

Galima pastebėti vieną įdomų reiškinį, kuriuo pasinaudodami, galime sumažinti skaičiavimų apimtį.

248. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{13}	x_3	x_5	x_6	x_{10}
x_4	$85\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{2}{21}$
x_{18}	400	0,5	1	-1,5	-1	0	$\frac{2}{3}$
x_7	$171\frac{3}{7}$	$-\frac{13}{14}$	-1	$\frac{39}{14}$	0	0	$\frac{4}{21}$
x_8	$171\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	0	$-\frac{10}{21}$
x_9	$214\frac{2}{7}$	$-\frac{15}{28}$	-0,5	$\frac{45}{28}$	0	0	$-\frac{2}{21}$
x_{20}	300	$\frac{3}{4}$	2,5	$-\frac{9}{4}$	0	-1	$\frac{1}{3}$
x_{11}	$357\frac{1}{7}$	$-\frac{9}{14}$	-1	$\frac{27}{14}$	0	0	$-\frac{8}{21}$
x_{12}	0	0	-2	0	0	0	$\frac{2}{3}$
x_2	$14\frac{2}{7}$	$-\frac{15}{28}$	0,5	$-\frac{11}{28}$	0	0	$-\frac{3}{7}$
P_1	$-2642\frac{6}{7}$	$-\frac{81}{28}$	-2,5	$\frac{47}{28}$	0	0	$-\frac{5}{7}$

249. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{13}	x_7	x_5	x_6	x_{10}
x_4	$76\frac{12}{13}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{39}$	$-\frac{2}{39}$	0	0	$\frac{10}{117}$
x_{18}	$492\frac{4}{13}$	0	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}$	-1	0	$\frac{10}{13}$
x_3	$61\frac{7}{13}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{14}{39}$	$\frac{14}{39}$	0	0	$\frac{8}{117}$
x_8	$92\frac{4}{13}$	0	$\frac{6}{13}$	$-\frac{6}{13}$	0	0	$-\frac{22}{39}$
x_9	$115\frac{5}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	$-\frac{15}{26}$	0	0	$-\frac{8}{39}$
x_{20}	$438\frac{6}{13}$	0	$\frac{22}{13}$	$\frac{21}{26}$	0	-1	$\frac{19}{39}$
x_{11}	$238\frac{6}{13}$	0	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{9}{13}$	0	0	$-\frac{20}{39}$
x_{12}	0	0	-2	0	0	0	$\frac{2}{3}$
x_2	$38\frac{6}{13}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{39}$	$\frac{11}{78}$	0	0	$-\frac{47}{117}$
P_1	$-2746\frac{2}{13}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{74}{39}$	$-\frac{47}{78}$	0	0	$-\frac{97}{117}$

Lygindami 227÷241 lenteles su 242÷246 lentelėmis, matome, jog, sprenddami Δb_1 ir Δb_2 kitimo viršutinių ribų nustatymo uždavinį, mes galėjome pasinaudoti Δb_1 kitimo viršutinės ribos nustatymo uždavinio sprendimo lentelėmis ir iškart gauti 246-ją lentelę, prirašydami 231-joje lentelėje kintamojo x_{20} stulpelį, kurio elementus galėjome rasti iš kintamojo x_6 stulpelio, pasinaudodami lygybe $x_{20} = -x_6$. Tuomet būtų belikę tik apskaičiuoti 247-249 lentelių elementų reikšmes.

Pasinaudodami šiuo metodu, papildysime 249-ją lentelę kintamųjų $x_{21} = -x_7$, $x_{22} = -x_{10}$, $x_{23} = -x_{13}$ stulpeliais ir, naudodamiesi simplekso algoritmu, nustatysime $\Delta b_3 = x_{21}$, $\Delta T_2 = x_{22}$ ir $\Delta T_5 = x_{23}$ kitimo viršutinės ribas. Gausime 250÷253 lenteles.

250. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{13}	x_7	x_5	x_6	x_{10}	x_{21}	x_{22}	x_{23}
x_4	$76\frac{12}{13}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{39}$	$-\frac{2}{39}$	0	0	$\frac{10}{117}$	$\frac{2}{39}$	$-\frac{10}{117}$	$-\frac{2}{39}$
x_{18}	$492\frac{4}{13}$	0	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}$	-1	0	$\frac{10}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{10}{13}$	$-\frac{6}{13}$
x_3	$61\frac{7}{13}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{14}{39}$	$\frac{14}{39}$	0	0	$\frac{8}{117}$	$-\frac{14}{39}$	$-\frac{8}{117}$	$\frac{14}{39}$
x_8	$92\frac{4}{13}$	0	$\frac{6}{13}$	$-\frac{6}{13}$	0	0	$-\frac{22}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{22}{39}$	$-\frac{6}{13}$
x_9	$115\frac{5}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	$-\frac{15}{26}$	0	0	$-\frac{8}{39}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{8}{39}$	$-\frac{1}{13}$
x_{20}	$438\frac{6}{13}$	0	$\frac{22}{13}$	$\frac{21}{26}$	0	-1	$\frac{19}{39}$	$-\frac{21}{26}$	$-\frac{19}{39}$	$-\frac{22}{13}$
x_{11}	$238\frac{6}{13}$	0	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{9}{13}$	0	0	$-\frac{20}{39}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{20}{39}$	$\frac{4}{13}$
x_{12}	0	0	-2	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	2
x_2	$38\frac{6}{13}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{39}$	$\frac{11}{78}$	0	0	$-\frac{47}{117}$	$-\frac{11}{78}$	$\frac{47}{117}$	$-\frac{14}{39}$
P_1	$-2746\frac{2}{13}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{74}{39}$	$-\frac{47}{78}$	0	0	$-\frac{97}{117}$	$\frac{47}{78}$	$\frac{97}{117}$	$\frac{74}{39}$

Nagrinėdami 253-ją lentelę, randame, kad dar liko nesunaudoti pirmojo ir trečiojo tipo įrengimų darbo laiko fondų likučiai, todėl, papildomai nupirkus ketvirtojo tipo medžiagų $\Delta b_4 = x_{24} = -x_8$ ir papildžius ketvirtojo tipo įrengimų darbo laiko fondą dydžiu $\Delta T_4 = x_{19} = -x_{12}$, galima minėtuosius likučius pilniau panaudoti ir tuo pačiu dar daugiau padidinti pelną. Žinoma, didinant gamybos apimtį, matyt, teks papildomai pirkti pirmosios, antrosios ir trečiosios medžiagos (t. y., didinti kintamųjų x_{18} , x_{20} ir x_{21} reikšmes), o taip pat didinti antrojo ir penktojo tipo įrengimų darbo laiko fondus (t. y., didinti kintamųjų x_{22} ir x_{23} reikšmes).

251. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₃	x ₇	x ₅	x ₆	x ₁₀	x ₂₁	x ₂₂	x ₁₂
x ₄	$76\frac{12}{13}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{39}$	0	0	$\frac{4}{39}$	$\frac{2}{39}$	$-\frac{4}{39}$	$\frac{1}{39}$
x ₁₈	$492\frac{4}{13}$	0	0	$\frac{7}{13}$	-1	0	$\frac{12}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{12}{13}$	$\frac{3}{13}$
x ₃	$61\frac{7}{13}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{39}$	0	0	$-\frac{2}{39}$	$-\frac{14}{39}$	$\frac{2}{39}$	$-\frac{7}{39}$
x ₈	$92\frac{4}{13}$	0	0	$-\frac{6}{13}$	0	0	$-\frac{16}{39}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{16}{39}$	$\frac{3}{13}$
x ₉	$115\frac{5}{13}$	0	0	$-\frac{15}{26}$	0	0	$-\frac{7}{39}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{39}$	$\frac{1}{26}$
x ₂₀	$438\frac{6}{13}$	0	0	$\frac{21}{26}$	0	-1	$\frac{41}{39}$	$-\frac{21}{26}$	$-\frac{41}{39}$	$\frac{11}{13}$
x ₁₁	$238\frac{6}{13}$	0	0	$-\frac{9}{13}$	0	0	$-\frac{8}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{2}{3}$
x ₂₃	0	0	-1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0,5
x ₂	$38\frac{6}{13}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{11}{78}$	0	0	$-\frac{11}{39}$	$-\frac{11}{78}$	$\frac{11}{39}$	$\frac{7}{39}$
P ₁	$-2746\frac{2}{13}$	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{47}{78}$	0	0	$-\frac{19}{13}$	$\frac{47}{78}$	$\frac{19}{13}$	$-\frac{37}{39}$

252. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₇	x ₁₃	x ₅	x ₆	x ₁₀	x ₂₁	x ₂	x ₁₂
x ₄	$90\frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$
x ₁₈	$618\frac{2}{11}$	$-\frac{24}{11}$	1	0	-1	0	0	-1	$\frac{36}{11}$	$\frac{9}{11}$
x ₃	$54\frac{6}{11}$	$-\frac{7}{33}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{7}{33}$
x ₈	$36\frac{4}{11}$	$\frac{32}{33}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{33}$
x ₉	$90\frac{10}{11}$	$\frac{14}{33}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{5}{66}$
x ₂₀	$581\frac{9}{11}$	$-\frac{82}{33}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{41}{11}$	$\frac{50}{33}$
x ₁₁	$154\frac{6}{11}$	$\frac{16}{11}$	-1	0	0	0	0	1	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{6}{11}$
x ₂₃	$45\frac{5}{11}$	$-\frac{26}{33}$	$\frac{1}{6}$	-1	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{13}{11}$	$\frac{47}{66}$
x ₂₂	$136\frac{4}{11}$	$-\frac{26}{11}$	0,5	0	0	0	-1	-0,5	$\frac{39}{11}$	$\frac{7}{11}$
P ₁	$-2945\frac{5}{11}$	$\frac{37}{33}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{57}{11}$	$-\frac{62}{33}$

253. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₇	x ₁₃	x ₅	x ₆	x ₁₀	x ₈	x ₂	x ₁₂
x ₄	$90\frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$
x ₁₈	$672\frac{8}{11}$	$-\frac{8}{11}$	0	0	-1	0	0	1,5	$\frac{12}{11}$	$\frac{17}{22}$
x ₃	$72\frac{8}{11}$	$\frac{3}{11}$	0	0	0	0	0	0,5	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{5}{22}$
x ₂₁	$54\frac{6}{11}$	$\frac{16}{11}$	-1	0	0	0	0	1,5	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{1}{22}$
x ₉	$54\frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	0	0	0	0	0	-1	$\frac{9}{11}$	$-\frac{1}{22}$
x ₂₀	$654\frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	0	0	0	-1	0	2	$\frac{9}{11}$	$\frac{16}{11}$
x ₁₁	100	0	0	0	0	0	0	-1,5	0	-0,5
x ₂₃	$54\frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	0	-1	0	0	0	0,25	$\frac{9}{11}$	$\frac{31}{44}$
x ₂₂	$163\frac{7}{11}$	$-\frac{18}{11}$	0	0	0	0	-1	0,75	$\frac{27}{11}$	$\frac{27}{44}$
p ₁	$-3018\frac{2}{11}$	$-\frac{9}{11}$	0	0	0	0	0	-2	$-\frac{25}{11}$	$-\frac{20}{11}$

Savaime suprantama, kad, didėjant teigiamoms kintamųjų x_{18} , x_{20} , x_{21} , x_{22} ir x_{23} reikšmėms, dydžiai x_5 , x_6 , x_7 , x_{10} ir x_{13} visą laiką bus lygūs 0, todėl, kintamųjų x_5 , x_6 , x_7 , x_{10} , x_{13} stulpelius iš simplekso lentelių galima eliminuoti ir tuo sumažinti tų lentelių apimtį. Tai buvo galima padaryti jau anksčiau, tačiau tai nebuvo daroma pedagoginiais sumetimais: norėjosi, kad skaitytojas pats tai

pastebėtų ir pats prieitų išvadą apie tokių stulpelių eliminavimo galimybę. Manau, kad dauguma skaitytojų tokią išvadą jau buvo susidarę ir jau seniai stebėjosi, kodėl šios mokymo priemonės lentelėse tokie stulpeliai vis dar buvo rašomi. Kadangi identifikatorių x_5 ir x_{18} , x_6 ir x_{20} , x_7 ir x_{21} , x_8 ir x_{24} , x_{10} ir x_{22} , x_{12} ir x_{19} , x_{13} ir x_{23} poros, žymėdamos kintamuosius ir jų pokyčius, yra tų pačių dydžių skirtingi žymenys, tai tų identifikatorių skaičių galima sumažinti per pusę. Siūlau skaitytojui pabandyti tai padaryti ir supaprastinti lenteles.

Papildomai pirkdami ketvirtąją medžiagą ir didindami ketvirtojo tipo įrenginių darbo laiko fondus, iš 253-osios lentelės gausime 254-ją lentelę.

254. lentelė

\	L.n.	x_1	x_8	x_2	x_{12}	x_{19}	x_{24}
x_4	$90 \frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0
x_{18}	$672 \frac{8}{11}$	$-\frac{8}{11}$	1,5	$\frac{12}{11}$	$\frac{17}{22}$	$-\frac{17}{22}$	-1,5
x_3	$72 \frac{8}{11}$	$\frac{3}{11}$	0,5	$-\frac{10}{11}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{5}{22}$	-0,5
x_{21}	$54 \frac{6}{11}$	$\frac{16}{11}$	1,5	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$	-1,5
x_9	$54 \frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	-1	$\frac{9}{11}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$	1
x_{20}	$654 \frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	2	$\frac{9}{11}$	$\frac{16}{11}$	$-\frac{16}{11}$	-2
x_{11}	100	0	-1,5	0	-0,5	0,5	1,5
x_{23}	$54 \frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	0,25	$\frac{9}{11}$	$\frac{31}{44}$	$-\frac{31}{44}$	-0,25
x_{22}	$163 \frac{7}{11}$	$-\frac{18}{11}$	0,75	$\frac{27}{11}$	$\frac{27}{44}$	$-\frac{27}{44}$	-0,75
P_1	$-3018 \frac{2}{11}$	$-\frac{9}{11}$	-2	$-\frac{25}{11}$	$-\frac{20}{11}$	$\frac{20}{11}$	2

255. lentelė

\	L.n.	x_1	x_8	x_2	x_{12}	x_{19}	x_9
x_4	$90 \frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0
x_{18}	$754 \frac{6}{11}$	$-\frac{17}{11}$	0	$\frac{51}{22}$	$\frac{31}{44}$	$-\frac{31}{44}$	1,5
x_3	100	0	0	-0,5	-0,25	0,25	0,5
x_{21}	$136 \frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	0	$-\frac{21}{22}$	$-\frac{5}{44}$	$\frac{5}{44}$	1,5
x_{24}	$54 \frac{6}{11}$	$-\frac{6}{11}$	-1	$\frac{9}{11}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$	1
x_{20}	$763 \frac{7}{11}$	$-\frac{18}{11}$	0	$\frac{27}{11}$	$\frac{15}{11}$	$-\frac{15}{11}$	2
x_{11}	$18 \frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	0	$-\frac{27}{22}$	$-\frac{19}{44}$	$\frac{19}{44}$	-1,5
x_{23}	$68 \frac{2}{11}$	$-\frac{15}{22}$	0	$\frac{45}{44}$	$\frac{61}{88}$	$-\frac{61}{88}$	0,25
x_{22}	$204 \frac{6}{11}$	$-\frac{45}{22}$	0	$\frac{135}{44}$	$\frac{51}{88}$	$-\frac{51}{88}$	0,75
P_1	$-3127 \frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	0	$-\frac{43}{11}$	$-\frac{19}{11}$	$\frac{19}{11}$	-2

Naudodamiesi simplekso algoritmu, iš 254-osios lentelės gausime 255-ją lentelę, o po to – ir 256-ją bei 257-ją lenteles.

Lygindami 254-ąją ir 255-ąją lenteles matome, jog sudarydami 254-ąją lentelę, t. y. papildydami 253-ąją lentelę kintamųjų $x_{19} = -x_{12}$ ir $x_{24} = -x_8$ stulpeliais, kintamųjų x_8 ir x_{12} stulpelių galėjome iškart jau neberašyti. Todėl 256-ąją lentelę, gaunamą iš 255-osios lentelės, užrašysime jau trumpiau, nebekartodami neinformatyvių stulpelių.

256. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{11}	x_9
x_4	$94 \frac{4}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{4}{19}$	$-\frac{6}{19}$
x_{18}	$784 \frac{4}{19}$	$-\frac{4}{19}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{31}{19}$	$-\frac{18}{19}$
x_3	$89 \frac{9}{19}$	$-\frac{9}{19}$	$\frac{4}{19}$	$-\frac{11}{19}$	$\frac{26}{19}$
x_{21}	$131 \frac{11}{19}$	$\frac{8}{19}$	$-\frac{12}{19}$	$-\frac{5}{19}$	$\frac{39}{19}$
x_{24}	$52 \frac{12}{19}$	$-\frac{12}{19}$	$\frac{18}{19}$	$-\frac{2}{19}$	$\frac{22}{19}$
x_{20}	$82 \frac{1}{19}$	$\frac{18}{19}$	$-\frac{27}{19}$	$\frac{60}{19}$	$-\frac{52}{19}$
x_{19}	$42 \frac{2}{19}$	$\frac{36}{19}$	$-\frac{54}{19}$	$\frac{44}{19}$	$-\frac{66}{19}$
x_{23}	$97 \frac{7}{19}$	$\frac{12}{19}$	$-\frac{18}{19}$	$\frac{61}{38}$	$\frac{41}{19}$
x_{22}	$228 \frac{18}{19}$	$-\frac{18}{19}$	$\frac{27}{19}$	$\frac{51}{38}$	$\frac{24}{19}$
P_1	-3200	-3	1	-4	4

257. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{11}	x_{24}
x_4	$109 \frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$
x_{18}	$827 \frac{3}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{9}{11}$
x_3	$27 \frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{13}{11}$
x_{21}	$45 \frac{5}{11}$	$\frac{16}{11}$	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{18}{11}$
x_9	$45 \frac{5}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{19}{22}$
x_{20}	$945 \frac{5}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{32}{11}$	$\frac{26}{11}$
x_{19}	200	0	0	2	3
x_{23}	$195 \frac{5}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{31}{22}$	$\frac{41}{22}$
x_{22}	$286 \frac{4}{11}$	$-\frac{18}{11}$	$\frac{27}{11}$	$\frac{27}{22}$	$\frac{12}{11}$
P_1	$-3381 \frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{25}{11}$	$-\frac{40}{11}$	$-\frac{38}{11}$

257-ją lentelę, vaizduojančią optimalų sprendinį, buvo galima gauti iškart iš 254-osios lentelės, jei vedantįjį elementą būtume pasirinkę ne kintamojo x_{24} stulpelyje, kaip mes darėme, pereidami nuo 254-osios prie 255-osios lentelės, o kintamojo x_{19} stulpelyje, t. y., jei būtume pradžioje didinę ne ketvirtosios medžiagos atsargas, o ketvirtojo tipo įrengimų darbo laiko fondą.

