

Todėl pirmajame etape ir sudaroma simplekso algoritmo lentelė, atitinkanti

$$\text{apribojimus} \begin{cases} x_{m+n+i} = b_i - \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - x_{m+i} \right), i = 1, 2, \dots, n_1, \\ x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j, i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n, \end{cases} \quad \text{esant neneigiamoms visų}$$

kintamųjų (pagrindinių, papildomų, pagalbinių) reikšmėms, ir tikslo funkciją

$$W = \sum_{i=1}^{n_1} x_{m+n+i} \rightarrow \min. \text{ Po to ta lentelė, naudojantis standartiniu simplekso lentelių}$$

pertvarkymo algoritmu, pertvarkoma, mažinant funkcijos W reikšmę, į naujas simplekso lenteles iki tol, kol pasiekiamas tos funkcijos minimumas.

Jei gauname, kad $\min W=0$, tai reiškia, kad pavyko surasti tokias pagrindinių ir papildomų kintamųjų reikšmes, kurios tenkina visus apribojimus,

esant visų dirbtinių kintamųjų x_{m+n+i} reikšmėms, lygioms nuliui (nes $W = \sum_{i=1}^{n_1} x_{m+n+i}$,

kai $x_{m+n+i} \geq 0$, gali būti lygi 0 tada ir tik tada, kai kiekvieno dirbtinio kintamojo x_{m+n+i} reikšmė yra lygi 0). Kitaip tariant, **jei $\min W=0$, tai reiškia, jog gavome leistiną bazinį sprendinį, t. y. pasiekėme pirmojo etapo tikslą ir galime pereiti prie mums jau žinomo ir įprasto antrojo etapo – optimalaus sprendinio paieškos.**

Jei $\min W > 0$, tai reiškia, jog turima apribojimų sistema neleidžia pasiekti to, kad visi dirbtiniai kintamieji x_{m+n+i} taptų lygūs 0, t. y. neleidžia patenkinti nelygybių

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \geq b_i. \text{ Kitaip tariant, } \min W > 0 \text{ reiškia, kad turima apribojimų sistema yra}$$

nesuderinama ir duotojo optimizacinio modelio LSS yra tuščia, todėl neegzistuoja sprendinio, tenkinančio duotus apribojimus, t. y. optimizavimo uždavinys neturi sprendinio.

Pailiustruosiu simplekso metodo bendrojo algoritmo taikymą konkrečiais pavyzdžiais.

Papildysime 1.15.2.3.1. skyrelyje sudaryto tiesinio optimizacinio modelio apribojimų sistemą

$$\text{nelygybėmis } x_1 + x_2 \geq 2 \text{ ir } x_1 + 5x_2 \geq 5. \text{ Gausime modelį: } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 5x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_1 \leq 18, \\ 3x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Pertvarkysime tą modelį į standartinę bendrąją tiesinę optimizavimo uždavinio modelio formą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_9 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 + x_{10} = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 13, \\ 3x_1 + 0x_2 + x_7 = 18, \\ 0x_1 + 3x_2 + x_8 = 15, \\ Z = 0 - (7x_1 + 5x_2) \rightarrow \min. \end{cases} \text{ Joje } x_1 \text{ ir } x_2 \text{ yra pagrindiniai modelio kintamieji, } x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \text{ ir } x_8 \text{ yra jo papildomi kintamieji, o } x_9 \text{ ir } x_{10} - \text{dirbtiniai (pagalbiniai) kintamieji.}$$

Pertvarkę šį modelį į simplekso bendrojo algoritmo pirmojo etapo taikymui reikalingą formą,

$$\begin{cases} x_9 = 2 - (x_1 + x_2 - x_3), \\ x_{10} = 5 - (x_1 + 5x_2 - x_4), \\ x_5 = 19 - (2x_1 + 3x_2), \\ x_6 = 13 - (2x_1 + x_2), \\ x_7 = 18 - (3x_1 + 0x_2), \\ x_8 = 15 - (0x_1 + 3x_2), \\ Z = 0 - (7x_1 + 5x_2) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Naudodamiesi ta sistema, sudarome pirmojo etapo tikslo funkciją $W = x_9 + x_{10} = 2 - (x_1 + x_2 - x_3) + 5 - (x_1 + 5x_2 - x_4) = 7 - (2x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4) \rightarrow \min$.

Dabar jau galime sudaryti pirmojo etapo pradžiai reikalingą simplekso lentelę (žiūr. 292-ją lentelę), iš kurios, minimizuodami funkciją $W = 7 - (2x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4)$, gausime 293-ją ir 294-ją lenteles, rodančias, jog šiuo atveju $\min W = 0$, t. y., kad optimizavimo uždavinys turi sprendinį.

292. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_9	2	1	1	-1	0
x_{10}	5	1	5	0	-1
x_5	19	2	3	0	0
x_6	13	2	1	0	0
x_7	18	3	0	0	0
x_8	15	0	3	0	0
Z	0	7	5	0	0
W	7	2	6	-1	-1

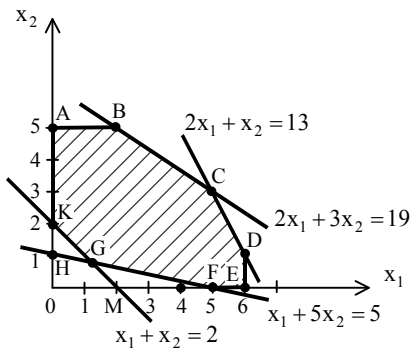
293. lentelė

\	L.n.	x_9	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	1	-1	0
x_{10}	3	-1	4	1	-1
x_5	15	-2	1	2	0
x_6	9	-2	-1	2	0
x_7	12	-3	-3	3	0
x_8	15	0	3	0	0
Z	-14	-7	-2	7	0
W	3	-2	4	1	-1

294. lentelė

\	L.n.	x_9	x_{10}	x_3	x_4
x_1	1,25	1,25	-0,25	-1,25	0,25
x_2	0,75	-0,25	0,25	0,25	-0,25
x_5	14,25	-1,75	-0,25	1,75	0,25
x_6	9,75	-2,25	0,25	2,25	-0,25
x_7	14,25	-3,75	0,75	3,75	-0,75
x_8	12,75	0,75	-0,75	-0,75	0,75
Z	-12,5	-7,5	0,5	7,5	-0,5
W	0	-1	-1	0	0

Leistino bazinio sprendinio gavimą grafiškai vaizduoja 350 pav., kuriame LSS užštrichuota.



350 pav.

Pirmąjį bazinį sprendinį, kurį vaizduoja 292-oji lentelė, t. y. sprendinį $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_9=2, x_{10}=5, x_5=19, x_6=13, x_7=18, x_8=15$, atitinka koordinačių pradžios taškas, kuris šiuo atveju dar nepriklauso LSS, t. y. dar nėra leistinas bazinis sprendinys.

Antrąjį bazinį sprendinį $x_1=2, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_9=0, x_{10}=3, x_5=15, x_6=9, x_7=12, x_8=15$ vaizduoja 293-ją lentelę. Tą sprendinį 350 pav. atitinka taškas M, kuris taip pat dar nepriklauso LSS, t. y. dar nėra leistinas sprendinys, tenkinantis visus modelio apribojimus. Tai matyti ir iš funkcijos W reikšmės, kuri, pereinant nuo 292-osios prie 293-osios lentelės, nors ir sumažėjo nuo 7 iki 3, bet dar liko didesnė už 0.

Trečiąjį bazinį sprendinį $x_1=1,25, x_2=0,75, x_3=0, x_4=0, x_5=14,25, x_6=9,75, x_7=14,25, x_8=12,75, x_9=0, x_{10}=0$, vaizduoja 294-oji lentelė. Tą sprendinį 350 pav. atitinka tiesių $x_1 + x_2 = 2$ ir $x_1 + 5x_2 = 5$ susikirtimo taškas G, turintis koordinatas $x_1^{(G)} = 1,25$ ir $x_2^{(G)} = 0,75$ ir jau priklausantis LSS. Taip ir turėjo būti, nes kaip matyti iš 294-osios lentelės, funkcijos W reikšmė tame taške jau lygi 0. Galima pastebėti, kad toje lentelėje atitinkamų papildomų ir pagalbinų kintamųjų stulpeliai skiriasi tik ženklais: papildomojo kintamojo x_3 stulpelį galima gauti, pakeitus atitinkamo pagalbinio (dirbtinio) kintamojo x_9 stulpelio koeficientų ženklus į priešingus visose eilutėse, išskyrus funkcijos W eilutę. Lygiai tą patį galima pasakyti ir apie papildomojo kintamojo x_4 ir atitinkamo pagalbinio kintamojo x_{10} stulpelius. Siūlyčiau skaitytojui pamąstyti, kodėl taip yra, ir įrodyti, kad taip visada ir turi būti.

Turėdami leistiną bazinį sprendinį, kurį vaizduoja 295-oji lentelė, gauta iš 294-osios lentelės, eliminavus jau nebereikalingus pagalbinų kintamųjų x_9 ir x_{10} stulpelius bei jau nebereikalingą pagalbinės tikslo funkcijos W eilutę, galime jau pereiti į antrąjį simplekso metodo bendrojo algoritmo taikymo etapą ir rasti nagrinėjamo uždavinio optimalų sprendinį. Antrąjį etapą vaizduoja 295-oji, 296-oji, 297-oji, 298-oji ir 299-oji lenteles.

299-oji lentelė vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1=5, x_2=3, x_3=6, x_4=15, x_5=0, x_6=0, x_7=3, x_8=6$, atitinkantį tašką C (žiūr. 350 pav.). Šis sprendinys sutampa su optimaliu sprendiniu, kuris buvo gautas anksčiau (žiūr. 334 pav.), kuomet buvo mažiau apribojimų ir todėl mažiau papildomų kintamųjų.

295. lentelė				296. lentelė				297. lentelė				298. lentelė				299. lentelė			
\	L.n.	x ₃	x ₄	\	L.n.	x ₂	x ₄	\	L.n.	x ₂	x ₇	\	L.n.	x ₆	x ₇	\	L.n.	x ₆	x ₅
x ₁	1,25	-1,25	0,25	x ₁	5	5	-1	x ₁	6	0	$\frac{1}{3}$	x ₁	6	0	$\frac{1}{3}$	x ₁	5	0,75	-0,25
x ₂	0,75	0,25	-0,25	x ₃	3	4	-1	x ₃	4	-1	$\frac{1}{3}$	x ₃	5	1	$-\frac{1}{3}$	x ₃	6	-0,75	0,25
x ₅	14,25	1,75	0,25	x ₅	9	-7	2	x ₅	7	3	$-\frac{2}{3}$	x ₅	4	-3	$\frac{4}{3}$	x ₇	3	-2,25	0,75
x ₆	9,75	2,25	-0,25	x ₆	3	-9	2	x ₆	1	1	$-\frac{2}{3}$	x ₂	1	1	$-\frac{2}{3}$	x ₂	3	-0,5	0,5
x ₇	14,25	3,75	-0,75	x ₇	3	-15	3	x ₄	1	-5	$\frac{1}{3}$	x ₄	6	5	-3	x ₄	15	-1,75	2,25
x ₈	12,75	-0,75	0,75	x ₈	15	3	0	x ₈	15	3	0	x ₈	12	-3	2	x ₈	6	1,5	-1,5
Z	12,5	7,5	-0,5	Z	-35	-30	7	Z	-42	5	$-\frac{7}{3}$	Z	-47	-5	1	Z	-50	-2,75	-0,75

Analizuodami 295-299 lenteles, galime pastebėti, kad antrajame etape, kuris buvo pradėtas taške G (žiūr. 350 pav.), buvo einama iš taško G į tašką F, po to į tašką E, dar po to – į tašką D ir, galų gale, į tašką C. Buvo galima ir kita judėjimo į optimumo tašką C trajektorija, būtent trajektorija GKABC.

Ir pirmajame etape, einant iš koordinatų pradžios į kokią nors LSS ribojančio daugiakampio (bendruoju atveju, kai pagrindinių kintamųjų skaičius $m > 2$, – daugiamačio daugiasienio) viršūnę (kampinį tašką), taip pat galėjo būti panaudotos įvairios trajektorijos. Palieku skaitytojai išnagrinėti klausimą, kuri iš tų trajektorijų būtų buvusi geriausia, t. y. leidusi greičiausiai pasiekti tikslą. Gana dažnai, kaip jau buvo minėta 1.15.2.5. skyrelyje, pasirenkant tokias trajektorijas, vadovaujamasi taisykle: einant iš kokios nors LSS ribojančio daugiasienio viršūnės į kaimyninę, pasirenkama ta kaimyninė viršūnė, į kurią pereinant gaunamas didžiausias tikslo funkcijos reikšmės pokytis. Ši kaimyninės viršūnės pasirinkimo taisyklė yra analogiška 1.9.2.15. skyrelyje aprašytai artimiausio kaimyno pasirinkimo taisyklei, naudojamai sudarant Hamiltono ciklą, o taip pat didžiausio gradiento taisyklei, taikomai, sprendžiant netiesinius tolydžius optimizavimo uždavinius. Nors šios taisyklės ne visada garantuoja, jog tokiu būdu gautas rezultatas bus globaliai optimalus, tačiau jomis gana dažnai naudojamosi, ypač, kai mus gali tenkinti ne būtinai optimalus, bet pakankamai geras rezultatas.

Kaip jau buvo minėta šio skyrelio pradžioje, kai tiesinio optimizacinio modelio apribojimus sudaro tik „≤“ tipo nelygybės, ieškant optimalaus sprendinio pirmasis etapas tampa nebereikalingas, nes tuomet iškart galima gauti leistiną bazinį sprendinį ir iškart pereiti prie antrojo etapo.

Tačiau pasitaiko ir tokių atvejų, kai nebereikalingu tampa antrasis etapas, nes pirmojo etapo pabaigoje surastas pirmasis leistinas sprendinys iškart yra ir optimalus sprendinys.

Pailiustruosiu šį teiginį konkrečiu pavyzdžiu, kuris yra ypatingas dar ir tuo, kad optimalus sprendinys yra išsigimęs: kai kurių jo bazinių kintamųjų reikšmės yra lygios nuliui.

Tarkime, jog tiesinio optimizacinio modelio apribojimus sudaro nelygybės $x_1 + x_2 \geq 8$, $2x_1 + 3x_2 \leq 19$, $2x_1 + x_2 \leq 13$, $3x_1 \leq 18$ ir $3x_2 \leq 15$, kai $x_1 \geq 0$ ir $x_2 \geq 0$, o to modelio tikslo funkcija yra $P = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$.

Pervesdami tą modelį į standartinę formą, gauname:

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 - x_3 + x_8 = 8, \\
 &2x_1 + 3x_2 + x_4 = 19, \\
 &2x_1 + x_2 + x_5 = 13, \\
 &3x_1 + x_6 = 18, \\
 &3x_2 + x_7 = 15, \\
 &Z = 0 - (7x_1 + 5x_2) \rightarrow \min, \\
 &W = 8 - (x_1 + x_2 - x_3) \rightarrow \min.
 \end{aligned}$$

Pasirinkdami baziniais kintamaisiais pagalbinį (dirbtinį) kintamąjį x_8 ir papildomus kintamuosius x_4 , x_5 , x_6 ir x_7 , sudarome pirmąjį bazinį sprendinį

$$\begin{aligned}
 &x_8 = 8 - (x_1 + x_2 - x_3), \\
 &x_4 = 19 - (2x_1 + 3x_2), \\
 &x_5 = 13 - (2x_1 + x_2), \\
 &x_6 = 18 - (3x_1 + 0x_2), \\
 &x_7 = 15 - (0x_1 + 3x_2), \\
 &Z = 0 - (7x_1 + 5x_2) \rightarrow \min, \\
 &W = 8 - (x_1 + x_2 - x_3) \rightarrow \min \text{ bei jį atitinkančią simplekso algoritmo taikymui reikalingą lentelę (žiūr. 300-ąją lentelę).}
 \end{aligned}$$

300. lentelė

\	L.n.	x_3	x_4	x_5
x_8	8	1	1	-1
x_4	19	2	3	0
x_5	13	2	1	0
x_6	18	3	0	0
x_7	15	0	3	0
Z	0	7	5	0
W	8	1	1	-1

301. lentelė

\	L.n.	x_6	x_2	x_3
x_8	2	$-\frac{1}{3}$	1	-1
x_4	7	$-\frac{2}{3}$	3	0
x_5	1	$-\frac{2}{3}$	1	0
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	0
x_7	15	0	3	0
Z	-42	$-\frac{7}{3}$	5	0
W	2	$-\frac{1}{3}$	1	-1

302. lentelė

\	L.n.	x_6	x_5	x_3
x_8	1	$\frac{1}{3}$	-1	-1
x_4	4	$\frac{4}{3}$	-3	0
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	1	0
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	0
x_7	12	2	-3	0
Z	-47	1	-5	0
W	1	$\frac{1}{3}$	-1	-1

303. lentelė

\	L.n.	x_8	x_5	x_3
x_6	3	3	-3	-3
x_4	0	-4	1	4
x_2	3	2	-1	-2
x_1	5	-1	1	1
x_7	6	-6	3	6
Z	-50	-3	-2	3
W	0	-1	0	0

303-oji lentelė vaizduoja jau leistiną bazinį sprendinį $x_1=5$, $x_2=3$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=3$, $x_7=6$, $x_8=0$, nes funkcija W jau pasiekė minimumą ir tas minimumas yra lygus 0. Šis leistinas bazinis sprendinys yra kartu ir optimalus sprendinys. Tiesa, analizuodami funkcijos Z koeficientus, galėtume teigti, jog funkcijos Z minimumas dar galėtų būti nepasiektas, nes kintamojo x_3 stulpelyje Z eilutėje stovi teigiamas skaičius 3. Tačiau, jei pereitume į antrąjį simplekso metodo bendrojo algoritmo taikymo etapą, tai, kaip rodo 304-oji ir 305-ji lentelės, įsitikintume, jog šis sprendinys jau ir 303-joje lentelėje buvo optimalus ir tik netenkino pakankamo optimalumo požymio, nes buvo išsigimęs (turėjo mažiau nei $n=n_1+n_2=1+4=5$ nenulinių komponentių, t. y. tik 4 nenulines komponentes $x_1=5$, $x_2=3$, $x_6=3$, $x_7=6$).

304. lentelė

\	L.n.	x_5	x_3
x_6	3	-3	-3
x_4	0	1	4
x_2	3	-1	-2
x_1	5	1	1
x_7	6	3	6
Z	-50	-2	3

305. lentelė

\	L.n.	x_5	x_4
x_6	3	-2,25	0,75
x_3	0	0,25	0,25
x_2	3	-0,5	0,5
x_1	5	0,75	-0,25
x_7	6	1,5	-1,5
Z	-50	-2,75	-0,75

305-joje lentelėje gavome naują išsigimusį sprendinį, vaizduojantį tą patį LSS tašką C (žiūr. 350 pav.), tačiau jau tenkinantį pakankamą minimumo požymį.

Siūlyčiau skaitytojui įsitikinti, jog šiuo atveju LSS turėjo tik vieną tašką $x_1=5$, $x_2=3$, tenkinantį visas nelygybes $x_1+x_2 \geq 8$, $2x_1+3x_2 \leq 19$, $2x_1+x_2 \leq 13$, $3x_1 \leq 18$, $3x_2 \leq 15$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Kai funkcijos W minimali leistina reikšmė yra didesnė už 0, tuomet neegzistuoja nė vieno taško, kuris tenkintų visus apribojimus, ir uždavinys neturi ne tik optimalaus, bet ir nė vieno leistino sprendinio, nes LSS yra tuščia.

Pailiustruosiu tai konkrečiu pavyzdžiu, kuris skiriasi nuo kito tik išnagrinėtojo tik tuo, kad apribojimas $x_1+x_2 \geq 8$ pakeistas apribojimu $x_1+x_2 \geq 10$.

Siūlyčiau skaitytojui grafiškai įsitikinti, jog šiuo atveju LSS yra tuščia, o mes čia atliksime pirmąjį bendrojo algoritmo etapą, surasdami funkcijos W minimumą.

Analogiškai, kaip tai ką tik darėme, gauname pradinę simplekso algoritmo lentelę (žiūr. 306-ąją lentelę), kuri skirsis nuo 300-osios lentelės tuo, kad laisvųjų narių stulpelyje kintamojo x_8 ir funkcijos W eilutėje vietoje skaičiaus „8“ stovės skaičius „10“.

Minimizuodami funkciją W, iš 306-sios lentelės gausime 307-ją, 308-ją ir 309-ją lenteles:

306. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3
x_8	10	1	1	-1
x_4	19	2	3	0
x_5	13	2	1	0
x_6	18	3	0	0
x_7	15	0	3	0
Z	0	7	5	0
W	10	1	1	-1

307. lentelė

\	L.n.	x_6	x_2	x_3
x_8	4	$-\frac{1}{3}$	1	-1
x_4	7	$-\frac{2}{3}$	3	0
x_5	1	$-\frac{2}{3}$	1	0
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	0
x_7	15	0	3	0
Z	-42	$-\frac{7}{3}$	5	0
W	4	$-\frac{1}{3}$	1	-1

308. lentelė

\	L.n.	x_6	x_5	x_3
x_8	3	$\frac{1}{3}$	-1	-1
x_4	4	$\frac{4}{3}$	-3	0
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	1	0
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	0
x_7	12	2	-3	0
Z	-47	1	-5	0
W	3	$\frac{1}{3}$	-1	-1

309. lentelė

\	L.n.	x_4	x_5	x_3
x_8	2	0,25	-0,25	-1
x_6	3	0,75	-2,25	0
x_2	3	0,5	-0,5	0
x_1	5	-0,25	0,75	0
x_7	6	-1,5	1,5	0
Z	-50	-0,75	-2,75	0
W	2	-0,25	-0,25	-1

Kaip matome iš 309-osios lentelės, funkcija W jau pasiekė minimumą, tačiau $\min W = 2 > 0$. Matome taip pat, kad ir dirbtinio kintamojo x_8 reikšmė taip pat lygi 2, t. y. nelygi 0. Tai reiškia, jog $\bar{P}$ optimizacinio modelio sudėtį įeinančių nelygybių sistemą patenkinti neįmanoma. Taigi, šiuo atveju optimizavimo uždavinys negali turėti sprendinio, nes LSS yra tuščia.

Čia aprašytas leistino bazinio sprendinio, kai $\bar{P}$ optimizavimo modelio sudėtį įeina „ $\geq$ “ tipo apribojimai, radimo būdas, naudojantis simplekso algoritmu, nėra vienintelis. Egzistuoja ir eilė kitų būdų. Vienas jų aprašytas jau ne kartą minėtoje knygoje [47], su kuria susipažinti skaitytojui labai rekomenduočiau, nes tai labai paprastai ir aiškiai parašyta knyga ne tik apie šį, bet ir apie visą eilę kitų optimizavimo metodų, taikomų operacijų tyrime. **Tuo metodu mes jau naudojomes 1.15.2.5.2. skyrelyje.**

Realizuojant simplekso algoritmą kompiuteriu, jei nesinaudojama **specialiais metodais, pritaikytais darbui su paprastomis trupmenomis**, atsiranda **skaičiavimo paklaidos**, nes kompiuteriai dirba su dvejetainiais skaičiais, turinčiais ribotą ženklų skaičių ir todėl, pavyzdžiui, dalindami 1 iš 3, dešimtaine trupmena išreikštą dalmenį neišvengiamai gauna su paklaida. Todėl pirmajame simplekso metodo bendrojo algoritmo taikymo etape net tuo atveju, kai optimizavimo uždavinys turi sprendinį, ne

visuomet pavyksta gauti, jog tikslo funkcijos $W = \sum_{i=1}^{n_1} x_{m+n+i}$ minimumas būtų tiksliai lygus 0. Todėl kompiuterinėse simplekso algoritmo programose nereikalaujama tikslios lygybės $\min W = 0$, o apsiribojama nelygybe $\min |W| \leq \varepsilon$, kur ε – koks nors labai mažas teigiamas dydis.

Neišvengiamų skaičiavimo paklaidų, skaičiuojant kompiuteriu, atsiradimas ir galimas jų kaupimasis žingsnis po žingsnio – labai rimta problema, nes kartais dėl tų paklaidų kai kurios skaičiavimo procedūros gali duoti rezultatus, gana tolimus nuo tikrųjų, o kartais – net visai klaidingus rezultatus. Kad to išvengtume, dažnai didinamas skaičiavimų tikslumas, dvigubinant ženklų, esančių po kablelio, skaičių (dvigubinant kompiuterinių „žodžių“ ilgį), bei naudojantis specialiais metodais, neleidžiančiais paklaidoms nepastebimai išaugti iki pavojingų dydžių. Pavyzdžiui, sprendžiant tiesinį optimizavimo uždavinį simplekso metodu kompiuteriu, neretai kartu sprendžiami du optimizavimo uždaviniai – **tiesioginis** ir **dualusis**, t. y. artėjama prie optimumo taško iš dviejų skirtingų pusių ir nuolat lyginama, kaip mažėja skirtumas tarp gaunamų bazinių tiesioginio ir dualaus uždavinio sprendinių, ar kartais tie skirtumai nepakeitė ženklo. Yra ir eilė įvairių kitų būdų, leidžiančių palaikyti ir užtikrinti kompiuteriu vykdomų skaičiavimų patikimumą, nes tai, kaip jau buvo ką tik minėta, – tikrai labai rimta problema, į kurią neatkreipus reikiamo dėmesio, negalima garantuoti, kad po ilgų skaičiavimų kompiuteriu gautas rezultatas tikrai atitinka tikrovę.

Taikant simplekso bendrąjį algoritmą, teoriškai galimi ne tik minėtieji skaičiavimų divergencijos, bet ir skaičiavimų proceso „užsiciklinimo“ reiškiniai (žiūr., pavyzdžiui, 264÷269. lentelės ir jas aptariantį tekstą), tačiau tokių reiškinių pasitaikymo tikimybė labai maža ir galima sakyti, jog praktikoje jie retai pasitaiko, nors tiesinio programavimo vadovėliuose tokie reiškiniai ir nagrinėjami.

O štai tokia rimta ir praktiškai svarbi problema, kaip skaičiavimo paklaidų susikaupimo iki neleistinų dydžių problema, dar nėra pakankamai ištirta, ir su tokiais pavojumi reikia skaitytis. Tai tampa ypatingai aktualu, kai optimizacinis modelis turi labai daug kintamųjų, dėl ko optimizavimo procesai tampa labai ilgi (t. y. tenka sudarinėti ilgą simplekso lentelių grandinę), o taip pat, kai koeficientų prie tų kintamųjų reikšmės labai nevienodos, t. y. skiriasi dešimtis ar net šimtus kartų.

O tokie optimizavimo uždaviniai praktikoje pasitaiko ne taip jau retai.

Vienas tokių uždavinių – **tarpšakinio optimalaus planavimo uždavinys**, kai šakos (ar įmonės), gamindamos produkciją tarpšakiniam ir galutiniam vartojimui, gali naudotis ne viena vienintele gamybine technologija, o gali pasirinkti iš baigtinio galimų technologijų sąrašo tas, kurios yra joms parankiausios, t. y. **gali pasirinkti joms optimalias technologijas**.

1.14.12.2.4. skyrelyje mes jau nagrinėjome **tarpšakinio balanso sudarymo** metodus, kai kiekvienos produkcijos gamybai buvo naudojamosi tik viena iš anksto duota tos produkcijos gamybos technologija ir tarpšakinio balanso sudarymo uždavinį galima buvo aprašyti **paprastu Leontjevo modeliu** $\vec{X} = A\vec{X} + \vec{F}$. Šiame modelyje **A – Leontjevo matrica**, sudaryta iš koeficientų a_{ij} , rodančių, kiek vienetų produkcijos i tenka suvartoti, gaminant produkcijos j vienetą, $\vec{X}$ – planuojamos pagaminti (ir suvartoti) įvairių rūšių produkcijos kiekių vektorius $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$, $\vec{F}$ – galutinio vartojimo vektorius $(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)^T$, kuriame F_i – produkcijos i kiekis, skiriamas galutiniam suvartojimui, T – vektoriaus transpozicijos ženklas.

Matricinė lygtis $\vec{X} = A\vec{X} + \vec{F}$ yra kompaktiška lygčių sistemos $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + F_i$, $i=1, 2, \dots, n$ išraiška matricinėje formoje. Išsprendę šią lygčių sistemą, turinčią n nežinomųjų ir n tiesinių lygčių, galime surasti **gamybos (ir pilno vartojimo) planą** – vektoriaus $\vec{X}$ koordinates $x_1, x_2, \dots, x_n$. Matricinėje formoje vektoriaus $\vec{X}$ suradimo (išreiškimo per duotas galutinio vartojimo vektoriaus $\vec{F}$ koordinates $F_1, F_2, \dots, F_n$ ir duotas Leontjevo matricos A koeficientus a_{ij}) procedūrą galima pavaizduoti irgi labai kompaktiškai: 1) $\vec{X} = A\vec{X} + \vec{F}$, 2) $\vec{X} - A\vec{X} = \vec{F}$, 3) $(I-A)\vec{X} = \vec{F}$, 4) $\vec{X} = (I-A)^{-1}\vec{F}$, kur I – vienetinė kvadratinė matrica $n \times n$, o $(I-A)^{-1}$ – atvirkštinė matricių I ir A skirtumo $I-A$ matrica.

Vietoj čia pavaizduoto **tiesioginio metodo**, tarpšakinio balanso sudarymui, kaip jau buvo minėta 1.14.12.2.4. skyrelyje, galima naudotis ir **iteraciniais metodais** (paprastos iteracijos, Zeidelio, žingsninio agregavimo). Tokių metodų taikymo pavyzdžiai irgi buvo pateikti 1.14.12.2.4. skyrelyje.

Čia, pratęsdami 1.14.12.2.4. skyrelyje pradėtą **tarpšakinio planavimo temą**, panagrinėsime žymiai sudėtingesnę **apibendrintą Leontjevo modelį**, naudojamą **optimalaus tarpšakinio balanso** sudarymui ką tik minėtuoju žymiai sudėtingesniu atveju, kai **šakos (ar įmonės) gali pasirinkti (arba galima joms parinkti, t. y. „užplanuoti“ „iš viršaus“)** kurią nors iš kelių galimų produkcijos gamybos technologijų, besiskiriančių viena nuo kitos **resursų i sąnaudų, reikalingų produkcijos j vieneto gamybai, koeficientais $a_{ij}^{(v_i)}$ bei darbo jėgos sąnaudų $c_j^{(v_i)}$ koeficientais**, kur $v_j=1, 2, \dots, \hat{v}_j$ – produkcijos j gamybos technologijos numeris, o $\hat{v}_j$ – maksimalus galimų technologijų skaičius produkcijai j .

Pažymėję $x_i^{(v_i)}$ produkcijos i kiekį, pagamintą naudojantis technologija v_i , kur $v_i \in \{1, 2, \dots, \hat{v}_i\}$, šiuo sudėtingesniu atveju vietoj lygčių $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + F_i$, kur $i=1, 2, \dots, n$, sistemos turėsime įsivesti nelygybių $\sum_{v_i=1}^{\hat{v}_i} x_i^{(v_i)} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)} + F_i$ (kur $i=1, 2, \dots, n$) sistemą, kurioje sandaugos $a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)}$ yra produkcijos i kiekiai, sunaudojami gaminant produkcijos j kiekį $x_j^{(v_j)}$, naudojantis technologija v_j , šių sandaugų suma

$\sum_{j=1}^{\hat{v}_j} a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)}$ – produkcijos i kiekis, sunaudotas produkcijos j gamybai, o šių sumų suma

$\sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)}$ – produkcijos i kiekis, sunaudotas visų rūšių produkcijos (tame tarpe ir pačios savęs, t. y. produkcijos i) gamybai.

Nelygybė $\sum_{v_i=1}^{\hat{v}_i} x_i^{(v_i)} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)} + F_i$ reiškia, kad **pagamintos produkcijos i kiekis** $\sum_{v_i=1}^{\hat{v}_i} x_i^{(v_i)}$ **turi būti ne mažesnis už suvartotos gamyboje produkcijos i kiekio**

$\sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)}$ **ir kiekio** F_i , **suvartoto galutiniame vartojime, sumą**

$\sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} a_{ij}^{(v_j)} x_j^{(v_j)} + F_i$.

Šių nelygybių sistema, kuri gaunama keičiant indeksą i nuo 1 iki n, kartu su nelygybėmis $x_i^{(v_i)} \geq 0$, kur $i=1, 2, \dots, n$ ir $v_j=1, 2, \dots, \hat{v}_j$, sudaro **Leontjevo apibendrinto modelio apribojimų sistemą**, o **tikslo funkcija tame modelyje pasirenkama funkcija, išreiškianti darbo jėgos bendrų sąnaudų gamyboje priklausomybę nuo pagamintos produkcijos kiekių bei panaudotų technologijų ir minimizuojanti tas sąnaudas**, t. y. $Z = \sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} c_j^{(v_j)} x_j^{(v_j)} \rightarrow \min$.

Ši Leontjevo apibendrintą modelį galima užrašyti kompaktiškiau, pervedus jį į matricų algebros kalbą.

Tuo tikslu išsivesime **apibendrintą Leontjevo matricą**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(2)} & \dots & a_{11}^{(\hat{v}_1)} & a_{12}^{(1)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{12}^{(\hat{v}_2)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{1n}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(\hat{v}_n)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{21}^{(2)} & \dots & a_{21}^{(\hat{v}_1)} & a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{22}^{(\hat{v}_2)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(\hat{v}_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i1}^{(2)} & \dots & a_{i1}^{(\hat{v}_1)} & a_{i2}^{(1)} & a_{i2}^{(2)} & \dots & a_{i2}^{(\hat{v}_2)} & \dots & a_{in}^{(1)} & a_{in}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(\hat{v}_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n1}^{(2)} & \dots & a_{n1}^{(\hat{v}_1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{n2}^{(\hat{v}_2)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(\hat{v}_n)} \end{pmatrix}$$

ir taip vadinamąją „išplėstąją vienetinę matricą“

$$E = \begin{pmatrix} \underbrace{11\dots1}_{\hat{v}_1 \text{ vienetukų}} & 00\dots0 & 00\dots0 & \dots & 00\dots0 \\ \underbrace{00\dots0}_{\hat{v}_1 \text{ nulių}} & \underbrace{11\dots1}_{\hat{v}_2 \text{ vienetukų}} & 00\dots0 & \dots & 00\dots0 \\ \underbrace{00\dots0}_{\hat{v}_1 \text{ nulių}} & \underbrace{00\dots0}_{\hat{v}_2 \text{ nulių}} & \underbrace{11\dots1}_{\hat{v}_3 \text{ vienetukų}} & \dots & 00\dots0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00\dots0 & 00\dots0 & 00\dots0 & \dots & \underbrace{11\dots1}_{\hat{v}_n \text{ vienetukų}} \end{pmatrix}$$

bei vektorius $\vec{X} = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(\hat{v}_1)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(\hat{v}_2)}, \dots, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(\hat{v}_n)})^T$,

$\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ ir $\vec{c} = (c_1^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_1^{(\hat{v}_1)}, c_2^{(1)}, c_2^{(2)}, \dots, c_2^{(\hat{v}_2)}, \dots, c_n^{(1)}, c_n^{(2)}, \dots, c_n^{(\hat{v}_n)})^T$.

