso ne griežtai apibrėžtai, o „difuzinei“ matematikai, su kuria susipažinsime 1.16.2. skyrelyje, „objektinių kintamųjų“ reikšmėmis gali būti ne tik skaičiai, bet ir taip vadinamųjų lingvistinių kintamųjų reikšmės – negriežtai apibrėžtos aibės.

Elementarių predikatų loginių reikšmių radimą, sprendžiant predikatinę lygčių sistemą, o po to ir tų predikatų argumentų – objektinių kintamųjų – kiekybinių reikšmių nustatymą pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog mums reikia išspręsti predikatinę lygčių sistemą

$$\begin{cases} \bar{P}_1 \rightarrow P_2 = \bar{P}_1, \\ \bar{P}_2 \oplus P_3 = P_1, \\ P_4 = P_2, \end{cases}$$

kurioje predikatas P_1 yra predikatas $P_1(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2>9)$, predikatas P_2 yra predikatas $P_2(x,y,z)=\neg[(x-1)^2+(y-5)^2+z^2\leq 17]$, predikatas P_3 yra predikatas $P_3(x,y,z)=(x\neq z)$, predikatas P_4 yra predikatas $P_4(x,y,z)=(z=0)$.

Sprendžiant šią lygčių sistemą, mums reikia nustatyti:

1) predikatų P_1, P_2, P_3, P_4 logines reikšmes, kurias įstačius į logines lygtis, pastarosios taptų tapatybėmis, t. y. išspręsti duotąją loginių lygčių sistemą, laikant P_1, P_2, P_3 ir P_4 teiginiais;

2) elementarių predikatų P_1, P_2, P_3, P_4 argumentų – objektinių kintamųjų x, y, z kiekybines reikšmes, kurias įstačius į elementarius predikatus, pastarieji taptų teiginiais, turinčiais tokias logines reikšmes, kurios tiems predikatams buvo nustatytos pirmajame etape.

Pirmajame etape interpretuojame elementarius predikatus kaip kintamus teiginius P_1, P_2, P_3, P_4 ir sprendžiame teiginių algebros lygčių sistemą:

$$\begin{cases} P_1 \vee P_2 = \bar{P}_1, \\ \bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee P_2 P_3 = P_1, \\ P_4 = P_2; \end{cases} \begin{cases} (P_1 \vee P_2)P_1 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_1 = 0, \\ (\bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee P_2 P_3) \cdot \bar{P}_1 \vee [(P_2 \vee P_3) \cdot (\bar{P}_2 \vee \bar{P}_3)P_1] = 0, \\ P_4 = P_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_2 = 0, \\ \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee \bar{P}_1 P_2 P_3 \vee P_1 P_2 P_3 \vee P_1 \bar{P}_2 P_3 \vee P_1 P_2 \bar{P}_3 = 0, \\ P_4 = P_2; \end{cases} \begin{cases} P_1 \vee \bar{P}_2 = 0, \\ \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee P_2 P_3 \vee P_1 P_2 \vee P_1 P_3 = 0, \\ P_4 = P_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 0, \bar{P}_2 = 0, \\ P_3 = 0, \\ P_4 = P_2. \end{cases} \text{ Gavome, jog } P_1=0, P_2=1, P_3=0, P_4=1.$$

Antrajame etape, žinodami predikatų logines reikšmes, pereiname prie kiekybinės algebros lygčių bei nelygybių sistemos, kurią sprendami randame objektinių kintamųjų x, y, z reikšmes, tenkinančias duotąją lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2 \leq 17, \\ x = z, \\ z = 0; \end{cases} \begin{cases} y^2 \leq 9, \\ 1 + (y-5)^2 \leq 17, \\ x = 0, \\ z = 0; \end{cases} \begin{cases} -3 \leq y \leq 3, \\ -4 \leq y-5 \leq 4, \\ x = 0, \\ z = 0; \end{cases} \begin{cases} -3 \leq y \leq 3, \\ 1 \leq y \leq 9, \\ x = 0, \\ z = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ 1 \leq y \leq 3, \\ z = 0. \end{cases}$$

Gavome, jog duotosios predikatinės lygčių sistemos sprendinys yra ordinačių ašies atkarpos $1 \leq y \leq 3$ taškų koordinatų x, y, z reikšmės: $x=0, y \in [1;3], z=0$.

Esant tokioms objektinių kintamųjų reikšmėms, predikatai $P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), P_3(x, y, z), P_4(x, y, z)$ tampa pastoviais teiginiais $P_1=0, P_2=1, P_3=0, P_4=1$, kurių loginės reikšmės paverčia predikatinę lygčių sistemą lygtis tapatybėmis.

Šiek tiek sudėtingiau spręsti predikatinę lygtį bei jų sistemas, kada jose yra predikatų, kurių kai kurie objektiniai kintamieji surišti kvantoriais.

Tarkime, jog mums reikia išspręsti predikatinę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \{[\exists y(x^2 + y^2 \leq 9) \vee (y - \sin x \leq 0)] \rightarrow [(x^2 + y^2 \leq 9) \wedge \forall x(y - \sin x \leq 0)]\} = 1, \\ [[\exists x(y - \sin x > 0) \rightarrow (x^2 + y^2 \leq 9)] = 1. \end{cases}$$

Pažymėsime predikatą $x^2+y^2 \leq 9$ kaip $P_1(x,y)$, o predikatą $y - \sin x \leq 0$ kaip $P_2(x,y)$.