Šis pavyzdėlis, kuris čia buvo pateiktas, vadovaujantis taip pat pedagoginiais sumetimais, rodo, jog **ieškant optimalaus sprendinio, galima eiti link jo įvairiais**

keliais (įvairiomis optimizavimo trajektorijomis). Optimalų sprendinį gauname tą patį, tačiau simplekso lentelių transformacijų skaičius ir skaičiavimų apimtis gali žymiai skirtis. Todėl galima galvoti ir apie **optimalaus sprendinio paieškos trajektorijos optimizavimą**.

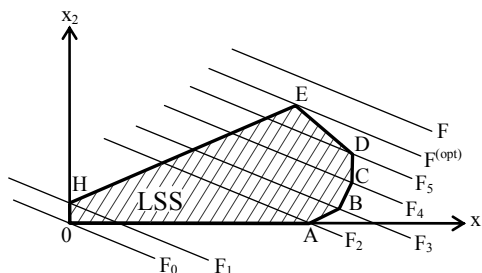
Tikrai, jei 254-ojoje lentelėje vedančiuoju elementu būtume pasirinkę kintamojo x_{19} stulpelio ir kintamojo x_{11} eilutės elementą 0,5, tai iškart būtume gavę 257-ją lentelę ir nebūtų reikėję sudėtingų ir nuobodžių skaičiavimų, apskaičiuojant 255-osios ir 256-osios lentelių elementų reikšmes.

Kyla klausimas, ar galima iš anksto nustatyti, kurį optimalaus sprendinio paieškos kelią tikslingiausia pasirinkti, jei yra galimybė pasirinkti vieną iš keleto kelių.

Gali pasirodyti, jog atsakymas į šį klausimą yra paprastas: reikia kiekviename simplekso algoritmo taikymo žingsnyje elgtis optimaliai – rinktis tokį žingsnį iš visų galimų, kuris leistų gauti maksimalų tikslo funkcijos F reikšmės pokytį ΔF , maksimaliai priartinantį mus prie mums pageidautinos optimalios jos reikšmės $F^{(opt)}$, ir mes pasieksime optimumo tašką, padarydami minimalų skaičių simplekso algoritmo žingsnių, kitaip tariant, atlikę minimalų simplekso algoritmo lentelės elementų reikšmių perskaičiavimų skaičių.

Tačiau, pasirodo, jog tokia mūsų taktika ne visada bus optimali, nors, žinoma, daugelyje atvejų gali būti ir optimali.

Tai, jog **ne visada, elgdamiesi lokaliai optimaliai, mes gausime globaliai optimalią trajektoriją**, rodo 348 pav.



Optimalią simplekso algoritmo taikymo trajektoriją nesunku pasirinkti, kai LSS priklauso dvimatei plokštumai ir ją paprasta pavaizduoti grafiškai.

Tačiau daugumoje realių optimizavimo uždavinių valdomųjų kintamųjų yra keliolika ar net kelios dešimtys, ir todėl mes negalime net išivaizduoti, kaip atrodo LSS ir kuriame daugiamatės erdvės taške yra optimumo taškas.

Nematydami visų galimų sprendinių aibės ir nežinodami optimumo taško padėties, mes negalime pasinaudoti radimui optimalios trajektorijos, vedančios iš pradinio taško ($x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, ..., $x_n=0$) į mums dar nežinomą optimumo tašką, plačiai žinomais dinaminio programavimo metodais (pavyzdžiui, Belmano algoritmu), leidžiančiais rasti globaliai optimalias trajektorijas, vedančias į taškus, vaizduojančius mums žinomus tikslus.

Todėl simplekso algoritmo taikymo optimalios trajektorijos radimo problema yra panaši į 1.9.2.15. skyrelyje mūsų jau nagrinėtą optimalaus Hamiltono ciklo radimo problemą, kuri iki šiol vis dar iki galo neišspręsta.

Tačiau šiuo mūsų nagrinėjamu konkrečiu atveju, kai mes sprendžiame **vieno žingsnio optimalaus pasirinkimo uždavinius**, ieškodami atsakymo į klausimą, **vieno kurio resurso didinimui reikėtų pirmoje eilėje panaudoti dabar atsiradusias papildomas lėšas, kad jos dabar pradėtų duoti maksimalų pelno ar maksimalų kapitalo investicijų rentabilumo prieaugį**, mes galime naudotis „**lokalaus optimumo principu**“, nelaikdami, kol pas mus atsiras tiek papildomų lėšų, kad bus galima ir naudinga didinti ne vienos kurios nors rūšies, o kelių rūšių resursus. **Juk laukimo metu prarastas laikas yra kartu ir prarastas pelnas.**

Pavyzdžiui, 254-ojoje lentelėje tikslo funkcijos eilutėje yra du teigiami elementai. Tai rodo, jog galima pasirinkti vieną iš dviejų vedančiųjų stulpelių. Jei pasirenkame kintamojo x_{24} stulpelį, tai tikslo funkcijos pokytis būtų $\Delta P = \left(54 \frac{6}{11} : 1\right) \cdot 2 =$

$$= \frac{1200}{11} = 109 \frac{1}{11}.$$

Pereidami nuo 254-osios simplekso lentelės prie naujos, mes gauname pelną $P^{(n)} = P^{(s)} + \Delta P = 3018 \frac{2}{11} + 109 \frac{1}{11} = 3127 \frac{3}{11}$ (ką ir gavome 255-ojoje lentelėje). Jei būtume pasirinkę kintamojo x_{19} stulpelį, tai būtume gavę didesnę tikslo funkcijos pokytį $\Delta P = (100 : 0,5) \cdot \frac{20}{11} = \frac{4000}{11} = 363 \frac{7}{11}$ ir, pereidami nuo 251-osios lentelės prie naujos,

būtume gavę pelną $P^{(n)} = P^{(s)} + \Delta P = 3018 \frac{2}{11} + 363 \frac{7}{11} = 3381 \frac{9}{11}$ (ką ir gavome 257-ojoje lentelėje).

Nagrinėdami 257-ją lentelę, matome, jog dar liko nepilnai išnaudotas pirmojo tipo įrengimų darbo laiko fondas (jo likutis $x_9 = 45 \frac{5}{11}$) ir jog ši kartą, sudarant optimalų gamybos planą, ketvirtosios medžiagos papildomai pirkti neprisireikė ($x_{24}=0$).

Norėdami pilnai išnaudoti visą pirmojo tipo įrengimų darbo laiko fondą, turėtume padidinti (šalia kitų resursų) dar ir trečiojo tipo įrengimų darbo laiko fondą, nes dabar ir šie resursai tapo deficitiniais ($x_{11}=0$).

Pažymėję $\Delta T_3 = x_{25}$, kur $x_{25} = -x_{11}$, iš 257-osios lentelės galime gauti 258-ją lentelę.

Šioje lentelėje yra tik vienas vedantysis stulpelis – kintamojo x_{25} stulpelis – ir vienas vedantysis elementas, priklausantis tam stulpeliui ir kintamojo x_3 eilutei. Tai elementas, kuris lygus $\frac{5}{11}$.

Iš 258-osios lentelės gauname 259-ją lentelę.

Galimi du šios lentelės tolimesnio optimizavimo variantai. Jei pasirinktume vedančiuoju stulpeliu kintamojo x_2 stulpelį, tai gautume pelno prieauglį $\Delta P = (40 : 1) \cdot 5 = 200$, o jei pasirinktume kintamojo x_{24} stulpelį, tai gautume $\Delta P = (40 : 1,1) \cdot 6 = \frac{2400}{11} = 218 \frac{2}{11}$. Kadangi antruoju atveju pelno prieauglis didesnis, tai pasirenkame vedančiuoju elementu elementą, priklausantį kintamojo x_{24} stulpeliui ir kintamojo x_9 eilutei.

Gauname 260-ją, o po to – 261-ją lenteles.

258. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₂₅	x ₂₄
x ₄	109 $\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$
x ₁₈	827 $\frac{3}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{12}{11}$	$-\frac{17}{11}$	$\frac{9}{11}$
x ₃	27 $\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{13}{11}$
x ₂₁	45 $\frac{5}{11}$	$\frac{16}{11}$	$-\frac{24}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{18}{11}$
x ₉	45 $\frac{5}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{19}{22}$
x ₂₀	945 $\frac{5}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{32}{11}$	$\frac{26}{11}$
x ₁₉	200	0	0	-2	3
x ₂₃	195 $\frac{5}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{31}{22}$	$\frac{41}{22}$
x ₂₂	286 $\frac{4}{11}$	$-\frac{18}{11}$	$\frac{27}{11}$	$-\frac{27}{22}$	$\frac{12}{11}$
P ₁	-3381 $\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{25}{11}$	$\frac{40}{11}$	$-\frac{38}{11}$

259. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₂₄
x ₄	120	0,2	0	0,4	-0,2
x ₁₈	920	0,2	-2	3,4	-3,2
x ₂₅	60	0,6	-2	2,2	-2,6
x ₂₁	40	1,4	-2	-0,2	-1,4
x ₉	40	-0,6	1	-0,2	1,1
x ₂₀	1120	1,2	-5	6,4	-5,2
x ₁₉	320	1,2	-4	4,4	-2,2
x ₂₃	280	0,3	-2	3,1	-1,8
x ₂₂	360	-0,9	0	2,7	-2,1
P ₁	-3600	-3	5	-8	6

260. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₃	x ₂	x ₉
x ₄	127 $\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
x ₁₈	1036 $\frac{4}{11}$	$-\frac{17}{11}$	$\frac{31}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{32}{11}$
x ₂₅	154 $\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{26}{11}$
x ₂₁	90 $\frac{10}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{14}{11}$
x ₂₁	36 $\frac{4}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{10}{11}$	$-\frac{10}{11}$
x ₂₀	1309 $\frac{1}{11}$	$-\frac{18}{11}$	$\frac{60}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{52}{11}$
x ₁₉	400	0	4	-2	2
x ₂₃	345 $\frac{5}{11}$	$-\frac{15}{22}$	$\frac{61}{22}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{8}{11}$
x ₂₂	436 $\frac{4}{11}$	$-\frac{45}{22}$	$\frac{51}{22}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{21}{11}$
P ₁	-3818 $\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{76}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{60}{11}$

261. lentelė

\	L.n.	x ₂₁	x ₂	x ₃	x ₉
x ₄	114 $\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0
x ₁₈	1257 $\frac{1}{7}$	$\frac{17}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{12}{7}$	6
x ₂₅	271 $\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{8}{7}$	4
x ₁	142 $\frac{6}{7}$	$\frac{11}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	2
x ₂₄	114 $\frac{2}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	2
x ₂₀	1542 $\frac{6}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{15}{7}$	$\frac{30}{7}$	8
x ₁₉	400	0	-2	4	2
x ₂₃	442 $\frac{6}{7}$	$\frac{15}{14}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{16}{7}$	3
x ₂₂	728 $\frac{4}{7}$	$\frac{45}{14}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$	6
P ₁	-3857 $\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{47}{11}$	-6

Kaip matome iš 261-osios lentelės, tokiu atveju jau visi turėti resursai būtų pilnai sunaudoti. Kad taip įvyktų, tektų papildomai pirkti pirmosios, antrosios ir ketvirtosios medžiagos ($x_{18}^{(opt)} = -x_5 = 1257 \frac{1}{7}$; $x_{20}^{(opt)} = -x_6 = 1542 \frac{6}{7}$; $x_{24}^{(opt)} = -x_8 = 114 \frac{2}{7}$), o taip pat padidinti antrojo, trečiojo, ketvirtojo ir penktojo tipo įrenginių darbo fondus ($x_{22}^{(opt)} = -x_{10} = 728 \frac{4}{7}$; $x_{25}^{(opt)} = -x_{11} = 271 \frac{3}{7}$; $x_{19}^{(opt)} = -x_{12} = 400$; $x_{23}^{(opt)} = -x_{13} = 442 \frac{6}{7}$). Trečiosios medžiagos papildomai pirkti nereiktų, tačiau jos atsargos būtų pilnai sunaudotos ($x_{21}^{(opt)} = -x_7 = 0$). Būtų pilnai sunaudotas ir pirmojo tipo įrengimų darbo laiko fondas ($x_9^{(opt)} = 0$).

Kitaip tariant, jei resursų atsargos būtų tokios: $b_1^{(n)} = 2257 \frac{1}{7}$; $b_2^{(n)} = 3542 \frac{6}{7}$; $b_3^{(n)} = b_3^{(s)} = 800$; $b_4^{(n)} = 714 \frac{2}{7}$; $T^{(n)} = T_1^{(s)} = 700$; $T_2^{(n)} = 1628 \frac{4}{7}$; $T_3^{(n)} = 1771 \frac{3}{7}$; $T_4^{(n)} = 1400$; $T_5^{(n)} = 1242 \frac{6}{7}$, tai, sudarius optimalų gamybos planą $x_1^{(opt)} = 142 \frac{6}{7}$; $x_2^{(opt)} = 0$; $x_3^{(opt)} = 0$; $x_4^{(opt)} = 114 \frac{2}{7}$, visi resursai būtų pilnai sunaudoti ir būtų gautas pelnas lygus $P = 3857 \frac{1}{7}$ vieneto. Kapitalo investavimo efektyvumas tuomet taptų $E = \frac{1000 \cdot 3 + 800 \cdot 30}{1000 \cdot 52 + 800 \cdot 370} \approx 0,0775862 \approx 7,76\%$.

Norėtusi dar kartą atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, jog kiekviena simplekso lentelė, kurios laisvųjų narių stulpelio elementai yra teigiami, vaizduoja vieną iš galimų gamybinių planų, o simplekso lentelės, vaizduojančios optimalius planus, – optimalų planą, esant duotoms resursų atsargoms.

Pavyzdžiui, 257-oji lentelė vaizduoja planą, kuris būtų optimalus, jei įmonė turėtų tokias resursų atsargas: $b_1=1000+x_{18}=1827\frac{3}{11}$; $b_2=2000+x_{20}=2945\frac{5}{11}$; $b_3=800+x_{21}=845\frac{5}{11}$; $b_4=600+x_{24}=600$; $T_1=700-x_9=654\frac{6}{11}$; $T_2=900+x_{22}=1186\frac{4}{11}$; $T_3=1500-x_{11}=1500$; $T_4=1000+x_{19}=1200$; $T_5=800+x_{23}=995\frac{5}{11}$.

Turėdami tokias pradinės resursų atsargas, gautume pradinę simplekso lentelę (žiūr. 262-ją lentelę), iš kurios, pasirinkdami optimalią tikslo funkcijos minimumo paieškos trajektoriją, gautume 263-ją ir 264-ją lenteles.

262. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	$1827\frac{3}{11}$	3	2	3	16
x_6	$2945\frac{5}{11}$	4	5	4	26
x_7	$845\frac{5}{11}$	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	$654\frac{6}{11}$	0,5	1	2	5,5
x_{10}	$1186\frac{4}{11}$	3	0	1,5	10,5
x_{11}	1500	2	2	3	13
x_{12}	1200	1	4	0	11
x_{13}	$995\frac{5}{11}$	1,5	2	0,5	9
P_1	0	3	5	4	30

263. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_{12}
x_5	$81\frac{9}{11}$	$\frac{17}{11}$	$-\frac{42}{11}$	3	$-\frac{16}{11}$
x_6	$109\frac{1}{11}$	$\frac{18}{11}$	$-\frac{49}{11}$	4	$-\frac{26}{11}$
x_7	$81\frac{9}{11}$	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{6}{11}$	3	$-\frac{7}{11}$
x_8	$54\frac{6}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-\frac{20}{11}$	2	$-\frac{5}{11}$
x_9	$54\frac{6}{11}$	0	-1	2	-0,5
x_{10}	$40\frac{10}{11}$	$\frac{45}{22}$	$-\frac{42}{11}$	1,5	$-\frac{21}{22}$
x_{11}	$81\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{30}{11}$	3	$-\frac{13}{11}$
x_4	$109\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{1}{11}$
x_{13}	$13\frac{7}{11}$	$\frac{15}{22}$	$-\frac{14}{11}$	0,5	$-\frac{9}{11}$
P_1	$-3272\frac{8}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{65}{11}$	4	$-\frac{30}{11}$

264. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_8	x_{12}
x_5	0	$\frac{8}{11}$	$-\frac{12}{11}$	-1,5	$-\frac{17}{22}$
x_6	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	-2	$-\frac{16}{11}$
x_7	0	$-\frac{16}{11}$	$\frac{24}{11}$	-1,5	$\frac{1}{22}$
x_3	$27\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{10}{11}$	0,5	$-\frac{5}{22}$
x_9	0	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	-1	$-\frac{1}{22}$
x_{10}	0	$\frac{18}{11}$	$-\frac{27}{11}$	-0,75	$-\frac{27}{44}$
x_{11}	0	0	0	-1,5	-0,5
x_4	$109\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{1}{11}$
x_{13}	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	-0,25	$-\frac{31}{44}$
P_1	$-3381\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{25}{11}$	-2	$-\frac{20}{11}$

Ši optimalų sprendinių, kuri vaizduoja 264-oji lentelė, radome, naudodamiesi trumpiausią optimizavimo trajektoriją, kurią gavome kiekviename optimizavimo žingsnyje maksimaliai didindami pelno $P=-P_1$ reikšmę. Parodysime tai. 262-oje lentelėje tikslo funkcijos P_1 eilutėje visų laisvųjų kintamųjų stulpeliuose elementai yra teigiami, todėl kiekvieną iš šių stulpelių galima parinkti vedančiuoju. Siekiant lokalaus optimumo, tikslinga parinkti tą stulpelį, kuris leistų gauti didžiausią tikslo funkcijos pokytį ΔP .

Jei vedančiuoju pasirinktume kintamojo x_1 stulpelį, tai vedančiuoju elementu taptų bazinio kintamojo x_{10} eilutės elementas, lygus 3, ir pelno priauglis būtų lygus

$$\Delta P = \left(1186\frac{4}{11} : 3\right) \cdot 3 = 1186\frac{4}{11}.$$

Jei vedančiuoju pasirinktume kintamojo x_2 stulpelį, tai vedančiuoju elementu taptų kintamojo x_{12} eilutė ir pelno priauglis būtų lygus $\Delta P = (1200 : 4) \cdot 5 = 1500$.

Jei vedančiuoju pasirinktume kintamojo x_3 stulpelį, tai vedančiuoju elementu taptų kintamojo x_7 eilutė ir pelno priauglis būtų lygus $\Delta P = \left(845\frac{5}{11} : 3\right) \cdot 4 = 1127\frac{3}{11}$.