Tuomet **apibendrintąjį Leontjevo modelį matricinėje formoje**, pereidami nuo $E\bar{X} \geq A\bar{X} + \bar{F}$, prie $(E - A)\bar{X} \geq \bar{F}$, galėsime užrašyti taip: 1) $(E - A)\bar{X} \geq \bar{F}$; 2) $\bar{X} \geq 0$; 3) $\bar{c}\bar{X} \rightarrow \min$, kur $\bar{c}\bar{X}$ – skaliarinė vektorių $\bar{c}$ ir $\bar{X}$ sandauga $\bar{c}\bar{X} = \sum_{j=1}^n \sum_{v_j=1}^{\hat{v}_j} c_j^{(v_j)} x_j^{(v_j)}$.

Pervedant šį modelį į standartinę tiesinio programavimo formą, iš nelygybių $(E - A)\bar{X} \geq \bar{F}$ sistemos, įvedant n papildomų kintamųjų x_{s+j} ir n pagalbinių kintamųjų x_{s+n+j} (kur $j=1, 2, \dots, n$, o $s = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j$ – pagrindinių kintamųjų skaičius), gaunama n lygybių sistema. Pilnas kintamųjų skaičius modelyje, paruoštame simplekso bendrojo algoritmo pirmojo etapo taikymui, tampa lygus $s + 2n = \sum_{j=1}^n (\hat{v}_j + 2)$. Antrajame etape kintamųjų skaičius šiek tiek sumažėja ir lieka lygus $s + n = \sum_{j=1}^n (\hat{v}_j + 1)$, nes pagalbiniai kintamieji tampa nebereikalingi.

Žinodami koeficientų $a_{ij}^{(v_i)}$ ir $c_j^{(v_j)}$ reikšmes (jos turi būti nustatytos dar iki simplekso algoritmo panaudojimo pradžios, surenkant ir apdorojant statistinius duomenis, ir toliau laikomos konstantomis, nes keičiasi, palyginti, lėtai), o taip pat kiekvienos rūšies i produkcijos galutinio vartojimo poreikius F_i (jie taip pat nustatomi, apdorojant statistinius duomenis ir taikant prognozavimo metodus bei ekspertų įverčius), naudodamiesi bendruoju simplekso algoritmu, galime apskaičiuoti **subalansuotą optimalų tarpšakinį gamybos planą**, minimizuojantį bendrąsias darbo jėgos sąnaudas.

Pirmajame to algoritmo taikymo etape gauname leistiną bazinį sprendinį, o antrajame – optimalias kintamųjų $x_i^{(v_i)}$ reikšmes bei darbo jėgos poreikio minimumo įvertį. Gauti rezultatai parodo ir tai, kokios technologijos buvo pasirinktos kaip optimalios, o kokios – atmestos kaip mažiau efektyvios: jei kokioms nors fiksuotoms i ir v_i^* reikšmėms gauname, jog $x_i^{(v_i^*)} > 0$, tai iš to darome išvadą, kad produkcijos i gamybai efektyviausia yra technologija v_i^* , o jei kokioms nors i ir v_i reikšmėms $x_i^{(v_i)} = 0$, tai reiškia, jog tokia technologija v_i produkcijos i gamybai nenaudojama.

Pačios $x_i^{(v_i^*)}$ reikšmės rodo, kiek produkcijos i reikia pagaminti, naudojantis technologija v_i^* , kad gautume optimalius tos produkcijos kiekius, tenkinančius galutinio vartojimo ir gamybos poreikius, sunaudodami minimumą darbo jėgos resursų.

Turėdami optimizavimo uždavinio sprendinį, t. y. optimalias $x_i^{(v_i^*)}$ reikšmes (o tai reiškia – ir optimalias $x_j^{(v_j^*)}$ reikšmes, nes i ir j – produkcijos indeksai, ir kai $i=j$, tai $x_i^{(v_i^*)}$ yra tas pats, kas ir $x_j^{(v_j^*)}$) bei žinodami Leontjevo apibendrintos matricos A koeficientus $a_{ij}^{(v_j^*)}$, mes galime apskaičiuoti ir **optimalų tarpšakinių pristatymų planą**, t. y. apskaičiuoti dydžių $x_{ij}^{(v_j^*)} = a_{ij}^{(v_j^*)} x_j^{(v_j^*)}$ reikšmes, rodančias, kiek produkcijos i tą produkciją gaminanti šaka (įmonė) turi pristatyti produkciją j gaminančiai šakai (įmonei).

Apskaičiavus optimalų gamybos ir pristatymų planą, naudinga patikslinti jo subalansuotumą: turi būti tenkinamos lygybės $\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(v_j^*)} + F_i = x_i$, kur $i=1, 2, \dots, n$, o taip pat lygybės $\sum_{j=1}^{\hat{v}_j} x_j^{(v_j)} = x_j$, kur $j=1, 2, \dots, n$.

Kadangi produkcijos rūšių skaičius n šalyje gali siekti tūkstančius, dešimtis tūkstančių ir daugiau, tai kintamųjų skaičius modelyje kartais taip išauga, kad optimalaus subalansuoto gamybos plano sudarymas net patiems galingiausiems kompiuteriams pareikalautų labai daug laiko. Todėl, sudarant tarpšakinius optimalius balansus, **produkcija gana dažnai agreguojama į grupes** ir tokiu būdu sumažinamas skaičius n . Turėdami subalansuotą gamybos planą grupių lygyje, galima jį optimizuoti jau kiekvienos tų grupių viduje. Nors tokiu būdu sudarytas planas kartais būna šiek tiek blogesnis už tą, kurį galėtume gauti optimizuodami iškart neagreguotos produkcijos lygyje, tačiau toks metodas leidžia žymiai sumažinti skaičiavimų apimtį ir išspręsti optimalaus planavimo uždavinius šalies mastu per praktiškai priimtina laiką, naudojantis turima kompiuterine technika.

Čia aprašytasis apibendrintas Leontjevo modelis dar nėra pakankamai pilnas, nes jis tinka tik uždaroms ekonominėms sistemoms.

Realiose ekonominėse sistemose gamybai ir galutiniam vartojimui gali būti reikalingi ne tik tų sistemų viduje esantys bei pagaminami resursai, bet ir resursai, kurie galėtų būti įvedami į tas sistemas iš išorės, t. y. importuojami.

Kadangi tokių importuojamų resursų kiekiai dėl įvairių priežasčių būna riboti, tai pilname apibendrintame Leontjevo modelyje atsiranda ir „ $\leq$ “ tipo apribojimai.

Įvesime indeksą k importuojamų resursų žymėjimui, laikydami, jog $k=1, 2, \dots, m$, kur m – tokių resursų rūšių skaičius. Pažymėsime $\gamma_{k,j}^{(v_j)}$ resurso k kiekį, reikalingą produkcijos j vieneto gamybai, naudojantis technologija v_j , kur $v_j=1, 2, \dots, \hat{v}_j$.

Sudarysime koeficientų $\gamma_{k,j}^{(v_j)}$ matricą

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(1)} & \gamma_{11}^{(2)} & \dots & \gamma_{11}^{(\hat{v}_1)} & \gamma_{12}^{(1)} & \gamma_{12}^{(2)} & \dots & \gamma_{12}^{(\hat{v}_2)} & \dots & \gamma_{1n}^{(1)} & \gamma_{1n}^{(2)} & \dots & \gamma_{1n}^{(\hat{v}_n)} \\ \gamma_{21}^{(1)} & \gamma_{21}^{(2)} & \dots & \gamma_{21}^{(\hat{v}_1)} & \gamma_{22}^{(1)} & \gamma_{22}^{(2)} & \dots & \gamma_{22}^{(\hat{v}_2)} & \dots & \gamma_{2n}^{(1)} & \gamma_{2n}^{(2)} & \dots & \gamma_{2n}^{(\hat{v}_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1}^{(1)} & \gamma_{m1}^{(2)} & \dots & \gamma_{m1}^{(\hat{v}_1)} & \gamma_{m2}^{(1)} & \gamma_{m2}^{(2)} & \dots & \gamma_{m2}^{(\hat{v}_2)} & \dots & \gamma_{mn}^{(1)} & \gamma_{mn}^{(2)} & \dots & \gamma_{mn}^{(\hat{v}_n)} \end{pmatrix}$$

ir resursų $k=1, 2, \dots, m$ maksimalių kiekių γ_k , kuriuos galima įvežti į sistemą iš išorės, vektorių $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_m)^T$.

Tuomet papildomus apribojimus, įvedamus į apibendrintą Leontjevo modelį, matricinėje formoje galima užrašyti nelygybe $\Gamma \vec{X} \leq \vec{\gamma}$.

Išplėstas (papildytas) apibendrintas Leontjevo modelis, skirtas ekonominės sistemos tarpšakiniam subalansuotam optimaliam planui gauti, matricinėje formoje atrodo taip: 1) $(E - A)\vec{X} \geq \vec{F}$, 2) $\Gamma \vec{X} \leq \vec{\gamma}$, 3) $\vec{X} \geq 0$, 4) $c\vec{X} \rightarrow \min$.

Šį planavimo optimizavimo uždavinį taip pat galima išspręsti, naudojantis apibendrintu simplekso algoritmu.

Pervedant šį modelį į standartinę tiesinio programavimo formą, tenka įsivesti $n+m$ papildomų ir n pagalbinių kintamųjų, todėl bendras kintamųjų skaičius tampa

$$\text{lygus } s+2n+m=2n+m+\sum_{j=1}^n \hat{v}_j.$$

Išsprendus šį uždavinį, t. y. apskaičiavus optimalias $x_i^{(v_i^*)}$ reikšmes, galima apskaičiuoti ne tik optimalų tarpšakinių pristatymų planą, t. y. optimalias $x_{i,j}^{(v_i^*)}$ reikšmes, bet ir **optimalų resursų importo planą**, t. y. optimalias dydžių $x_{k,j}^{(v_j^*)} = \gamma_{k,j}^{(v_j^*)} x_j$ reikšmes, kur $x_{k,j}^{(v_j^*)}$ – optimalus importuojamo resurso k kiekis, reikalingas produkcijos j optimalaus kiekio gamybai.

Galima apskaičiuoti ir bendrą optimalų resurso k (kur $k=1, 2, \dots, m$) importo gamybai dydį $x_k = \sum_{j=1}^n x_{k,j}^{(v_j^*)} = \sum_{j=1}^n \gamma_{k,j}^{(v_j^*)} x_j$, kur $x_j = \sum_{v_j=1}^{v_j^*} x_j^{(v_j)} = x_j^{(v_j^*)}$, nes visoms kitoms (t. y. nesutampančioms su v_j^*) v_j reikšmėms optimalios $x_j^{(v_j)}$ reikšmės yra lygios 0.

Reikia pažymėti, kad dydžiai x_k , $x_{k,j}^{(v_j^*)}$ ir $x_{i,j}^{(v_i^*)}$ apskaičiuojami, jau išsprendus optimizavimo uždavinį, aprašomą bendruoju papildytu Leontjevo modeliu, ir nėra to modelio kintamaisiais.

Tiesinio programavimo (tiesinio optimizavimo) metodus ekonomikoje galima taikyti ne tik sudarant optimalius gamybos, tarpšakinių pristatymų bei importo planus, bet ir **ekonominės veiklos analizėje**, naudojantis Kantorovičiaus, fon Neumano ir kitais modeliais, apie kuriuos skaitytojas gali pasiskaityti jau minėtoje knygoje [48], kur jis ras ir atitinkamas programas kompiuteriui bei skaičiavimų rezultatų pavyzdžius, gautus naudojantis tokiomis programomis. Ten jis taip pat galės rasti **tarpšakinių ryšių dinaminis modelius** bei **pusiausvyrinio ekonominio augimo trajektorijos** apskaičiavimo pavyzdį.

Ypatingai rekomenduočiau skaitytojui susipažinti su minėtoje knygoje pateiktais **magistralinių modelių** aprašymais bei **optimalių magistralių apskaičiavimo algoritmais**, programomis ir pavyzdžiais, kuriuos taip pat galima laikyti tiesinio programavimo taikymo ekonomikoje pavyzdžiais.

Aš čia šių modelių, metodų ir algoritmų jau nebeaprašinėsiu, tikėdamasis, kad daugumai skaitytojų pakaks ir to, kas apie tiesinius optimizacinius modelius ir jų taikymą jau parašyta 1.15-jo skyriaus skyreliuose, o žingeidesni skaitytojai apie tai galės savarankiškai pasiskaityti knygoje [48] bei kitose knygose.

Pažymėsiu tik, kad magistralinių modelių ir magistralių ekonomikoje sąvoka ir pavadinimas yra kilęs iš analogijos tarp optimalių ekonomikos vystymosi trajektorijų ir greitkelių, jungiančių didelius miestus ir vadinamų magistralėmis. Norint automobiliu greitai patekti iš vieno geografinio taško į kitą gana tolimą geografinį tašką, dažnai būna naudinga pradžioje patekti į greitkelių, juo pavažiuoti didžiąją laiko dalį gana dideliu greičiu ir tik po to išsukti iš greitkelio ir patekti į norimą geografinį tašką. Panašiai galima elgtis ir ekonomikoje, norint pervesti ekonominę sistemą į naują būseną: **pradžioje naudinga išvesti sistemą į magistralinę ekonominės sistemos vystymosi trajektoriją, pasiekti reikalingą ekonominės sistemos vystymosi tempą bei išsivystymo lygį, o po to jau siekti norimų konkrečių tikslų.**

Tokią magistralinę Lietuvos ekonomikos vystymosi kelią, pavadintą „japoniškuoju ekonomikos vystymosi variantu“, šių eilučių autorius dar 1991 m. siūlė tuolaikiniams Lietuvos vadovams, apie ką jau buvo kalbėta šios mokymo priemonės 1.14.12.2.1. skyrelyje, tačiau į tokį pasiūlymą nebuvo rimtai pažiūrėta, ir Lietuvos ekonomika buvo nuvesta visai ne tuo keliu, dėl ko mūsų valstybė atsidūrė sunkioje ekonominėje būsenoje. Iš tokios būsenos patekti į ekonominio augimo magistralę dabar jau žymiai sunkiau, negu tai buvo galima padaryti 1991 m., kai Lietuvos ekonomika dar nebuvo sugriauta, o ją reikėjo tik pertvarkyti ir modernizuoti. Tada ir

lėšų tokiai modernizacijai buvo žymiai daugiau, nes valstybės turtas dar nebuvo išgrobstytas ir iššvaistytas, o ir užsienio paskolą gauti buvo žymiai lengviau, nes valstybė turėjo daug turto ir nebuvo taip išiskolinusi, kaip dabar.

Norėtusi tikėtis, kad įsijungimas į Europos Sąjungą ir į jos ekonominių ryšių sistemą privers Lietuvos ekonomiką, jei mes nenorime virsti eiline „bananine respublika“, anksčiau ar vėliau pasukti magistraliniu keliu, ir tuomet ekonomikos optimizavimo klausimai taps labiau aktualūs negu dabar. Tačiau kol kas mes vis dar sparčiai smunkame „bananinės respublikos“ link.*

Matematiniai tiesinio optimizavimo modeliai ir optimizavimo metodai gali būti taikomi ne tik ekonomikoje, bet ir sprendžiant 1.14.13. skyrelyje paminėtas globalias ir vietines ekologines bei socialines problemas, nes tų problemų sprendimas reikalauja didelių lėšų ir labai svarbu jomis racionaliai pasinaudoti.

Tiesinis programavimas (tiesinio optimizavimo uždavinių sprendimas, naudojantis tiesiniais matematiniais optimizavimo metodais ir kompiuteriais) jau ir dabar gana plačiai taikomas optimalių mitybos racionų bei kitų įvairių mišinių sudarymui, o taip pat optimizuojant tinklinius grafikus CPM metodu (apie ką bus kalbama antroje šios mokymo priemonės dalyje) ir daugelyje kitų sričių. Reikia pažymėti, kad sprendžiant tiesinius optimizavimo uždavinius taikomas ne vien tik simplekso metodas. Pavyzdžiui, optimizuojant prekių pervežimo iš tiekimo punktų vartotojams planus, sėkmingai taikomas **paskirstymo metodas**, kuris remiasi **potencialų apskaičiavimu**. Su šiuo ir kitais matematiniais optimizavimo metodais ir jų taikymais studentai supažindinami „Matematinų optimizavimo metodų“ ir OT kursuose (žiūr. [47, 128, 149, 212÷223]).

Tiesinio optimizavimo metodai gali būti taikomi ir techninių sistemų projektavime bei jų funkcionavimo valdyme, tačiau šiose srityse žymiai dažniau naudojamosi **netiesinio optimizavimo modeliais ir metodais**.

1.15.2.7. Netiesinių optimizacinių modelių pavyzdžiai

Iki šiol mes nagrinėjome tiesinius optimizacinius modelius, kurių tikslo funkcijos – tiesinės funkcijos, o apribojimai – tiesinės nelygybės bei lygybės. Tai patys paprasčiausi optimizaciniai modeliai, vaizduojantys situacijas, kai priklausomybės tarp tas situacijas charakterizuojančių dydžių yra tiesinės arba gali būti suvestos į tiesines. Tiesinės priklausomybės gana dažnai gaunamos, šiek tiek supaprastinant nagrinėjamą situaciją ir atsižvelgiant tik į svarbiausias priklausomybes. Pavyzdžiui, 1.15.2.3.1. ir 1.15.2.5.1. skyreliuose, sudarydami optimizavimo uždavinių matematinius modelius ir apskaičiuodami gaminių j savikainas s_j , mes atsižvelgėme tik į taip vadinamąsias **proporcingąsias išlaidas**, atsirandančias tiesioginiame gamybos procese, ir neatsižvelgėme į taip vadinamąsias **pastoviąsias išlaidas**, kurias sudaro administracinės, įmonės apšvietimo bei šildymo ir kitos panašios išlaidos. Jei būtume atsižvelgę ir į šias išlaidas, tai lyginamojo pelno p_j apskaičiavimui vietoj formulės

$$p_j = c_j - \sum_{i=1}^n b_{ij} a_i - \sum_{k=1}^K t_{kj} d_{kj} \quad \text{būtume gavę formulę} \quad p_j = c_j - \sum_{i=1}^n b_{ij} a_i - \sum_{k=1}^K t_{kj} d_{kj} - \frac{\pi_j}{x_j}, \quad \text{kuri}$$

vaizduotų vidutinio lyginamojo pelno p_j apytikslę netiesinę priklausomybę nuo gaminių skaičiaus x_j , nes gaminių j gamybos plačiąja prasme **vidutinių pastoviųjų išlaidų π_j dalis, tenkanti vienam to tipo gaminiui**, būtų apytikriai atvirkščiai

* Taip buvo rašoma dar iki Lietuvos įstojimo į ES, kai buvo tikimasi, kad įstojimas į ES padės Lietuvai ir privers jos ekonomiką veikti ir vystytis efektyviau.

proporcinga tų gaminių skaičiui ir apytikriai lygi $\frac{\pi_j}{x_j}$. Ši netiesinė priklausomybė

pilniau ir tiksliau aprašo gamybinės išlaidas B , gaminių savikainą s_j ir lyginamąjį pelną

p_j negu formulė $p_j = c_j - \sum_{i=1}^n b_{ij} a_i - \sum_{k=1}^K t_{kj} d_{kj}$, atsižvelgianti tik į gaminių j realizavimo

kainas c_j , medžiagų i kainas a_i , jų panaudojimo normas b_{ij} , įrenginių k laiko panaudojimo normas t_{kj} ir to laiko vieneto kainas d_{kj} . Naudodamiesi tikslesne lyginamojo pelno p_j formule ir pasirinkdami tikslo funkciją pilnojo pelno P priklausomybę nuo gaminių j kiekių x_j , gautume naują optimizacinį modelį, kuris šiuo atveju išliktų tiesinis, nes $P = \sum_{j=1}^n p_j x_j$ šiuo atveju būtų tiesinė funkcija, besiskirianti

nuo ankstesnės tikslo funkcijos tik pastoviu dėmeniu $-\sum_{j=1}^m x_j \frac{\pi_j}{x_j} = -\sum_{j=1}^m \pi_j$. Todėl visi ankstesniojo modelio nagrinėjimo metu gauti sprendiniai ir išvados išliktų, o pasikeistų tik tikslo funkcijos P reikšmė – bendrasis pelnas P sumažėtų dydžiu $\sum_{j=1}^m \pi_j = \pi$, lygiu

bendroms pastoviosioms gamybos išlaidoms, į kurias anksčiau nebuvo atsižvelgta.*

Galimi ir sudėtingesni atvejai, kuomet netiesinės priklausomybės vis dar gali būti suvestos į tiesinį optimizacinį modelį ir optimizavimo uždavinio sprendimui gali būti panaudoti tiesinio programavimo metodai.

Tarkime, kad planuojama sudėtingo įrenginio, susidedančio iš n tipų detalių j , įeinančių į įrenginį kiekiais q_j , gamyba. Tarkime taip pat, kad tas detales j galima gaminti m skirtingose įmonėse i ir kad per duotąjį laiką T įmonėje i galima pagaminti a_{ij} vienetų j -jo tipo detalių. Reikia taip paskirstyti detalių j gamybą įmonėms i , kad per duotąjį laiką T būtų pagamintas kuo didesnis įrenginių skaičius z .

Pasirinkime valdomaisiais kintamaisiais dydžius x_{ij} , kur x_{ij} – ta laiko T dalis, kurią įmonė i išskiria detalių j gamybai. Tuomet x_{ij} privalo tenkinti apribojimus: $\forall i \forall j (x_{ij} \geq 0)$, $\forall i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \right)$.

Bendrą visose įmonėse per visą laiką T pagamintų detalių j skaičių N_j galima apskaičiuoti, naudojantis formule $N_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}$, o pilnai sukomplektuotų įrenginių skaičių z – formule

$z = \min_j \frac{\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}}{q_j}$, nes pilnai sukomplektuotų įrenginių skaičius z lygus tam detalių j komplektų

skaičiui $\frac{N_j}{q_j}$, kuris yra pats mažiausias.

* Reikėtų pažymėti, jog apskaičiuoti pastoviųjų išlaidų sumas π_j nėra lengva ir todėl dažniausiai įmonėse apskaičiuojama **bendroji pastoviųjų gamybos išlaidų suma π** . Žinant tik π , bet nežinant π_j , jau nebėra taip paprasta apskaičiuoti bendrųjų pastoviųjų gamybos išlaidų vidutinę dalį, tenkančią vienam j -jo tipo gaminiui ir todėl tampa žymiai sunkiau apskaičiuoti vidutinę pilnąją to tipo gaminio savikainą s_j bei vidutinę lyginamojo pelno p_j reikšmę. Atlikę gilesnius ir tikslesnius tyrimus, įsitikintume, jog formulės

p_j dėmenį $\left(\frac{\pi_j}{x_j} \right)$ tuomet tektų pakeisti funkcija $(-\varphi_j(x_j))$, kurios absoliuti reikšmė, didėjant x_j , monotoniškai mažėtų, bet mažėtų vis mažėjančiu tempu.

Maksimizuodami pilnai sukomplektuotų įrenginių skaičių z , gauname tikslo funkciją

$$z = \min_j \frac{\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}}{q_j} \rightarrow \max_{x_{ij}}, \text{ kuri nėra tiesinė, nes jos priklausomybė nuo valdomųjų kintamųjų } x_{ij} \text{ nėra tiesinė, kadangi } \min_j \text{ nėra tiesinis operatorius.}^*$$

Gavome optimizacinį modelį su tiesiniais apribojimais $x_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1$ ir netiesine tikslo funkcija, todėl tokio optimizavimo uždavinio sprendimui negalime pasinaudoti tiesinio programavimo metodais. Tačiau šį modelį, išplėtus valdomųjų kintamųjų sąrašą, nesunku pertvarkyti į tiesinį.

Pavyzdžiui, jei valdomųjų kintamųjų x_{ij} ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$) sąrašą papildyti kintamuoju z , o apribojimus – apribojimu $z \leq \frac{\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}}{q_j}$, tai, pasirinkę tikslo funkciją $P=z+0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + \dots + 0 \cdot x_{ij} + \dots + 0 \cdot x_{nm} = z \rightarrow \max$, gausime tiesinį optimizacinį modelį:

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0 & (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n), \\ z \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 & (i=1,2,\dots,m), \\ z \leq \frac{\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}}{q_j} & (i=1,2,\dots,m), \\ P = z \rightarrow \max. \end{cases}$$

Šitokį uždavinį jau galima spręsti, naudojantis simplekso metodu.

Pavyzdžiui, kai $m=2$, $n=2$, $\bar{q} = (q_1, q_2) = (2, 3)$, $\|a_{ij}\| = \begin{array}{c|cc} i \setminus j & 1 & 2 \\ \hline 1 & 360 & 270 \\ 2 & 480 & 180 \end{array}$, tai gauname

optimizacinį modelį: $x_{11} \geq 0$, $x_{12} \geq 0$, $x_{21} \geq 0$, $x_{22} \geq 0$, $z \geq 0$, $x_{11} + x_{12} \leq 1$; $x_{21} + x_{22} \leq 1$, $z \leq \frac{360x_{11} + 480x_{21}}{2}$, $z \leq \frac{270x_{12} + 180x_{22}}{3}$, $P_1 = -P = -z \rightarrow \min_{x,z}$.

Pereidami nuo nelygybių prie lygybių, gauname:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - (x_{11} + x_{12}), \\ x_4 = 1 - (x_{21} + x_{22}), \\ x_5 = 0 - (z - 180x_{11} - 240x_{21}), \\ x_6 = 0 - (z - 90x_{12} - 60x_{22}), \\ P_1 = 0 - (z + 0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 0x_{21} + 0 \cdot x_{22}) \rightarrow \min_{x_{ij}, z}. \end{cases}$$

Sudarę simplekso lenteles (žiūr. 310-314 lenteles), gauname:

* Kad skaitytojas tuo įsitikintų, rekomenduoju jam panagrinėti kaip kinta funkcija $y = \varphi(x) = \min(x; 5)$: kol $x \leq 5$, tol funkcijos $y = \varphi(x)$ reikšmė, didėjant x , tiesiškai didėja, tačiau, kai x , pasiekęs reikšmę $x=5$, toliau didėja, funkcijos $y = \varphi(x)$ reikšmė išlieka pastovi, t. y. lygi 5.

310. lentelė

B\L	L.n.	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	z
x_3	1	1	1	0	0	0
x_4	1	0	0	1	1	0
x_5	0	-180	0	-240	0	1
x_6	0	0	-90	0	-60	1
P_1	0	0	0	0	0	1

311. lentelė

B\L	L.n.	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_6
x_3	1	1	1	0	0	0
x_4	1	0	0	1	1	0
x_5	0	-180	90	-240	60	-1
z	0	0	-90	0	-60	1
P_1	0	0	90	0	60	-1

312. lentelė

B\L	L.n.	x_{11}	x_5	x_{21}	x_{22}	x_6
x_3	1	3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{90}$
x_4	1	0	0	1	1	0
x_{12}	0	2	$\frac{1}{90}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{90}$
z	0	-180	1	-240	0	0
P_1	0	180	-1	240	0	0

313. lentelė

B\L	L.n.	x_{11}	x_5	x_3	x_{22}	x_6
x_{21}	0,375	1,125	$-\frac{1}{240}$	0,375	-0,25	$\frac{1}{240}$
x_4	0,625	-1,125	$\frac{1}{240}$	-0,375	1,25	$-\frac{1}{240}$
x_{12}	1	1	0	1	0	0
z	90	90	0	90	-60	1
P_1	-90	-90	0	-90	60	-1

314. lentelė

B\L	L.n.	x_{11}	x_5	x_3	x_4	x_6
x_{21}	0,5	0,9	$-\frac{1}{300}$	0,3	0,2	$\frac{1}{300}$
x_{22}	0,5	-0,9	$\frac{1}{300}$	-0,3	0,8	$-\frac{1}{300}$
x_{12}	1	1	0	1	0	0
z	120	36	0,2	72	48	0,8
P_1	-120	-36	-0,2	-72	-48	-0,8

Iš 314-osios lentelės matome, jog optimalus sprendinys yra toks: $x_{11}=0$; $x_{12}=1$; $x_{21}=0,5$; $x_{22}=0,5$; $z=120$; $P=-P_1=120$. Tai reiškia, jog pirmoji įmonė turi gaminti tik antrojo tipo ($j=2$) detales, o antroji įmonė pusę laiko turi skirti pirmojo tipo detalių gamybai ir pusę laiko – antrojo tipo detalių gamybai. Maksimalus pagamintų sudėtingų įrengimų skaičius $z=120$.

Nors kai kuriais atvejais, kaip rodo šis pavyzdys, netiesinius optimizacinius modelius pavyksta pertvarkyti į ekvivalenčius tiesinius, tačiau daugumoje atvejų netiesinius optimizacinius modelius pakeisti ekvivalenčiais tiesiniais modeliais neįmanoma. Tuomet tenka spręsti netiesinius optimizavimo uždavinius, naudojantis specialiais **netiesinio programavimo metodais**. Su šiais uždaviniais ir jų sprendimo metodais gana detalai susipažinsime operacijų tyrimo kurse, spręsdami netiesinius **optimalaus resursų paskirstymo, optimalaus atsargų valdymo, įrengimų keitimo, jų remonto bei jų profilaktinės kontrolės optimalių terminų nustatymo, masinio aptarnavimo sistemos sandaros ir funkcionavimo režimo optimizavimo, optimalių tvarkaraščių sudarymo, optimalių maršrutų išrinkimo, paieškos optimizavimo, optimalių strategijų pasirinkimo lošimuose** ir kitas panašias problemas.

Vietos ir laiko ekonomijos sumetimais nebūtų tikslinga čia dubliuoti matematinių optimizavimo metodų ir operacijų tyrimo kursus, todėl čia nenagrinėsime specialių netiesinių optimizacinių modelių ir netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo bei analizės algoritmų, palikdamas tai ką tik minėtiems kursams, kuriuose taip pat nagrinėjami ir 15.2.1. skyrelyje jau minėtieji **dinaminio ir stochastinio programavimo uždaviniai**.

Čia apsiribosiu tik gana paprastu netiesinio optimizacinio modelio sudarymo, optimalaus sprendinio paieškos ir to sprendinio jautrumo modelio parametrų pokyčiams analizės pavyzdėliu.

Tarkime, jog traktorių gamyklos liejykloje yra dvi liejimo krosnys, kurios skirtos aukštos kokybės plieno gamybai.

Pirmoji krosnis skirta pirmosios markės plieno gamybai ir naudoja vienam liejiniui vieną svorio vienetą legiruojančio priedo P_1 .

Antroji krosnis skirta antrosios markės plieno gamybai ir naudoja vienam liejimui du svorio vienetus legiruojančio priedo P_2 .

Norint gauti pakankamai aukštos kokybės plieną, būtina stengtis kiek galima tiksliau laikytis nustatyto priedų dozavimo, nes gaunamo plieno kokybė blogėja proporcingai nuokrypio nuo normos absoliutaus dydžio kvadratui.

Priedai P_1 ir P_2 gaminami pačioje liejykloje iš medžiagų – priedų komponentių K_1 ir K_2 , naudojant a_{ij} vienetų komponentės K_i priedo P_j vieneto gamybai.

Dydžiai a_{ij} sudaro matricą $\|a_{ij}\| =$

$i \backslash j$	1	2
1	4	6
2	2	8

.

Tarkime, jog duotuoju momentu liejykla turi $b_1=12$ svorio vienetų medžiagos K_1 bei $b_2=10$ svorio vienetų medžiagos K_2 ir greitai laiku negali tų medžiagų atsargų papildyti, kai tuo tarpu stabdyti liejimo procesą, aušinant įkaitintas krosnis, o po to vėl jas kaitinti, būtų tikrai netikslinga ir net pavojinga.

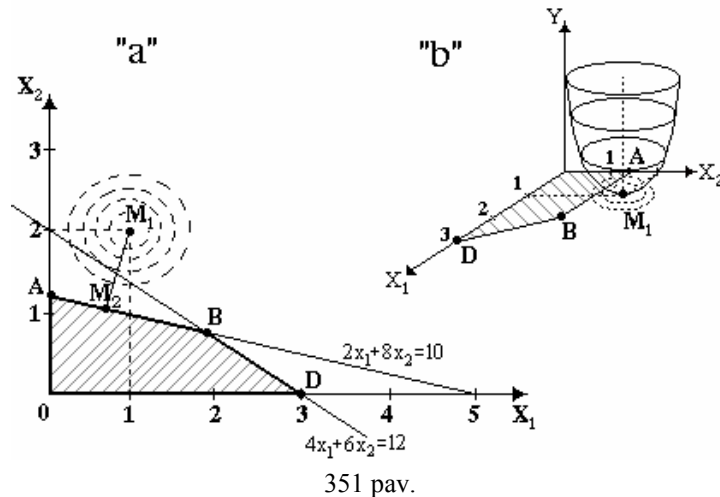
Reikia rasti optimalų esamomis sąlygomis priedų P_1 ir P_2 svorį eiliniam liejiniui, žinant, kad iki kito liejimo ruošimo pradžios komponentių K_1 ir K_2 atsargos bus papildytos.

Sudarysime šiam uždaviniui optimizacinį modelį, pažymėję priedo P_j svorį žymeniu x_j .

Gausime tikslo funkciją $F(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min_{x_1, x_2}$ ir apribojimus $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 12, 2x_1 + 8x_2 \leq 10.$$

Tikslo funkcija $F(x_1, x_2)$ pasiekia **absoliutų minimumą** taške $x_1=1, x_2=2$, tačiau to taško koordinatės netenkina apribojimų, nes $4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 16 > 12$ ir $2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 18 > 10$. Todėl absoliutaus minimumo taškas $x_1=1, x_2=2$ nepatenka į LSS, o tai reiškia, jog toks sprendinys esamomis sąlygomis negali būti realizuotas (žiūr. 351^a pav.). Ieškosime funkcijos $F(x_1, x_2)$ **sąlyginio minimumo**, tenkinančio apribojimus.



351 pav.

Funkciją $y = F(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ vaizduoja sukimosi paraboloidas trimatėje erdvėje (x_1, x_2, y) , (žiūr. 351^b pav.), kur y yra tikslo funkcijos $F(x_1, x_2)$ reikšmė. Tos funkcijos vienetų reikšmių linijos – apskritimai ant paraboloido paviršiaus. Jie projektuojasi į plokštumą (x_1, x_2) koncentriniais apskritimais, turinčiais centrą taške $x_1=1, x_2=2$ ir spindulį $r = \sqrt{F(x_1, x_2)} = \sqrt{y}$. Tai reiškia, jog tikslo funkcijos reikšmė bus tuo mažesnė, kuo mažesnis bus to apskritimo spindulys. Taške M_1 tas spindulys yra lygus 0, tačiau tas taškas nepriklauso LSS. Didindami apskritimo spindulį, mes galų gale pasieksime LSS. Taškas, priklausantis LSS ir apskritimui $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = r^2$, turinčiam mažiausią spindulį, yra taškas M_2 , kuris yra to apskritimo ir tiesės $2x_1 + 8x_2 = 10$ lietimosi taškas. Tame taške tiesė M_1M_2 turi būti statmena tiesei $2x_1 + 8x_2 = 10$, todėl abiejų tiesių kampiniai koeficientai k_1 ir k_2 turi tenkinti sąlygą $k_1 \cdot k_2 = -1$, iš kur išplaukia, jog statmens M_1M_2 lygtis bus $8x_1 - 2x_2 = a$. Parametro a reikšmę rasime, prisiminę, jog tas statmuo kerta tašką M_1 . Todėl $a = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4$, iš kur statmens M_1M_2 lygtis yra $8x_1 - 2x_2 = 4$. Sąlyginio optimumo tašką M_2 rasime kaip tiesių $2x_1 + 8x_2 = 10$ ir $8x_1 - 2x_2 = 4$ susikirtimo tašką. Jo koordinatės $x_1^{(opt)} = \frac{26}{34} = \frac{13}{17}, x_2^{(opt)} = 4x_1^{(opt)} - 2 = \frac{18}{17}$. Tikslo funkcijos

$\hat{F}(x_1, x_2)$ reikšmė tame taške yra optimali, nes ji yra mažiausia tarp leistinų reikšmių. Ji lygi

$$\hat{F}^{(opt)} = \frac{16}{17}.$$

Sąlyginį tikslo funkcijos $F(x_1, x_2)$ optimumą t. y. ribotos funkcijos $\hat{F}(x_1, x_2)$ optimumą, galima rasti ne tik čia pailiustruotu geometriniu būdu, bet ir analiziškai, naudojantis **Lagranžo koeficientų metodu**.

Lagranžo funkcija $\Lambda(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda(2x_1 + 8x_2 - 10)$ tiesės $2x_1 + 8x_2 = 10$ taškuose sutaps su tikslo funkcija $F(x_1, x_2)$, nes tuose taškuose daugiklis $(2x_1 + 8x_2 - 10)$ bus lygus 0. Todėl tos tiesės taškuose sutaps abiejų funkcijų – $\Lambda(x_1, x_2, \lambda)$ ir $\hat{F}(x_1, x_2)$ – minimumai.

$$\text{Iš lygčių sistemos} \begin{cases} \frac{\partial \Lambda(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial \Lambda(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + 8\lambda = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

rasime x_1 , x_2 ir λ reikšmes funkcijos $\Lambda(x_1, x_2, \lambda)$ **sąlyginio ekstremumo** taške, o kadangi $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2} = 2$,

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \text{ ir jakobianas } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ bei } \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2} = 2 > 0, \text{ tai}$$

tas ekstremumo taškas bus Lagranžo funkcijos (o kartu ir tikslo funkcijos $\hat{F}(x_1, x_2)$) minimumo taškas.

Išsprendę sudarytąją lygčių sistemą, randame, jog $\lambda = \frac{4}{17}$, $x_1 = \frac{13}{17}$, $x_2 = \frac{18}{17}$, t. y. **gauname tą**

patį optimalų sprendinį, kaip ir sprendami optimizavimo uždavinį geometriniu būdu.

Analizinis metodas yra universalesnis tuo atžvilgiu, kad jį galima taikyti ne tik dvimačiu bei trimačiu atveju, kada situaciją galima atvaizduoti brėžinyje, bet ir tuomet, kuomet valdomųjų kintamųjų skaičius n yra didesnis už 3.

Dabar išnagrinėsime optimalaus sprendinio jautrumą matematinio modelio $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 \rightarrow \min_{x_1, x_2}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ parametų b_1 , b_2 , c_1 , c_2 ir a_{ij} pokyčiams.

Tokį nagrinėjimą šiuo paprastu atveju galima atlikti ir grafiškai, ir analiziškai.

Norėdamas, kad skaitytojas geriau suvoktų tokio nagrinėjimo esmę, pradžioje pailiustruosiu grafinio metodo taikymą, o vėliau pereisiu prie analizinio.

Tarkime, jog keičiasi tik parametro b_1 reikšmė, kuri pradinėje situacijoje buvo $b_1^{(pr.)} = 12$, o visų kitų parametų reikšmės išlieka tos pačios.

Tuomet gauname tokį optimizacinį modelį: $F(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min_{x_1, x_2}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$,

$$4x_1 + 6x_2 \leq b_1, \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 10.$$

Keičiant b_1 , tiesė $4x_1 + 6x_2 = b_1$ slankios lygiagrečiai pačiai sau. Didinant b_1 reikšmę, optimalus sprendinys nesikeis. Jis nesikeis ir mažinant b_1 reikšmę, jei b_1 reikšmė bus ne mažesnė už $b_1^{(M_2)}$ reikšmę, kuri atitiks tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ padėtį tuo momentu, kada ji kirs tašką M_2 (žiūr. 351^a ir 352 pav.).

$$\text{Žinodami, jog } x_1^{(M_2)} = \frac{13}{17}, \quad x_2^{(M_2)} = \frac{18}{17}, \text{ galime rasti } b_1^{(M_2)} \text{ reikšmę } b_1^{(M_2)} = 4x_1^{(M_2)} + 6x_2^{(M_2)} = \frac{160}{17} = 9\frac{7}{17}.$$

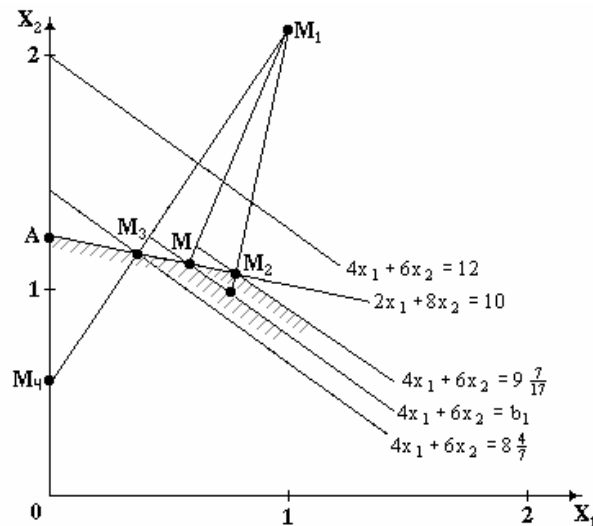
$$\text{Tai reiškia, jog, kai } 9\frac{7}{17} \leq b_1 < +\infty, \text{ tai } x_1^{(opt)} = \frac{13}{17}, \quad x_2^{(opt)} = \frac{18}{17}, \quad F^{(opt)} = \frac{16}{17}, \text{ t. y. optimalus}$$

sprendinys išliks stabilus (jo jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1}$ bus lygūs 0).

Toliau mažinant b_1 , optimalus sprendinys jau keisis. Panagrinėsime tą keitimąsi.

Iš taško $M_1(x_1=1; x_2=2)$ pravesime tiesę M_1M_4 , statmeną tiesėms $4x_1 + 6x_2 = b_1$ (žiūr. 352 pav.).

Tai bus tiesė $6x_1 - 4x_2 = -2$. Ji kirs tiesę $2x_1 + 8x_2 = 10$ taške $M_3(x_1 = \frac{3}{7}; x_2 = \frac{8}{7})$.



352 pav.

Tiesė $4x_1 + 6x_2 = b_1$, kertanti tašką M_2 , bus tiesė $4x_1 + 6x_2 = 4 \cdot x_1^{(M_2)} + 6x_2^{(M_2)} = 4 \cdot \frac{13}{17} + 6 \cdot \frac{18}{17} = 9 \frac{7}{17}$.

Tiesė $4x_1 + 6x_2 = b_1$, kertanti tašką M_3 , bus tiesė $4x_1 + 6x_2 = 4 \cdot \frac{3}{7} + 6 \cdot \frac{8}{7} = 8 \frac{4}{7}$.

Įrodysime, jog, kai b_1 keisis segmente $8 \frac{4}{7} \leq b_1 \leq 9 \frac{7}{17}$, (t. y. kai tiesių $2x_1 + 8x_2 = 10$ ir $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo taškas M slankios atkarpoje M_2M_3), tai toks kampinis taškas M, kuris kartu bus ir apskritimo $F(x_1, x_2) = r^2$ lietimosi tašku, bus ir optimumo taškas. Jo koordinatės: $x_1 = 0,4b_1 - 3$, $x_2 = 2 - 0,1b_1$.

Tam pakanka įrodyti, kad atkarpa M_1M (apskritimo spindulys $r = \sqrt{F(x_1, x_2)}$) yra šiuo atveju trumpiausias atstumas nuo taško M_1 iki LSS.

Iš stataus trikampio $M_1M_2M_3$ išplaukia, kad bet koks taškas, paimtas ant LSS ribos – atkarpos AM, bus labiau nutolęs nuo taško M_1 negu taškas M. Iš kito stataus trikampio, kurį sudaro tiesė $4x_1 + 6x_2 = b_1$, susikirsdama su tiese M_1M_4 , išplaukia, kad bet koks taškas, paimtas ant LSS kitos dabartinės ribos – tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ atkarpos, einančios nuo taško M į dešinę ir žemyn, – taip pat bus labiau nutolęs nuo taško M_1 . Todėl kampiniame taške M, priklausančiame LSS, tikslo funkcija $\hat{F}(x_1, x_2)$ turės mažiausią reikšmę.

Analogiškai galima įrodyti, kad kai b_1 mažės ir toliau, ir tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo su tiese $2x_1 + 8x_2 = 10$ taškas slinks nuo taško M_3 į kairę, tai optimumo tašku taps tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo taškas su tiese, statmena į ją, t. y. su atkarpa M_1M_4 . Jo koordinatės: $x_1^{(opt)} = \frac{b_1 - 3}{13}$, $x_2^{(opt)} = \frac{3b_1 + 4}{26}$.

Taip tęsis iki tol, kol tas optimumo taškas, slinkdamas atkarpa M_3M_4 žemyn ir į dešinę, nepasieks taško M_4 , turinčio koordinatės $x_1^{(M_4)} = 0$; $x_2^{(M_4)} = 0,5$, t. y., kol parametro b_1 reikšmė, bemažėdama, netaps lygi $b_1^{(M_4)} = 4x_1^{(M_4)} + 6x_2^{(M_4)} = 3$.

Kai b_1 reikšmė taps mažesnė už 3, tai, kaip nesunku įrodyti, optimumo tašku taps tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo taškas su tiese $x_1 = 0$, turintis koordinatės $x_1^{(opt)} = 0$; $x_2^{(opt)} = \frac{b_1}{6}$.

Taigi, kai b_1 mažėja nuo $+\infty$ iki $9 \frac{7}{17}$, tai optimumo taškas yra taškas M_2 ir nesikeičia, t. y.

$$x_1^{(opt)} = \frac{13}{17}, x_2^{(opt)} = \frac{18}{17}, F^{(opt)} = \frac{16}{17}. \text{ Jautrumo koeficientai } \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}, \frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1} \text{ lygūs } 0.$$

Kai b_1 mažėja nuo $9 \frac{7}{17}$ iki $8 \frac{4}{7}$, tai optimumo taškas M slenka atkarpa M_2M_3 taško M_3 link ir yra tiesių $4x_1 + 6x_2 = b_1$ ir $2x_1 + 8x_2 = 10$ susikirtimo taškas, turintis koordinatės $x_1^{(opt)} = 0,4b_1 - 3$,

$x_2^{(opt)} = 2 - 0,1b_1$. Optimalaus sprendinio jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,4$; $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = -0,1$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $F^{(opt)} = 0,17b_1^2 - 3,2b_1 + 16$. Jos jautrumo koeficientas $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,34b_1 - 3,2$, keičiantis b_1 , keičiasi: b_1 mažėjant nuo $9\frac{7}{17}$ iki $8\frac{4}{7}$, jautrumo koeficientas $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1}$ mažėja nuo 0 iki $-\frac{2}{7}$.

Kai b_1 toliau mažėja nuo $8\frac{4}{7}$ iki 3, tai optimumo taškas, būdamas tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo tašku su tiesės $6x_1 - 4x_2 = -2$ atkarpa M_3M_4 , slenka ta atkarpa nuo taško M_3 taško M_4 link. Optimalus sprendinys $x_1^{(opt)} = \frac{b_1 - 3}{13}$, $x_2^{(opt)} = \frac{3b_1 + 4}{26}$, $F^{(opt)} = \frac{(b_1 - 16)^2}{52}$. Jautrumo koeficientai: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{1}{13}$; $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = -0,1$, $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{b_1 - 16}{26}$. Jautrumo koeficientas $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1}$, mažėjant b_1 nuo $8\frac{4}{7}$ iki 3, mažėja nuo $-\frac{2}{7}$ iki $-0,5$.

Kai b_1 mažėja nuo 3 iki 0, tai optimumo taškas, būdamas tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo tašku su tiese $x_1 = 0$, slenka ta tiese nuo taško M_4 žemyn. Optimalus sprendinys $x_1^{(opt)} = 0$, $x_2^{(opt)} = \frac{b_1}{6}$, $F^{(opt)} = \frac{b_1^2 - 24b_1}{36} + 5$. Jautrumo koeficientai: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$; $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{1}{6}$, $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{b_1 - 12}{18}$. Jautrumo koeficientas $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial b_1}$, kai b_1 mažėja nuo 3 iki 0, mažėja nuo $-0,5$ iki $-\frac{2}{3}$.

Tą patį rezultatą galima gauti ir analiziškai, nesinaudojant grafinėmis priemonėmis (tiksliau, beveik nesinaudojant jomis), nes, jei visai neįsivaizduotume LSS ir taško M_1 padėties, tai tektų perrinkti žymiai daugiau variantų.

Tarkime, jog mes jau žinome, kad absoliutaus optimumo taškas M_1 yra už LSS ribų, ir todėl žinome, kad, keičiantis b_1 , sąlyginio optimumo taškas gali būti tik ant LSS ribų, t. y. gali būti arba

- 1) tiesės $2x_1 + 8x_2 = 10$ taškas arba
- 2) tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ taškas arba
- 3) teisių $2x_1 + 8x_2 = 10$ ir $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo taškas arba
- 4) tiesės $4x_1 + 6x_2 = b_1$ ir tiesės $x_1 = 0$ susikirtimo taškas.

Pirmuoju atveju, naudodamiesi Lagranžo metodu, gauname tokį optimizacinį modelį:

$$\begin{cases} \Lambda(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda(2x_1 + 8x_2 - 10) \rightarrow \min_{x_1, x_2}, \\ 2x_1 + 8x_2 - 10 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq b_1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Iš šio modelio gauname:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + 8\lambda = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 - 10 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq b_1. \end{cases}$$

Iš šios lygčių ir nelygybių sistemos išplaukia: $x_1^{(opt)} = \frac{13}{17}$, $x_2^{(opt)} = \frac{18}{17}$, $4 \cdot \frac{13}{17} + 6 \cdot \frac{18}{17} \leq b_1$, t. y.

$b_1 \geq 9\frac{7}{17}$, kas sutampa su rezultatu, gautu, naudojantis grafiniu metodu.

Antruoju atveju gauname tokį optimizacinį modelį:

$$\begin{cases} \Lambda(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda(2x_1 + 8x_2 - 10) \rightarrow \min_{x_1, x_2}, \\ 4x_1 + 6x_2 - b_1 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Iš šio modelio išplaukia: $2(x_1 - 1) + 4\lambda = 0$, $2(x_2 - 2) + 6\lambda = 0$, $4x_1 + 6x_2 - b_1 = 0$, $2x_1 + 8x_2 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, iš kur gauname: $\lambda = \frac{16 - b_1}{26}$, $x_1^{(opt)} = \frac{b_1 - 3}{13}$, $x_2^{(opt)} = \frac{3b_1 + 4}{26}$, $\frac{b_1 - 3}{13} \geq 0$, $\frac{3b_1 + 4}{26} \geq 0$, $2 \cdot \frac{b_1 - 3}{13} + 8 \cdot \frac{3b_1 + 4}{26} \leq 10$.

Sprendami nelygybių sistemą, randame, jog $3 \leq b_1 \leq 8\frac{4}{7}$, kas sutampa su rezultatu, gautu grafiniu būdu.

Trečiuoju atveju jau net nebereikia Lagranžo funkcijos, nes tiesių $2x_1 + 8x_2 = 10$ ir $4x_1 + 6x_2 = b_1$ susikirtimo tašką galime rasti ir be jos: $x_1 = 0, 4b_1 - 3$, $x_2 = 2 - 0,1b_1$.

Šis sprendinys yra leistinas, kai $x_1 \geq 0$ ir $x_2 \geq 0$, t. y., kai $7,5 \leq b_1 \leq 20$.

Tačiau ši b_1 kitimo sritis persidengia su anksčiau gautomis leistinų sąlyginai optimalių sprendinių leistino b_1 kitimo sritimis, todėl reikia patikrinti, kuris iš sprendinių $x_1 = 0, 4b_1 - 3$, $x_2 = 2 - 0,1b_1$ ar $x_1 = \frac{b_1 - 3}{13}$, $x_2 = \frac{3b_1 + 4}{26}$ yra geresnis srityje $7,5 \leq b_1 \leq 8\frac{4}{7}$, o taip pat, kuris iš sprendinių $x_1 = 0, 4b_1 - 3$, $x_2 = 2 - 0,1b_1$ ar $x_1 = \frac{13}{17}$, $x_2 = \frac{18}{17}$ yra geresnis srityje $9\frac{7}{17} \leq b_1 \leq 20$.

Lygindami tikslo funkcijų reikšmes, nesunkiai įsitikiname, jog srityje $7,5 \leq b_1 < 8\frac{4}{7}$ tikslo funkcija $F = 0,17b_1^2 - 3,2b_1 + 16$, atitinkanti sprendinį $x_1 = 0, 4b_1 - 3$, $x_2 = 2 - 0,1b_1$, yra didesnė už $F = \frac{(b_1 - 16)^2}{52}$, o taip pat srityje $9\frac{7}{17} \leq b_1 \leq 20$ ji yra didesnė už $F = \frac{16}{17}$. Taške $b_1 = 8\frac{4}{7}$ gauname lygybę $\frac{(b_1 - 16)^2}{52} = 0,17b_1^2 - 3,2b_1 + 16$, o taške $b_1 = 9\frac{7}{17}$ – lygybę $0,17b_1^2 - 3,2b_1 + 16$. Taigi, belieka, kad sprendinys $x_1 = 0, 4b_1 - 3$, $x_2 = 2 - 0,1b_1$ bus optimalus tik srityje $8\frac{4}{7} \leq b_1 \leq 9\frac{7}{17}$, kas sutampa su rezultatu, gautu grafiniu būdu.

Ketvirtuoju atveju, analogiškai samprotaudami, kaip ir trečiuoju, gauname, jog tiesių $4x_1 + 6x_2 = b_1$ ir $x_1 = 0$ susikirtimo taškas $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{b_1}{6}$ bus optimaliu sprendiniu, kai $0 \leq b_1 \leq 3$.

Taigi, analizinis metodas davė tuos pačius rezultatus, kaip ir grafinis.

Jei būtume keitę parametro b_2 reikšmę, nekeisdami kitų parametrų reikšmių, tai analogišku būdu (ir grafiniu, ir analiziniu) būtume gavę, jog modelio $F(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min_{x_1, x_2}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $4x_1 + 6x_2 \leq 12$, $2x_1 + 8x_2 \leq b_2$ optimalus sprendinys yra toks:

$$1) \text{ kai } 13\frac{9}{13} \leq b_2 < +\infty, \text{ tai } x_1^{(opt)} = \frac{9}{13}, x_2^{(opt)} = \frac{20}{13}, F^{(opt)} = \frac{4}{13};$$

$$2) \text{ kaip } 13\frac{1}{7} \leq b_2 \leq 13\frac{9}{13}, \text{ tai } x_1^{(opt)} = \frac{48 - 3b_2}{10}, x_2^{(opt)} = \frac{b_2 - 6}{5}, F^{(opt)} = 0,13b_2^2 - 3,5b_2 + 24,68;$$

$$3) \text{ kai } 1 \leq b_2 \leq 13 \frac{1}{7}, \text{ tai } x_1^{(\text{opt})} = \frac{b_2 + 16}{34}, x_2^{(\text{opt})} = \frac{2b_2 - 2}{17}, F^{(\text{opt})} = \frac{(b_2 - 18)^2}{68};$$

$$4) \text{ kai } 0 \leq b_2 \leq 1, \text{ tai } x_1^{(\text{opt})} = \frac{b_2}{2}, x_2^{(\text{opt})} = 0, F^{(\text{opt})} = \frac{(b_2 - 2)^2}{4} + 4.$$

Analogiškai galima nustatyti, kaip kinta optimalus sprendinys, kai kinta modelio kitų parametru reikšmės.

Pavyzdžiui, kai kinta parametro c_2 reikšmė, nesikeičiant kitų parametru reikšmėms, tai gauname:

$$1) \text{ srityje } 0 \leq c_2 \leq 1: x_1^{(\text{opt})} = 1, x_2^{(\text{opt})} = c_2, F^{(\text{opt})} = 0;$$

$$2) \text{ srityje } 1 \leq c_2 \leq 5,25: x_1^{(\text{opt})} = \frac{21 - 4c_2}{17}, x_2^{(\text{opt})} = \frac{16 + c_2}{17}, F^{(\text{opt})} = \frac{16}{17}(1 - c_2)^2;$$

$$3) \text{ srityje } 5,25 \leq c_2 < +\infty: x_1^{(\text{opt})} = 0, x_2^{(\text{opt})} = 1,25, F^{(\text{opt})} = c_2^2 - 2,5c_2 + \frac{41}{16}.$$

Nagrinėdami parametru a_{11} reikšmės kitimo poveikį, nesikeičiant kitų parametru reikšmėms, gautume, jog:

$$1) \text{ kai } 0 \leq a_{11} \leq 7 \frac{5}{13}, \text{ tai } x_1^{(\text{opt})} = \frac{13}{17}, x_2^{(\text{opt})} = \frac{18}{17};$$

$$2) \text{ kai } 7 \frac{5}{13} \leq a_{11} < +\infty, \text{ tai } x_1^{(\text{opt})} = \frac{18}{4a_{11} - 6}, x_2^{(\text{opt})} = 1 + \frac{a_{11} - 6}{4a_{11} - 6}.$$

Šiek tiek sudėtingiau analizuoti modelio parametru reikšmių kitimo poveikį optimaliam sprendiniui, kai vienu metu keičiasi kelių parametru reikšmės, o taip pat tais atvejais, kai netiesiniai modeliai yra sudėtingesni ir **optimalaus sprendinio paieškai tenka pasitelkti sudėtingesnius metodus (pavyzdžiui, greičiausio nusileidimo, aukšnio pjūvio ir t. t. žiūr. [47, 49, 149, 221÷245]). Netiesinių sveikaskaitinio programavimo uždavinių sprendimui galima taikyti šakų ir ribų metodą**, aprašytą 1.15.2.5.2. skyrelyje.

Dar sudėtingesniais atvejais optimalaus sprendinio paieškai ir jo stabilumo analizei tenka pasitelkti **eksperimentų su matematiniais modeliais (tame tarpe ir su imitaciniais modeliais) metodą**.

Palyginę netiesinių optimizavimo uždavinių matematinius modelius, tų uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių analizės metodus su tiesinių optimizavimo uždavinių matematiniais modeliais, tų uždavinių sprendimo ir analizės metodais, galime padaryti išvadą, jog ir tiesinių, ir netiesinių optimizavimo uždavinių matematinių modelių sudėtis, struktūra ir sudarymo metodikos yra labai panašios, tačiau sprendimo ir analizės matematinis aparatas – žymiai sudėtingesnis. Kitaip tariant, **žiūrėdami į tą palyginimą iš sisteminės metodologijos taikymo pozicijų, matome aiškiai pasireiškiančią analogiją, o iš matematinio aparato taikymo pozicijų – gana didelį skirtumą**.

1.15.3. Sisteminių ir optimizacinių modelių taikymas organizacijų valdyje. Terminalinė ir teleologinė metodologijos. Apribojimų tipai

Kaip jau buvo ne kartą minėta ir šios mokymo priemonės „Įvado“ 1 pav. parodyta, **sisteminiai ir optimizaciniai modeliai bei matematiniai eksperimentai su jais gali būti labai naudingi, sprendžiant organizacijų valdymo problemas, nes gali pakeisti reikalaujančius daug lėšų bei laiko ir rizikingus natūrinius eksperimentus, ar bent jau žymiai sumažinti jų skaičių bei paspartinti optimalaus ar bent jau racionalaus problemos sprendimo paieškas**.

Vietoj to, kad ieškotume „esamos padėties“ pervedimo į „siekiamą padėtį“ trajektorijos, eksperimentuodami „realiame pasaulyje“ (kuriame paieškos klaidos brangiai kainuoja, o kartais net ir neleistinos, kur pati paieška gana ilga ir brangi), galima ieškoti tos trajektorijos eksperimentuojant su modeliu „matematinėse erdvėse“, t. y. pervedant realią problemą į matematinių modelių kalbą ir išsprendžiant ją, naudojantis matematinėmis priemonėmis ir kompiuterine technika (kas žymiai pagreitina paieškos procesą ir daro jį žymiai efektyvesniu sudėtingų problemų atveju), **o po to sugrįžti į „realųjį pasaulį“ su jau**

surastu problemos sprendimu ir realizuoti jį. Toks kelias dažnai būna žymiai lengvesnis, greitesnis ir pigesnis, negu tiesioginis (per „realųjį pasaulį“, žiūr. minėtąjį 1 pav.), o kartais – net vienintelis galimas, nes ne visuomet galima rizikuoti ir ryžtis tokiems natūriniais eksperimentams, kurie kartais gali būti labai pavojingi. Naudojantis matematiniais modeliais, galima matematiškai eksperimentuoti ir tokiose situacijose, kurios dabartiniu metu turimomis techninėmis priemonėmis negali būti realizuojamos (pavyzdžiui, superaukšti slėgiai, superaukštos temperatūros, superdideli greičiai ir pan.).

Galima imituoti praeities įvykius ir atlikti „eksperimentus praeityje“ [136], galima imituoti ir įvykius, vykstančius ateityje, bei eksperimentuoti su jais [9], „atřišant vadovams akis“ [15, 7, 8], kas labai svarbu, priimant valdymo sprendimus.

Detaliau panagrinėsime sisteminių ir optimizacinių modelių bei matematinių eksperimentų su jais taikymą organizacijų ir jose vykstančių gamybinių bei ekonominių procesų valdyme.

Ekonominiai santykiai ir ekonominiai procesai priklauso nuo daugybės įvairių įvairiai persipynusių interesų bei daugelio faktorių, tarp kurių – nemažai atsitiktinių ar atrodančių tokiomis. Todėl **ekonominių procesų vystymąsi gana sunku prognozuoti, o dar sunkiau juos realiai valdyti**, tuo labiau, kad ekonominiai eksperimentai brangiai kainuoja ir neretai būna gana rizikingi ir net pavojingi, nes ekonominės politikos klaidų pasekmės būna gana sunkios. **Nesugebant pakankamai gerai prognozuoti, geriau jau atsisakyti ekonominių procesų griežto valdymo idėjos ir palikti tuos procesus savieigai, laisvos rinkos saviregulavimui.** Tačiau, esant galimybei pakankamai tiksliai prognozuoti, o taip pat esant galimybei sudarytus planus realizuoti, planavimo principas leidžia racionaliau paskirstyti resursus ir greičiau sukoordinuoti tikslus, negu laisvos rinkos ekonomikoje naudojamas **interfeisų laisvo pasirinkimo principas** (žiūr. [18]), kuriuo naudojantis, resursai ilgainiui pasiskirsto ir gali gana patenkinamai susikordinuoti savaime („automatiškai“), veikiant grįžtamiesiems ryšiams, tačiau tai vyksta stichiškai, o, be to, ir pats artėjimo prie pusiausvyros procesas neretai būna ilgas, ne visada pakankamai racionalus, o kartais ir skausmingas.

Todėl aktualu ieškoti priemonių, leidžiančių koordinatoriui tiksliau prognozuoti ir rasti geresnius (optimalius ar pakankamai artimus jiems) koordinuojančius poveikius, racionaliau paskirstyti ribotus resursus.

Viena iš tokių priemonių ir yra matematiniai eksperimentai su sisteminiiais ir optimizaciniais modeliais, tikrinant galimus valdymo sprendimų variantus, prognozuojant jų galimas pasekmes.

Kaip tokie modeliai praktikoje sudaromi ir kaip jais naudojamosi?

Nežiūrint į jau minėtąjį ekonominių procesų sudėtingumą, galima surinkti pakankamai daug juos charakterizuojančių statistinių duomenų ir, nagrinėjant tuos duomenis, pastebėti kai kuriuos dėsningumus. Stengiantis paaiškinti pastebėtus dėsningumus bei statistines priklausomybes tarp įvairių rodiklių, mes galime iškelti tas ar kitas hipotezes. Nagrinėdami tas hipotezes, mes galime sukurti vieną ar kelias logiškai neprieštaringas tokių hipotezių sistemas, sugebančias paaiškinti pastebėtus dėsningumus bei priklausomybes. Šių hipotezių sistemų pagrindu galima sukurti vieną ar kelias imitacinių modelių sistemas ir, eksperimentuojant su jomis, patikrinti, kiek tų sistemų funkcionavimas atitinka tikrovėje vykusius bei vykstančius procesus (žiūr. 1.13.3. skyrelį). Tokiu būdu, **atrinkus tinkamiausias hipotezes ir patobulinus imitacinių modelių sistemą, galima gauti matematinį instrumentą, galintį pakankamai tiksliai vaizduoti ekonominius santykius bei procesus ir tinkantį jų**

tėkmės prognozavimui bei eksperimentavimui su juo, tikrinant siūlomus ekonominių problemų sprendimus, prognozuojant tokių sprendimų pasekmes ir pagal jas atrenkant geriausius sprendinius. Tokie matematiniai eksperimentai, kaip jau buvo minėta, reikalauja žymiai mažiau lėšų bei laiko negu natūriniai, ir ne tik nesurišti su nepageidautinų pasekmių rizika, bet, atvirkščiai, gali padėti ją sumažinti.

Šitokios valdymo priemonės kūrimo ir taikyme (o tai turėtų būti **vienas iš svarbiausių sistemos R tikslų**)*, galima išskirti **dvi stadijas: 1) modelių sistemos bei reikalingų serviso programų sistemos kūrimo ir 2) sukurtos sistemos panaudojimo**. Nors šios stadijos ir jų tikslai šiek tiek persidengia, tačiau pirmosios stadijos tikslas – minėtosios valdymo priemonės sukūrimas, antrosios – tos priemonės daugkartinis panaudojimas bei jos tobulinimas.

Pirmoje stadijoje galima išskirti tokius **etapus: 1) efektyvumo rodiklių ir valdomų bei nevaldomų faktorių**, nuo kurių tie rodikliai priklauso **nustatymo** etapas; 2) **statistinių duomenų** apie tuos rodiklius bei faktorius **rinkimo ir apdorojimo** etapas; 3) nustatytų minėto apdorojimo metu **statistinių priklausomybių analizės** ir tas priklausomybes paaiškinančių **hipotezių formulavimo** etapas; 4) suformuluotų **hipotezių sisteminės bei loginės analizės** ir tų hipotezių neprieštaringų **sistemų konstravimo** etapas; 5) **imitacinių bei optimizacinių modelių**, atitinkančių sukonstruotas hipotetines sistemas, **kūrimo ir jų programinio realizavimo** etapas; 6) **statistinių duomenų, reikalingų sukurtų modelių bei hipotezių patikrinimui, rinkimo ir apdorojimo** etapas; 7) **eksperimentavimo su imitaciniais ir optimizaciniais modeliais**, geriausių hipotezių atrinkimo, jų patikslinimo ir imitacinių bei optimizacinių modelių **tobulinimo** etapas; 8) **programinės serviso sistemos, reikalingos eksperimentavimui su imitaciniais bei optimizaciniais modeliais dialogo su kompiuteriu režime, kūrimo, diegimo ir tobulinimo** etapas.

Antrojoje stadijoje išskiriami tokie etapai: 1) **duomenų apie esamą probleminę situaciją rinkimo, jų sisteminės analizės bei išylančių problemų suvokimo ir formulavimo** etapas; 2) **iškilusių problemų sprendimo variantų konstravimo** etapas; 3) **matematinio eksperimentavimo ir geriausio problemų sprendimo varianto išrinkimo** etapas; 4) pasirinkto sprendimo varianto **prognozuojamų pasekmių tikrinimo natūriniuose eksperimentuose** etapas; 5) pasirinkto sprendinio **realizavimo** etapas; 6) pasirinkto sprendinio bei modelių sistemos **tobulinimo** etapas.

Nagrinėjant organizacijose vykstančius ekonominius, socialinius, kriminalinius ir pan. procesus, kuriuose dalyvauja organizacijų aktyvieji elementai – žmonės, aiškinantis tų procesų ir juose pastebimų reiškinių priežastis, jau nebepakanka vien tik terminalinio požiūrio, kuriuo vadovaujamasi nagrinėjant technines sistemas ir negyvosios gamtos reiškinius. Terminalinį požiūrį tenka papildyti teleologiniu požiūriu, ir tampa reikalinga **terminalinės ir teleologinės metodologijų sintezė**.

Terminalinė metodologija remiasi **objektyviais gamtos dėsniais** ir todėl tinka ne tik gamtos reiškinių analizei, bet ir techninių sistemų, į kurių sudėtį įeina tik **pasyvieji elementai**, projektavimui bei analizei, nes pasyviųjų elementų veikimas griežtai apibrėžtas gamtos dėsnių reikalavimais.

Teleologinė metodologija remiasi **aktyviųjų elementų tikslų ir jų veiklos motyvų nustatymu** (išsiaiškinimu) bei jų **valdymu** ir tinka organizacinių sistemų, kurių pagrindą sudaro **aktyvieji elementai**, projektavimui, analizei ir valdymui.

Technikoje galima projektuoti ir valdyti **mechanizmų veiksmus** ir tam tikslui turi būti naudojama **terminalinė sisteminio projektavimo ir valdymo metodologija**. Organizacijose daug tikslingiau yra valdyti ir projektuoti **ne tiek aktyviųjų elementų**

* Apie sistemą R ir jos vaidmenį sistemoje S bei tų sistemų sąveikavimą žiūr. 1.15.2.1. skyrelį.

veiksmus, kiek jų tikslus, ir tam labiau tinka ne terminalinė, o **teleologinė sisteminio projektavimo ir valdymo metodologija**. Projektuojant sudėtingas organizacines sistemas ir sprendžiant jų tobulinimo bei optimizavimo uždavinius, tikslinga naudotis **abiejų metodologijų sinteze, kurti ir nagrinėti ne tik situacinius, deskriptinius ir normatyvinius, bet ir motyvacinius modelius**. Tokia metodologijų ir jų pagrindu sudarytų modelių sintezė yra galima, nes tose pačiose sistemų funkcionavimo matematinėse erdvėse (žiūr. 1 pav.) galima vaizduoti ir sistemų bei jų elementų veiksmus kaip įėjimų, išėjimų ir fazines tų sistemų bei jų elementų trajektorijas, ir organizacijų bei jų aktyviųjų elementų tikslus kaip tam tikrus tų erdvių taškus, sritis ir trajektorijas, kurių pasiekimas numatytas organizacijų ir aktyviųjų elementų normatyviniuose ir motyvaciniuose modeliuose.