Jei vedančiuoju pasirinktume laisvojo kintamojo x_4 stulpelį, tai vedančiąją eilutę tektų rinktis bazinio kintamojo x_{12} eilutė ir pelno priauglis būtų lygus $\Delta P = (1200 : 11) \cdot 30 = 3272\frac{8}{11}$.

Siekiant lokalaus optimumo, vedančiuoju stulpeliu tikslinga pasirinkti kintamojo x_4 stulpelį, ką padarę iš 262-osios lentelės gavome 263-ją lentelę.

Šioje lentelėje vedančiaisiais stulpeliais gali būti kintamųjų x_1 ir x_3 stulpeliai.

Jei vedančiuoju pasirinktume kintamojo x_1 stulpelį, tai vedančiosiomis eilutėmis galėtų tapti kintamųjų x_{10} ir x_{13} eilutės ir pelno priauglis būtų lygus $\Delta P = \frac{60}{11} = 5 \frac{5}{11}$.

Jei vedančiuoju stulpeliu pasirinktume kintamojo x_3 stulpelį, tai vedančiąja eilute galėtume pasirinkti bet kurią iš bazinių kintamųjų eilučių, išskyrus kintamojo x_4 eilutę, nes visų kitų eilučių laisvųjų narių ir kintamojo x_3 stulpelio atitinkamo elementų santykis yra vienodas ir lygus $\frac{300}{11} = 27 \frac{3}{11}$.

Pelno priauglis būtų lygus $\Delta P = 27 \frac{3}{11} \cdot 4 = 109 \frac{1}{11}$.

Kadangi $109 \frac{1}{11} > 5 \frac{5}{11}$, tai vedančiuoju stulpeliu pasirinksime kintamojo x_3 stulpelį.

Vedančiąją eilutę pasirenkame, pavyzdžiui, kintamojo x_8 eilutę ir iš 263-osios lentelės gauname 264-ją lentelę, vaizduojančią optimalų sprendinį, tikslo funkcijos reikšmės atžvilgiu ekvivalentų optimaliam sprendiniui, kurį vaizduoja 257-oji lentelė.

Tačiau 264-oji ir 257-oji lentelės, turėdamos vienodas tikslo funkcijas reikšmes, pilnai nesutampa, nes skiriasi jų laisvieji ir baziniai kintamieji.

265. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_8	x_{11}
x_5	0	$\frac{8}{11}$	$-\frac{12}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{17}{11}$
x_6	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{26}{11}$	$-\frac{32}{11}$
x_7	0	$-\frac{16}{11}$	$\frac{24}{11}$	$-\frac{18}{11}$	$\frac{1}{11}$
x_3	$27 \frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{13}{11}$	$-\frac{5}{11}$
x_9	0	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{19}{22}$	$-\frac{1}{11}$
x_{10}	0	$\frac{18}{11}$	$-\frac{27}{11}$	$\frac{12}{11}$	$-\frac{27}{22}$
x_{12}	0	0	0	3	-2
x_4	$109 \frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$
x_{13}	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{41}{22}$	$-\frac{31}{22}$
P_1	-3381 $\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{25}{11}$	$\frac{38}{11}$	$-\frac{40}{11}$

266. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{24}	x_{11}
x_5	0	$\frac{8}{11}$	$-\frac{12}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{17}{11}$
x_6	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{26}{11}$	$-\frac{32}{11}$
x_7	0	$-\frac{16}{11}$	$\frac{24}{11}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{1}{11}$
x_3	$27 \frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{13}{11}$	$-\frac{5}{11}$
x_9	0	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{19}{22}$	$-\frac{1}{11}$
x_{10}	0	$-\frac{18}{11}$	$-\frac{27}{11}$	$-\frac{12}{11}$	$-\frac{27}{22}$
x_{12}	0	0	0	-3	-2
x_4	$109 \frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$
x_{13}	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{41}{22}$	$-\frac{31}{22}$
P_1	-3381 $\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{25}{11}$	$-\frac{38}{11}$	$-\frac{40}{11}$

267. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{11}	x_{22}
x_{18}	0	$-\frac{8}{11}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{9}{11}$
x_{20}	0	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{32}{11}$	$\frac{26}{11}$
x_{21}	0	$\frac{6}{11}$	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{18}{11}$
x_3	$27 \frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$\frac{13}{11}$
x_9	0	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{19}{22}$
x_{22}	0	$-\frac{18}{11}$	$\frac{27}{11}$	$\frac{27}{22}$	$\frac{12}{11}$
x_{19}	0	0	0	2	3
x_4	$109 \frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$
x_{23}	0	$-\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{31}{22}$	$\frac{41}{22}$
P_1	-3381 $\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{25}{11}$	$-\frac{40}{11}$	$-\frac{38}{11}$

264-oji, 265-oji, 266-oji ir 267-oji lentelės, resursų atsargų dydžiai buvo parinkti taip (atsižvelgiant į 257-ąją lentelę), kad, pasiekus optimalų sprendinį visų resursų likučiai taptų lygūs 0, ką mes ir gavome.

Nagrinėdami 264-ąją ir 265-ąją bei 266-ąją lenteles, galime pastebėti įdomų reiškinį, kuris kai kam iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti net paradoksaliaus.

264-oji lentelė vaizduoja optimalų sprendinį $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=27\frac{3}{11}$, $x_4=109\frac{1}{11}$, $x_5=0$, $x_6=0$, $x_7=0$, $x_8=0$, $x_9=0$, $x_{10}=0$, $x_{11}=0$, $x_{12}=0$, $x_{13}=0$, $P=3381\frac{9}{11}$, o iš jos gauta 265-oji lentelė vaizduoja lygiai

tą patį sprendinį, tačiau ji jau **nebeturi formalaus optimalumo požymio**, nes joje tikslo funkcijos eilutėje vienas elementas yra teigiamas.

Pakeitę 265-ojoje lentelėje laisvąjį kintamąjį x_8 į kintamąjį $x_{22}=-x_8$, gauname 266-ją lentelę, kuri vaizduoja vėl tą patį sprendinį ir tą pačią tikslo funkcijos reikšmę, tačiau 266-ją lentelę jau vėl **turi formalųjį optimalumo požymį**: visi jos laisvųjų kintamųjų stulpelių elementai, priklausantys tikslo funkcijos eilutei, vėl yra neigiami skaičiai (kaip ir 264-ojoje lentelėje).

Kai kuriems skaitytojams, pastebėjusiems, jog vienas ir tas pats sprendinys, nesikeičiant apribojimams ir tikslo funkcijai bei kitiems uždavinio parametrams, kartais gali turėti optimalumo požymį, o kartais gali jo neturėti, gali kilti klausimas, kaip gali vienas ir tas pats sprendinys, nesikeičiant aplinkybėms, būti kartais optimalus, o kartais ir neoptimalus? Įžvalgesni skaitytojai pastebės, jog tikrumoje jokio paradokso nėra ir pagrindo ką tik paminėtam klausimui taip pat nėra. Šitoks klausimas gali kilti tik tokiam skaitytojui, kuris neatkreipė dėmesio į tą aplinkybę, jog **formalusis optimalaus sprendinio požymis yra pakankama, tačiau nėra būtina sprendinio optimalumo sąlyga**.

Nesunku įsitikinti, jog sprendinys, kurį vaizduoja 265-ją lentelę, nors ir neturi formalaus optimalumo požymio, yra lygiai taip pat optimalus, kaip ir tas sprendinys, kurį vaizduoja 264-ją ir 266-ją lentelės, turinčios tą patį požymį. „Optimizuodami“ 265-ją lentelę, t. y., transformuodami toje lentelėje pavaizduotą sprendinį į kokią nors kitą sprendinį (keisdami laisvąjį kintamąjį x_8 vietomis su kuriuo nors iš bazinių kintamųjų x_5 , x_5 , x_{10} , x_{12} , x_{13}), mes vėl gautume sprendinį, turintį lygiai tą pačią tikslo funkcijos reikšmę nepriklausomai nuo to, ar tas sprendinys turi, ar neturi formalaus optimalumo požymio. Ir jokiais leistinomis transformacijomis (nedidinant resursų atsargų bei nekeičiant kainų, t. y., nekeičiant optimizavimo uždavinio pradinių sąlygų), padidinti pelną P nepavyks. Todėl visi tie leistini sprendiniai, gauti „optimizuojant“ 265-ją lentelę, yra optimalūs sprendiniai.

Pavyzdžiui, jei, transformuodami 265-ją lentelę, vedančiosiomis eilutėmis pasirinktume bazinių kintamųjų x_{12} ar x_{13} eilutes, tai iškart gautume lenteles, turinčias formalųjį pakankamą optimalumo požymį ir tą pačią tikslo funkcijos reikšmę kaip ir 265-ojoje lentelėje. Jei vedančiosiomis eilutėmis pasirinktume bazinių kintamųjų x_5 , x_6 ar x_{10} eilutes, tai gautume lenteles, neturinčias formalaus optimalumo požymio, tačiau turinčias nepasikeitusią (optimalią) tikslo funkcijos reikšmę. Transformuodami šias lenteles toliau, vėl gautume lenteles, turinčias tą pačią tikslo funkcijos reikšmę, tačiau nebūtinai turinčias formalųjį optimalumo požymį. Paliekame skaitytojui išsiaiškinti, **ar taip transformuodami vis naujai gaunamas lenteles, galų gale pasieksime būseną, kada iš bet kurios lentelės, neturinčios formalaus optimalumo požymio, kiekviena naujai gaunama lentelė būtinai turės tą požymį. O gal lentelių, neturinčių formalaus (pakankamo) optimalumo požymio, gavyba iš lentelių, neturinčių tokio požymio, gali tapti cikliniu procesu, neturinčiu pabaigos?**

Pažymėsime, kad **maksimalaus leistino tikslo funkcijos P pokyčio ΔP , atsirandančio, pereinant nuo vienos simplekso lentelės prie kitos, lygybė nuliui, dar negarantuoja, kad jau pasiektas optimumo taškas**. Pavyzdžiui, kaip vėliau pamatysime, pereidami nuo 270-osios prie 271-osios, o taip pat nuo 273-osios prie 274-osios lentelės, mes gauname $\Delta P=\Delta z_1=\Delta z_2=0$, tačiau nei viena iš tų lentelių dar nevaizduoja optimalių sprendinių, gaunamų 272-oje ir 275-oje lentelėse.

Ryšium su tuo, kas buvo pasakyta, siūlau skaitytojui pagalvoti, kaip nustatyti sprendinių, vaizduojamų 265-oje, 268-oje ir 269-oje lentelėse, optimalumą.

Juk nei 265-oji, nei 268-oji, nei iš jos gauta 269-ji lentelė **neturi formalaus optimalumo požymio**, o iš to, kad, pereinant nuo 268-osios lentelės prie 269-osios, tikslo funkcijos P pokytis ΔP buvo lygus 0, dar negalima daryti išvados, jog abi tos lentelės vaizduoja optimalų sprendinį, nors šiuo atveju jos tokį sprendinį vaizduoja.

268. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{10}	x_{11}
x_5	0	-0,5	0,75	-0,75	-0,625
x_6	0	-3	4,5	$-\frac{13}{6}$	-0,25
x_7	0	1	-1,5	1,5	-1,75
x_3	$27\frac{3}{11}$	-1,5	1,75	$-\frac{13}{12}$	0,875
x_9	0	0,75	-1,125	$\frac{19}{24}$	$-\frac{17}{16}$
x_8	0	1,5	-2,25	$\frac{11}{12}$	-1,125
x_{12}	0	-4,5	6,75	-2,75	1,375
x_4	$109\frac{1}{11}$	0,5	-0,25	0,25	-0,125
x_{13}	0	-2,25	3,375	$-\frac{41}{24}$	$\frac{11}{16}$
P_1	$-3381\frac{9}{11}$	-6	5,5	$-\frac{19}{6}$	0,25

269. lentelė

\	L.n.	x_1	x_5	x_{10}	x_{11}
x_2	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{5}{6}$
x_6	0	0	-6	$\frac{7}{3}$	3,5
x_7	0	0	2	0	-3
x_3	$27\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_9	0	0	1,5	$-\frac{1}{3}$	-2
x_8	0	0	3	$-\frac{4}{3}$	-3
x_{12}	0	0	-9	4	7
x_4	$109\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
x_{13}	0	0	-4,5	$\frac{5}{3}$	3,5
P_1	$-3381\frac{9}{11}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{22}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{29}{6}$

Siūlau skaitytojui pagalvoti ir apie tai, **kaip tokioje situacijoje turėtų elgtis kompiuterio programa, realizuojanti simplekso algoritmą.**

Verta atkreipti skaitytojų dėmesį dar į vieną situaciją, sutinkamą sprendžiant tiesinio programavimo uždavinius simplekso metodu: **jei simplekso lentelės, vaizduojančios optimalų sprendinį, tikslo funkcijos eilutėje laisvųjų kintamųjų stulpelių kai kurie elementai – tikslo funkcijos jautrumo koeficientai – yra lygūs 0, tai nagrinėjamas optimizavimo uždavinys ne tik turi optimalų sprendinį, kurį vaizduoja ta simplekso lentelė, bet gali turėti ir be galo daug kitų optimalių sprendinių.** Tuos sprendinius galime gauti iš minėtosios simplekso lentelės, įstatę į tą lentelę sudarančias lygtis nulines tų laisvųjų kintamųjų reikšmes, kurių koeficientai tikslo funkcijos lygtyje nelygūs 0, ir keisdami tų laisvųjų kintamųjų, kurių koeficientai tikslo funkcijos lygtyje lygūs 0, reikšmes jų leistino kitimo ribose. Taip darydami, mes nekeisime tikslo funkcijos reikšmės (ji liks visą laiką ta pati ir optimali), tačiau keisime kai kurių (o dažnai ir visų) bazinių kintamųjų reikšmes ir gausime aibę skirtingų optimumo taškų.

Po šių pastabų apie simplekso algoritmo ypatumus grįšime prie tiesinio programavimo uždavinių optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo nagrinėjimo.

Kaip ir buvo minėta, nagrinėdami 173-ją lentelę, vaizduojančią optimalų sprendinį, randame

tokius optimalaus sprendinio jautrumo koeficientus: $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial x_5} = -\frac{65}{42}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial x_{12}} = -\frac{10}{21}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial x_1} = -\frac{89}{42}$,

$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial x_3} = -\frac{9}{14}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial x_{12}} = -\frac{8}{21}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial x_5} = \frac{11}{42}$, $\frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial x_{12}} = \frac{1}{21}$, $\frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial x_5} = -\frac{2}{21}$ ir t. t.

Atsižvelgdami į tai, kad $x_5 = -\Delta b_1$, $x_6 = -\Delta b_2$, $x_7 = -\Delta b_3$, $x_8 = -\Delta b_4$, $x_9 = -\Delta T_1$,

$x_{10} = -\Delta T_2$, $x_{11} = -\Delta T_3$, $x_{12} = -\Delta T_4$, $x_{13} = -\Delta T_5$, gauname: $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{65}{42}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2} = 0$,

$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_3} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_4} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_1} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_2} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_3} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_4} = \frac{10}{21}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_5} = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} &= -\frac{11}{42}, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3} = 0, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_4} = 0, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial T_2} = 0, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial T_3} = 0, \\ \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial T_4} &= \frac{8}{21}, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial T_5} = 0, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{2}{21}, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial b_3} = 0, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial b_4} = 0, \\ \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial T_1} &= 0, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial T_2} = 0, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial T_3} = 0, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial T_4} = -\frac{1}{21}, \quad \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial T_5} = 0.\end{aligned}$$

Parametrams $b_2, b_3, b_4, T_1, T_2, T_3, T_5$, charakterizuojantiems resursus, keičiantis ribose $1833\frac{1}{3} \leq b_2 < +\infty, 571\frac{3}{7} \leq b_3 < +\infty, 238\frac{2}{21} \leq b_4 < +\infty, 380\frac{20}{21} \leq T_1 < +\infty, 500 \leq T_2 < +\infty, 857\frac{1}{7} \leq T_3 < +\infty, 666\frac{2}{3} \leq T_5 < +\infty$, optimalus sprendinys $x_1=0, x_2=119\frac{1}{2}, x_3=0, x_4=47\frac{13}{21}$ liks stabilus. Stabilu liks ir tikslo funkcijos reikšmė $P = 2023\frac{17}{21}$.

Tačiau keičiantis parametrams b_1 ir T_4 , optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė jau nebeišliks stabilūs, o keisis, nes $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} \neq 0, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial T_4} \neq 0, \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial b_1} \neq 0, \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial T_4} \neq 0, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} \neq 0, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_4} \neq 0$.

Tačiau tam tikrose parametrų b_1 ir T_4 kitimo ribose optimalaus sprendinio jautrumo koeficientai liks pastovūs, t. y., nesikeis optimalų sprendinių vaizduojančios 173-osios lentelės lygčių koeficientai, o galės keistis tik tų lygčių laisvieji nariai.

Nustatysime **optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribas**. Tai galima padaryti įvairiais būdais.

Vienas iš paprasčiausių – nelygybių, kurias turi tenkinti optimalaus sprendinio baziniai kintamieji, išreikšti per laisvuosius kintamuosius, sistemos sprendimo metodu.

Iš sprendžiamo uždavinio sąlygų (žiūr. 171-ją lentelę) gauname, jog 174-osios lentelės baziniai kintamieji turi tenkinti nelygybes: $x_4 \geq 0, 0 \leq x_6 \leq 2000, 0 \leq x_7 \leq 800, 0 \leq x_8 \leq 600, 0 \leq x_9 \leq 700, 0 \leq x_{10} \leq 900, 0 \leq x_{11} \leq 1500, x_2 \geq 0, 0 \leq x_{13} \leq 800$.

Išreikšdami šiuos bazinius kintamuosius kaip laisvųjų kintamųjų funkcijas, gauname tokią nelygybių sistemą:

$$\begin{aligned}\frac{1000}{21} - \left(\frac{5}{21}x_1 - \frac{1}{21}x_{12} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{21}x_5 \right) &\geq 0, \quad 0 \leq 400 - (0,5x_1 + 0,5x_{12} - 1,5x_3 - x_5) \leq 900, \\ 0 \leq \frac{500}{3} - \left(-\frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{3}x_{12} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{7}{6}x_5 \right) &\leq 2000, \quad 0 \leq \frac{4500}{7} - \left(-\frac{2}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_{12} + \frac{6}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_5 \right) \leq 1500, \\ 0 \leq \frac{1600}{7} - \left(-\frac{6}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_{12} + \frac{18}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_5 \right) &\leq 800, \quad \frac{2500}{21} - \left(-\frac{17}{21}x_1 + \frac{8}{21}x_{12} - \frac{11}{14}x_3 - \frac{11}{42}x_5 \right) \geq 0, \\ 0 \leq \frac{7600}{21} - \left(-\frac{4}{21}x_1 + \frac{5}{21}x_{12} + \frac{4}{21}x_3 - \frac{10}{21}x_5 \right) &\leq 600, \quad 0 \leq \frac{400}{3} - \left(\frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{3}x_{12} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \right) \leq 800, \\ 0 \leq \frac{6700}{21} - \left(-\frac{17}{42}x_1 - \frac{5}{42}x_{12} + \frac{17}{14}x_3 - \frac{11}{42}x_5 \right) &\leq 700.\end{aligned}$$

Ši nelygybių sistema ir nusako tas laisvųjų kintamųjų x_1, x_{12}, x_3 ir x_5 kitimo ribas, kuriose optimalaus sprendinio, vaizduojamo 173-oje lentelėje, jautrumo koeficientai, sudarantys tos lentelės laisvųjų kintamųjų stulpelius, lieka stabilūs. Tose ribose, žinodami jų jautrumo koeficientų ir laisvųjų kintamųjų reikšmes, mes galime apskaičiuoti ir atitinkamas bazinių kintamųjų reikšmes, o taip pat ir optimalią tikslo funkcijos reikšmę.