Iš čia išplaukia dar vienas ryšys tarp sistemos S ir sistemoje R naudojamų sistemos funkcionavimo optimizavimo modelių: **sistemos S optimizavimo uždavinių modeliai gali ir turi būti panaudoti, sudarant sistemos S ir jos elementų normatyvinius vidinius ir išorinius modelius bei jos aktyviųjų elementų motyvacinius modelius; iš kitos pusės – neįmanoma sudaryti sistemos S ir jos bei jos elementų funkcionavimo optimizavimo modelių, neatsižvelgus į jos deskriptinį modelį**, nes, pavyzdžiui, valdomųjų kintamųjų vektoriaus koordinačių apribojimais negali būti surasti kitaip, kaip nagrinėjant realią sistemą S ir jos aplinką, t. y. sudarant tos sistemos deskriptinius (vidinį ir išorinį) modelius. Net ir tikslo funkcijos sudarymui bei egzistuojančių reikalingų priklausomybių nustatymui reikalingi sistemos S ir jos elementų modeliai.

Sistemos S ir jos optimizavimo uždavinių **apribojimai gali turėti loginę, fizinę, techninę, ekonominę, ekologinę, juridinę bei socialinę ir moralinę prigimtį**.

Pirmojo tipo apribojimai – **loginiai apribojimai** – neleidžia projektuoti sistemų ir procesų, kurie yra logiškai prieštaringi ir todėl negali realiai egzistuoti. Tokių apribojimų nepaisymas gimdo logines klaidas ir nerealizuojamus projektus. Loginė analizė ir loginis modeliavimas, apie kurį kalbama šios mokymo priemonės 1.16. skyriuje ir specialiaame šių eilučių autoriaus paruoštame **loginių procedūrų formalizavimo ir jų vykdymo automatizavimo kurse**, reikalingi taip pat ir ką tik minėtuose sisteminio ir optimizacinių modelių kūrimo stadijos hipotezių analizės ir hipotezių sistemų konstravimo etapuose, kaip savo rūšies filtras, atsiuojantis tai, kas prieštarauja logikai.

Fiziniai apribojimai, išplaukiantys iš terminalinės metodologijos taikymo, neleidžia projektuoti sistemų ir procesų, prieštaraujančių gamtos dėsniams. Pavyzdžiui, projektas sistemos, kurioje jos materialios dalys turėtų judėti greičiau už šviesą, neprieštarauja logikai, tačiau, kaip teigia Einšteino reliatyvumo teorija, prieštarauja fizikos dėsniams, ir toks projektas mūsų pasaulyje, kuriame galioja tokie fizikos dėsniai, yra laikomas nerealium.

Techniniai ir technologiniai apribojimai atsiranda, atsižvelgus į turimas technines bei technologines galimybes. Pavyzdžiui, kosminio laivo, skirto skrydžiui į tolimus žvaigždynus, projektas gali tenkinti visus loginius ir fizinius apribojimus, bet tuo pačiu būti šiandien techniškai nerealus, nes tokio laivo sukūrimui šiandien žmonijos techninės ir technologinės galimybės dar per silpnos.

Ekonominiai apribojimai atsiranda, atsižvelgus į mūsų ekonomines galimybes: nemaža rasime projektų, kurie neprieštarauja nei loginiams, nei fiziniams, nei techniniams apribojimams, tačiau negali būti šiandien realizuoti, nes šiandien mums trūksta resursų ar netikslinga panaudoti turimus resursus tų projektų įgyvendinimui, nes yra kitų, šiandien labiau svarbių ir labiau reikalingų tų resursų panaudojimo krypčių.

Ekologiniai apribojimai atsiranda, analizuojant bei prognozuojant tą poveikį į gyvąją gamtą ir jos aplinką, kuris galėtų atsirasti, realizavus mūsų siūlomus projektus. Žmonija ilgą laiką nekreipė reikiamo dėmesio į ekologinius apribojimus ir jau suspėjo stipriai pakenkti gyvajai gamtai bei pačiai sau, o dabar už tai neretai moka žymiai brangiau, negu ta nauda, kuri buvo gauta, realizuojant ekologiškai kenksmingus projektus. **Žmonijai visais laikais pakakdavo proto techninių naujovių, galinčių žymiai padidinti jos techninį bei gamybinį potencialą, sugalvojimui bei sukūrimui, tačiau dar ir dabar žmonijai dažnai nepakanka išminties tų naujovių ekologinių pasekmių nustatymui.** Čia irgi galėtų pasitarnauti sisteminis modeliavimas bei eksperimentai su imitaciniais modeliais. Apie tai liudija Dž. Foresterio, D. Medouzo (Meadows D.) ir kitų sukurti modeliai bei modeliavimo rezultatai (žiūr. [9]), Romos klubo darbai, apie ką jau buvo kalbėta 1.14.13. skyrelyje.

Juridiniai apribojimai atsiranda, atsižvelgus į veikiančius visuomenėje įstatymus bei kitas juridines normas. Jie normuoja žmonių poelgius ir organizacijų veiklą, drausdami peržengti įstatymų bei kitų juridinių potvarkių nustatytas ribas. Žinoma, **juridinis įstatymas – mažiau beapeliacinis ir mažiau patvarus apribojimas, kaip, pavyzdžiui, gamtos dėsnis**, nes juridinius įstatymus sukūrė pati visuomenė ir ji pati gali juos keisti savo nuožiūra (aišku, atsižvelgdama į objektyvias tokių pakeitimų pasekmes). Tačiau **nesiskaitymas su juridiniais apribojimais ir juridinių įstatymų gana dideliu inertiškumu – didelė ir dažniausiai sunki klaida, už kurią reikia mokėti ir individams, tuos įstatymus pažeidusiems, ir organizacijoms ir visai visuomenei.**

Socialiniai, nacionaliniai (etniniai) ir moraliniai apribojimai panašūs į juridinius, nes išreiškia visuomenės ir jos narių nuomones, jų įsitikinimus, susiklosčiusias tradicijas, tačiau skiriasi nuo juridinių, nes neturi **juridinės normos** statuso. Bet tai nereiškia, jog šie apribojimai nereikšmingi. Ypatingai svarbūs moraliniai apribojimai. Istorijoje gausu pavyzdžių, kokias sunkias pasekmes gali iššaukti nesiskaitymas su šiais apribojimais. Kartais tos pasekmės ateina ne iškart, tačiau tas uždelsimas tik pasunkina jas. **Blogis trumpuose susirėmimuose su gėriu dažnai laimi prieš gėrį, nes blogio kovos priemonių ir metodų arsenalas žymiai turtingesnis. Juk blogiui negalioja moraliniai apribojimai. Tačiau blogis negali egzistuoti ilguose laiko intervaluose, nes jis pats susinaikina, kadangi blogis negali egzistuoti vienas, neeksploatuodamas gėrio. Todėl ne tik doroji visuomenės dalis, bet ir nugalėjęs blogis pradeda rūpintis morale.** Todėl visuomenėje ir atsiranda **moralinės normos** ir moraliniai apribojimai, neleidžiantys jai susinaikinti, pavirstant visuotinio blogio karalyste. Todėl **ne tik amoralu, bet ir neišmintinga nesilaikyti moralės normų, nes moralė – tai žmonijos istorinės patirties ir žmogaus buitinės patirties kaupimo dėka susiformavusi visuomenės išmintis.**

Galima kalbėti ir apie **organizacinius apribojimus**. Jau pats organizacijos ir, bendrai, **pirmojo tipo sistemos sudarymas, jungiant objektus – sistemos elementus – į tam tikrą struktūrą, yra tuo pačiu metu ir tam tikrų apribojimų sistemos elementų atžvilgiu įvedimas.** Be tų apribojimų sistemos elementų visuma negalėtų turėti stabilios struktūros, negalėtų egzistuoti kaip pirmojo tipo sistema, o būtų tik vienas su kitu nesurištų objektų aibė. Todėl **kiekviena organizacija turi savo įstatus ar nuostatus, kurie duoda savo nariams naujas galimybes** (dėl jų individai ir jungiasi į organizacijas), **veikiant jiems, kaip sistema ar jos dalis, ir tuo pačiu metu apriboja kai kuriuos tų narių individualios fiziškai galimos veiklos aspektus.** Kovoti prieš tokius apribojimus būtų neprotinga, jei organizacija atsiranda į tą organizaciją besijungiančių individų laisva valia. Reikia tik nepamiršti, kad **galutinis bet kokios organizacijos tikslas turėtų būti jos narių galimybių, siekiant**

organizacijos ir jos narių tikslų, didinimas; kad apribojimai, įvesti sudarant organizacijas, privalėtų visiškai atsipirkti tomis naujomis galimybėmis, kurias duoda organizacijos. Šita tiesa neretai pamirštama ir tada **ne organizacijos pradeda tarnauti žmonėms, o žmonės – organizacijoms**, t. y. žmonės kurdami savo galimybių didinimo sistemą, net patys to nenorėdami, susikuria sau savo pavergimo sistemą. Tuomet kova prieš tokius organizacinius apribojimus ir prieš tokias organizacijas tampa ne tik protinga ir leistina, bet ir būtina. Abejingumas tokiais atvejais yra amoralus ir todėl neturėtų būti toleruojamas.

Prie organizacinių apribojimų priskirtini ir **politiniai apribojimai**, tačiau tais atvejais, kai jie išplaukia iš žmogaus politinių įsitikinimų, **politiniai apsiribojimai tampa labai artimi moraliniams**. Tokius politinius apsiribojimus galima pavadinti **ideologiniais**. Politiniai apribojimai, kuriuos primeta valstybių piliečiams valstybėse egzistuojantys politiniai režimai, priklauso organizacinių apribojimų grupei.

Moraliniams apribojimams artimi ir **religiniai apribojimai**, tačiau jie ne visada sutampa su moraliniais apribojimais, nes religiniai apribojimai turi ir organizacinių, o kartais – net ir juridinių apribojimų bruožų. Tokiais atvejais religiniai apribojimai gali tapti ir nepageidautinų konfliktų priežastimi.

Tačiau tais atvejais, **kai religiniai apribojimai sutampa su moraliniais, jie tampa veiksminga priemone blogio plitimui stabdyti**.

Pagrindinis šios trumpos apribojimų prigimties ir jų ypatybių apžvalgos tikslas – atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad **sudėtingų organizacijų projektavimas ir jų tobulinimas – labai sudėtingas darbas, reikalaujantis, kad tame projektavime ir tobulinime dalyvautų ir patys organizacijos S nariai, ir įvairūs specialistai, atstovaujantys ir tiksliuosius, ir humanitarinius mokslus, techniką ir teisę, psichologiją, sociologiją, mediciną, gamtos apsaugą, politiką ir t. t.** Todėl sistema R, kuri yra kuriama sudėtingos organizacijos S tobulinimui, **privalo savo sudėtyje turėti ne tik įvairių sričių specialistų, bet ir sisteminių analitikų bei dženeralistų**, sugebančių dalykiškai bendrauti su įvairių sričių ir įvairių specialybių atstovais, derinti skirtingus jų požiūrius ir sujungti visų jų pastangas bendram darbui, siekiant bendrų tikslų ir vadovaujantis sisteminė metodologija.

Sudėtingos organizacijos S sistema R, būdama sistemos S valdymo sistemos dalimi, privalo įtraukti į sistemos S tobulinimo darbą beveik visus sistemos S darbuotojus, **paversdama sistemą S savitobulinančia organizacija**, lyg ir tampančia sistemos R dalimi. **Savitobulinančioje organizacinėje sistemoje S sistemos S ir R susilieja, tapdamos viena kitos dalimi**.

Apie patį sudėtingų sistemų projektavimo ir projektų realizavimo procesą, apie **objektinę ir funkcinę** sudėtingų sistemų analizės ir projektavimo metodologijas, giminingas ką tik minėtoms terminalinei ir teleologinei metodologijoms, apie **objektinės ir funkcinės metodologijų sintezę į sisteminę metodologiją** ir tos metodologijos taikymus mes kalbėsime specialiai tam skirtuose antrosios šios mokymosi priemonės dalies skyriuose.*

* Kaip šioje mokymo priemonėje jau ne vieną kartą buvo pabrėžta, apie sudėtingų sistemų sisteminių projektavimą ir sukurtų sisteminių projektų sisteminių realizavimą visi tuo besidomintys dabar, kol antroji mokymo priemonės dalis dar neįrašyta į šių eilučių autoriaus tinklalapį internete ir dar neišspausdinta, gali rasti gana daug naudingos informacijos metodinėse priemonėse [15, 16]. Susipažinimas su jomis bus naudingas ne tik ateityje ir ne tik tiems, kurie taps organizacinių sistemų projektuotojais, sisteminiais analitikais ir dženeralistais. Jis bus naudingas ir dabar visiems šios mokymo priemonės pirmosios dalies skaitytojams, nes pagilins dabar studijuojamo teksto supratimą, padės suvokti, kur ir kaip galima efektyviai pritaikyti dabar įgyjamas žinias.

1.15. skyriaus santrauka

1.13.1. skyrelyje, nagrinėdami sisteminės analizės, sisteminio modeliavimo ir sisteminio projektavimo uždavinių tipus, buvome nustatę, jog trečiojo tipo uždaviniai – sistemų projektavimo uždaviniai – dažnai gali turėti ne po vieną sprendinį, nes projektavimo techninėje užduotyje suformuluotus reikalavimus gana dažnai gali tenkinti keli, keliolika ar net labai daug galimų projekto variantų. Todėl galima teigti, jog **trečiojo tipo sisteminiai uždaviniai „gimdo“ ketvirtojo tipo uždavinius – tinkamiausio (t. y. koku nors mums svarbiu aspektu optimalaus) varianto suprojektavimo ar išsirinkimo uždavinius.**

Sprendžiant ketvirtojo tipo uždavinius, kai nagrinėjamoji **probleminė situacija** yra sudėtinga (pavyzdžiui, kai kuriami projektai yra sudėtingi ar jų galimų variantų aibė yra didelė), jau nebepakanka šioje mokymo priemonėje iki šiol nagrinėtų sisteminių modelių – projektų bei sveiko proto ir intuicijos: **tenka kurti specialius optimizacinius modelius, spręsti optimizavimo uždavinius, taikant specialius metodus, ir analizuoti gaunamus optimalius sprendinius, nagrinėti jų jautrumą modelių parametru pokyčiams.**

Šiai naujai problematikai ir skiriamas šis – 1.15. – mokymo priemonės skyrius. Jo tikslas ir paskirtis – **supažindinti būsimuosius sisteminis analitikus, sisteminis projektuotojus ir dženeralistus su pagrindinėmis šios srities sąvokomis, su optimizavimo uždavinių ir optimizacinių modelių specifika, su tokių uždavinių sprendimo būdais bei gautų sprendinių analize bent jau tiek, kad šios mokymo priemonės skaitytojai, išstudijavę 1.15. skyrių, pajėgtų dalykiškai bendradarbiauti su optimizavimo metodų ir optimizavimo algoritmų kūrimo bei taikymo specialistais, taip pat su sisteminio projektavimo ir optimizavimo uždavinių sprendimo užsakovais** – įvairių lygių vadovais.

1.15. skyrių sudaro trys poskyriai, iš kurių pirmieji du sava eile suskirstyti į skyrelius, turinčius savas specialias paskirtis, kurias šioje santraukoje ir apžvelgsime, atkreipdami skaitytojo dėmesį į svarbesnes tų skyrelių turinio vietas.

Pirmasis – 1.15.1. – poskyris susideda iš trijų skyrelių ir yra įvadinis. Jo paskirtis – **apžvelgus jau anksčiau nagrinėtų sisteminių modelių aibę ir ją šiek tiek papildžius, permesti „tiltuką“ į optimizacinių modelių aibę**, parodant, jog sisteminio projektavimo metu gana dažnai atsiranda reikiamybė spręsti optimizavimo uždavinius ir kurti optimizacinius modelius, o tai neretai iššaukia ir atbulinį ryšį: optimizacinių modelių kūrimo ir optimizavimo uždavinių sprendimo metu gana dažnai tenka naudotis sisteminiais modeliais ir sisteminės analizės bei sisteminio modeliavimo metodais.

Tuo tikslu 1.15.1. poskyrio, pavadinto „Sisteminiai modeliai“, pradžioje išvardijami ir trumpai apibūdinami kai kurie svarbesni šioje mokymo priemonėje nagrinėtų sisteminių modelių aibės poaibiams priklausantys ir 1.15. skyriaus tematikai aktualūs modeliai: išoriniai ir vidiniai; determinuotieji, stochastiniai ir neapibrėžtiniai; objektiniai ir funkciniai; analiziniai ir algoritminiai, pastarųjų tarpe specialiai pažymint imitacinius; deskriptyviniai ir normatyviniai.

Atsižvelgiant į čia paminėtą 1.15.1. poskyrio paskirtį, deskriptiniams ir normatyviniams modeliams išskiriami specialūs – 1.15.1.1. ir 1.15.1.2. – skyreliai, permetantys „tiltuką“ tarp 1.15. skyriaus ir 1.4. skyriaus 1.4.13.1. ir 1.4.13.2. skyrelių, o trečiajame 1.15.1. poskyrio skyrelyje įvedamos ir trumpai apibūdinamos situacinio, normatyvinio siaurąja prasme ir motyvacinio modelių sąvokos.

Situaciniu modeliu vadinamas **probleminės situacijos deskriptinis modelis**, aprašantis tuos šios situacijos ypatumus, į kuriuos sprendimus priimančiam asmuo (SPA) privalo atsižvelgti, ieškodamas problemos sprendinio ir pasirinkdamas vieną iš galimų nagrinėjamos problemos sprendimo variantų.

Normatyviniu modeliu siaurąja prasme (arba **pareigybės modeliu**) vadinamas SPA **pareigybės pasas** (arba supaprastintas jo variantas, vadinamas **pareigine instrukcija**), kuriame reglamentuojama normatyvinė to pareigūno, kurio pareigas eina SPA, veikla.

Modelis, vaizduojantis SPA asmeninius interesus, jo asmeninius tikslus, vadinamas SPA **motyvaciniu modeliu**, nes jis atspindi asmeninius motyvus, kurie skatina SPA pasirinkti iš galimų sprendinių aibės tik tam tikrus sprendinius, kartais net nesiderinančius su pareigybės modelio normatyviniais reikalavimais.

Kai SPA priima sprendimą ne spontaniškai, o apgalvojęs, jis atsižvelgia į visus tris čia ką tik paminėtus modelius ir bando juos derinti. Pagal tai, kuriam modeliui SPA teikia prioritetą, galima atskirti pareigingą SPA nuo mažiau pareigingo, realistą nuo utopisto.

1.15.2. poskyryje nagrinėjami **optimizavimo uždaviniai**, jų matematinis formulavimas, **sudarant optimizacinius modelius, optimizavimo uždavinių sprendimo būdai, optimalių sprendinių jautrumas ir stabilumas**, pateikiami **optimizacinių modelių sudarymo, optimizavimo uždavinių sprendimo ir gautų optimalių sprendinių jautrumo bei stabilumo analizės pavyzdžiai.**

Šis poskyris yra pagrindinis 1.15. skyriaus poskyris. Todėl jis yra pats sudėtingiausias ir pats didžiausias. Jį sudaro septyni pirmojo lygio skyreliai 1.15.2.1÷1.15.2.7, tarp kurių kai kurie pirmojo lygio skyreliai suskaidyti dar ir į antrojo lygio skyrelius: 1.15.2.3. skyrelis skaidomas į skyrelius

1.15.2.3.1., 1.15.2.3.2. ir 1.15.2.3.3., 1.15.2.4. skyrelis – į skyrelius 1.15.2.4.1. ir 1.15.2.4.2., 1.15.2.5. skyrelis – į skyrelius 1.15.2.5.1., 1.15.2.5.2. ir 1.15.2.5.3.

Trumpai apžvelgsime šio poskyrio skyrelių paskirtį, turinį ir kai kurias svarbesnes tuose skyreliuose įvedamas specialias sąvokas bei kai kuriuos svarbesnius tuose skyreliuose suformuluotus teiginius.

1.15.2.1. skyrelyje įvedamos ir trumpai apibūdinamos pagrindinės sąvokos, reikalingos optimizavimo uždavinių formulavimui, matematinių optimizacinių modelių sudarymui, optimizavimo uždavinių sprendimo būdų, gaunamų sprendinių ir jų savybių bei tų savybių analizės procesų aprašymui.

Šio skyrelio skaitytojams rekomenduočiau atkreipti dėmesį (išsiaiškinant jų turinį, denotatus ir taikymą) į šias sąvokas: **probleminė situacija** ir ta **sistema S**, kurioje ta situacija susiformavo; **sprendžiančioji sistema R**, kuri kuriama tam, kad spręstų ir išspręstų kartu su visa sistema S joje iškilusias problemas ir tokiu būdu patobulintų sistemą S bei jos funkcionavimą; **sistemų S ir R santykiai ir tų santykių dialektika** problemų sprendimo paieškos metu bei tų sprendimų įgyvendinimo bei sistemos S tobulinimo eigoje; sistemos S **funkcionavimo efektyvumo rodikliai** ir sąryšiai tarp jų; sistemos S ir jos funkcionavimo **naujų galimybių bei pastebimų trūkumų sisteminė analizė**; sistemos S ir jos funkcionavimo **tobulinimo tikslų išsiaiškinimas ir formulavimas**; sistemos S ir jos funkcionavimo galimi **optimalumo rodikliai**; galimi **optimalumo kriterijai** ir jų taikymo specifinės sritys bei sąlygos; **vienakriterijinis ir daugiakriterijinis optimizavimas**; **daugiakriterijinio optimizavimo specifinės problemos**; vienakriterijinio optimizavimo **optimalumo rodiklio pasirinkimas bei konstravimas**; optimizacinio modelio **valdomieji kintamieji**; **valdomųjų kintamųjų reikšmių keitimo planavimas**; nevaldomi optimizacinio **modelio parametrai**; nevaldomų parametrų reikšmių **tikėtinų įverčių prognozavimas**; optimizacinio **modelio sudedamosios dalys**: tikslo funkcija ir galimi apribojimai; optimizacinio modelio **tikslo funkcija** – funkcija, išreiškianti pasirinkto optimalumo rodiklio priklausomybę nuo valdomųjų kintamųjų ir nuo sistemą S bei jos aplinką charakterizuojančių optimizacinio modelio nevaldomų parametrų; optimizacinio modelio **apribojimai** – nelygybių bei lygybių sistema, matematiškai aprašanti valdomųjų kintamųjų leistino keitimo sritį; **leistinių sprendinių sritis (LSS)** – valdomųjų kintamųjų reikšmių vektoriaus, tenkinančio optimizacinio modelio apribojimus, galimo kitimo sritis; optimizavimo uždavinio **optimalus sprendinys** – valdomųjų kintamųjų reikšmių, priklausančių LSS ir optimizuojančių tikslo funkcijos reikšmę; vektorius ir optimali tikslo funkcijos reikšmė; **optimizacinio modelio sudarymo etapai**: 1) probleminės situacijos sisteminė analizė; 2) optimalumo rodiklio ir optimalumo kriterijaus pasirinkimas ar sukonstravimas; 3) faktorių, nuo kurių reikšmingai priklauso optimalumo rodiklio reikšmė, išsiaiškinimas; 4) optimizacinio modelio tikslo funkcijos valdomųjų argumentų aibės išsiaiškinimas ir aprašymas; 5) optimizacinio modelio nevaldomųjų parametrų reikšmių įverčių nustatymo bei prognozavimo būdų išsiaiškinimas; 6) optimizacinio modelio hipotetinės tikslo funkcijos sudarymas, jos tikrinimas ir tobulinimas; 7) apribojimų, kuriuos turėtų tenkinti tikslo funkcijos argumentai, nustatymas ir jų matematinis aprašymas; 8) optimizacinio modelio kalibravimas ir identifikavimas – optimizacinio modelio parametrų (tikslo funkcijos bei apribojimų koeficientų ir laipsnių rodiklių) reikšmių suderintų įverčių apskaičiavimas; 9) optimizacinio modelio verifikavimas (sudaryto optimizacinio modelio adekvatumo realiai probleminei situacijai galutinis patikrinimas ir galutinė korekcija); **matematinio optimizavimo uždavinio sprendimo etapai**: 1) optimizacinio modelio sudarymas, 2) optimizavimo uždavinio sprendimo metodo parinkimas ir tą metodą atitinkančio algoritmo radimas ar sukonstravimas, 3) optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo programinis ir kompiuterinis realizavimas – optimizacinio modelio valdomųjų kintamųjų ir tikslo funkcijos optimalių reikšmių apskaičiavimas; **optimizavimo uždavinio praktinio sprendimo etapai**: 1) matematinio optimizavimo uždavinio sprendimas, 2) optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizė, 3) informacijos apie optimalų sprendinį ir jo jautrumą bei stabilumą panaudojimas, planuojant optimalaus sprendinio praktinio realizavimo procesą, 4) valdomųjų kintamųjų reikšmių optimalus valdymas, realizuojant optimalų sprendinį, ir gaunamos realios naudos praktinis maksimizavimas; **patenkinamas problemos sprendimas**; **statistiškai optimalus sprendinys**; **lokalūs ir globalūs optimumai**; **statinis (momentinis) ir dinaminis optimalumas**; sistemos S funkcionavimo ir evoliucijos **trajektorijos optimizavimas**; **tiesinis optimizacinis modelis**; **netiesinis optimizacinis modelis**; determinuoto **tiesinio programavimo metodai**; **netiesinio programavimo metodai**; **stochastinis programavimas**; **dinaminis programavimas**; **optimalaus sprendinio jautrumas**; **optimalaus sprendinio stabilumas**; **optimalaus sprendinio jautrumo analizė ir jos vaidmuo**, praktiškai realizuojant optimalų sprendinį sistemoje S; **optimalaus sprendinio stabilumo analizė ir jos vaidmuo**, praktiškai realizuojant optimalų sprendinį sistemoje S; **optimalaus sprendinio realizavimo proceso sistemoje S planavimas**; **optimalaus sprendinio realizavimo sistemoje S procesas ir jo valdymas**; optimizacinių modelių ir **optimizavimo metodų praktinio taikymo sunkumai**; optimizacinių modelių ir **optimizavimo metodų**

praktinio taikymo nepakankamo efektyvumo priežastys; optimizacinių modelių ir optimizavimo metodų praktinio taikymo efektyvumo didinimo būdai; operacijų tyrimas ir jo metodų taikymas sistemos S tobulinime.

Pageidautina, jog skaitytojas 1.15.2.1. skyrelį išstudijuotų taip atidžiai, kad šiame skyrelyje išvardintų sąvokų bei paryškintu tekstu užrašytų formuluočių prasmę **galėtų paaiškinti savais žodžiais, vadovaudamasis ne tiek savo atmintimi, kiek išstudijuoto teksto teisingu supratimu**, leidžiančiu pačiam skaitytojui savarankiškai konstruoti tų sąvokų apibrėžimus bei apibūdinimus ir formuluoti naudingas teisingas išvadas, išplaukiančias iš išstudijuoto teksto teiginių.

Kadangi 1.15.2.1. skyrelio turinys gana abstraktus, tai rekomenduojau skaitytojui dar kartą grįžti prie šio skyrelio turinio, išstudijavus 1.15.2.3. skyrelį, kuriame pateikti konkretūs pavyzdžiai, iliustruojantys 1.15.2.1. skyrelyje įvedamas sąvokas ir jame suformuluotus bendrus teiginius.

1.15.2.2. skyrelyje dar kartą grįžtama prie 1.15.1.3. skyrelyje jau nagrinėtų situacinių, normatyvinių ir motyvacinių modelių, nes **1.15.2.2. skyrelio tikslas – parodyti situacinių, normatyvinių ir motyvacinių modelių sąryšius su optimizaciniais modeliais, apsprendžiančius visų tų modelių vaidmenį sistemose S ir R**, sprendžiant sistemos S ir jos funkcionavimo tobulinimo uždavinius ir tuo tikslu taikant operacijų tyrimo ir sisteminio projektavimo metodus.

1.15.2.3. skyrelyje (kuris, kaip jau buvo minėta apžvelgiant 1.15. skyriaus sudėtį ir struktūrą, yra suskaidytas dar į tris antrojo lygio skyrelius) yra pateiktas labai paprastas optimizavimo uždavinio formulavimo, to uždavinio matematinio modelio sudarymo ir jo sprendimo bei gauto sprendinio jautrumo ir stabilumo sisteminės analizės pavyzdys, nes 1.15.2.3. skyrelio pagrindinis tikslas – **ilustruoti ir konkretizuoti 1.15.2.1. skyrelyje įvestas sąvokas**, reikalingas studijuojant optimizavimo metodų bei operacijų tyrimo kursus ir skaitant optimizavimo problemas nagrinėjančią specialiąją literatūrą. Siekiant suteikti dėstymui kuo didesnę vaizdumą, leidžiantį lengviau suvokti aprašomų dalykų esmę, optimizavimo uždavinio sprendimui ir gauto optimalaus sprendinio jautrumo bei stabilumo analizei šiame skyrelyje pasinaudota **grafiniais metodais** ir tik vėliau – 1.15.2.4. skyrelyje – supažindinama su simplekso algoritmu bei jo taikymais.

1.15.2.3.1. skyrelio tikslas – parodyti, kaip atrodo ir kaip sudaromas determinuotas tiesinis optimizacinis modelis, matematine kalba formuluojantis optimalaus gamybos plano sudarymo uždavinį.

Siekiant šio tikslo, 1.15.2.3.1. skyrelyje nagrinėjama **probleminė situacija**, susidaranti gamybinėje įmonėje (kuri šiuo atveju yra **sistemos S konkretus pavyzdys**), kai įmonės vadovai turi nuspręsti, po kiek įmonėje gaminamos produkcijos asortimentą sudarančių gaminių j įmonė turėtų gaminti, kad gautų maksimalų galimą (turimomis sąlygomis) pelną.

Išsiaiškinus **tikslą**, kurio siekia sistema S, ir pasirinkus **optimalumo rodiklį** (šiuo atveju – įmonės pelną P) bei nustatius **valdomuosius kintamuosius** (šiuo atveju įmonėje gaunamos produkcijos j kiekius x_j , $j=1, 2, \dots, m$), sudaroma **optimizacinio modelio tikslo funkcija**, matematiškai formuluojanti tą tikslą, kurio siekia sistema S, ir išreiškianti optimalumo rodiklio priklausomybę nuo valdomųjų kintamųjų bei nuo kitų faktorių, kurie šiuo atveju nėra SPA valdomi, bet nuo kurių priklauso **optimizacinio modelio parametrai – tikslo funkcijos koeficientų reikšmės**.

Tokiais faktoriais šiuo atveju yra medžiagų i ($i=1, 2, \dots, n$), iš kurių gaminami pardavimui skirti gaminiai j, kainos a_{ij} ; įmonėje turimi tų medžiagų i atsargų dydžiai b_i ; pagamintos produkcijos j vienetų pardavimo kainos c_j ; medžiagos i produkcijos j vieneto pagaminimui reikalingi kiekiai – technologinės normos b_{ij} ; produkcijos j vieneto pagaminimo procesui atlikti reikalingų tiesioginių ir netiesioginių išlaidų sumų vidurkiai d_j .

Nuo šių faktorių priklauso gaminių j savikaina s_j ir lyginamasis pelnas $p_j=c_j-s_j$, kuris gaunamas, pagaminus ir pardavus produkcijos j vienetą.

Pardavus visą pagamintą produkciją, įmonė gautų pelną $P = \sum_{j=1}^m p_j x_j$, todėl tikslo funkcijos

matematinė išraiška šiuo atveju yra $F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m (c_j - s_j) x_j = \sum_{j=1}^m \left[c_j - d_j - \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} \right] x_j \rightarrow \max_{x_1, \dots, x_j, \dots, x_m}$.

Ištačius į šią formulę 1.15.2.3.1. skyrelyje duotas konkrečias rodiklių m, n, a_i , b_i , b_{ij} , c_j ir d_j reikšmes ir apskaičiavus tikslo funkcijos koeficientų p_j reikšmes, reiškiančias produkcijos j vienetų duodamus pelnus, gaunama konkreti tiesinė tikslo funkcija $F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max_{x_1, x_2}$.

Analogiškai parodoma, kaip sudaroma **nelygybių sistema, matematiškai aprašanti tuos apribojimus, kuriuos turėtų tenkinti valdomųjų kintamųjų reikšmės**.

Šiuo konkrečiu atveju apribojimai atsiranda todėl, kad pagamintos produkcijos kiekiai x_1 ir x_2 negali būti neigiamais dydžiais, ir todėl, kad nagrinėjamu momentu įmonė turi ribotus medžiagų, reikalingų gamybai, kiekius ir neturi galimybės tas atsargas staigiai papildyti. Šiame optimizavimo uždavinyje neatsižvelgiama į tai, kad pagaminamos produkcijos kiekius gali riboti ne tik turimos žaliavų bei pusfabrikačių atsargos, bet ir gamybiniai pajėgumai, t. y. turimų darbo vietų ir reikalingos techninės įrangos skaičius. Taip pat neatsižvelgdama į gaminamos produkcijos paklausą: laikoma, jog visa pagaminta produkcija bus parduota jau žinomomis kainomis c_j .

1.15.2.5. skyrelyje išnagrinėtas sudėtingesnis optimizavimo uždavinys, kuriame atsižvelgiama ir į gamybinių pajėgumų galimus apribojimus bei kuriame gaminamos produkcijos įvairovė yra jau didesnė, dėl ko tokio uždavinio jau nebeįmanoma išspręsti grafiniais metodais.

Žinant optimizacinio modelio apribojimus, galima aprašyti ir sudaryti LSS. Šiuo konkrečiu atveju LSS yra dvimatės plokštumos dalis, apribota iškiliumi daugiakampiu, pavaizduotu 333 pav. To daugiakampio kraštines randame brėždami tieses, kurių lygtis gauname analizuodami apribojimų sistemą.

Kadangi šiuo atveju apribojimus išreiškiančios nelygybės yra tiesinės ir tikslo funkcija – taip pat tiesinė funkcija, tai sudarytas optimizacinis modelis priklauso **tiesinių modelių klasei**.

Netiesinių optimizacinių modelių sudarymo ir netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo bei gautų optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizės pavyzdžiai nagrinėjami 1.15.2.7. skyrelyje.

1.15.2.3.2. skyrelis paskirtis – parodyti, kaip grafiniu metodu sprendžiamas tiesinis optimizavimo uždavinys, kurio matematinis modelis buvo sudarytas 1.15.2.3.1. skyrelyje. Nors to metodo galimybės yra ribotos, tačiau to metodo taikymo vaizdumas padeda geriau suprasti optimalaus sprendinio ir jo radimo proceso esmę. Tuo tikslu nubrėžiamas jau minėtasis daugiakampis, vaizduojantis sprendžiamo optimizavimo uždavinio visų leistinų sprendinių sritį, ir, stumiant tiesę $7x_1 + 5x_2 = P$, vadinamą **vienodo pelno tiesę**, tikslo funkcijos $F(x_1, x_2) = 7x_1 + 5x_2$ reikšmės P didėjimo kryptimi, ieškoma leistinų sprendinių srityje tokio taško, kuriame tikslo funkcijos reikšmė būtų pati didžiausia ar bent jau ne mažesnė už tikslo funkcijos reikšmę bet kuriame kitame LSS taške. Tokiu LSS tašku čia nagrinėjamu atveju yra taškas, kuris 333 pav. ir 334 pav. pažymėtas raide C, nes visuose kituose LSS taškuose tikslo funkcijos reikšmė yra mažesnė už jos reikšmę $P^* = 7x_1^* + 5x_2^* = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$ taške C, turinčiame koordinates $x_1^* = 5$ ir $x_2^* = 3$. Jei vienodo pelno tiesę pastumtume dar šiek tiek pirmyn pelno P didėjimo kryptimi, gautume naują vienodo pelno tiesę, kurios taškuose pelnas būtų didesnis už $P^* = 50$, tačiau nė vienas tokios tiesės taškas jau nebepriklausytų LSS. Tokios vienodo pelno tiesės taškai vaizduotų gamybos planus, kurie duotomis sąlygomis, t. y. turint tokias reikalingų medžiagų atsargas, kurių dydžiai yra lygūs duotoms b_1, b_2, b_3 ir b_4 reikšmėms, negalėtų būti realizuoti.

Čia nagrinėjamas konkretus tiesinis optimizavimo uždavinys turi **tik vieną optimalų sprendinį**, charakterizuojamą **optimaliu valdomųjų kintamųjų vektorium** $\bar{X}^* = (x_1^*; x_2^*) = (5; 3)$ ir **optimalia tikslo funkcijos reikšme** $F(x_1^*; x_2^*) = p_1x_1^* + p_2x_2^* = 7x_1^* + 5x_2^* = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = P^*$.

Kai kuriais kitais atvejais tiesinis **optimizavimo uždavinys gali turėti ne vieną, o be galo daug optimalių sprendinių**. Taip galėtų atsitikti tada, kai vienodo pelno tiesės $p_1x_1 + p_2x_2 = P$ būtų lygiagrečios kokiai nors daugiakampio, ribojančio LSS, kraštinei. Tuomet optimumo taškais būtų visi tos kraštinės taškai, nes visuose tuose taškuose tikslo funkcijos reikšmė būtų vienoda ir didesnė už tikslo funkcijos reikšmę kituose LSS taškuose.

Reikia pažymėti, kad optimalaus sprendinio sąvoką ne visi autoriai supranta vienodai. Vieni autoriai tą sąvoką supranta siauriau ir **optimaliu sprendiniu vadina valdomųjų kintamųjų vektoriaus koordinačių optimalias reikšmes**. Kiti autoriai šią sąvoką supranta plačiau ir **optimaliu sprendiniu vadina ne tik valdomųjų kintamųjų reikšmes optimumo taške, bet ir tikslo funkcijos reikšmę tame taške**. Mes šioje mokymo priemonėje dažniausiai laikomės antrojo – platesnio – požiūrio ir, nagrinėdami optimalų sprendinį bei jo jautrumą ir stabilumą, nagrinėjame ne tik valdomųjų kintamųjų optimalių reikšmių kitimą, kintant optimizacinio modelio parametrams, bet ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės pokyčius.

1.15.2.3.3. skyrelyje pateikiami optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo grafinės analizės pavyzdžiai, o kartu su tuo įvedamos tai analizei ir jos rezultatams apibūdinti reikalingos sąvokos: jautrumo koeficientai, valdomųjų kintamųjų ir tikslo funkcijos optimalių reikšmių stabilumo zonos, jautrumo koeficientų stabilumo zonos, optimalių reikšmių ir jautrumo koeficientų reikšmių apskaičiavimo algoritmų stabilumo zonos.

Atliekant optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizę tenka susidurti su daugybe įvairių situacijų, turinčių savo specifiką, į kurią mokymo priemonės autorius norėtų atkreipti skaitytojų dėmesį, tuo siekdamas parodyti jiems, jog sisteminė analizė gali net paprastame reiškinyje

atskleisti daug ypatumų, kurių egzistavimas iš pirmo žvilgsnio dažnai nėra pastebimas. Todėl šiame skyrelyje pateikta gana daug pačių įvairiausių pavyzdžių, kuriuos nagrinėjant tenka taikyti gana įvairius metodus. Susipažinimas su šiame skyrelyje pateiktais optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizės pavyzdžiais ir jų išsiaiškinimas iki tokio lygio, kad skaitytojas savarankiškai galėtų pats tokią analizę atlikti, duos jam dvejopą naudą – ne tik pagilins skaitytojo žinias sprendimų optimizavimo srityje ir padės jam efektyviai naudotis optimizavimo uždavinių sprendimo rezultatais, bet ir praturtins jo žinias ir įgūdžius, reikalingus atliekant sisteminę analizę bet kurioje (ne tik optimizavimo) srityje. Jei skaitytojas, studijuodamas šį skyrelį, vadovausis čia ką tik išsakytu požiūriu, tai skyrelio tekstas nepasirodys jam bereikalingai išpūstas ir nuobodus. Šį skyrelį studijuoti patarčiau ne pasyviai, o aktyviai: ne skaityti visą šio skyrelio tekstą ištisai, o paskaičius jo pradžią ir suvokus optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizės esmę, pradėti tą analizę testuoti savarankiškai, pasižiūrint į mokymo priemonės tekstą tik tada, kai norima patikrinti, ar gauti rezultatai sutampa su tais, kuriuos gavo mokymo priemonės autorius, bei tada, kada skaitytojas susiduria su sunkumais ir nesugeba savarankiškai jų įveikti. **Rekomenduočiau skaitytojui laikyti 1.15.2.3.3. skyrelio tekstą savotišku optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizės uždavinynu, kuriame pateiktos ne tik uždavinių formuluotės, bet ir uždavinių sprendimai, parodantys, kaip buvo gauti tie ar kiti jautrumo ar stabilumo analizės rezultatai.** Skaityti šio skyrelio tekstą, bandant jį įsiminti, kitaip tariant, „išskalti“, – nėra jokios prasmės. Tai pasakytina ne tik apie šio skyrelio, bet ir apie visos šios mokymo priemonės tekstą, kurios tikslas – **ne tik ir ne tiek naudingų žinių, praturtinančių skaitytojo tezaurą, suteikimas, kiek išmokymas sistemškai mąstyti ir kūrybiškai naudotis įgijamomis bei anksčiau įgytomis žiniomis.** Trumpai tariant, 1.15.2.3.3. skyrelyje išspręstus uždavinius reikia ne tiek skaityti, kiek bandyti juos savarankiškai spręsti. Ir ne būtinai visus, o būtent tuos, kurie skaitytojui atrodo dar nepakankamai aiškūs. Kadangi skaitytojai gali būti gana skirtingo lygio, tai ir pateikti pavyzdžiai – gana įvairūs. Visus pavyzdžius nagrinėti patarčiau tik tiems skaitytojams, kurie jaučia, jog jiems tas nagrinėjimas yra reikalingas ir naudingas, nes ugdo ir tobulina jų mąstymą bei sisteminę analizės įgūdžius.

Studijuojantiems šio skyrelio tekstą rekomenduočiau atkreipti dėmesį ir į paryškintu šriftu atspausdintas sąvokas, išsiaiškinti, ką jos reiškia, kodėl tos sąvokos yra reikalingos, kur ir kaip jomis naudojamosi.

Pavyzdžiui, nagrinėdamas tokias sąvokas kaip kapitalo investavimo efektyvumas (bendrasis, lyginamasis, diferencialinis, arba marginalinis, laiko vienetui), produkcijos savikaina ir kaina, vienodų išlaidų tiesės ir jų santykiai su vienodo efektyvumo ir vienodo pelno tiesėmis, skaitytojas neturėtų apsiriboti vien tik 1.15.2.3.3. skyrelio rėmais, bet privalėtų „permesti tiltuką“ tarp šio skyrelio ir jau anksčiau nagrinėto 1.14.12.1.2. skyrelio, išsiaiškindamas, **kokias atvejais kuris optimalumo kriterijus** (pelno maksimumo, išlaidų minimumo, kapitalo investavimo efektyvumo maksimumo, produkcijos savikainos minimumo, pagaminamos produkcijos kiekio maksimumo, produkcijos pagaminimo ir jos realizavimo ciklo trukmės minimumo ir t. t.) **yra tinkamesnis, kokiais atvejais taikomi diskretūs, o kada – tolydūs optimizaciniai modeliai bei jų analizės metodai.**

Nagrinėdamas klausimą, **kaip ir kodėl atsiranda kapitalo investavimo į įvairias ekonomikos sritis efektyvumo artėjimo prie pusiausvyros tendencijos bei kaip ir kodėl ta pusiausvyra nuolat pažeidžiama ir todėl niekada ilgam nenusistovi,** skaitytojas privalėtų neapsiriboti vien tik 1.15.2.3.3. skyrelio rėmais. Jis turėtų „permesti tiltuką“ tarp šio skyrelio ir 1.14.12.2.1. skyrelio, pagilindamas savo suvokimą, kodėl laisvos rinkos mikroekonominiai modeliai negali pakankamai adekvačiai atvaizduoti dabartinėje ekonomikoje realiai vykstančių procesų bei kodėl Lietuvoje populiarus Laisvosios rinkos instituto darbuotojų prognozės ir rekomendacijos ne visada būna teisingos.

Susidūrus šiame skyrelyje su „statinio“ ir „dinaminio“ **izomorfizmo** sąvokomis, skaitytojui būtų naudinga prisiminti šioje mokymo priemonėje ne vieną kartą sutiktus įvairių izomorfizmų pavyzdžius bei **matematinį izomorfizmo apibrėžimą,** pateiktą 1.9.1.5. skyrelyje, ir, apibendrinus visą prisimintą informaciją, praturtinti šio sistematikos mokslui svarbaus termino koncepcinį modelį, susiformavusį skaitytojo galvoje, suvokimu, jog **izomorfizmus galime pastebėti ne tik lygindami sistemų struktūras, bet ir jų funkcionavimą, kitaip tariant, jog izomorfizmai gali egzistuoti ne tik erdvėje, bet ir laike.**

Tiems skaitytojams, kurie nori tobulinti savo teorinio sisteminio mąstymo įgūdžius, rekomenduočiau **atidžiau paanalizuoti šio skyrelio brėžinius ir išsiaiškinti:** ką jais siekiama skaitytojui pasakyti; kaip jie buvo sudaryti ir kodėl jie buvo taip sudaryti; kodėl ir kaip buvo atlikta valdomųjų kintamųjų erdvės transformacija į optimizacinio modelio parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo erdvę; ką tokia transformacija davė ją atlikusiam sisteminiam analitikui; kaip atrodytų valdomųjų kintamųjų erdvės transformacija į kitų optimizacinio modelio parametrų galimo kitimo erdvės ir ką ji parodytų; kokią panašumą tokios transformacijos turi su **konformine transformacija;** kaip ir kodėl atsirado **dvių tipų vienodo pelno tiesės,** ką jos turi bendro ir kuo jos skiriasi; kodėl vienos ir tos pačios vienodo pelno

tiesės taškai gali būti nelygiaverčiai bendrųjų išlaidų ir kapitalo investavimo efektyvumo atžvilgiu; ar gali egzistuoti tokia vienodo pelno tiesė, kurios taškai būtų lygiaverčiai ir bendrųjų išlaidų atžvilgiu, t. y., ar gali vienodo pelno tiesės sutapti su **kapitalo investavimo vienodo efektyvumo tiesėmis**; kuo pasižymi optimizacinio modelio parametrų galimų reikšmių erdvės taškai, kurie buvo pavadinti „ypatingaisiais“; kaip, naudojantis šio skyrelio brėžiniais, būtų galima nustatyti, kaip reikia keisti valdomųjų kintamųjų reikšmes, kad, pasikeitus optimizacinio modelio parametrų reikšmėms, sistemos S funkcionavimas išliktų optimalus ar bent pakankamai artimas optimaliam; kaip būtų galima sukurti tokią kompiuterinę sistemą, kuri leistų SPA operatyviai naudotis optimizavimo uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių jautrumo bei stabilumo analizės rezultatais realių sistemų valdyme.

Šis skyrelis (kaip ir daugelis kitų mokymo priemonės skyrelių) **šalia pagrindinių tikslų – parodyti skaitytojams, kaip atliekama optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizė, ir išmokyti juos ją atlikti – turi ir antrojo plano tikslų, kurie sistemotyros kurse yra net svarbesni už pagrindinius šio skyrelio tikslus.** Šie antrojo plano tikslai suformuluoti skyrelio pabaigoje ir ten pateikti paryškintu šriftu. **Rekomenduoju skaitytojui išigilinti į tas keturias formuluotes.** Tai sustiprins jo įsitikinimą, jog sistemotyros kurso studijos tikrai naudingos, ir padidins jo motyvaciją ši kursą rimtai studijuoti.

1.15.2.4. skyrelyje aprašomas simplekso algoritmas ir nagrinėjami simplekso metodo taikymo pavyzdžiai, sprendžiant tiesinius optimizavimo uždavinius ir analizuojant gautų sprendinių jautrumą bei stabilumą.

Šis skyrelis skaidomas į du antrojo lygio skyrelius: 1.15.2.4.1. ir 1.15.2.4.2.

1.15.2.4.1. skyrelio paskirtis – supažindinti su simplekso algoritmu tuos studentus, kurie dar nestudijavo „Matematinį optimizavimo metodų“ kurso, ir **pagilinti simplekso metodo esmės bei jo taikymo galimybių suvokimą** tiems studentams, kurie minėtąjį kursą jau išstudijavo ir jau moka spręsti tiesinius optimizavimo uždavinius, taikydami simplekso algoritmą, bet dar nemoka analizuoti gaunamų optimalių sprendimų jautrumo bei stabilumo, nemoka **transformuoti gauto optimalaus sprendinio, prisitaikant prie besikeičiančių sąlygų.**

Studentų supažindinimui su simplekso algoritmu šiame skyrelyje pasirinktas **kompleksinis konkretaus tiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo ir simplekso algoritmo aiškinimo uždavinio sprendimo metu metodas**, nes dėstymo praktika parodė ir ne vieną kartą patvirtino, kad toks supažindinimo su simplekso algoritmu metodas yra žymiai efektyvesnis už tradicinį metodą, kurį taikant, supažindinimas su simplekso algoritmu pradedamas nuo simplekso metodo teorinių pagrindų formalaus dėstymo. Šių eilučių autoriaus daugiametė dėstymo praktika parodė, jog tuos pagrindus studentai supranta žymiai lengviau ir giliau, kai jie jau yra praktiškai susipažinę su simplekso algoritmu ir jo taikymais, kai, taikydami simplekso algoritmą, susiduria su nestandartiniais atvejais: sprendinio neegzistavimu, daugelio sprendinių egzistavimu, optimalumo formalaus pakankamo požymio nebūtinumu ir pan. Tada patys studentai pajunta poreikį ne tik mokėti naudotis simplekso algoritmu, bet ir giliau suprasti matematinę jo esmę, jo galimybes ir tų galimybių ribas. Tada simplekso metodo teorinių pagrindų dėstymas patiems studentams tampa reikalingas ir naudingas. Todėl atsiranda studentų suinteresuotumas, studijavimą motyvuotumas.

Šiame skyrelyje sprendžiamas tas pats konkretus optimizavimo uždavinys, kuris 1.15.2.3.2. skyrelyje jau buvo išspręstas grafiniu metodu ir kurio optimalaus sprendinio jautrumas ir stabilumas buvo grafiškai išanalizuoti 1.15.2.3.3. skyrelyje. Tai leidžia interpretuoti ir „vizualizuoti“ rezultatus, gaunamus simplekso metodu, sugretinti ir palyginti artėjimo prie optimalaus sprendinio procesus, gaunamus, taikant simplekso algoritmą ir grafinį metodą. Toks sugretinimas ne tik praturtina bei „pagyvina“ ir pagilina simplekso algoritmo esmės suvokimą, bet ir padaro simplekso algoritmo taikymo procesą „matomą“.

Simplekso lentelės ir tų lentelių partvarkymo algoritmas 1.15.2.4.1. skyrelyje įvedami ne iškart. Pradžioje optimizavimo uždavinio matematinis modelis paprastais ir gerai žinomais algebros metodais pertvarkomas į lygčių sistemą, savo forma beveik atitinkančią pirmąją simplekso lentelę, nuo kurios sudarymo prasideda simplekso algoritmo taikymas. Sudarant ką tik paminėtąją lygčių sistemą, paaiškinama įvedamų **papildomų valdomų kintamųjų** ekonominė esmė, įvedamos **laisvųjų ir bazinių kintamųjų sąvokos**. Po to išsiaiškinama egzistuojanti galimybė pagerinti tikslo funkcijos reikšmę, priartinant ją prie optimalios, parodoma, jog tai galima padaryti, **pertvarkant turimą lygčių sistemą taip, kad tas laisvasis kintamasis, kurio reikšmės didinimas galėtų pagerinti tikslo funkcijos reikšmę, pasikeistų vietomis su vienu iš bazinių kintamųjų, pats tapdamas baziniu, o buvusį bazinį padarydamas laisvuju.** Taip pat parodoma, kad keitimui reikia pasirinkti tą bazinį kintamąjį, kurio eilutėje keičiamas laisvasis kintamasis galėtų įgyti minimaksinę reikšmę.

Atlikus kintamųjų sukeitimą vietomis ir apskaičiavus naujos lygčių sistemos koeficientų reikšmes, įsitikinama, jog **pirmosios lygčių sistemos pertvarkymą į antrąją galima atlikti žymiau**

lengviau ir pačias lygčių sistemas galima užrašyti žymiai kompaktiškiau, atvaizduojant lygčių sistemas iš jų koeficientų sudarytomis simplekso lentelėmis.

Parodoma, kad perėjimai nuo vienos simplekso lentelės prie kitos, taikant simplekso algoritmą, vaizduojantys perėjimus nuo vienos lygčių sistemos prie kitos, yra perėjimai nuo vienos iškiliojo daugiakampio, ribojančio LSS, viršūnės prie kitos, nuo vieno leistino sprendinio prie kito, turinčio jau geresnę tikslo funkcijos reikšmę.

Padarius baigtinį skaičių tokių perėjimų, gaunama simplekso lentelė, vaizduojanti optimalų sprendinį, apie ką galima sužinoti iš tikslo funkcijos eilutės toje lentelėje: tikslo funkcijos laisvųjų kintamųjų koeficientai tampa tokie, kad keičiant leistinas tų kintamųjų reikšmes, jau nebeįmanoma pagerinti tikslo funkcijos reikšmės. Formaliai tas gauto sprendinio optimalumo pakankamas požymis išreiškiamas taip: jei simplekso lentelėje visų tikslo funkcijos koeficientų prie laisvųjų kintamųjų reikšmės yra neigiamos arba lygios nuliui, tai reiškia, kad tikslo funkcija įgijo minimalią leistiną reikšmę.

1.15.2.4.1. skyrelyje pateiktas simplekso algoritmo aprašymas ne tik supažindina skaitytojus su to algoritmo procedūromis, parodydamas, kaip, jomis naudojantis, galima išspręsti optimizavimo uždavinį, turintį „≤“ tipo apribojimus, ir „vizualizuodamas“ simplekso algoritmo taikymo procedūras, padeda greičiau ir pilniau suprasti simplekso metodo esmę, bet ir įrodo, jog simplekso lentelės – ne tik optimalaus sprendinio radimo priemonė, o ir lygčių sistemos, kompaktiškai vaizduojančios bazinių kintamųjų ir tikslo funkcijos reikšmių priklausomybes nuo laisvųjų kintamųjų. Tokių priklausomybių žinojimas leidžia analizuoti gaunamų sprendinių jautrumą ir stabilumą.

1.15.2.4.2. skyrelyje pateikiami pavyzdžiai, parodantys, kaip, taikant simplekso algoritmą, gali būti analizuojamas optimalus sprendinių jautrumas ir stabilumas, apskaičiuojamos jautrumo koeficientų reikšmės, optimalaus sprendinio bei jo jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribos.

Simplekso lenteles sudarančių tiesinių lygčių diferencijavimas rodo, jog jautrumo koeficientų reikšmės yra atitinkamų tiesinių lygčių koeficientų reikšmės. Todėl jautrumo koeficientų reikšmės, taikant simplekso algoritmą, gaunamos, galima sakyti, „automatiškai“: jas galime rasti simplekso lentelių atitinkamuose langeliuose.

Optimalaus sprendinio ir jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribas randame, spęsdami nelygybių sistemas, sudaromas analizuojant simplekso lenteles, gaunamas sprendžiant optimizavimo uždavinius, kurių matematinių modelių kai kurie parametrai turi simbolines (raidines) reikšmes, bei įvedant papildomus valdomus kintamuosius, žyminčius mus dominančius optimizavimo uždavinio sąlygų pokyčius. Šiame skyrelyje pateikta gana daug pavyzdžių, iliustruojančių įvairius optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizės algebrinius būdus, įvairių optimalių sprendinių, priklausančių skirtingoms optimizavimo uždavinio matematinio modelio parametrų leistino kitimo zonoms, radimą ir tų sprendinių bei juos charakterizuojančių jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribų nustatymą. Tų pavyzdžių paskirtis – pademonstruoti skaitytojui optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizės specifiką, probleminių situacijų ir jų analizės būdų įvairovę, simplekso algoritmo taikymo galimybių įvairovę, tuo pačiu metu parodant, kuo skiriasi kūrybiškas simplekso metodo taikymas, suprantant to metodo esmę, nuo amatininkiškai išmokto standartinio simplekso algoritmo receptūrinio taikymo, kitaip tariant, kuo skiriasi supratimas nuo amatininkiško išmokimo, nuo „iškalimo“.

Skyrelyje taip pat parodoma, kad optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizę įmanoma kompiuterizuoti, pasinaudojant tipiniais programų paketais, skirtais simbolinės algebros uždavinių sprendimui.

Dar viena svarbi šio skyrelio ypatybė – gaunamų rezultatų palyginimas su 1.15.2.3.3. skyrelyje grafiniu metodu gautais rezultatais ir skaičiavimo metodais gautų rezultatų vizualinės interpretacijos galimybės suteikimas. Tokia grafinių ir algebrinių analizės metodų sintezė padeda praturtinti nagrinėjamų situacijų suvokimą, skatina naujų klausimų ir naujų minčių atsiradimą. Kai kuriuos įdomesnes mintys, kilusias nagrinėjamo uždavinio optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizės metu, išskirtos, pažymint jas ryškesniu šriftu. Rekomenduočiau skaitytojui tokias skyrelio vietas perskaityti šiek tiek įdėmiau.

1.15.2.5. skyrelio paskirtis – parodyti skaitytojui, kaip sudaromos sudėtingesnio optimizavimo uždavinio, kurio jau nebeįmanoma išspręsti grafiniais metodais, tiesinis matematinis modelis, kaip tas uždavinys sprendžiamas, taikant simplekso algoritmą, kaip, taikant šį algoritmą atliekama optimalių sprendinių, gaunamų keičiant modelio parametrus, jautrumo ir stabilumo analizė. Dar vienas svarbus šio skyrelio tikslas – parodyti, kaip sprendžiamas tiesinis optimizavimo uždavinys, kai apribojimų sistema papildoma valdomų jų kintamųjų optimalių reikšmių sveikas kaitiškumo apribojimu. Atsižvelgiant į čia paminėtus tikslus šis skyrelis suskirstytas į tris antrojo lygio skyrelius: 1.15.2.5.1., 1.15.2.5.2. ir 1.15.2.5.3.

1.15.2.5.1. skyrelyje sudaromas gamybos planavimo optimizavimo sudėtingesnio uždavinio, turinčio daugiau valdomųjų kintamųjų ir daugiau apribojimų, matematinis modelis, ir, taikant simplekso metodą (nes tokio uždavinio grafiniu metodu išspręsti jau nebeįmanoma), randamas optimalus to uždavinio sprendinys.

Šį skyrelį galima laikyti 1.15.2.3.1. ir 1.15.2.4.1. skyrelių pakartojimu sudėtingesnėje situacijoje, kurioje tenka susidurti su naujomis problemomis, išskylančiomis ir sudarant optimizavimo uždavinio matematinį modelį, ir sprendžiant tą uždavinį, dėl ko, tas pakartojimas skiriamas ne tik 1.15.2.1.1. ir 1.15.2.4.1. skyrelių studijavimo metu įgytų žinių ir įgūdžių įtvirtinimui, bet ir tų žinių bei įgūdžių gilinimui ir turtinimui. Iš šios paskirties išplaukia 1.15.2.5.1. skyrelio skirtumai nuo 1.15.2.3.1. ir nuo 1.15.2.4.1. skyrelių.

Šis skyrelis skiriasi nuo 1.15.2.3.1. skyrelio tuo, kad čia nagrinėjama probleminė situacija yra adekvatesnė gamybos planavimo praktikoje pasitaikančiomis realiomis situacijomis: 1) gaminamos produkcijos modelis yra artimesni tikrovei ir savo sudėtimi, nes produkcija skirstoma į daugiau rūšių, ir savo struktūra, nes produkciją sudaro ne tik detalės, bet ir iš tų detalių gaminami sudėtingesni gaminiai; 2) dėl šios priežasties tampa sudėtingesnis ir artimesnis realiomis situacijoms optimizavimo modelio tikslo funkcijos sudarymo procesas; 3) artimesnė tikrovei tampa ir optimizacinio modelio apribojimų sistema, nes papildomai atsižvelgiama į įmonės gamybinius pajėgumus ir gamybos procesų trukmę bei tame procese atliekamos technologines operacijas, ko 1.15.2.3.1. skyrelyje nebuvo daroma. Kalbant trumpiau, 1.15.2.4.1. skyrelyje nagrinėjamas optimizavimo uždavinys kokybiškai yra pakankamai artimas gamybos planavimo praktikoje sprendžiamiems uždaviniams ir skiriasi nuo jų galbūt tik kiekybiškai, t. y. tik į uždavinio matematinį modelio sudėtį įeinančių komponenčių kiekybinėmis reikšmėmis, tačiau tai nekeičia sprendimo algoritmo. Todėl šio modelio sudarymą galima laikyti realios situacijos matematinio aprašymo pavyzdžiu.

1.15.2.5.1. skyrelis skiriasi nuo 1.15.2.4.1. skyrelio visų pirma tuo, kad skiriasi tų skyrelių tikslai: jei 1.15.2.4.1. skyrelio pagrindinis tikslas buvo skaitytojo supažindinimas su simplekso algoritmu, aprašant ir pagrindžiant tą algoritmą bei konkrečiu pavyzdžiu iliustruojant to algoritmo taikymą, sprendžiant optimizavimo uždavinį, tai 1.15.2.5.1. skyrelyje toks tikslas jau nebekeliamas, nes laikoma, jog tas tikslas jau buvo pasiektas. Todėl **1.15.2.5.1. skyrelyje simplekso algoritmu naudojamas kaip jau gerai žinomu ir įprastu instrumentu** ir parodoma, jog, naudojantis šiuo instrumentu, galima spręsti gyvenimo praktikai aktualius uždavinius ir gauti ekonominę naudą.

1.15.2.5.1. ir 1.15.2.4.1. skyreliai skiriasi ne tik savo tikslais, bet ir gaunamais rezultatais: 1.15.2.4.1. skyrelyje sprendžiamo uždavinio matematinio modelio parametrų reikšmės buvo specialiai parinktos taip, kad pagrindinių valdomųjų kintamųjų optimalios reikšmės, žyminčios pagamintinų detalių planuojamus kiekius, būtų sveiki skaičiai, o 1.15.2.5.1. skyrelyje sprendžiamo optimizavimo uždavinio matematinio modelio parametrų reikšmės, siekiant to modelio didesnio adekvatumo praktikoje sutinkamoms situacijoms, nebuvo specialiai parenkamos, nes ir realiaame gyvenime jos nebūna parenkamos, o gaunamos nagrinėjant susiklosčiusią realią situaciją. Todėl natūralu, jog sprendžiant realius tiesinius optimizavimo uždavinius simplekso metodu, tik retkarčiais pasitaiko atvejų, kai tikslus optimalus uždavinio sprendinys pasirodo esąs sveikaskaitinis. Dažniausiai jis būna nesveikaskaitinis (kaip ir 1.15.2.5.1. skyrelyje pateiktame pavyzdyje). Tokiais atvejais susiduriame su dar viena problema, nes gana dažnai (kaip ir 1.15.2.5.1. skyrelyje nagrinėjamame uždavinyje) iš sprendžiamo uždavinio sąlygų išplaukia, jog sprendinys turėtų būti sveikaskaitinis.

1.15.2.4.1. skyrelyje buvo specialiai padaryta, kad tokia problema nekiltų, nes to skyrelio pagrindinis tikslas buvo simplekso algoritmo išaiškinimas, o 1.15.2.5.1. skyrelyje, kurį studijuojant simplekso algoritmas turėtų būti jau gerai žinomas tiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo „instrumentas“, susidūrimas su šia problema buvo specialiai suplanuotas.

Pirma mintis, kuri kyla, ieškant šios problemos sprendimo: ieškoti sveikaskaitinio optimalaus sprendinio nesveikaskaitinio optimalaus sprendinio aplinkoje, priklausančioje uždavinio LSS. Tokios paieškos pavyzdžiai pateikti 1.15.2.5.1. skyrelio pabaigoje.

Šis metodas leidžia gauti gana neblogus sveikaskaitinius sprendinius, kurie gana dažnai būna ir optimalūs sveikaskaitiniai sprendžiamo uždavinio sprendiniai, todėl šis metodas gana dažnai taikomas praktikoje.

Tačiau šis metodas negarantuoja, kad optimalaus nesveikaskaitinio sprendinio aplinkoje surastas sveikaskaitinis sprendinys būtinai bus pats geriausias (t. y. optimalus) sveikaskaitinis nagrinėjamo uždavinio sprendinys. Todėl optimalaus sveikaskaitinio sprendinio radimo uždavinį toks nesveikaskaitinio sprendinio koordinatų reikšmių „suapvalinimas“ iki sveikų skaičių ne visada išsprendžia.

Egzistuoja situacijos, kuriose nesveikaskaitinio optimalaus sprendinio artimiausioje aplinkoje esantys leistini sveikaskaitiniai sprendiniai turi žymiai blogesnes tikslo funkcijos reikšmes negu optimalus sveikaskaitinis nagrinėjamo uždavinio sprendinys, nesantis optimalaus nesveikaskaitinio

sprendinio artimiausioje aplinkoje (žiūr., pavyzdžiui, knygoje [221, 222] aprašytą „sodininko uždavinį“). Todėl tenka ieškoti algoritmų, leidžiančių rasti ne tik artutinius, bet ir tikslų sveikaskaitinį tiesinio optimizavimo uždavinio sprendinį. Tokie algoritmai egzistuoja, nors, žinoma, jų taikymas reikalauja žymiai daugiau skaičiavimų. Vieno tokio algoritmo aprašymui ir skiriamas sekantis mokymo priemonės skyrelis.

1.15.2.5.2. skyrelio paskirtis – supažindinti su **šakų ir ribų metodu** bei jo taikymu, sprendžiant **sveikaskaitinio programavimo uždavinius**, t. y. ieškant tiesinio optimizavimo uždavinio sveikaskaitinio sprendinio.

Šis algoritmas gana sudėtingas ir gali turėti gana daug etapų, kurių kiekviename tenka naudotis jau mums žinomu simplekso ar kuriuo nors kitu tiesinio programavimo algoritmu.

Sprendžiamąjį optimizavimo uždavinį sąlyginai pavadinsime uždaviniu Nr.0. Pirmajame aprašomojo algoritmo etape, taikant kurį nors tiesinio programavimo metodą, ieškomas optimalus uždavinio Nr.0 sprendinys.

Jei uždavinys neturi sprendinio, tai jis neturi ir optimalaus sveikaskaitinio sprendinio. Jei uždavinys turi sprendinį, tai jis turi ir optimalų sprendinį. Tuomet galimi du atvejai: 1) sprendinys – sveikaskaitinis, t. y. visų pagrindinių valdomųjų kintamųjų optimalios reikšmės – sveiki skaičiai; 2) sprendinys – nesveikaskaitinis, t. y. nors viena optimali pagrindinio valdomojo kintamojo reikšmė, įeinanti į optimalaus sprendinio sudėtį, nėra sveikas skaičius.

Pirmojo atvejo pavyzdys – optimizavimo uždavinio, kuris buvo sprendžiamas 1.15.2.4.1. skyrelyje, sprendinys. Šiuo atveju sveikaskaitinio optimalaus sprendinio paieškos algoritmas iškart baigia savo darbą, nes jau pasiekė savo tikslą.

Antrojo atvejo pavyzdys – optimizavimo uždavinio, kuris buvo sprendžiamas 1.15.2.5.1. skyrelyje, sprendinys. Šiuo atveju čia aprašomas sveikaskaitinio sprendinio radimo algoritmas pereina į antrąjį etapą ir šakojasi: **optimalaus sveikaskaitinio sprendinio paieška suskyla į dvi šakas**: naujų sveikaskaitinio optimizavimo uždavinių – uždavinių Nr.1 ir Nr.2 – formulavimą ir jų sprendimą.

Antrojo etapo pradžioje uždavinio Nr.0 LSS, pasinaudojant kuria nors nesveikaskaitine optimalia valdomojo kintamojo reikšme, **suskaidoma į 3 dalis**.

Tarkime, jog valdomojo kintamojo x_i optimali reikšmė $x_i^{(opt)}$ – nesveikaskaitinė ir priklauso intervalui $(a, a+1)$, kur a – sveikas skaičius. Tuomet pirmajai uždavinio Nr. 0 LSS daliai priskiriami visi tos LSS taškai, kurių koordinatės i reikšmės x_i tenkina nelygybę $x_i \leq a$. Antrajai LSS daliai priskiriami visi tos LSS taškai, kurių koordinatės i reikšmės x_i tenkina nelygybę $x_i \geq a+1$. Trečiajai uždavinio Nr.0 LSS daliai priskiriami visi tos LSS taškai, kurių koordinatės i reikšmės x_i tenkina nelygybes $a < x_i < a+1$. Aišku, kad trečiojoje uždavinio Nr.0 LSS dalyje i -tosios koordinatės reikšmė x_i negali būti sveikas skaičius, dėl ko toje dalyje sveikaskaitinių uždavinio Nr.0 sprendinių būti negali. Todėl, sprendžiant sveikaskaitinio optimalaus sprendinio paieškos uždavinį, tokio sprendinio reikia ieškoti arba pirmojoje, arba antrojoje uždavinio Nr.0 LSS dalyje. Vadinasi, vietoj uždavinio Nr.0 atsiranda du nauji optimizavimo uždaviniai – Nr.1 ir Nr.2, panašūs į uždavinį Nr.0, tik turintys jau mažesnes LSS.

Uždavinio Nr.1 matematinį modelį gauname iš uždavinio Nr.0 matematinio modelio, papildydami pastarojo apribojimų sistemą nelygybe $x_i \leq a$. Todėl uždavinio Nr.1 LSS tampa pirmoji uždavinio Nr.0 LSS dalis.