Tarkime, kad mes, nekeisdami kitų uždavinio modelio parametrų, keisime tik parametro b_1 (o tai reiškia – ir laisvojo kintamojo x_5) reikšmę. Tuomet optimalų sprendinį vaizduojančioje 173-oje lentelėje ir iš jos ką tik gautoje nelygybių sistemoje laisvieji kintamieji x_1, x_{12} ir x_3 bus lygūs 0.

$$\text{Gausime nelygybių sistemą: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1000}{21} - \frac{2}{21}x_5 \geq 0, \\ 0 \leq \frac{500}{3} + \frac{7}{6}x_5 \leq 2000, \\ 0 \leq \frac{1600}{7} + \frac{1}{7}x_5 \leq 800, \\ 0 \leq \frac{7600}{21} + \frac{10}{21}x_5 \leq 600, \\ 0 \leq \frac{6700}{21} + \frac{11}{42}x_5 \leq 700, \\ 0 \leq 400 + x_5 \leq 900, \\ 0 \leq \frac{4500}{7} + \frac{5}{7}x_5 \leq 1500, \\ \frac{2500}{21} + \frac{11}{42}x_5 \geq 0, \\ 0 \leq \frac{400}{3} + \frac{1}{3}x_5 \leq 800; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_5 \leq 500, \\ -\frac{1000}{7} \leq x_5 \leq \frac{11000}{7}, \\ -1600 \leq x_5 \leq 4000, \\ -760 \leq x_5 \leq 500, \\ -\frac{13400}{11} \leq x_5 \leq \frac{16000}{11}, \\ -400 \leq x_5 \leq 500, \\ -900 \leq x_5 \leq 1200, \\ x_5 \geq -\frac{5000}{11}, \\ -400 \leq x_5 \leq 2000. \end{array} \right.$$

Iš šių nelygybių gauname tokias optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos (kintamojo $x_5 = -\Delta b_1$ kitimo atžvilgiu) ribas: $-\frac{1000}{7} \leq x_5 \leq 500$, iš kur išplaukia $\left(-500 \leq \Delta b_1 \leq \frac{1000}{7}\right)$, arba $\left(500 \leq b_1 \leq 1142\frac{6}{7}\right)$.

Šiose ribose optimalus gamybos planas yra toks: $x_1=0$, $x_2 = 119\frac{1}{21} - \frac{11}{42}\Delta b_1$, $x_3=0$, $x_4 = 47\frac{13}{21} + \frac{2}{21}\Delta b_1$, o optimali tikslo funkcijos reikšmė $P = 2023\frac{17}{21} + \frac{65}{42}\Delta b_{11}$.

Jei mes, nekeisdami kitų uždavinio modelio parametrų, būtume keitę tik parametro T_4 (o tai reiškia – ir kintamojo $x_{12} = -\Delta T_4$) reikšmę ir ieškoję optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos ribų, tai būtume gavę nelygybių sistemą:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1000}{21} + \frac{1}{21}x_{12} \geq 0, \\ 0 \leq \frac{500}{3} + \frac{2}{3}x_{12} \leq 2000, \\ 0 \leq \frac{1600}{7} + \frac{3}{7}x_{12} \leq 800, \\ 0 \leq \frac{7600}{21} - \frac{5}{21}x_{12} \leq 600, \\ 0 \leq \frac{6700}{21} + \frac{5}{42}x_{12} \leq 700, \\ 0 \leq 400 - 0,5x_{12} \leq 900, \\ 0 \leq \frac{4500}{7} + \frac{1}{7}x_{12} \leq 1500, \\ \frac{2500}{21} - \frac{8}{21}x_{12} \geq 0, \\ 0 \leq \frac{400}{3} + \frac{1}{3}x_{12} \leq 800; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_{12} \geq -1000, \\ -250 \leq x_{12} \leq 2750, \\ -\frac{1600}{3} \leq x_{12} \leq \frac{4000}{3}, \\ -1000 \leq x_{12} \leq 1520, \\ -2680 \leq x_{12} \leq 3200, \\ -1000 \leq x_{12} \leq 800, \\ -4500 \leq x_{12} \leq 6000, \\ x_{12} \leq 312,5, \\ -400 \leq x_{12} \leq 2000. \end{array} \right.$$

Iš šios nelygybių sistemos gauname tokias optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo (kintamojo $x_{12} = -\Delta T_4$ kitimo atžvilgiu) zonos ribas: $(-250 \leq x_{12} \leq 312,5)$, iš kur išplaukia $(-312,5 \leq \Delta T_4 \leq 250)$, arba $(687,5 \leq T_4 \leq 1250)$.

Šiose ribose optimalus planas yra toks: $x_1=0$, $x_2 = 119\frac{1}{21} + \frac{8}{21}\Delta T_4$, $x_3=0$, $x_4 = 47\frac{13}{21} - \frac{1}{21}\Delta T_4$, o optimali tikslo funkcijos reikšmė $P = 2023\frac{17}{21} + \frac{10}{21}\Delta T_4$.

Jei mes, nekeisdami kitų uždavinio modelio parametrų, būtume keitę kartu parametrų b_1 ir T_4 reikšmes ir ieškoję optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos ribų, tai būtume gavę nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{1000}{21} + \frac{1}{21}x_{12} - \frac{2}{21}x_5 \geq 0, \\ 0 \leq \frac{500}{3} + \frac{2}{3}x_{12} + \frac{7}{6}x_5 \leq 2000, \\ 0 \leq \frac{1600}{7} + \frac{3}{7}x_{12} + \frac{1}{7}x_5 \leq 800, \\ 0 \leq \frac{7600}{21} - \frac{5}{21}x_{12} + \frac{10}{21}x_5 \leq 600, \\ 0 \leq \frac{6700}{21} + \frac{5}{42}x_{12} + \frac{11}{42}x_5 \leq 700, \\ 0 \leq 400 - 0,5x_{12} + x_5 \leq 900, \\ 0 \leq \frac{4500}{7} + \frac{1}{7}x_{12} + \frac{5}{7}x_5 \leq 1500, \\ \frac{2500}{21} - \frac{8}{21}x_{12} + \frac{11}{42}x_5 \geq 0, \\ 0 \leq \frac{400}{3} + \frac{1}{3}x_{12} + \frac{1}{3}x_5 \leq 800; \end{cases} \begin{cases} x_{12} - 2x_5 \geq -1000, \\ -1000 \leq 4x_{12} + 7x_5 \leq 11000, \\ -1600 \leq 3x_{12} + x_5 \leq 4000, \\ -76000 \leq -5x_{12} + 10x_5 \leq 5000, \\ -13400 \leq 5x_{12} + 11x_5 \leq 16000, \\ -800 \leq -x_{12} + 2x_5 \leq 1000, \\ -4500 \leq x_{12} + 5x_5 \leq 6000, \\ -16x_{12} + 11x_5 \geq -5000, \\ -400 \leq x_{12} + x_5 \leq 2000. \end{cases}$$

Šią nelygybių sistemą tenkinančios x_{12} ir x_5 reikšmės yra plokštumos taškų (x_5 ; x_{12}) koordinatinių reikšmės, o tų taškų aibė sudaro optimalaus sprendinio, vaizduojamo 173-oje lentelėje, jautrumo koeficientų stabilumo zoną.

Bendrai, tiesinių nelygybių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendinys ne visada egzistuoja, o jei ir egzistuoja, tai tų sprendinių aibė ne visada sudaro uždara plokštumos dalį – uždara daugiakampį.

Tačiau mūsų nagrinėjamu atveju nelygybių sistema turi sprendinį. Pavyzdžiui, optimumo taško koordinatės $x_5=0$, $x_{12}=0$ privalo tenkinti šią nelygybių sistemą, o taip pat ir $x_5=1000$, $x_{12}=1000$, (ką nesunku patikrinti), ir tos sistemos sprendinių aibė sudaro uždara daugiakampį (kadangi begaliniai nutolusių taškų koordinatės negali tenkinti visų šios sistemos nelygybių). Tą uždara daugiakampį nesunku gauti, nubrėžus tieses $x_{12}-2x_5=-1000$, $4x_{12}+7x_5=-1000$, $4x_{12}+7x_5=11000$, $3x_{12}+x_5=-1600$, ..., $x_{12}+x_5=-400$, $x_{12}+x_5=2000$ ir išskyrus vidinį iškiląjį daugiakampį, kurio visi taškai tenkina visas duotosios sistemos nelygybes.