Uždavinio Nr.2 matematinį modelį gauname iš uždavinio Nr.0 matematinio modelio, papildydami jo apribojimų sistemą nelygybe $x_i \geq a+1$. Todėl uždavinio Nr.2 LSS tampa antroji uždavinio Nr.0 LSS dalis.

Išsprendę uždavinius Nr.1 ir Nr.2, galime susidurti su situacijomis:

- 1) abiejų uždavinių optimalūs sprendiniai sveikaskaitiniai;
- 2) vieno iš uždavinių optimalus sprendinys sveikaskaitinis, kito – nesveikaskaitinis;
- 3) abiejų uždavinių optimalūs sprendiniai – nesveikaskaitiniai.

Pirmojoje situacijoje optimaliu sveikaskaitiniu pradinio uždavinio (uždavinio Nr.0) sprendiniu laikomas tas iš uždavinių Nr.1 ir Nr.2 sveikaskaitinių sprendinių, kurio tikslo funkcijos optimali reikšmė yra geriausia (uždavinio, panašaus į sprendžiamą 1.15.2.5.1. skyrelyje atveju – tas, kurį atitinka didžiausias pelnas P).

Jei abu sveikaskaitiniai sprendiniai yra tokie, jog jų tikslo funkcijos turi vienodas reikmes, tai reiškia, jog uždavinys Nr.0 turi du skirtingus sveikaskaitinius optimalius sprendinius. Pirmojoje situacijoje bet kuriuo atveju optimalus sveikaskaitinis uždavinio Nr.0 sprendinys būtų surastas ir todėl mūsų aprašomas algoritmas baigtų darbą.

Antrojoje situacijoje algoritmas baigtų darbą tik tuo atveju, kai surasto sveikaskaitinio sprendinio optimali tikslo funkcijos reikšmė nebūtų blogesnė už kito uždavinio nesveikaskaitinio optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmę, nes tuomet mes galėtume teigti, jog uždavinio, kurio optimalus sprendinys nėra sveikaskaitinis, LSS negali egzistuoti sveikaskaitinis sprendinys, kuris būtų geresnis už antrojoje situacijoje surastą sveikaskaitinį sprendinį, o todėl surastas sveikaskaitinis

optimalus dalinio uždavinio sprendinys yra uždavinio Nr.0 optimalus sveikaskaitinis sprendinys, kurio mes ir ieškome.

Tuo atveju, kai antrojoje situacijoje surasto optimalaus sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmė yra blogesnė už nesveikaskaitinio optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmę, mes dar negalime būti tikri, kad mūsų surastas sveikaskaitinis sprendinys yra optimalus sveikaskaitinis uždavinio Nr.0 sprendinys, nes antrajame algoritmo taikymo etape išspręsto uždavinio, kurio optimalus sprendinys yra nesveikaskaitinis, LSS dar gali atsirasti sveikaskaitinis sprendinys, geresnis už šioje situacijoje surastą optimalų sveikaskaitinį sprendinį.

Todėl šiuo atveju mūsų aprašomas algoritmas turėtų tęsti darbą: suskaidyti to uždavinio, kurio optimalus sprendinys yra nesveikaskaitinis, LSS į tris dalis ir iškelti du naujus optimizavimo uždavinius – uždavinius Nr.3 ir Nr.4. Tuos uždavinius galima būtų pažymėti ir kitoniškais numeriais, pavyzdžiui, tokiais, kurie rodytų tų uždavinių „kilmę“. Tuomet tų naujų uždavinių numeriai galėtų būti 1.1. ir 1.2. (arba 2.1. ir 2.2., priklausomai nuo to, kuris iš uždavinių – Nr.1 ar Nr.2 – turi optimalų nesveikaskaitinį sprendinį ir yra dekomponuojamas į du naujus optimizavimo uždavinius).

Algoritmo taikymo antrojo etapo antrojoje situacijoje antruoju surastas optimalus sveikaskaitinis sprendinys išliktų **galimu pretendentu į uždavinio Nr.0 optimalaus sveikaskaitinio sprendinio vaidmenį** ir galėtų bent kurį laiką šakų ir ribų metodo taikyme vaidinti **ribinio sveikaskaitinio sprendinio vaidmenį**. Vadovaujantis šio sprendinio tikslo funkcijos reikšme, galima būtų „nupjovinėti“ dalinių uždavinių ir jų sprendinių „medžio“ (žiūr. 347 pav) „šakas“, vaizduojančias tuos dalinius optimizavimo uždavinius, kurių sprendinius atitinkančios tikslo funkcijų reikšmės nebūtų ar negalėtų būti geresnės už ribinio sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmę.

Jei, tęsiant čia aprašomo algoritmo darbą, išspręsdus visus atsirandančius dalinius optimizavimo uždavinius, neatsirastų sveikaskaitinių sprendinių, kurių tikslo funkcijų reikšmės būtų geresnės už minėtąją **ribą – ribinio sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmę**, tai minėtasis **ribinis sveikaskaitinis sprendinys iš galimo pretendento taptų optimaliu sveikaskaitiniu uždavinio Nr.0 sprendiniu ir sveikaskaitinio tiesinio programavimo algoritmas baigtų darbą**.

Jei, tęsiant čia aprašomo algoritmo darbą kokiame nors šio algoritmo žingsnyje, išspręsdus eilinį dalinį optimizavimo uždavinį, būtų gautas sveikaskaitinis sprendinys, turintis geresnę tikslo funkcijos reikšmę negu mūsų anksčiau gauto ribinio sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmę, kuri nuo jos gavimo iki šiol vaidino ribos vaidmenį, tai **tas – naujasis – sveikaskaitinis sprendinys taptų ribiniu, „išstumdamas“ senąjį ribinį sveikaskaitinį sprendinį ir pakeisdamas senąją ribą į naują – griežtesnę – ribą, galinčią, „nupjovinėti“ daugiau neperspektyvių „uždavinių medžio“ „šakų“**.

Toliau tęsiant algoritmo darbą, naujasis ribinis sveikaskaitinis sprendinys, jei neatsirastų geresnio sveikaskaitinio sprendinio, taptų optimaliu sveikaskaitiniu uždavinio Nr.0 sprendiniu, o priešingu atveju būtų „išstumtas“ ir iki tol egzistavusi riba būtų pakeista į naują – dar griežtesnę, „nupjaunančią“ dar daugiau neperspektyvių uždavinių „medžio“ „šakų“.

Ir toks procesas tęstųsi iki tol, kol nebeliktų neišspręstų dalinių optimizavimo uždavinių, atstovaujančių perspektyvias uždavinių „medžio“ „šakas“. Tuomet **optimaliu sveikaskaitiniu uždavinio Nr.0 sprendiniu taptų paskutinis ribinis sveikaskaitinis sprendinys**.

Trečiojoje antrojo etapo situacijoje nagrinėdami galimus variantus, gautume panašų vaizdą kaip ir ką tik išnagrinėtoje antrojoje situacijoje. Skirtumas būtų tik toks, kad jau pačioje antrojo etapo pradžioje tektų dekomponuoti ne vieno, o abiejų- Nr.1 ir Nr.2 – uždavinių LSS. Todėl šioje situacijoje vietoj šių dviejų dalinių optimizavimo uždavinių atsirastų ne du, o keturi nauji daliniai optimizavimo uždaviniai (Nr.3 ir Nr.4, Nr.5 ir Nr.6, kuriuos galėtume pavadinti ir uždaviniais 1.1., 1.2., 2.1., 2.2.).

Jei, spręsdami tuos uždavinius, gautume visus keturis nesveikaskaitinius sprendinius, tai tektų skaidyti jų LSS ir tuomet gautume jau aštuonis naujus dalinius optimizavimo uždavinius ir t. t.

Tačiau toks „uždavinių medžio“ maksimalaus „šakojimosi“ procesas negalėtų tęstis be galo, nes naujų dalinių optimizavimo uždavinių LSS vis mažėtų ir mažėtų. Todėl gana greitai tos LSS taptų tokios, kad daugumoje jų negalėtų egzistuoti nė vieno sveikaskaitinio sprendinio ir tokios šakos būtų atmestos, o kitos baigtųsi sveikaskaitiniais sprendiniais, kurių geresnieji, tapdami ribiniais, „nupjautų“ neperspektyvias „šakas“ bei „išstumtų“ blogesnius sveikaskaitinius sprendinius. **Galų gale liktų vienas ar keli ribiniai sveikaskaitiniai sprendiniai, turintys geriausias tikslo funkcijų reikšmes, kurie ir būtų ieškomais sveikaskaitiniais uždavinio Nr.0 sprendiniais. Vadinasi uždavinio Nr.0 optimalaus sveikaskaitinio sprendinio paieškos algoritmas baigtų savo darbą, nes jo tikslas būtų pasiektas.**

Čia aprašytąjį algoritmą galima taikyti ir radimui visų leistinų sveikaskaitinių sprendinių, kurie tenkina tam tikras papildomas sąlygas, pavyzdžiui, radimui, sveikaskaitinių sprendinių, kurių tikslo funkcijos reikšmės yra lygios tam tikrai reikšmei ar geresnės už pastarąją.

Sprendžiant tokį uždavinį, ribinė tikslo funkcijos reikšmė, vadovaujantis kuria sprendžiama, kurias algoritmo šakas atmesti, o kurių nagrinėjimą tęsti toliau, ieškant jose mus dominančių

sveikaskaitinių sprendinių, būtų jau iš anksto duota ir mums nebereikėtų išsivedinėti ribinių sprendinių bei keisti juos tolesnėje algoritmo veikimo eigoje. Šiuo atžvilgiu algoritmas šiek tiek supaprastėtų, tačiau galėtų padaugėti neatmetamų algoritmo šakų skaičius ir todėl galėtų padidėti skaičiavimų apimtis.

Skaitytojui gali kilti klausimas, kodėl aš nusprendžiau šioje santraukoje pakartoti tiesinio optimizavimo uždavinio sveikaskaitinio sprendinio paieškos algoritmo aprašymą, pateikdamas jį šiek tiek kitaip negu tas aprašymas buvo pateiktas 1.15.2.5.2. skyrelyje, kuriame tas algoritmas buvo aiškinamas, sprendžiant konkretų uždavinį.

Taip pasielgiau vadovaudamasis pedagoginiais sumetimais ir ilgamete dėstymo patirtimi.

Sveikaskaitinio tiesinio programavimo algoritmas gana „gremėzdiškas“ ir jo aprašymas užima nemažai vietos, o išdėstymas bei išaiškinimas reikalauja nemažai laiko. Ne visi studentai sugeba iškart aprėpti tokius didelius „gabalus“ gana sudėtingo turinio ir struktūros tekstus.

Jie susiduria su pirmuoju informaciniu barjeru: pradėdami nagrinėti sudėtingą sistemą „iš išorės“, jie nebesugeba pamatyti vidinių detalių ir jų sąveikavimo; pradėdami tą sistemą nagrinėti „iš vidaus“, jie nebesugeba pamatyti visumos ir, apžiūrinėdami vidines jos detales ir jų sąveikavimą, jie mato tik tos sistemos fragmentus, bet nebesugeba jų sujungti į vieną sistemą ir pamatyti ją kaip naują savarankišką visumą.

Šioje santraukoje pateiktas sveikaskaitinio programavimo algoritmo aprašymas nėra to aprašymo, kuris pateiktas 1.15.2.5.2. skyrelyje, paprastas pakartojimas.

1.15.2.5.2. skyrelyje buvo „keliaujama“ to algoritmo „vidumi“: buvo sprendžiamas konkretus uždavinys taikant šakų ir ribų metodą bei pasitelkiant jau išstudijuotą simplekso algoritmo dalinių optimizavimo uždavinių sprendimus.

Šioje santraukoje pateikiamas sveikaskaitinio programavimo algoritmo bendrasis (nekonkretizuotas) aprašymas, apžvelgiantis tą algoritmą lyg „iš išorės“ kaip tam tikro tikslo siekiančią sistemą, jau nesigilinant į atskiras simplekso detales, skirtas dalinių uždavinių sprendimo proceso aprašymui. Abu aprašymai – ir „vidinis“ ir „išorinis“ – vienas kitą papildo ir, kaip rodo dėstymo praktika, padeda studentams susidaryti savo galvose šio gremėzdiško algoritmo bendrąją koncepcinį modelį ir to algoritmo taikymo proceso, sprendžiant optimizavimo uždavinius, vidinį modelį.

Reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį dar į vieną aplinkybę, o kartu į dar vieną – **šalutinį – tikslą**, kurio buvo siekiama 1.15.2.5.2. skyrelyje.

Sprendžiant dalinius optimizavimo uždavinius, atsirandančius skaidant uždavinio Nr.0 LSS vis į smulkesnes dalis, tenka susidurti ne tik su „ $\leq$ “ tipo, bet ir su „ $\geq$ “ tipo nelygybėmis, su kuriomis, sprendžiant tiesinio optimizavimo uždavinius simplekso metodu 1.15.2.5.2. ir 1.15.2.5.1. skyreliuose, dar nebuvo tekę susidurti ir todėl nebuvo tekę susidurti su **perėjimo nuo neleistino bazinio sprendinio prie leistino bazinio sprendinio problema**.

Optimizavimo uždavinių, kurių apribojimų sistemoje pasitaiko „ $\geq$ “ tipo nelygybių sprendimui nebepakanka to algoritmo, kuris buvo aprašytas 1.15.2.4.2. skyrelyje, todėl 1.15.2.5.2. skyrelyje parodoma, kaip galima ir reikia tą algoritmą modifikuoti, renkantis stulpelį ir vedančiąją eilutę simplekso lentelėje, kad būtų galima iš neleistino bazinio sprendinio gauti leistiną sprendinį.

Tas metodas, kuriuo buvo pasinaudota 1.15.2.5.2. skyrelyje, nėra vienintelis ir nėra pakankamai universalus. Todėl 1.15.2.6. skyrelyje yra pateiktas aprašymas **simplekso bendrojo algoritmo**, kurį galima taikyti bet kurio tipo apribojimams.

Būtų naudinga, kad skaitytojas pabandytų išspręsti 1.15.2.5.2. skyrelyje išspręstą uždavinį, pasinaudodamas bendruoju simplekso algoritmu, ir, palyginęs abu sprendimo būdus, įvertintų, kuris būdas jam atrodo labiau patogus bei **kuris būdas labiau tinka „rankiniams“ skaičiavimams, o kuris – sprendimo proceso kompiuterizavimui**. Studentams, norintiems lavinti savo mąstymą ir analizinius sugebėjimus, būtų naudinga pabandyti išsiaiškinti, kuo tie būdai iš esmės skiriasi ir ką turi bendro.

1.15.2.5.3. skyrelio pagrindinė paskirtis – dar kartą parodyti skaitytojui, kaip simplekso algoritmas taikomas tiesinių optimizavimo uždavinių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizėje, atliekant šią analizę jau sudėtingesnėmis sąlygomis negu 1.15.2.4.2. skyrelyje, t. y. nagrinėjant jautrumą ir stabilumą tokio sprendinio, kurį gauti ir kurį analizuoti grafiniais metodais jau nebeįmanoma.

Papildomai šiame skyrelyje parodoma, **kaip galima naudotis tokia analize ir jos rezultatais, planuojant gamybos apimčių didinimą**, kaip nustatyti, kokių medžiagų ir kiek reikia pirkti, racionaliai papildant jų atsargas, kaip didinti gamybinius pajėgumus.

Tačiau **1.15.2.5.3. skyrelis turi dar ir antrąją paskirtį – supažindinti skaitytoją su ypatingomis situacijomis, su kuriomis gali tekti susidurti, taikant simplekso algoritmą**. Šio supažindinimo tikslas – **paruošti skaitytoją galimiems netikėtumams**, kad, susidūręs su jais, skaitytojas nepasimestų.

Čia aš apsiribosiu tik kai kurių svarbesnių dalykų priminiu, trumpai formuluodamas jų esmę išreiškiančius sakinius:

1) kai optimalaus sprendinio simplekso lentelės tikslo funkcijos eilutėje koks nors vienas ar daugiau tos funkcijos koeficientų yra lygūs 0, tai reiškia, jog uždavinys turi ne vieną, o be galo daug optimalių sprendinių; 2) kai visi minėtieji koeficientai, priklausantys tikslo funkcijos eilutei ir laisvųjų kintamųjų stulpeliams yra neigiami ar nuliai, tai reiškia, jog simplekso lentelė vaizduoja sprendinį, kurį charakterizuoja minimali tikslo funkcijos reikšmė; 3) šis požymis yra pakankamas tikslo funkcijos reikšmės minimalumo požymis, tačiau šis požymis nėra būtinas, todėl galima susidurti su atvejais, kai kai kurie tikslo funkcijos koeficientai yra teigiami, o tikslo funkcijos reikšmė minimali (tokį atvejį vaizduoja pavyzdžiui, 265-oji ir 269-oji lentelės); 4) sudarant simplekso algoritmo programas kompiuteriu, būtina atsižvelgti į tokių situacijų egzistavimą, nes, mechaniškai taikydami simplekso algoritmą, tokiose situacijose galime patekti į **amžinai besikartojantį ciklą**.

Sudarant simplekso algoritmą realizuojančias programas kompiuteriams, būtina atsižvelgti į tai, kad **skaičiavimo paklaidos** (jos yra neišvengiamos atliekant, pavyzdžiui, dalybos operacijas) gali kauptis ir todėl gali būti gaunami ne tik nepakankamai tikslūs, bet ir klaidinantys rezultatai. Ypač dažnai su tokiu reiškiniu galima susidurti tada, kai koeficientų reikšmės simplekso lentelės yra labai nevienodos: vienos reikšmės – labai mažos, kitos – labai didelės.

Dėl šių pastebėjimų, kurių paskirtis – padėti studentams, siekiant šio skyrelio antrojo plano tikslų, 1.15.2.5.3. skyrelį verta pastudijuoti ir tiems skaitytojams, kuriems atrodo, kad jie jau pakankamai gerai išsiaiškino, kaip atliekama optimizavimo uždavinio sprendinio jautrumo ir stabilumo analizė ir kaip naudojamos tos analizės rezultatai, priimant atsakingus valdymo aprendimus realiose situacijose.

1.15.2.6. skyrelyje aprašomas bendrasis simplekso algoritmas, kuris taikomas sprendžiant tiesinius optimizavimo uždavinius, turinčius ne tik „≤“ tipo, bet ir „≥“ tipo apribojimus.

Šiame skyrelyje įvedamos pagalbinių (dirbtinių) kintamųjų sąvokos bei simplekso bendrojo algoritmo taikymo pirmojo ir antrojo etapų sąvokos; pateikiami simplekso bendrojo algoritmo pirmojo etapo, pertvarkančio neleistiną bazinį sprendinį į leistiną, **specialios pagalbinės**

tikslo funkcijas $W = \sum_{i=1}^{n_1} x_{m+n+i}$ sudarymo pavyzdžiai, leistino bazinio sprendinio iš neleistino

bazinio sprendinio gavimo pavyzdžiai; išsiaiškinami **optimalaus sprendinio egzistavimo ir neegzistavimo požymiai**; nagrinėjami **bendrojo tiesinio optimizavimo uždavinio, turinčio leistiną optimalų sprendinį, ir uždavinio, neturinčio tokio sprendinio, sprendimo pavyzdžiai**; nagrinėjamas **apibendrintas Leontjevo modelis**, naudojamas **optimalaus tarpšakinio balanso** sudarymui; įvedamos **apibendrintos Leontjevo matricos ir išplėstinės vienietinės matricos sąvokos**, taip pat **subalansuoto optimalaus tarpšakinio pristatymų plano sąvokos**; formuluojama **kintamųjų agregavimo idėja**, leidžianti sumažinti nežinomųjų skaičių sprendžiamose lygtyse; paaiškinama, kaip, naudojantis **išplėstu apibendrintu Leontjevo modeliu**, gauti ne tik optimalų tarpšakinio pristatymų planą, bet ir **optimalų resursų importo planą**; įvedamos ir paaiškinamos **magistralinių modelių bei ekonomikos vystymosi magistralinių trajektorijų sąvokos**.

Todėl 1.15.2.6. skyrelis yra ne tik 1.15.2.5.1. skyrelio, bet ir 1.14.12.5.2.4. skyrelio tęsinys, dėl ko, studijuojant 1.15.2.6. skyrelio antrąją dalį, skirtą simplekso bendrojo algoritmo taikymui tarpšakiniam planavimui, būtų naudinga prisiminti 1.14.12.2.4. skyrelio tekstą ir bent mintyse sujungti 1.14.12.2.4. ir 1.15.2.5.2.4. skyrelius į vieną skyrelį, skirtą tarpšakiniam planavimui ir jo optimizavimui.

1.15.2.7. skyrelyje nagrinėjami netiesiniai optimizaciniai modeliai ir kai kurie netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių analizės metodai, pateikiami **tokių modelių sudarymo ir tokių metodų taikymo, sprendžiant netiesinius optimizavimo uždavinius, pavyzdžiai**.

Šiame skyrelyje nesiekama išdėstyti gana sudėtingo netiesinio programavimo metodų kurso, o siekiama tik supažindinti skaitytojus su netiesinių optimizavimo uždavinių, jų matematinių modelių sudarymo, tokių uždavinių sprendimo ir gautų optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizės esme ir pavyzdžiais, leidžiančiais skaitytojui palyginti tuos modelius ir metodus su jau išnagrinėtais tiesiniais modeliais ir metodais.

Skyrelio pradžioje pateikiami pavyzdžiai, rodantys, kad **kai kuriais atvejais netiesinius optimizavimo uždavinius pavyksta transformuoti į tiesinius** ir išspręsti, naudojantis tiesinio programavimo metodais.

Tačiau dauguma netiesinių optimizavimo uždavinių yra tokie, kad jų transformuoti į tiesinius nepavyksta, todėl tenka naudotis **specialiais netiesinio programavimo metodais**.

Skyrelyje pateikiamas tokio netiesinio uždavinio sprendimo ir gauto optimalaus tiesinio sprendinio jautrumo bei stabilumo analizės pavyzdys.

Pradžioje tas uždavinys išsprendžiamas ir gautas optimalus sprendinys išanalizuojamas, naudojantis **grafiniais metodais** bei **pusiau grafiniais, pusiau analiziniais metodais**, o po to visa tai pakartojama grynai analiziškai, taikant **Lagranžo funkcijos metodą**, leidžiantį rasti **sąlyginio**

ekstremumo taškus. Įvairių metodų ir jų taikymo rezultatų palyginimas palengvina ir pagilina 1.15.2.7. skyrelio teksto suvokimą.

Skyrelio pabaigoje daroma išvada, jog, žiūrėdami į netiesinių optimizavimo uždavinių matematinių modelių sudarymą **iš sisteminės metodologijos pozicijų, pastebime ryškią analogiją tarp tiesinių ir netiesinių optimizacinių modelių**, nes modelių sudėtis, struktūra ir sudarymo metodikos yra vienodos, o žiūrėdami į optimizavimo uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių analizės metodus **iš matematinių pozicijų, randame, jog netiesiniai optimizavimo uždaviniai turi savo specifiką** – jų sprendimui ir analizei reikalingas žymiai sudėtingesnis matematinis aparatas, **reikalingi specialūs matematiniai metodai**: ne tik jau minėtasis Lagranžo funkcijos metodas, bet ir gradiento, aukšnio pjūvio ir pan. metodai, o **sudėtingesniais atvejais ir eksperimentų su matematiniais modeliais (tame tarpe – ir eksperimentų su imitaciniais modeliais) metodai**.

1.15.3. poskyris yra 1.15. skyriaus baigiamasis poskyris, susišaukiantis su šio skyriaus įvadinio – 1.15.1. poskyriu, nes 1.15.3. poskyryje vėl **grįžtama prie sisteminių ir optimizacinių modelių sąveikavimo ir taikymo sisteminiame projektavime ir sistemos S tobulinime**. Ypatingas dėmesys atkreipiamas į sisteminių ir optimizacinių modelių bei matematinių eksperimentų su jais taikymą organizacijų ir tose **organizacijose vykstančių gamybinių bei ekonominių procesų valdyme**. Teigiama, jog **vienas svarbiausių sistemos R tikslų turėtų būti specialaus „matematinio instrumento“, padedančio sistemos S valdymo sistemai pagerinti valdymo sprendimu kokybę, sukūrimas**. Aprašomos tokio „instrumento“ kūrimo, taikymo ir tobulinimo stadijos, išvardijami tų stadijų etapai. Trumpai charakterizuojamos **terminalinė ir teleologinė metodologijos**, pagrindžiamas teiginys, jog sudėtingų organizacinių sistemų ir jų valdymo sistemų projektavime ir valdyme būtina tų metodologijų sintezė.

1.15.3. poskyryje pratęsiamas 1.15.1. poskyryje pradėtas sąryšių tarp sisteminių ir optimizacinių modelių (o taip pat ir tarp sistemų S bei R) nagrinėjimas, kuris po to, kai 1.15.2. poskyryje buvo išnagrinėti optimizavimo uždaviniai ir tų uždavinių matematiniai modeliai, gali būti jau dalykiškesnis ir gilesnis. Darome išvadą, jog **sistemos S ir jos funkcionavimo optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai gali ir privalo būti panaudoti, sudarant tos sistemos ir jos elementų bei sistemoje S vykstančių procesų normatyvinius vidinius ir išorinius modelius, bei jos aktyviųjų elementų motyvacinius modelius**, o iš kitos pusės – **neįmanoma sudaryti sistemos S bei jos elementų funkcionavimo optimizavimo modelių, neatsižvelgus į jos ir jos elementų deskriptinius modelius**. Todėl sistema R, tobulindama organizacinę sistemą S ir jos valdymą, **negali nepaversti sistemos S savo dalimi ir negali netapti save tobulinančios sistemos S dalimi**.

1.15.3. poskyrio pabaigoje apžvelgiami organizacinės sistemos ir joje bei jai sprendžiamų **optimizavimo uždavinių apribojimai**: loginiai, fiziniai, techniniai, ekonominiai, ekologiniai, juridiniai, socialiniai, etniniai ir moraliniai, organizaciniai, politiniai, religiniai.

Daroma dar ir kita išvada, jog **sudėtingų organizacijų projektavimas ir jų tobulinimas – labai sudėtingas darbas, reikalaujantis, kad jame dalyvautų ir patys organizacijos S darbuotojai, ir įvairūs specialistai, atstovaujantys ir tiksluosius, ir humanitarinius mokslus, ir techniką, ir teisę, ir psichologiją, ir sociologiją, ir mediciną, ir gamtos apsaugą, ir politiką, kad sistemos R sudėtyje būtina būtų sisteminių analitikų ir dženeralistų, sugebančių dalykiškai bendrauti su įvairių sričių ir įvairių specialybių atstovais, suderinti skirtingus jų požiūrius ir sujungti jų pastangas bendram darbui, vadovaujantis bendrais tikslais ir sistetine metodologija**.

Išsiaiškinamos sąvokos

abejingumas
abiejų tipų vienodo pelno teisės
abiejų tipų vienodo pelno tiesių sutapimo atvejis
abiejų tipų vienodų išlaidų teisės
abiejų tipų vienodų išlaidų tiesių sutapimo atvejis
abipusis artėjimas prie optimalaus sprendinio
absoliučiai optimalus uždavinys
absoliutus maksimumas
absoliutus minimumas
adaptyvumas
adekvatumas
administracinės išlaidos
agregavimas
aktyvieji elementai
aktyviųjų elementų tikslai

aktyviųjų elementų vaidmuo
 aktyviųjų elementų veiklos motyvai
 algoritmas
 algoritminė kalba
 algoritmo kompiuterinis realizavimas
 algoritmo programinė išraiška
 amžinai besikartojantis ciklas
 analizė
 analizinė modelio forma
 analizinis modelis
 analogija
 analogija tarp ekonomikos vystymosi trajektorijos ir greitkelio
 antrojo plano tikslai mokymo priemonėje
 antrojo tipo vienodo pelno tiesė
 antrojo tipo vienodų išlaidų tiesė
 apibendrintas Leontjevo modelis
 apibendrintoji Leontjevo matrica
 apibendrintų ir paprastų Leontjevo modelių skirtumai
 apribojimai
 apribojimų išsiaiškinimo ir aprašymo etapas
 apribojimų matematinė išraiška
 apribojimų sistema
 apribojimų tipai: „ $\leq$ “, „ $\geq$ “
 apskaičiavimo formulių izomorfizmas
 apskaičiavimo formulių izomorfiškumo zona
 apskaičiavimo formulių izomorfiškumo zonos ribų nustatymas
 apskaita
 apskaitos fazė
 artutiniai skaičiavimai
 artutinis sprendinys
 „astronominiai“ skaičiai
 atitiktis tarp pirmojo ir antrojo tipo vienodo pelno tiesių
 atvejai, kai egzistuoja keli optimalūs sveikaskaitiniai sprendiniai
 atvejai, kai egzistuoja vienintelis optimalus sveikaskaitinis sprendinys
 atvejai, kai neegzistuoja sveikaskaitinio sprendinio
 atvejų klasifikavimo antrojo tipo sistema
 atvira atkarpa
 atvira ekonominė sistema
 auksinio pjūvio metodas
 automatinis režimas
 automatizuota darbo vieta (ADV)
 automatizuota organizacinių sistemų projektavimo sistema CASE
 automatizuota projektavimo sistema CAPS
 automatizuota valdymo sistema (AVS)
 autoregeneratyvumas
 AVS projektas
 AVS projektavimas
 AVS projekto diegimas

 „bananinė“ respublika
 baziniai kintamieji
 Belmano algoritmas
 Belmano principas
 bendrasis simplekso algoritmas
 bendrasis tiesinis optimizacinis modelis
 bendroji pastoviųjų gamybos išlaidų suma
 bendrosios pastoviosios gamybinės išlaidos
 būsena
 būsenos vektorius
 būtinas optimizavimo požymis

chronologiniai projektavimo etapai
ciklai simplekso algoritmo taikyme
CPM (kritinio kelio metodas)

dalinė išvestinė
dalinės išvestinės reikšmės apskaičiavimas
dalinis uždavinys
dalinių uždavinių medis, vaizduojantis optimalaus sveikaskaitinio sprendinio paiešką
Dancigo metodas
darbo jėga
darbo jėgos bendrosios sąnaudos
darbo jėgos sąnaudų minimumo kriterijus
darbo jėgos sąnaudų priklausomybė nuo gamyboje taikomos technologijos
darbo jėgos sąnaudų priklausomybė nuo pagamintos produkcijos kiekio
darbo vieta
darbo vietų skaičius
darbuotojų užimtumas
darbuotojų užimtumo kriterijus
darbuotojų užimtumo maksimizavimas
darbuotojų užimtumo rodiklis
daugiakriterijiniai optimizavimo uždaviniai
daugiakriterijinio optimizavimo problemos
deskripcinis modelis
deterministinis modelis
determinuota funkcija
determinuotumas
dialektika
dialogo su kompiuteriu režimas
diferencialinis kapitalo investavimo efektyvumas
dinaminė sistema
dinaminės sistemos funkcionavimo trajektorija
dinaminis izomorfizmas
dinaminis modelis
dinaminis optimalumas
dinaminis programavimas
dirbtiniai kintamieji
dualaus optimizacinio modelio sudarymas
dualus optimizacinis modelis
dualus optimizavimo uždavinys
duomenys
duomenų apie probleminę situaciją rinkimo ir jų sisteminės analizės etapas
dviejų tipų vienodo pelno tiesės
dvigubas kompiuterinis „žodis“
dženeralistas
dženeralistų vaidmuo sistemoje R

efektyvumas
efektyvumo rodikliai
efektyvumo rodiklių ir faktorių, nuo kurių tie rodikliai priklauso, nustatymo etapas
ekologiniai apribojimai
ekonomika
ekonomikos augimas
ekonomikos smukimas
ekonomikos planavimo principas
ekonominė krizė
ekonominė sistema
ekonominės sistemos išsivystymo lygis
ekonominės sistemos vystymasis
ekonominės sistemos vystymosi tempas

ekonominės veiklos analizė
ekonominė veikla
ekonominiai apribojimai
ekonominiai eksperimentai
ekonominiai procesai
ekonominiai rodikliai
ekonominiai santykiai
ekonominio augimo magistralė
ekonominis augimas
ekonominių procesų prognozavimas
ekonominių procesų valdymas
eksperimentai su imitaciniais modeliais
eksperimentai su optimizuojamos sistemos modeliu
eksperimentavimas dialogo su kompiuteriu režime
eksperimentavimo su imitaciniais bei optimizaciniais modeliais ir sistemos S tobulinimo etapas
eksperimentų planavimas
eksperimentų su matematiniais modeliais metodo taikymai
eksportas
Ešbio principas
etniniai apribojimai
evoliucija

faktoriai, nuo kurių priklauso optimalumo rodiklio reikšmė
faktorių, nuo kurių priklauso optimalumo rodiklio reikšmė, išsiaiškinimo etapas
fazė
fiziniai apribojimai
formalaus optimalumo požymio pakankamumas, nesantis būtinumu
formalus optimalumo požymis
formulių izomorfiškumas
formulių izomorfiškumo zona
formulių izomorfiškumo zonos ribų nustatymas
funkcinė metodologija
funkcinė organizacijų analizės, projektavimo ir valdymo metodologija
funkcinės ir objektinės metodologijų sintezė
funkcinis požiūris
funkcionavimas
funkcionavimo efektyvumas
funkcionavimo efektyvumo rodikliai
funkcionavimo trajektorija

galimybės
galimybių analizė – sisteminės analizės sudedamoji dalis
gamyba
gamybiniai pajėgumai
gamybos efektyvumas
gamybos planas
gamybos planavimas
gamybos rentabilumas
gaminio savikaina
gaminų lyginamieji efektyvumai
gamtos dėsnis
galima kitimo sritis (GKS)
galimų variantų medis
galimų variantų perrinkimo metodas
galutinis vartojimas
geometrinis netiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo metodas
geometrinis tiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo metodas
gyvybingumas
globaliai optimali funkcionavimo trajektorija
globalusis optimumas

gradiento metodas
grafinė analizė
grafinis optimalaus sprendinio analizės metodas
grafinis optimizavimo uždavinio sprendimo metodas
greičiausio nusileidimo metodas
greitkelio ir magistralės ekonomikoje analogija
grįžtamieji ryšiai

hipotetinės tikslo funkcijos sudarymo etapas
hipotetinės tikslo funkcijos tikrinimas ir tobulinimas
hipotetinė tikslo funkcija
hipotetinių sisteminių imitacinių ir optimizacinių modelių sistemos kūrimo ir taikymo stadijos
hipotezė
hipotezių formulavimas
hipotezių kėlimo ir jų tikrinimo metodas
hipotezių loginė analizė
hipotezių sistema
hipotezių sisteminė analizė
hipotezių analizės ir jų sistemos konstravimo etapas
humanitariniai mokslai
humanitarinių mokslų atstovų vaidmuo

ideologiniai apsiribojimai
įėjimas
įėjimų trajektorijos
įėjimų vektorius
imitacinis modeliavimas
imitacinis modelis
imitacinių ir optimizacinių modelių kūrimo ir jų programinio realizavimo etapas
imitacinių modelių sistema
įmonės veiklos efektyvumo rodikliai
importas
informacija
informacijos apie optimalaus sprendinio jautrumą bei stabilumą panaudojimas
interfeisas
interfeisų laisvo pasirinkimo principas
interfeisų planavimo principas
interfeisų prognozavimo principas
ypatingieji taškai
ypatingosios modelio parametrų reikšmių poros
ypatingosios parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmių poros
ypatingosios situacijos simplekso algoritmo taikyme
ypatingosios tiesės
įrenginių keitimo optimalių terminų nustatymo uždaviniai
įrenginių remonto optimalių terminų nustatymo uždaviniai
įrenginių profilaktinės kontrolės optimalių terminų nustatymo uždaviniai
išėjimas
išėjimų trajektorijos
išėjimų vektorius
išoriniai modeliai
išorinio įmonės funkcionavimo efektyvumo rodikliai
išorinis modeliavimas
išorinis projektas
išorinis projektavimas
išplėstoji vienetinė matrica
išsigimęs optimizavimo uždavinio sprendinys
iteraciniai lygčių ir jų sistemų sprendimo metodai
įvertis
izomorfiški judesiai
izomorfizmas

izoprofitė

japoniškais ekonomikos vystimosi modelis

jautrumas

jautrumo analizė

jautrumo koeficientas

jautrumo koeficientų reikšmių apskaičiavimo formulės

jautrumo koeficientų reikšmių apskaičiavimo formulių stabilumo zonos

jautrumo koeficientų stabilumo zonos ir jų ribų apskaičiavimas

juridinė norma

juridiniai apribojimai

juridinis įstatymas

kalibravimas

kanoninė tiesinio optimizacinio modelio forma

Kantorovičiaus modelis

kapitalistinė ekonomika

kapitalistinės ekonomikos krizės

kapitalo investavimo diferencialinis efektyvumas

kapitalo investavimo efektyvumas

kapitalo investavimo efektyvumas laiko vienetui

kapitalo investavimo efektyvumo kitimo tendencija

kapitalo investavimo efektyvumo maksimizavimas

kapitalo investavimo efektyvumo maksimumo kriterijus

kapitalo investavimo efektyvumo pusiausvyra

kapitalo investavimo efektyvumo pusiausvyros nestabilumas

kapitalo investavimo vienodo efektyvumo tiesė

klasifikacinis medis

klasifikavimas

kompiuterinės programos, operuojančios su simboliais

kompiuterinis „žodis“

kompleksinė sistema

kompleksinis optimalumo rodiklis

konforminė transformacija

koordinatorius

koordinavimas

koordinavimo principai

koordinuojantys poveikiai

„kryžminė formulė“ (simplekso algoritme)

labilumas

Lagranžo funkcija

Lagranžo koeficientai

Lagranžo koeficientų metodas

Lagranžo metodo taikymas optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizėje

laisvieji kintamieji

laisvoji rinka

laisvosios rinkos ekonomika

leistinas bazinis sprendinys

leistinas problemos sprendinys (LPS)

leistinas sprendinys

leistino bazinio sprendinio radimo algoritmas

leistino bazinio sprendinio radimo etapas

leistino keitimo sritis (LKS)

leistino plano neegzistavimo požymis

leistinių sprendinių sritis (LSS)

Leontjevo apibendrintas modelis

Leontjevo apibendrinto modelio apribojimų sistema

Leontjevo matrica

Leontjevo modelis

lyginamasis pelnas
 lyginamojo pelno apskaičiavimo formulė
 loginė analizė
 loginiai apribojimai
 loginiai projektavimo etapai
 loginis modeliavimas
 loginių procedūrų atlikimo automatizavimas
 loginių procedūrų formalizavimas
 lokalaus optimumo principas
 lokaliai optimali funkcionavimo trajektorija
 lokalus optimumas
 LSS ir LKS abipusės transformacijos dėsniumai
 LSS ir LKS abipusė transformacija

 magistralė ekonomikoje
 magistralinė ekonominės sistemos vystimosi trajektorija
 magistraliniai modeliai
 magistralinis kaupimo modelis
 maksimalus galimų variantų skaičius
 maksiminas
 maksimizavimas
 maksimumas
 MAPLE
 marginalinis kapitalo investavimo efektyvumas
 MAS(masinio aptarnavimo sistema)
 MAS sandaros optimizavimo uždaviniai
 matematikos formulių kalba
 matematinė priklausomybės išraiška
 matematinės erdvės
 matematiniai eksperimentai
 matematiniai modeliai
 matematiniai netiesiniai optimizaciniai modeliai
 matematiniai optimizavimo uždavinio sprendimo etapai
 matematiniai tiesiniai optimizaciniai modeliai
 matematinio eksperimentavimo etapas
 matematinio eksperimentavimo sistema
 matematinio eksperimentavimo sistemos kūrimo ir panaudojimo etapai
 matematinis optimizavimo uždavinys
 MATHCAD
 menedžeris
 menedžmentas
 minimaksas
 mišrūs apribojimai
 modelio adekvatumas
 modelio identifikavimas
 modelio kalibravimas
 modelio sudarymo etapai
 modelio verifikavimas
 modelis – „filmas“
 modelis – „fotografija“
 modifikuotas simplekso metodas
 „momentinis“ optimalumas
 moralė – visuomenės išminties forma
 moralės normos
 moraliniai apsiribojimai
 motyvacinis modelis

 nacionaliniai apribojimai
 naujų galimybių analizė – sisteminės analizės sudedamoji dalis
 neleistinas bazinis sprendinys

neleistino plano pertvarkymas į leistiną
 nelygybių sistema
 nelygybių sistemos sprendimo būdai
 nereguliuojama rinka
 netiesinės priklausomybės suvedimas į tiesinę
 netiesinio modelio suvedimas į tiesinį
 netiesinio modelio suvedimo į tiesinį pavyzdys
 netiesinio optimizacinio modelio sudarymo pavyzdys
 netiesinio optimizavimo metodai
 netiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo analiziniu metodu pavyzdys
 netiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo grafiniu metodu pavyzdys
 netiesinio optimizavimo uždavinio sprendinio jautrumo ir stabilumo analizės, taikant Lagranžo funkciją, pavyzdys
 netiesinio programavimo metodai
 netiesinis dinaminis programavimas
 netiesinis modelis
 netiesinis optimizacinis modelis
 netiesioginės išlaidos
 nevaldomi modelio parametrai
 nevaldomų modelio parametrų vektorius
 nevaldomų sistemos S parametrų būsimų reikšmių prognozavimas
 nevaldomų sistemos S parametrų reikšmių vertinimas
 normatyviniai modeliai
 normatyvinis informacinis modelis
 normatyvinis matematinis modelis
 normatyvinis modelis plačiąja prasme (projektas, planas)
 normatyvinis modelis siaurąja prasme (pareigybės modelis)

objektas
 objektinė sistemų analizės, modeliavimo, projektavimo ir valdymo metodologija
 objektyvumas
 objektyvūs dėsniai
 operacijų tyrimas (OT)
 operacijų tyrimo metodai
 operacijų tyrimo uždavinių klasės
 optimalaus atsargų valdymo uždaviniai
 optimalaus maršruto išrinkimo uždaviniai
 optimalaus matematinio sprendinio orientacinis vaidmuo
 optimalaus resursų paskirstymo uždaviniai
 optimalaus sprendinio efektyvumas
 optimalaus sprendinio efektyvumo apskaičiavimas
 optimalaus sprendinio egzistavimo požymis
 optimalaus sprendinio išsigimimas
 optimalaus sprendinio išsigimimo sąlygos
 optimalaus sprendinio jautrumas
 optimalaus sprendinio jautrumas sistemos parametrų reikšmių pokyčiams
 optimalaus sprendinio jautrumo analizė
 optimalaus sprendinio jautrumo analizė, apskaičiuojant jautrumo koeficientų reikšmes
 optimalaus sprendinio jautrumo analizė, eksperimentuojant su optimizaciniu modeliu
 optimalaus sprendinio jautrumo analizė, eksperimentuojant su sistemos S modeliu
 optimalaus sprendinio jautrumo analizės rezultatų vaidmuo, planuojant to sprendinio praktinio realizavimo procesą
 optimalaus sprendinio jautrumo koeficientai
 optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų apskaičiavimas
 optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos
 optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribų apskaičiavimas
 optimalaus sprendinio neegzistavimo sąlygos ir požymiai
 optimalaus sprendinio paieškos algoritmai
 optimalaus sprendinio paieškos trajektorijos
 optimalaus sprendinio paieškos trajektorijos optimizavimas

optimalaus sprendinio priklausomybė nuo optimizacinio modelio parametrų reikšmių
 optimalaus sprendinio priklausomybės nuo optimizacinio modelio dviejų parametrų reikšmių pokyčių analizės pavyzdžiai
 optimalaus sprendinio priklausomybės nuo optimizacinio modelio vieno parametro reikšmės pokyčio analizės pavyzdžiai
 optimalaus sprendinio radimo algoritmas, kai keičiasi parametrai b_{11} , b_{21} (žiūr. 345pav)
 optimalaus sprendinio realizavimo procesas
 optimalaus sprendinio realizavimo proceso valdymas
 optimalaus sprendinio stabilumas, keičiantis optimizacinio modelio parametro reikšmėms
 optimalaus sprendinio stabilumo analizė
 optimalaus sprendinio stabilumo analizės rezultatų vaidmuo, planuojant to sprendinio praktinio realizavimo procesą
 optimalaus sprendinio stabilumo zonos
 optimalaus sprendinio stabilumo zonų ribų apskaičiavimas
 optimalaus tvarkaraščio sudarymo uždaviniai
 optimali funkcionavimo trajektorija
 optimali lošimo strategija
 optimali magistralė
 optimalios funkcionavimo trajektorijos paieškos uždavinys
 optimalios lošimo strategijos paieškos uždavinys
 optimalios magistralės paieškos uždavinys
 optimali technologija
 optimali tikslo funkcijos reikšmė
 optimalumas
 optimalumo kriterijus
 optimalumo rodiklio ir optimalumo kriterijaus pasirinkimo (sukonstravimo) etapas
 optimalumo rodiklio konstravimas
 optimalumo rodiklio pasirinkimas
 optimalumo rodiklio priklausomybė nuo valdomųjų ir nevaldomųjų modelio parametrų
 optimalumo rodiklio priklausomybės nuo valdomųjų kintamųjų ir nevaldomųjų modelio parametrų nustatymas
 optimalumo rodiklis
 optimalus mitybos racionas
 optimalus problemos sprendimas
 optimalus tarpšakinis gamybos planas
 optimalus tarpšakinių pristatymų planas
 optimalus uždavinio sprendinys
 optimalus valdymas
 optimizacinio modelio apribojimai
 optimizacinio modelio identifikavimas
 optimizacinio modelio kalibravimas
 optimizacinio modelio kalibravimo ir identifikavimo etapas
 optimizacinio modelio nevaldomųjų kintamųjų reikšmių prognozavimas
 optimizacinio modelio parametrai
 optimizacinio modelio sudarymo etapai
 optimizacinio modelio sudėtis
 optimizacinio modelio tikslo funkcija
 optimizacinio modelio tikslo funkcijos sudarymas
 optimizacinio modelio valdomieji kintamieji
 optimizacinio modelio verifikavimas
 optimizacinis modelis
 optimizacinis modelis – normatyvinio sistemos S modelio kūrimo instrumentas
 optimizacinių ir sisteminių modelių sąveikavimas sistemos S projektavimo procese
 optimizacinių ir sisteminių modelių sąveikavimas sistemos S tobulinimo procese
 optimizacinių modelių dualumas
 optimizavimas
 optimizavimo matematiniai metodai
 optimizavimo metodų praktinio taikymo efektyvumo didinimo būdai
 optimizavimo metodų praktinio taikymo nepakankamo efektyvumo priežastys
 optimizavimo uždaviniai

optimizavimo uždavinio apribojimai
 optimizavimo uždavinio matematinio modelio sudėtis
 optimizavimo uždavinio matematinio modelio tikslo funkcija
 optimizavimo uždavinio matematinis modelis
 optimizavimo uždavinio praktinis sprendimas
 optimizavimo uždavinio sprendimas – normatyvinio modelio sudarymo etapas
 optimizavimo uždavinių dualumas
 optimizuojamas efektyvumo rodiklis – optimalumo rodiklis
 optimumas
 optimumo taškas
 optimumo taško koordinačių jautrumo koeficientai
 optimumo taško koordinačių reikšmės
 organizacija
 organizacijos aktyvieji elementai
 organizacijos pasyvieji elementai
 organizacijos tikslai
 organizacijos vadovavimo sistema
 organizacinė sistema
 organizaciniai apribojimai
 organizuotumas
 OT taikymai sistemos S tobulinime

Pagalbinė tikslo funkcija W
 pagalbiniai kintamieji
 pagalbinių kintamųjų vaidmuo optimizaciniame modelyje
 pagalbinių kintamųjų vaidmuo simplekso algoritmo taikyme
 pagaminta produkcija
 pagamintos produkcijos kiekis
 pagamintos produkcijos kiekio maksimizavimas
 pagamintos produkcijos kiekio maksimizavimo kriterijus
 pagrindiniai valdomi kintamieji
 paieškos algoritmai
 paieškos optimizavimo uždaviniai
 pakankamas, bet nebūtinas sprendinio optimalumo požymis
 pakankamas sprendinio optimalumo požymis
 papildomi valdomi kintamieji
 papildomų valdomųjų kintamųjų prasmės
 paprasta iteracija
 paprastas Leontjevo modelis
 parametras
 parametro reikšmė
 parametro reikšmės įverčio nustatymas
 parametrų reikšmių pakeitimas raidėmis simplekso lentelėje, atliekant sprendinio jautrumo analizę
 pareigybės modelis
 pareigybės pasas (PP)
 pareigybės paso projektavimas
 pareigybės paso projektavimo metodiniai nurodymai
 pareiginė instrukcija (PI)
 pareigūnas
 pareigūno galimybės
 pareigūno normatyvinis modelis
 pareigūno veiklą reglamentuojančios normos
 pasirinkto sprendinio ir sudarytos modelių sistemos tobulinimo etapas
 pasirinkto sprendinio realizavimo (diegimo) etapas
 pasyvieji organizacijos elementai
 paskirstymo metodas
 paskirstymo metodo ir potencialų metodo taikymas, sprendžiant pervežimų plano optimizavimo uždavinius
 pastoviosios gamybinės išlaidos

pastoviųjų gamybos išlaidų dalies vidutinio dydžio, tenkančio produkcijos vienetui, apskaičiavimas
patenkinamas problemos sprendimas
patenkinamas sprendinys
patenkinamo sprendinio paieškos uždavinys
patenkinamumo kriterijus
patikimumas
penkiamatė erdvė
perėjimo nuo neleistino prie leistino bazinio sprendinio algoritmai
perėjimo nuo neleistino prie leistino bazinio sprendinio problema
pilnojo vartojimo planas
pirmojo ir antrojo tipo vienodo pelno tiesių sutapimo sąlyga
pirmojo plano tikslai mokymo priemonėje
pirmojo tipo vienodo efektyvumo tiesės
pirmojo tipo vienodo pelno ir vienodų išlaidų tiesių sutapimo sąlyga
pirmojo tipo vienodo pelno tiesės
pirmojo tipo vienodų išlaidų tiesės
planas
planavimas
planavimo fazė
planavimo ir prognozavimo procesų skirtumai
planavimo principas
plano ir prognozės skirtumai
politiniai apribojimai
politiniai apsiribojimai
potencialų apskaičiavimas, taikant paskirstymo metodą
požymis, kad optimizavimo uždavinys turi be galo daug sprendinių
požymis, kad simplekso lentelė vaizduoja optimalų sprendinį
pradinės ribos nustatymas, taikant šakų ir ribų metodą
pradinis bazinis optimizavimo uždavinio sprendinys
praktinė problema
praktinio optimizavimo uždavinio sprendimo etapai
praktinis optimizavimo problemos sprendinys
predikatas
preskripcinis modelis
priežastys, dėl kurių matematinių optimizavimo metodų taikymas neduoda laukiamo efekto
probleminė sistema S
probleminė situacija
probleminės situacijos modelis
probleminės situacijos sisteminės analizės etapas
problemos sprendimo stadijos
problemos sprendimo varianto parinkimas
problemos sprendimo variantų konstravimas
problemos sprendimo variantų tikrinimas ir vertinimas
produkcija
produkcijos agregavimas į grupes
prognozavimas
prognozuojamų pasekmių tikrinimo natūriniais eksperimentais etapas
programavimas (dvi šios sąvokos reikšmės)
programinės serviso sistemos kūrimo, diegimo ir taikymo etapai
projekcija
projektas
projektavimas (dvi šios sąvokos reikšmės)
projektavimo techninė užduotis
projektiniai sprendimai
proporcingosios gamybinės išlaidos
pseudopaviršius
pseudoplokštuma
pusiausvyrinė ekonomonio augimo trajektorija
pusiau uždara atkarpa

racionalaus problemos sprendimo paieška
racionalumas
realistas
realus pasaulis
realus sprendinys
religiniai apribojimai
remontas
remonto optimalių terminų nustatymo uždaviniai
resursai
resursų importo optimalus dydis
resursų importo planas
resursų kiekio apribojimai
resursų sąnaudos
resursų sąnaudų koeficientai
riba – ribinio sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmė
ribinis sveikaskaitinis sprendinys
ribos keitimas nauja riba sveikaskaitinio tiesinio optimizavimo algoritme
ribų metodo taikymas sveikaskaitiniame programavime
ryšiai tarp optimizacinio ir motyvacinio modelių
ryšiai tarp optimizacinio ir normatyvinio modelių
ryšiai tarp optimizacinio ir sisteminių modelių
rodiklis
Romos klubas

sąlyginio ekstremumo taško radimas, taikant Lagranžo funkcijos metodą
sąlyginis ekstremumas
sąlyginis maksimumas
sąlyginis minimumas
santykiai tarp sistemų S ir R
santykių tarp sistemų S ir R dialektika
savikaina
savikainos minimizavimas
savikainos minimumo kriterijus
savitobulinančioji organizminė sistema
savivaldumas
sąvoka
sąvokos apimtis
sąvokos denotatas
sąvokos turinys
serviso programa
serviso programų sistema
siekiama būseną
silpnai reguliuojama rinka
siekiama padėtis
simbolinė algebra
simpleksas
simpleksinis kriterijus
simpleksinis multiplikatorius
simplekso algoritmas
simplekso algoritmo panaudojimas, pertvarkant neleistiną bazinį sprendinį į leistiną
simplekso algoritmo taikymai
simplekso algoritmo taikymas optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizėje
simplekso algoritmo taikymas optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų reikšmių apskaičiavimui
simplekso algoritmo taikymas optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonų nustatymui
simplekso algoritmo taikymas optimalaus sprendinio paieškai
simplekso algoritmo taikymas optimalaus sprendinio stabilumo zonų nustatymui
simplekso bendrasis algoritmas
simplekso bendrojo algoritmo antrasis etapas
simplekso bendrojo algoritmo antrojo etapo tikslo funkcija
simplekso bendrojo algoritmo etapų paskirtis

simplekso bendrojo algoritmo pirmasis etapas
 simplekso bendrojo algoritmo pirmojo etapo tikslo funkcija
 simplekso lentelė – kompaktiška lygčių sistemos užrašymo forma
 simplekso lentelės eilutė – kompaktiška tiesinės lygties užrašymo forma
 simplekso lentelės stulpeliai – kompaktiška dualaus optimizavimo uždavinio modelio forma
 simplekso lentelės sudarymo algoritmas
 simplekso lentelių seka – artėjimo prie optimalaus sprendinio proceso imitacinis modelis
 simplekso lentelių seka – imitacinis gamybos plano tobulinimo proceso modelis
 simplekso lentelių transformavimas – kompaktiška lygčių sistemos transformavimo forma
 simplekso metodas
 simplekso metodo taikymai sistemos S tobulinime
 simplekso metodo taikymai tiesinio programavimo uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių analizės procesuose
 sistema R
 sistema S
 sisteminė analizė
 sisteminė metodologija
 sisteminė organizacijų analizės, modeliavimo, projektavimo ir valdymo metodologija
 sisteminė savybė
 sisteminė sudėtingų sistemų projektavimo metodologija
 sisteminiai ir optimizaciniai modeliai – sistemos R ir SPA įrankiai
 sisteminiai modeliai
 sisteminio modeliavimo taikymai, ieškant optimalaus sprendinio ir tikslinant jo optimalumą
 sisteminis projektavimas
 sisteminių ir optimizacinių modelių taikymai organizacijų valdyme
 sisteminių modelių klasifikavimas
 sisteminių modelių panaudojimas, sprendžiant sistemų ir jų veiklos optimizavimo uždavinius
 sistemos funkcionavimą imituojančių algoritmų panaudojimas sistemos tobulinime
 sistemos pervedimo iš esamos į siekiamą būseną trajektorija ir jos optimizavimo problema
 sistemos R paskirtis
 sistemos S evoliucija
 sistemos S ir jos funkcionavimo efektyvumo rodikliai
 sistemos S tobulinimas
 sistemos S tobulinimo tikslų formulavimas
 situacinis modelis
 skaičiavimo paklaida
 skaičiavimo paklaidų kaupimasis
 skaičiavimo paklaidų kaupimosi pavojingumas
 skaičiavimų ciklai
 skaičiavimų ciklų susidarymo galimybė, taikant simplekso algoritmą
 skaičiavimų tikslumas
 skaičiavimų tikslumo didinimo būdai
 skaliarinė vektorių sandauga
 socialiniai apribojimai
 SPA motyvacinis modelis
 SPA pareiginis modelis
 sprendimą priimančias asmuo (SPA)
 sprendinys, kuri priima SPA probleminėje situacijoje
 sprendinio optimalumo formalaus požymio pakankamumas
 sprendinio realizavimas (diegimas)
 sprendinių „apvalinimas“
 sprendinių realizavimo problema
 sprendžiančioji sistema R
 stabilumas
 stabilumo analizė
 stabilumo zona
 standartinė tiesinio programavimo uždavinio modelio forma
 standartinis simplekso algoritmas
 „statinis“ izomorfizmas
 „statinis“ optimalumas

statistikos departamentas
 statistiniai duomenys
 statistinių duomenų, reikalingų hipotezių ir modelių patikrinimui, rinkimo ir apdorojimo etapas
 statistinių duomenų, reikalingų modelių sudarymui, rinkimo ir apdorojimo etapas
 statistinių priklausomybių analizė
 statistinių priklausomybių analizės ir iš jos rezultatų išplaukiančių hipotezių formulavimo etapas
 statistiškai optimalus sprendinys
 stochastinė funkcija
 stochastinio programavimo uždaviniai
 stochastinio programavimo uždavinių sprendimo metodai
 stochastinis optimizavimas
 stochastinis programavimas
 subalansuotas optimalus tarpšakinis gamybos planas
 subalansuoto optimalaus tarpšakinio gamybos plano sudarymo uždavinys
 sukimosi paraboloidas
 sveikaskaitinio optimalaus sprendinio paieškos algoritmas
 sveikaskaitinis optimalus sprendinys
 sveikaskaitinis programavimas
 sveikaskaitinis tiesinis programavimas

šakų ir ribų metodas
 šakų ir ribų metodo taikymas netiesinių optimizavimo uždavinių sveikaskaitinių sprendinių paieškoje
 šakų ir ribų metodo taikymas tiesinių sveikaskaitinio programavimo uždavinių sprendimui

tarpšakinio optimalaus planavimo uždaviniai
 tarpšakinis optimalus gamybos balansas
 tarpšakinis optimalus tiekimo balansas
 taškai $M, M', P, P', U, U', V, V', W, W'$ ir jų savybės
 taško, vaizduojančio optimalų sprendinį, koordinačių reikšmių apskaičiavimo formulių stabilumo (formulių izomorfizmo) zonos
 techninė projektavimo užduotis
 techninės galimybės
 techniniai apribojimai
 technologinės galimybės
 technologinės normos
 technologiniai apribojimai
 technologinių normų pokyčiai
 teleologinė metodologija
 terminalinė metodologija
 terminalinės ir teleologinės metodologijų sintezė
 tiesinė lygtis
 tiesinė nelygybė
 tiesiniai optimizaciniai modeliai
 tiesiniai optimizavimo metodai
 tiesinio optimizavimo uždavinio, turinčio mišrius apribojimus, sprendimo algoritmo realizavimo etapai
 tiesinio programavimo algoritmai
 tiesinio programavimo taikymai ekonomikoje
 tiesinio sveikaskaitinio optimizavimo uždavinio sprendimas dialogo režime
 tiesinio sveikaskaitinio optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas
 tiesinio sveikaskaitinio optimizavimo uždavinio sprendimo automatinis režimas
 tiesinis dinaminis programavimas
 tiesinis optimizacinis modelis, turintis mišrius apribojimus, kanoninėje formoje
 tiesinių lygčių sistema
 tiesinių nelygybių sistema
 tiesioginės išlaidos
 tiesioginio ir dualaus optimizavimo uždavinių sprendinių lyginimo metodas
 tikslas
 tikslieji mokslai
 tikslo funkcija
 tikslo funkcijos argumentai

tikslo funkcijos koeficientų reikšmės
tikslo funkcijos optimali reikšmė
tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas optimizacinio modelio parametrų reikšmių pokyčiams
tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientų stabilumo zonos
tikslo funkcijos optimalios reikšmės stabilumo zonos
tikslo funkcijos parametrai
tikslo funkcijos reikšmių matematinis vidurkis
tikslų formulavimas
tikslų koordinavimas
tikslų koordinavimo principai
tikslumas
tinkliniai grafikai (TG)
tinklinių grafikų optimizavimas, taikant CPM
tinklinių grafikų optimizavimo metodai
tobulinimo tikslai
transformacija iš koordinačių x_1 ir x_2 sistemos į koordinačių b_{11} ir b_{21} sistemą
transformacijų simetriškumas
trūkumų analizė – sisteminės analizės sudedamoji dalis
turimų resursų analizė – sisteminės analizės sudedamoji dalis

utopija
utopistas
uždara atkarpa
uždara ekonominė sistema
uždavinių ir jų sprendinių variantų „medis“
užimtumas
užimtumo didinimo „pliusų“ ir „minusų“ reliatyvumas
„užs ciklinimo“ galimybė, taikant simplekso algoritimą

vadyba
vadybininkas
vadybos instrumentai
vadybos praktika
vadybos teorija
vadovas
vadovavimas
valdančioji sistema
valdymas
valdymo sistema
valdomi kintamieji
valdomoji sistema
valdomų kintamųjų reikšmių keitimo planavimas
valdomų kintamųjų reikšmių vektorius
valdomumas
variantų medis
variantų perrinkimo metodas
vartojimas
vartojimo magistralinis modelis
vartojimo planas
vedančioji eilutė simplekso lentelėje
vedančiojo laisvojo kintamojo pasirinkimas simplekso lentelėje
vedančiosios eilutės pasirinkimas simplekso lentelėje
vedantysis elementas simplekso lentelėje
vedantysis laisvasis kintamasis simplekso lentelėje
vedantysis stulpelis simplekso lentelėje
vektorinė funkcija
vektorius
verbalinė modelio forma
verifikavimas
verifikavimo etapas

vidiniai sisteminiai modeliai
 vidinio įmonės funkcionavimo efektyvumo rodikliai
 vidinis modeliavimas
 vidinis projektavimas
 vidutinės pastoviosios gamybinės išlaidos, tenkančios vienam gaminiui
 vidutiniškai optimalus sprendinys
 vienakriterijinis optimizavimo uždavinys
 vienodo efektyvumo linijos
 vienodo efektyvumo paviršiai
 vienodo efektyvumo pseudopaviršiai
 vienodo efektyvumo tiesės
 vienodo pelno linijos
 vienodo pelno paviršiai
 vienodo pelno pseudopaviršiai
 vienodo pelno tiesės
 vienodo pelno tiesių sutapimo su vienodų išlaidų tiesėmis atvejai
 vienodo pelno tiesių tipai
 vienodo pelno tiesių transformacijos
 vienodų išlaidų linijos
 vienodų išlaidų paviršiai
 vienodų išlaidų pseudopaviršiai
 vienodų išlaidų tiesės
 vienodų pajamų linijos
 vienodų pajamų paviršiai
 vienodų pajamų pseudopaviršiai
 vienodų pajamų tiesės
 vieno žingsnio optimalaus pasirinkimo taisyklė
 visuomenės ekonominio išsivystymo rodikliai
 visuomenės socialinio išsivystymo rodikliai

Zeidelio metodas

žingsninio agregavimo metodas

UŽDUOTYS

1.15.1. Kokius modelius vadiname sisteminiais? Kuo jie skiriasi nuo optimizacinių modelių?

Sudarykite sisteminių modelių klasifikavimo sistemą ir pavaizduokite ją grafiškai.

Iliustruokite kiekvieną to klasifikacinio „medžio šaką“ konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.2. Kokius modelius vadiname deskriptiniais ir kodėl juos taip vadiname? Išvardinkite pagrindines deskriptinių modelių savybes ir tokių modelių taikymo sritis. Sudarykite kokios nors realios sistemos, dar nenagrinėtos šioje mokymo priemonėje, deskriptinius išorinį ir vidinį modelius žodinėje, o po to – ir matematinėje formoje (t. y. analizinius ar imitacinius modelius).

1.15.3. Kokius modelius vadiname normatyviniais ir kodėl juos taip vadiname? Ką reiškia sąvoka „preskriptinis modelis“? Išvardinkite pagrindines normatyvinių modelių savybes ir tokių modelių taikymo sritis. Sudarykite kokią nors normatyvinį modelį žodinėje, o po to – ir matematinėje formoje.

1.15.4. Ką vadiname išoriniu, o ką – vidiniu projektavimu? Iliustruokite savo atsakymą konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.5. Ką vadiname situaciniu, ką – normatyviniu, o ką – motyvaciniu modeliu? Iliustruokite savo atsakymą pavyzdžiais. Kokius uždavinius sprendžiant, naudojamos šiais modeliais? Aprašykite situacinių, normatyvinių ir motyvacinių modelių taikymo sritis, iliustruodami konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.6. Aprašykite kokią nors probleminę situaciją ir sistemą S, kurioje ta probleminė situacija susiklostė. Aprašykite sprendžiančiąją sistemą R, sudarytą tos problemos sprendimui. Ar gali sistema S būti sistemos R dalimi? O atvirkščiai? Išnagrinėkite galimus sistemų S ir R santykius, iliustruodami galimus atvejus konkrečiais pavyzdžiais.

Aprašykite probleminės situacijos požymius ir problemos sprendimo etapus (žiūr.[128]).

1.15.7. Sudarykite kokios nors gamybinės įmonės funkcionavimo efektyvumo rodiklių sąrašą.

Aptarkite tą sąrašą su kuriuo nors iš vadovaujančių tai įmonei darbuotojų. Kurie to sąrašo rodikliai geriau atspindi išorinį, o kurie – vidinį įmonės funkcionavimo efektyvumą? Kokių tikslų turėtų

siekti įmonės kolektyvas ir jos vadovai? Kokiais rodikliais būtų tikslinga matuoti (charakterizuoti) įmonės valdymo efektyvumą?

Kokiais rodikliais, Jūsų nuomone, būtų galima charakterizuoti visuomenės ekonominę ir socialinę išsivystymą kokioje nors valstybėje?

Pagal kokius požymius ir kriterijus skiriamos išsivysčiusios valstybės nuo besivystančių bei neišsivysčiusių?

1.15.8. Ką vadina optimalumo rodikliu, o ką – optimalumo kriterijumi? Išvardinkite keletą optimalumo rodiklių ir optimalumo kriterijų. Kas, Jūsų nuomone, galėtų būti optimalumo rodikliu ir optimalumo kriterijumi, pasirenkant kineskopo ekrano įstrižinės dydį projektuojamame televizoriuje? Ar vienu metu galima naudotis keliais optimalumo rodikliais? Iliustruokite savo samprotavimą pavyzdžiais.

1.15.9. Pasirinkę kokioje nors situacijoje optimalumo rodiklį, išsiaiškinkite, nuo kokių valdomųjų kintamųjų jis priklauso. Aprašykite, kaip galima būtų keisti kintamųjų reikšmes ir įvertinkite (bent apytikriai), kaip tuomet turėtų keistis optimalumo rodiklio reikšmė. Ar valdomieji kintamieji gali priklausyti vienas nuo kito? Atsakymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais. Kaip nustatoma, kurie kintamieji turėtų būti priskirti valdomųjų kintamųjų grupei konkrečiame optimizavimo uždavinyje, jei tame uždavinyje optimalumo rodiklio reikšmė priklauso nuo kelių kintamųjų, kurių vieną dalį valdo vienas subjektas, kitą – kitas, trečią – trečias, o dalį kintamųjų gali valdyti ne vienas, bet keli subjektai? Pabandykite surasti ir aprašyti tokią situaciją. Suformuluokite pakankamai tikslų valdomojo kintamojo apibrėžimą. Ar valdomojo kintamo sąvoka yra absoliuti, ar reliatyvi? Iliustruokite atsakymą pavyzdžiais.

1.15.10. Išvardinkite tuos nevaldomus kintamuosius, nuo kurių priklauso užduotyje 1.15.9. pasirinktas optimalumo rodiklis. Įvertinkite (nors apytikriai) nevaldomųjų kintamųjų poveikį optimalumo rodikliui. Ar nevaldomojo kintamojo sąvoka yra absoliuti, ar reliatyvi? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais. Kodėl sakoma, kad valdomų kintamųjų kitimą galima ir reikia planuoti, o nevaldomųjų kintamųjų kitimą galima (ir reikia) prognozuoti? Kuo skiriasi prognozė nuo plano? Pirmąjį koordinavimo principą kuriuo naudojamasi derinant aktyvųjų organizacijos elementų tikslus ir veiksmus su visos organizacijos paskirtimi kartais vadina interfeisų prognozavimo, kartais – interfeisų planavimo principu (žiūr. [18]). Kuris iš šių dviejų pavadinimų, Jūsų nuomone, yra tikslesnis? Kodėl? Kada ši principą būtų galima vadinti tik planavimo, o kada – tik prognozavimo principu? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais. Suformuluokite pakankamai tikslų nevaldomo kintamojo apibrėžimą. Ar tame pačiame optimizavimo uždavinyje kai kurie nevaldomi kintamieji gali tapti valdomais? O atvirkščiai: ar gali kai kurie valdomieji kintamieji tapti nevaldomais? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.11. Ką vadiname optimizavimo uždavinio tikslo funkcija? Raskite (arba sukurkite) keletą tikslo funkcijos pavyzdžių. Ką vadiname tikslo funkcijos argumentais, o ką – tos funkcijos parametrais? Ar tikslo funkcijos parametrai yra tik konstantos? Ar tie parametrai duotame optimizavimo uždavinyje gali būti kintamais dydžiais? Atsakymą argumentuokite, o taip pat iliustruokite pavyzdžiais. Ar tikslo funkcijos – tik determinuotos funkcijos? Ar optimizavimo uždaviniai gali būti ir stochastiniai? Kaip tuomet sudaromos tikslo funkcijos? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais. Ar tikslo funkcijos reikšmė gali tiesiogiai priklausyti nuo laiko, t. y., ar gali keistis, laikui bėgant ir nesikeičiant valdomųjų kintamųjų reikšmėms? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.12. Kokia gali būti optimizavimo uždavinio apribojimų prigimtis? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais. Ką vadiname leistinių sprendinių sritimi (LSS), o ką leistinu problemos sprendiniu (LPS)? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais. Kaip apribojimai aprašomi matematiškai? Aprašykite matematiškai kokio nors optimizavimo uždavinio apribojimus ir raskite LSS.

1.15.13. Ką vadiname optimaliu problemos ir optimizavimo uždavinio sprendiniu (OPS)? Kaip OPS apibūrinamas matematiškai? Kokias sąlygas turi tenkinti optimizavimo uždavinio sprendinys? Kokius optimizavimo uždavinius sprendinius knygoje [18] vadina optimaliais, o kokius patenkinamais? Iliustruokite atsakymą pavyzdžiais. Suformuluokite kokią nors optimizavimo uždavinį, sudarykite to uždavinio matematinį modelį ir raskite to uždavinio sprendinį.

1.15.14. Ką reiškia „išspręsti matematinį optimizavimo uždavinį“? O ką reiškia „išspręsti sistemos S optimizavimo problemą“? Kuo skiriasi šios dvi sąvokos? Apžvelkite galimas priežastis, dėl kurių ta ar kita optimizavimo problema gali būti neišspręsta, iliustruodami tą apžvalgą konkrečiais pavyzdžiais. Ką reikėtų daryti, norint pašalinti Jūsų nurodytas priežastis? Raskite konkrečių pavyzdžių, rodančių, kaip pavyksta pašalinti priežastis, trukdžiusias optimizavimo problemos sprendimui, ir išspręsti problemą. Raskite ir tokių pavyzdžių, kada kai kurių priežasčių pašalinti ir išspręsti optimizavimo problemą nepavyko. Išsiaiškinkite, kodėl taip atsitiko.

1.15.15. Išvardinkite optimizavimo uždavinių ir jų sprendimo metodų klases, iliustruodami pavyzdžiais.

1.15.16. Aprašykite galimus santykius tarp sistemų ir tarp jų sisteminių ir optimizacinių modelių. Iliustruokite pavyzdžiais sisteminių matematinių modelių panaudojimą, sprendžiant optimizavimo uždavinius, ir optimizacinių modelių panaudojimą, projektuojant bei tobulinant sistemas ir jų funkcionavimą.

1.15.17. Kas yra operacijų tyrimas (OT), kokia OT paskirtis? Suformuluokite pagrindinius OT uždavinius, iliustruodami savo formuluotes konkrečiais pavyzdžiais. Apibrėžkite OT taikymo sritį, apibūdinkite OT metodus ir jų specifiką. Kuo, Jūsų nuomone, skiriasi OT ir matematinių optimizavimo metodų kursai? Ar galima teigti, jog OT – sisteminės analizės sudėtinė dalis? Išvardinkite pagrindinius OT etapus. Kuriuos iš jų, Jūsų nuomone, galima būtų laikyti grynai matematiniais, kuriuos – grynai organizaciniais, o kuriuos – mišriais?

1.15.18. Apibūdinkite OT ir vadybos (menedžmento) teorijos ir praktikos santykius. Kuo tie santykiai primena matematinių optimizavimo metodų ir OT santykius? Iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais sisteminių ir optimizacinių modelių bei OT taikymo galimybes vadyboje. Ar galima OT laikyti vadybos instrumentu? Ar galima OT laikyti vadybos teorijos ir praktikos dalimi? Kodėl?

1.15.19. Kaip pasikeistų 1.15.2.3.1. skyrelyje aprašytas optimizavimo uždavinio matematinis modelis, jei būtų atsižvelgta į tai, jog vienetinės gamybinės išlaidos d_j nėra visiškai pastovūs dydžiai, o priklauso nuo gamybos apimčių? Kaip pasikeistų minėtojo uždavinio optimizacinis modelis, jei optimalumo rodikliu būtų pasirinktas ne bendras firmos pelnas P , o bendras kapitalo investavimo

efektyvumas $E = \frac{P}{B}$, kur B – visos gamybos išlaidos (visas investuotas į gamybą kapitalas)? Kaip tuomet pasikeistų optimizavimo uždavinio optimalus sprendinys?

1.15.20. Ar visuomet optimizacinio uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimizacinis modelis, kai $d_j = \varphi_j(x_j)$ yra netiesinė funkcija, yra netiesinis? Sudarykite uždavinio tikslo funkciją

$P(x_1, x_2)$ tam atvejui, kai $d_j = a_j + \frac{b_j}{x_j}$, kur a_j ir b_j – konstantos (galbūt skirtingos skirtingoms j

reikšmėms, bet nesikeičiančios, keičiantis x_j). Kuo skirsis tokio uždavinio optimalus sprendinys nuo 1.15.2.3. skyrelyje aprašyto uždavinio optimalaus sprendinio? Kokias gamybinės išlaidas vaizduoja

dydžiai a_j ir b_j ? O ką vaizduoja dydis $\frac{b_j}{x_j}$?

1.15.21. Kaip atrodytų vienodo efektyvumo $E = \frac{P}{B} = \frac{\sum_{j=1}^m p_j x_j}{\sum_{j=1}^m s_j x_j}$ taškų (x_1, x_2) geometrinė vieta

uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1-jame skyrelyje, modelyje, vaizduojant tikslo funkciją

$$E = \frac{7x_1 + 5x_2}{54x_1 + 36x_2} \rightarrow \max_{x_1, x_2} \text{ grafiškai?}$$

Kaip keisis jos padėtis, keičiantis E ? Ar pasikeis LSS, pakeitus tikslo funkciją

$$P = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max_{x_1, x_2} \text{ į tikslo funkciją } E = \frac{7x_1 + 5x_2}{54x_1 + 36x_2} \rightarrow \max_{x_1, x_2} ? \text{ Ar pasikeis uždavinio optimalus}$$

sprendinys, pakeitus tikslo funkciją P į tikslo funkciją E ? Suraskite leistiną sprendinį, maksimizuojantį tikslo funkciją E , naudodamiesi grafiniu uždavinio sprendimo metodu. Kuriais atvejais kuriuo optimalumo rodikliu (pelno ar kapitalo investavimo rentabilumo) naudotis yra tikslingiau? Kodėl?

1.15.22. Kokie sunkumai gali atsirasti, sprendžiant netiesinį optimizavimo uždavinį su dviem valdomais kintamaisiais grafiniu metodu. Kaip atrodytų LSS, jei kai kurie apribojimai būtų netiesiniai? Kaip gali atrodyti taškų, kuriuose tikslo funkcijos reikšmė yra vienoda, geometrinė vieta, kai tikslo funkcija yra netiesinė? Ar netiesinių uždavinių optimalaus sprendinio taškas gali būti vidiniu LSS tašku, nepriklausančiu tą LSS ribojančioms kreivėms bei tiesėms? Sudarykite kokį nors netiesinį optimizacinį modelį su dviem valdomais kintamaisiais ir išspręskite jį grafiniu metodu.

1.15.23. Kaip galima rasti optimizacinio modelio su dviem valdomaisiais kintamaisiais optimalų sveikaskaitinį sprendinį, kai visi apribojimai – tiesiniai ir tikslo funkcija – taip pat – tiesinė? Kaip rasti optimalų sveikaskaitinį sprendinį, kai uždavinio modelis – netiesinis?

1.15.24. Ar galima grafiniu metodu rasti optimalų sprendinį, kai valdomųjų kintamųjų skaičius lygus 3? Kaip sprendžiami optimizavimo uždaviniai, kai valdomųjų kintamųjų skaičius didesnis negu 2 (pavyzdžiui, 3, 4, 5 ar daugiau)?

1.15.25. Ką vadiname optimalaus sprendinio stabilumo zona optimizavimo uždavinio modelio kurio nors parametro kitime? Suformuluokite tokios zonos apibrėžimą ir iliustruokite tą apibrėžimą konkrečiais pavyzdžiais. Kaip surandamos optimalaus sprendinio stabilumo zonos ribos? Iliustruokite optimalaus sprendinio stabilumo zonos ribų nustatymo algoritmus konkrečiais pavyzdžiais. Ar galimi tokie atvejai, kad, keičiantis optimizacinio modelio parametrams, optimumo taško koordinatės nesikeistų, o optimali tikslo funkcijos reikšmė keistųsi? Iliustruokite savo atsakymą konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.26. Ką vadiname optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientais? Kaip surandamos jautrumo koeficientų reikšmės? Iliustruokite įvairius jautrumo koeficientų reikšmių nustatymo algoritmus konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.27. Ką vadiname optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonomis? Kaip nustatomos tų zonų ribos? Iliustruokite savo atsakymą konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.28. Ką gali duoti optimalaus sprendinio bei tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientų ir tų koeficientų stabilumo zonų žinojimas? Iliustruokite savo atsakymą konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.29. Ar gali būti atvejų, kai optimumo taško koordinatėms keičiantis, tikslo funkcijos optimali reikšmė nesikeičia? Atsakymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.30. Ar optimalūs sprendiniai, kurių tikslo funkcijos optimalios reikšmės yra vienodos, yra visais atžvilgiais lygiaverčiai? Uždavinio modelyje, kuris aprašytas 1.15.2.3.1. skyrelyje, parametrai c_1 tapus lygiu $57 \frac{1}{3}$, maksimali leistina bendro pelno $P=p_1x_1+5x_2$ reikšmė taps vienoda visuose atkarpos BC (žiūr. 333 pav.) taškuose. Apskaičiuokite, ar tuose taškuose vienoda kapitalo investavimo

efektyvumo $E = \frac{P}{B} = \frac{p_1x_1 + 5x_2}{54x_1 + 36x_2}$ reikšmė.

1.15.31. Apskaičiuokite tikslo funkcijos $P=p_1x_1+5x_2$ ir kapitalo investavimo efektyvumo $E = \frac{p_1x_1 + 5x_2}{54x_1 + 36x_2}$ reikšmes tiesės CD (žiūr. 333 pav.) taškuose, kai, nesikeičiant visiems kitiems

modelio parametrams, pasikeis parametro c_1 reikšmė ir taps lygi 64. Kuriame iš tiesės CD taškų bendros išlaidos $B=54x_1+36x_2$ bus mažiausios?

1.15.32. Palyginkite uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalius sprendinius tais atvejais, kai, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, parametro c_2 reikšmės taps lygios 39,5 arba 46,5. Kokius optimalius sprendinius Jūs pasirinktute minėtais atvejais? Kodėl?

1.15.33. Palyginkite uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalius sprendinius tais atvejais, kai nesikeičiant kitiems modelio parametrams, parametro d_1 reikšmės tampa lygios 7 arba $13 \frac{2}{3}$. Kokius optimalius sprendinius Jūs pasirinktute minėtais atvejais? Kodėl?

1.15.34. Palyginkite uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalius sprendinius tais atvejais, kai, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, parametro d_2 reikšmės taps lygios 1,5 arba 8,5. Kokius optimalius sprendinius Jūs pasirinktute minėtais atvejais? Kodėl?

1.15.35. Raskite uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalų sprendinį, kai, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, pirmosios medžiagos kaina a_1 , tampa lygi 5,75. Apskaičiuokite optimalią tikslo funkcijos $P=p_1x_1+p_2x_2$ reikšmę ir bendras išlaidas $B=s_1x_1+s_2x_2$ tame taške, kurį Jūs pasirinktute optimumo tašku. Ar yra kitų taškų, priklausančių LSS, kuriuose P reikšmė būtų tokia pati?

1.15.36. Išnagrinėkite optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumą uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1 skyrelyje, keičiantis medžiagų kainoms a_i ne pavieniui, o poromis. Raskite optimalaus sprendinio stabilumo zonas įvairiais atvejais. Kaip keistųsi optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė, keičiantis iškart visų keturių medžiagų kainoms?

1.15.37. Ar sutampa optimalaus sprendinio laisvųjų kintamųjų stabilumo zona su optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientų stabilumo zona? Paaiškinkite savo atsakymą ir iliustruokite jį konkrečiu pavyzdžiu.

1.15.38. Išnagrinėkite optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos jautrumo koeficientų priklausomybę nuo antrosios medžiagos atsargų b_2 kitimo optimizavimo uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje. Gautus rezultatus palyginkite su analogiško nagrinėjimo rezultatais, pateiktais 1.15.2.3.3. ir 1.15.2.4.2. skyreliuose.

1.15.39. Pasirinkite keletą 335 pav. pavaizduotos plokštumos (b_1, b_2) taškų $(b_1=25; b_2=10)$, $(b_1=10; b_2=16)$, $(b_1=16; b_2=5)$, $(b_1=10; b_2=3)$. Nustatykite optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientus tuose taškuose ir tų koeficientų stabilumo zonas.

1.15.40. Analogiškai, kaip 335 pav. buvo pavaizduota optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zona parametru b_1 ir b_2 kitimo atžvilgiu, pavaizduokite jautrumo koeficientų stabilumo zonas, kintant:

- a) b_1 ir b_3 ;
- b) b_1 ir b_4 ;
- c) b_2 ir b_3 ;
- d) b_2 ir b_4 ;
- e) b_3 ir b_4 .

1.15.41. Išnagrinėkite atvejus, kai uždavinyje, aprašytame 1.15.2.3.1. skyrelyje, keičiami trys parametrai b_i ir nekeičiami visi kiti modelio parametrai. Raskite jautrumo koeficientus ir jų stabilumo zonas.

1.15.42. Išnagrinėkite, kaip keistųsi optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė, jei uždavinyje, aprašytame 1.15.2.3.1. skyrelyje, įmonės gamybinis galingumas būtų neribotas ir, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, galėtų keistis visų keturių medžiagų atsargos b_i , parduodant tas medžiagas bei perkant jas kokiais norint kiekiais.

1.15.43. Kuomet optimalumo rodikliu tikslinga pasirinkti bendrąjį gaunamą pelną, o kada – kapitalo investavimo efektyvumą? Paaiškinkite savo atsakymą ir iliustruokite jį konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.44. Išvardinkite priežastis, dėl kurių „klasikiniai“ optimizavimo metodai praktikoje nėra taikomi taip plačiai, kaip, atrodo, galėtų būti taikomi. Kokios išvados išplaukia iš tų priežasčių analizės?

1.15.45. Rasite uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalų sprendinį, parametru b_{11} pakeitus savo reikšmę ir tapus lygiu 1,4, kitiems modelio parametrams nesikeičiant. Apskaičiuokite bendrąjį pelną P ir kapitalo investavimo efektyvumą E optimumo taške.

1.15.46. Aprašykite 336 ir 337 pav. atvaizduotų transformacijų savybes ir paaiškinkite, kaip naudotis 336 ir 337 pav., nagrinėjant optimalaus sprendinio priklausomybę nuo parametru b_{11} ir b_{12} kitimo, nesikeičiant kitiems 1.15.2.3.1. skyrelyje aprašyto uždavinio parametrams.

1.15.47. Ką vaizduoja uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, modelyje tiesių $39x_1 + 31x_2 = A = \text{const}$ šeima? Ką vaizduoja tos tiesės, kai $A_1 = 303$ ir $A_2 = \frac{809}{3}$? Kuo tiesės $P^{(\max)} = 39x_1 + 31x_2 - 238 = \text{const}$ skiriasi nuo vienodo pelno tiesių $P^{(\max)}(x_1, x_2) = p_1x_1 + 5x_2 = \text{const}$? Kuo ypatinga tiesė $39x_1 + 31x_2 = 283\frac{10}{13}$?

1.15.48. Pavaizduokite grafiškai parametru b_{11} ir b_{12} kitimo poveikio į uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalų sprendinį analizės rezultatus visose galimose situacijose, nurodydami jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribas, optimalių sprendinių koordinačių ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės formules, vaizduojančias optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės priklausomybę nuo parametru b_{11} ir b_{21} , t. y., sudarykite situacijų ir jas atitinkančių optimalių sprendinių medį.

1.15.49. Sudarykite 1.15.2.3.1. skyrelyje aprašyto optimizavimo uždavinio sprendinio priklausomybės nuo parametru b_{11} ir b_{21} reikšmių nustatymo algoritmo blokinę schemą (žiūr. 345 pav.). Iliustruokite to algoritmo panaudojimo procedūrą konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.50. Išnagrinėkite 1.15.2.3.1. skyrelyje aprašyto uždavinio optimalaus sprendinio priklausomybę nuo parametru b_{11} ir b_{22} kitimo, pavaizduodami analizės rezultatus panašiai, kaip jie buvo pavaizduoti parametru b_{11} ir b_{21} kitimo atveju 336 ir 337 pav. Sudarykite tokios analizės algoritmą, panašų į tą, kuris buvo sudarytas 1.15.2.3.3. skyrelyje, analizuojant parametru b_{11} ir b_{21} kitimo poveikį į optimalų sprendinį ir į tikslo funkcijos optimalią reikšmę.

1.15.51. Panašiai, kaip aprašyta 1.15.50. užduotyje, išnagrinėkite parametru b_{ij} kitų galimų jų porų reikšmių kitimo poveikį optimaliam sprendiniui, naudodamiesi 1.15.2.3.3. skyrelyje aprašytais grafinais optimalaus sprendinio jautrumo bei stabilumo analizės metodais.

1.15.52. Išnagrinėkite uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, optimalaus sprendinio priklausomybę nuo parametru b_{ij} kitimo, kai vienu metu gali keistis net trijų tokių parametru reikšmės, nesikeičiant kitiems uždavinio modelio parametrams.

1.15.53. Aprašykite, kaip optimalaus sprendinio kitimo analizėje, keičiantis uždavinio modelio parametrams, galima pasinaudoti imitacinio modeliavimo metodais, nurodydami tokios analizės plusus ir minusus.

1.15.54. Aprašykite, kaip, naudojantis simplekso algoritmu, surasti optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientų reikšmes. Iliustruokite savo aprašymą pavyzdžiais.

1.15.55. Kaip, naudojantis simplekso algoritmu, nustatyti jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribas? Iliustruokite savo atsakymą pavyzdžiais.

1.15.56. Įrodykite, jog simplekso lentelių transformacijos yra optimizacinio modelio kanoninės formos lygčių sistemos transformacijos. Įrodykite, jog kiekviena simplekso lentelės eilutė vaizduoja optimizacinio modelio lygtį, o kiekvienas simplekso lentelės stulpelis vaizduoja dualaus optimizavimo uždavinio modelio lygtį.

1.15.57. Išnagrinėkite optimizavimo uždavinio, aprašyto 1.15.2.3.1. skyrelyje, simplekso lentelių elementus ir aprašykite, ką kiekvienas iš jų vaizduoja, t. y. interpretuokite tuos elementus „fiziškai“, („ekonomiškai“) ir „matematiškai“.

1.15.58. Kodėl, nagrinėjant sudėtingą probleminę situaciją ir ieškant jos sprendinio, naudinga sudaryti tos situacijos matematinį modelį net tada, kada problema sprendžiama, nesinaudojant specialiais matematiniais metodais, o naudojantis tik paprastais samprotavimais ir paskaičiavimais? Savo atsakymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais, rodančiais, kad paprastas („grakštus“) sudėtingos problemos sprendinys gana dažnai pastebimas bei atrandamas ne iškart, o tik pakankamai įsigilinus į nagrinėjamą probleminę situaciją.

1.15.59. Patobulinkite 1.15.2.5.1. skyrelyje aprašyto keturių rūšių gaminių gamybos optimalaus plano sudarymo uždavinio matematinį modelį, papildydami tiesiogines gamybines išlaidas netiesioginėmis (administracinėmis, apšvietimo, apšildymo, sanitarinio aptarnavimo ir pan.), laikydamis, kad netiesioginių išlaidų suma nepriklauso nuo pagamintų gaminių kiekio, tačiau netiesioginės išlaidos turi atsispindėti pagamintų gaminių savikainoje. Ar priklausys optimalus sprendinys nuo to, kaip netiesioginių išlaidų suma bus paskirstyta įvairių rūšių gaminiams? Patikrinkite savo atsakymą į šį klausimą, išspręsdami šį optimizavimo uždavinį, esant įvairiems netiesioginių išlaidų paskirstymo variantams. Palyginkite gautus optimalius sprendinius su optimaliu sprendiniu, gautu neatsižvelgiant į netiesiogines išlaidas ir tik po to jas išskaitant iš gauto bendrojo pelno P.

1.15.60. Kaip reiktų spręsti 1.15.59. užduoties optimizavimo uždavinį, jei optimalumo rodikliu būtų pasirinktas kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{P}{B}$ ir būtų leista turimo kapitalo ribose

duotomis kainomis parduoti bei pirkti medžiagas ir įrengimų bei juos aptarnaujančio (su jais dirbančio) personalo darbo laiką? Išspręskite tokį uždavinį.

1.15.61. Aprašykite tiesinio uždavinio optimalaus sveikaskaitinio sprendinio nustatymo algoritmą. Sudarykite programą tiesiniams sveikaskaitinio optimizavimo uždaviniams spręsti ir išbandykite ją, spręsdami 1.15.2.5.2. skyrelyje išspręstą uždavinį.

1.15.62. Pasūlykite netiesinių optimizavimo uždavinių sveikaskaitinio optimalaus sprendinio suradimo algoritmą. Išnagrinėkite atvejus: a) mes mokame rasti netiesinio uždavinio optimalų nesveikaskaitinį sprendinį; b) mes neturime netiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo, efektyvesnio už leistinų sprendinių perrinkimo algoritmą. Ar gali būti atveju, kada sveikaskaitinį optimalų netiesinio uždavinio sprendinį rasti lengviau negu nesveikaskaitinį? Paaiškinkite savo atsakymą ir iliustruokite jį pavyzdžiu.

1.15.63. Paaiškinkite, kaip, naudojantis simplekso algoritmu, galima nustatyti, kokius resursus pirmoje eilėje būtų galima papildomai pirkti, o kokius – pirmoje eilėje parduoti. Savo atsakymą iliustruokite pavyzdžiais ir pagrįskite paskaičiavimais.

1.15.64. Aprašykite, kaip naudojantis simplekso algoritmu, iš neleistino „sprendinio“ („sprendinio“, nepriklausančio LSS) gauti leistiną sprendinį, t. y. iš neleistino plano gauti leistiną. Savo aprašymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.65. Kaip atrodo simplekso lentelė, atitinkanti optimalų sprendinį tais atvejais, kai optimizavimo uždavinys turi ne vieną optimalų sprendinį? Savo atsakymą iliustruokite pavyzdžiu.

Kaip tokiu atveju, naudojantis gautąja optimalaus sprendinio simplekso lentele, surasti kitus optimalius sprendinius? Savo samprotavimus iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.66. Kaip, naudojantis simplekso algoritmu, surasti trumpiausią optimalaus sprendinio paieškos trajektoriją? Savo atsakymą ir samprotavimus iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.67. Įrodykite, jog formalusis tiesinio uždavinio optimalaus sprendinio požymis, būdamas visuomet pakankama sprendinio optimalumo sąlyga, ne visuomet būna būtina sprendinio optimalumo sąlyga. Kada ir kodėl taip gali atsitikti? Savo paaiškinimus ir įrodymus iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.68. Jei simplekso metodo taikymo metu, pereinant nuo vienos simplekso lentelės prie kitos, tikslo funkcijos reikšmė nesikeičia, ar to pakanka, kad būtų galima teigti, jog jau pasiektas optimumo taškas? Kodėl? Savo atsakymą ir samprotavimus iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.69. Jei, transformuodami 265-ąją lentelę, vedančiosiomis eilutėmis pasirinktume bazinių kintamųjų x_{12} ar x_{13} eilutes, tai iškart gautume lenteles, turinčias formalųjį sprendinio optimalumo požymį. Jei vedančiomis eilutėmis 265-ojoje lentelėje pasirinktume bazinių kintamųjų x_5 , x_6 ar x_{10} eilutes, tai gautume lenteles, neturinčias formalaus optimalumo požymio, tačiau turinčias nepasikeitusią ir optimalią tikslo funkcijos reikšmę. Išsiaiškinkite, ar transformuodami naujai gaunamas simplekso lenteles, galų gale būtinai pasieksime būseną, kada iš bet kurios lentelės, dar neturinčios optimalumo

požymio, kiekviena naujai gaunama lentelė būtinai turės tą požymį. O gal lentelių, neturinčių optimalumo formalaus požymio gavyba iš lentelių, neturinčių tokio požymio, gali tapti procesu, neturinčiu pabaigos? Savo samprotavimus ir išvadas iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.70. Tarkime, jog Jūs, sprenddami optimizavimo uždavinį simplekso metodu, gavote 268-ąją lentelę, kuri dar neturi formalaus optimumo požymio. Transformuodami šią lentelę, gavote 269-ąją lentelę, turinčią tą pačią tikslo funkcijos reikšmę, tačiau dar neturinčią optimalumo požymio. Ar šios lentelės jau vaizduoja optimalaus sprendinio variantus, ar optimalus sprendinys yra dar nepasiektas? Kuris iš šių dviejų atsakymo variantų yra teisingas? Kaip tai įrodyti? Kaip tokiose situacijose turėtų elgtis kompiuterio programa?

1.15.71. Aprašykite įvairius optimalaus sprendinio jautrumo stabilumo zonos, pavaizduotos 349 pav., nustatymo algoritmus. Kaip, naudojantis 349 pav., nustatyti tas resursų b_1 ir T_4 kitimo ribas, kuriose, kitiems resursams nesikeičiant (ar keičiantis optimalaus sprendinio stabilumo zonos ribose), optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo resursų b_1 ir T_4 pokyčiams koeficientai liks pastovūs? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.72. Kaip naudojantis simplekso algoritmu ir programomis galima analizuoti optimalaus sprendinio jautrumą technologinių normų b_{ij} ir t_{kj} pokyčiams? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.73. Kuo skiriasi tiesinių optimizacinių uždavinių, turinčių tik „ $\leq$ “ tipo apribojimus, sprendimas, naudojantis simplekso algoritmu, nuo tiesinių optimizacinių uždavinių, turinčių „ $\geq$ “ tipo bei mišrius apribojimus, sprendimo? Kodėl atsiranda toks skirtumas?

1.15.74. Kokie optimizacinio modelio kintamieji vadinami pagrindiniais, kokie – papildomais, o kokie – pagalbiniais („dirbtiniais“)? Kodėl? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.75. Kokie tiesinio optimizacinio modelio kintamieji vadinami baziniais, kokie – nebaziniais? Kaip jie parenkami ir kuo skiriasi jų vaidmuo optimalaus sprendinio paieškos procese? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.76. Kuo skiriasi pirmasis ir antrasis simplekso bendrojo algoritmo taikymo etapai? Pateikite pavyzdžių, kai sprendžiant tiesinį optimizavimo uždavinį, pakanka vieno kurio nors etapo.

1.15.77. Kokį tiesinio optimizavimo uždavinio sprendinį vadina išsigimusiu, o kokį – neišsigimusiu? Kada gali atsirasti išsigimę sprendiniai?

1.15.78. Kokiais atvejais tiesinio optimizavimo uždaviniai gali neturėti sprendinių? Išvardinkite formalius požymius, leidžiančius nustatyti, kad optimizacinis modelis negali turėti sprendinio. Atsakymus iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.79. Paaiškinkite, kodėl tuo atveju, kai $\min W > 0$, kur $W = \sum_{i=1}^{n_1} x_{m+n+i}$, tiesinis optimizavimo uždavinys negali turėti sprendinio, o kai $\min W = 0$, jis sprendinį turi. Ar gali W būti neigiamu dydžiu? Kodėl?

1.15.80. Kodėl, realizuojant simplekso algoritmą kompiuteriu, atsiranda ir kaupiasi paklaidos? Kokios gali būti to reiškinių pasekmės? Kaip bandoma sumažinti tas paklaidas bei išvengti nepageidautinų pasekmių? Atsakymus iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.81. Dėl kokių priežasčių ir kada, naudojantis simplekso algoritmu, gali atsirasti ciklai? Kaip tokiais atvejais reikia elgtis? Atsakymus iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.82. Kaip, turint tiesinį optimizacinį modelį, sudaryti jam dualų modelį? Atsakymą iliustruokite konkrečiu pavyzdžiu, paaiškindami, ką reiškia dualaus modelio kintamieji ir optimizuojamas rodiklis (tikslų funkcija). Kodėl, sudarant dualų modelį, apribojimų nelygybės keičiamos į priešingo ženklo nelygybes? Kuo skiriasi ir kuo panašios dualių tiesinių optimizavimo uždavinių simplekso lentelės? Kuo skiriasi artėjimo prie optimalių sprendinių trajektorijos dualiuose uždaviniuose? Kaip ir kokių tikslu ta aplinkybė galima naudingai pasinaudoti?

1.15.83. Kuo skiriasi apibendrintas Leontjevo modelis nuo paprasto? Kokius dydžius galima apskaičiuoti, naudojantis apibendrintu Leontjevo modeliu? Pateikite konkrečių Leontjevo modelio (paprasto ir apibendrinto) taikymo pavyzdžių.

1.15.84. Kokie sunkumai iškyla sudarant subalansuotus gamybos planus daugiašakėje ekonominėje sistemoje ir kaip jie įveikiami?

1.15.85. Kaip sudaromi optimalūs subalansuoti tarpšakiniai tiekimo planai ir kaip apskaičiuojama, kiek kokių resursų reikia importuoti?

1.15.86. Sudarykite Leontjevo apibendrinto ir papildyto modelio pavyzdį, paaiškindami, kaip galima nustatyti jo parametrų reikšmes.

1.15.87. Sudarykite programą, leidžiančią surasti optimalų to uždavinio, kurio modelį Jūs sudarėte, vykdydami 1.15.86-ąją užduotį, sprendinį ir įsitikinkite, kad ta programa teisingai dirba. Eksperimentaliai nustatykite, kaip didėja uždavinio optimalaus sprendinio radimo trukmė, didėjant pagrindinių kintamųjų skaičiui.

1.15.88. Ką Jūs esate girdėjęs apie modifikuotą simplekso metodą (revised simplex method)? Trumpai apibūdinkite šį metodą ir jo taikymo ypatumus. Ar skiriasi šis metodas nuo atvirkštinės funkcijos metodo? Kokie standartiniai programų paketai, realizuojantys simplekso algoritmą, Jums žinomi? Kokį paketą jūs laikote tinkamiausiu tiesinio programavimo uždaviniams, turintiems daug pagrindinių kintamųjų, spręsti? Motyvuokite savo pasirinkimą.

1.15.89. Knygoje [48] susipažinkite su Kantorovičiaus modeliu ir jo taikymu. Kuo skiriasi Kantorovičiaus modelis nuo Leontjevo modelio? Kokie L.V.Kantorovičiaus nuopelnai optimizavimo teorijos srityje? Kuo skiriasi Kantorovičiaus pasiūlytas tiesinio optimizavimo uždavinių sprendimo metodas nuo Kumpanso ir Dancigo pasiūlyto metodo?

1.15.90. Ką vadina simpleksiniu multiplikatorium, kur ir kaip juo naudojamas? Paaiškinkite to multiplikatoriaus ekonominę esmę? Ką vadina simpleksiniu kriterijumi, kur ir kaip juo naudojamas? Atsakymus iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.91. Knygoje [48] susipažinkite su fon Neumano tipo tiesinio programavimo modeliu. Kuo tas modelis ypatingas, kur jis taikomas?

1.15.92. Knygoje [48] susipažinkite su magistraliniu kaupimo modeliu ir programa, leidžiančia apskaičiuoti optimalią ekonomikos augimo trajektoriją. Pabandykite patys sudaryti analogišką programą ir pakartoti toje knygoje pateiktus skaičiavimus.

1.15.93. Knygoje [48] susipažinkite su vartojimo magistraliniu modeliu ir programa, leidžiančia apskaičiuoti optimalią ekonominio augimo trajektoriją. Pabandykite patys sudaryti analogišką programą ir pakartoti toje knygoje pateiktus skaičiavimus.

1.15.94. Išvardinkite svarbiausias Jums žinomas tiesinio optimizavimo metodų taikymo sritis, nurodymai, kokie uždaviniai tose srityse sprendžiami, naudojantis tiesinio optimizavimo metodais. Kodėl technikoje dažniau naudojamas netiesinio programavimo metodais?

1.15.95. Raskite pavyzdžių, kada netiesinį optimizavimo uždavinio modelį galima pertvarkyti į tiesinį.

1.15.96. Išvardinkite kitus Jums žinomus tiesinio programavimo metodus, skirtingus nuo simplekso metodo. Iliustruokite tų metodų aprašymus jų taikymo pavyzdžiais. Kam, Jūsų nuomone, reikalingi kiti tiesinio programavimo metodai (pavyzdžiui, potencialų metodas ir pan.), jei visus tiesinius optimizavimo uždavinius galima išspręsti, naudojantis tik simplekso algoritmu?

1.15.97. Išvardinkite Jums žinomus netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo metodus ir trumpai apibūdinkite juos. Pateikite tų metodų taikymo pavyzdžių.

1.15.98. Ką vadina dinaminio programavimo? Suformuluokite Belmano principą ir aprašykite Belmano algoritmą. Pateikite tiesinio ir netiesinio dinaminio programavimo uždavinių ir jų sprendimo pavyzdžių.

1.15.99. Ką vadina stochastiniu programavimu? Pateikite stochastinio programavimo uždavinio ir jo sprendimo pavyzdį.

1.15.100. Raskite sisteminių ir optimizacinių modelių taikymo organizacijų valdyme pavyzdžių. Nurodykite priežastis, dėl kurių tokių modelių taikymas galėtų būti tikslingas, o taip pat priežastis, dėl kurių tokių modelių taikymas organizacijų valdyme dar nėra taip plačiai paplitęs, kaip galėtų būti.

1.15.101. Aprašykite sudėtingų sistemų imitacinių modelių sudarymo procesą ir jo etapus. Kaip eksperimentus su imitaciniais modeliais galima taikyti tų modelių sudarymo ir tobulinimo procese, tikrinant įvairias hipotezes? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.102. Apibūdinkite terminalinę ir teleologinę metodologijas. Kodėl tos metodologijos turi tokius pavadinimus? Kada kurią iš šių metodologijų tikslinga taikyti? Kodėl organizacijų valdyme reikalinga tų metodologijų sintezė? Atsakymus iliustruokite pavyzdžiais.

1.15.103. Apibūdinkite terminalinės ir teleologinės metodologijų panaudojimą, sudarant sisteminius ir optimizacinius modelius. Atsakymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.15.104. Apibūdinkite sistemos S ir jos optimizavimo uždavinių galimus apribojimus. Pateikite įvairių tipų apribojimų įvairių pavyzdžių.

1.15.105. Pabandykite surišti tai, kas 1.15.3. poskyryje išsakyta apie apribojimus ir jų poveikį į sistemos S galimų būsenų ir galimų išėjimo bei fazinių trajektorijų aibę, su 1.9.2.10. skyrelio formulėmis ir suformuluoti iš to palyginimo išplaukiančias išvadas. Ką Jūs esate girdėję apie Ešbio principą ir jo taikymą valdymo teorijoje ir praktikoje? Ar galima būtų tą principą pagrįsti, panagrinėjus jį sistemotyros požiūriu?