Paliekame skaitytojui įsitikinti, jog tas daugiakampis yra trikampis, kurio viršūnės yra taškai: $(x_5=1000, x_{12}=1000)$, $(x_5=200, x_{12}=-600)$, $\left(x_5 = -230\frac{10}{13}, x_{12} 153\frac{11}{13}\right)$. Šį trikampį sudaro trys tiesės, gaunamos iš pačių stipriausių sistemos nelygybių: $x_{12} - 2x_5 \geq -1000$, $4x_{12} + 7x_5 \geq -1000$ ir $-16x_{12} + 11x_5 \geq -5000$ (žiūr. 349 pav.).

Norint surasti sprendinių daugiakampio viršūnių koordinates, nebūtina nelygybes vaizduoti grafiškai: galima spręsti nelygybių sistemą analiziškai, eliminuojant silpnesnes nelygybes ir paliekant tik pačias stipriausias. Jei mus domina ne visos daugiakampio viršūnės, o tik tos, kurių koordinatės yra minimalios ar maksimalios laisvųjų kintamųjų x_5 ir x_{12} reikšmės, tai tokių koordinatinių paieškai galima pasitelkti simplekso algoritmą.

Kadangi resursų likučiai x_5 ir x_{12} negali būti didesni už tų resursų atsargas $b_1=1000$ ir $T_4=1000$, tai $x_5^{(max)}=1000$, $x_{12}^{(max)}=1000$. Šios kintamųjų x_5 ir x_{12} reikšmės, kaip jau minėjome, tenkina nelygybių sistemą ir todėl taškas $(x_5=1000, x_{12}=1000)$ priklauso optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonai ir vaizduoja vieną iš jos viršūnių.

Belieka surasti $x_5^{(\min)}$ ir $x_{12}^{(\min)}$ ir tas daugiakampio viršūnes (x_5 , x_{12}), kurioms priklauso tos minimalios koordinatų reikšmės. Žinoma, $x_5^{(\min)}$ ir $x_{12}^{(\min)}$ galima rasti, sprendžiant nelygybių sistemą, tačiau tai neretai reikalauja gana ilgų skaičiavimų (rekomenduoju skaitytojui tuo įsitikinti, pabandžius rasti $x_5^{(\min)}$ bei ją atitinkančią x_{12} reikšmę ir $x_{12}^{(\min)}$ bei ją atitinkančią x_5 reikšmę, sprendžiant nelygybių sistemą analiziškai), todėl mes pasinaudosime standartiniu simplekso algoritmu, pavesdami kompiuteriui atlikti reikalingus skaičiavimus ir tuo palengvindami sau minimalių x_5 ir x_{12} reikšmių paieškas.

Norint pasinaudoti simplekso algoritmu, reikia pakeisti kintamuosius x_5 ir x_{12} į kintamuosius, kurių reikšmės negalėtų būti neigiamos.

Kadangi $x_5 = -\Delta b_1$, kur $\Delta b_1 \in [-1000, +\infty)$, nes pradinė parametro b_1 reikšmė yra $b_1 = 1000$, tai $y_1 = b_1 + \Delta b_1 = 1000 + \Delta b_1 = 1000 - x_5$, vaizduojantis gamyboje sunaudotos pirmosios medžiagos kiekį, yra dydis, priklausantis $[0, \infty)$. Analogiškai gauname, kad dydis $y_2 = T_4 + \Delta T_4 = 1000 + \Delta T_4 = 1000 - x_{12}$, vaizduojantis ketvirtosios rūšies įrenginių darbo laiką, panaudotą gamyboje, taip pat negali būti neigiamas. Įstatę į nelygybių sistemą vietoj x_5 ir x_{12} lygybes $x_5 = 1000 - y_1$ ir $x_{12} = 1000 - y_2$, gauname nelygybes:

$$\begin{aligned} 1000 - y_2 - 2000 + 2y_1 &\geq -1000, & -2y_1 + y_2 &\leq 0, \\ -1000 \leq 4000 - 4y_2 + 7000 - 7y_1 &\leq 11000, & 0 \leq 7y_1 + 4y_2 &\leq 12000, \\ -1600 \leq 3000 - 3y_2 + 1000 - y_1 &\leq 4000, & 0 \leq y_1 + 3y_2 &\leq 5600, \\ -7600 \leq -5000 + 5y_2 + 10000 - 10y_1 &\leq 1600, & 0 \leq 10y_1 - 5y_2 &\leq 12600, \\ -13400 \leq 5000 - 5y_2 + 11000 - 11y_1 &\leq 1600, & 0 \leq 11y_1 + 5y_2 &\leq 29400, \\ -800 \leq -1000 + y_2 + 2000 - 2y_1 &\leq 1000, & 0 \leq 2y_1 - y_2 &\leq 1800, \\ -4500 \leq 1000 - y_2 + 5000 - 5y_1 &\leq 6000, & 0 \leq 5y_1 + y_2 &\leq 10500, \\ -16000 + 16y_2 + 11000 - 11y_1 &\geq -5000, & 11y_1 - 16y_2 &\leq 0, \\ -400 \leq 1000 - y_2 + 1000 - y_1 &\geq 2000, & 0 \leq y_1 + y_2 &\leq 2400. \end{aligned}$$

Kadangi $y_1 \geq 0$ ir $y_2 \geq 0$, tai tokias nelygybes kaip $7y_1 + 4y_2 \geq 0$, $y_1 + 3y_2 \geq 0$, ..., $y_1 + y_2 \geq 0$ galima atmesti kaip trivalias ir nieko papildomai neribojančias. Nelygybę $0 \leq 10y_1 - 5y_2 \leq 12600$ galima eliminuoti, nes visos y_1 ir y_2 reikšmės, tenkinančios nelygybę $0 \leq 2y_1 - y_2 \leq 1800$, būtinai tenkins ir silpnesnę nelygybę $0 \leq 10y_1 - 5y_2 \leq 12600$. Nelygybę $2y_1 - y_2 \geq 0$ taip pat galima eliminuoti, nes ji tapati nelygybei $-2y_1 + y_2 \leq 0$. Todėl galutinai lieka tik aštuonių nelygybių (apribojimų) sistema, kurią, ruošdamiesi naudotis standartiniu simplekso algoritmu, pertvarkysime į lygybių sistemą:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \leq 0, \\ 7y_1 + 4y_2 \leq 12000, \\ y_1 + 3y_2 \leq 5600, \\ 11y_1 + 5y_2 \leq 29400, \\ 2y_1 - y_2 \leq 1800, \\ 5y_1 + y_2 \leq 10500, \\ 11y_1 - 16y_2 \leq 0, \\ y_1 + y_2 \leq 2400. \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 = 0 - (-2y_1 + y_2), \\ y_4 = 12000 - (7y_1 + 4y_2), \\ y_5 = 5600 - (y_1 + 3y_2), \\ y_6 = 29400 - (11y_1 + 5y_2), \\ y_7 = 1800 - (2y_1 - y_2), \\ y_8 = 10500 - (5y_1 + y_2), \\ y_9 = 0 - (11y_1 - 16y_2), \\ y_{10} = 2400 - (y_1 + y_2). \end{cases}$$

Norėdami rasti minimalią $x_5 = 1000 - y_1$ reikšmę, tenkinančią šiuos apribojimus, turime rasti maksimalią y_1 reikšmę, t. y., turime minimizuoti tikslo funkciją $z_1 = -y_1 = 0 - y_1$.

Spręsdami šį minimizavimo uždavinį, gauname 270-272 lenteles.

$$\begin{aligned} \text{Iš 272-osios lentelės gauname, jog } y_1^{(\max)} &= \frac{16000}{13} = 1230 \frac{10}{13} \quad \text{ir} \quad x_5^{(\min)} = 1000 - 1230 \frac{10}{13} = \\ &= -230 \frac{10}{13}. \quad \text{Šią } y_1 \text{ reikšmę atitinka } y_2 = \frac{11000}{13} = 846 \frac{2}{13}, \quad \text{iš kur gauname, jog } x_{12} = 1000 - y_2 = \\ &= 1000 - 846 \frac{2}{13} = 153 \frac{11}{13}. \end{aligned}$$

Norėdami rasti minimalią $x_{12} = 1000 - y_2$ reikšmę, tenkinančią optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos apribojimus, turime rasti maksimalią y_2 reikšmę, t. y., turime minimizuoti tikslo funkciją $z_2 = -y_2 = 0 - y_2$.

Spręsdami šį optimizavimo uždavinį, gausime 273-275 lenteles.

270. lentelė

\	L.n.	y ₁	y ₂
y ₃	0	-2	1
y ₄	12000	7	4
y ₅	5600	1	3
y ₆	29400	11	5
y ₇	1800	2	-1
y ₈	10500	5	1
y ₉	0	11	-16
y ₁₀	2400	1	1
z ₁	0	1	0

271. lentelė

\	L.n.	y ₉	y ₂
y ₃	0	$\frac{2}{11}$	$-\frac{21}{11}$
y ₄	1200	$-\frac{7}{11}$	$\frac{156}{11}$
y ₅	5600	$-\frac{1}{11}$	$\frac{49}{11}$
y ₆	29400	-1	21
y ₇	1800	$-\frac{2}{11}$	$\frac{21}{11}$
y ₈	10500	$-\frac{5}{11}$	$\frac{91}{11}$
y ₁	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{16}{11}$
y ₁₀	2400	$-\frac{1}{11}$	$\frac{27}{11}$
z ₁	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{16}{11}$

272. lentelė

\	L.n.	y ₉	y ₄
y ₃	$\frac{21000}{13}$	$\frac{5}{52}$	$\frac{7}{52}$
y ₂	$\frac{11000}{13}$	$-\frac{7}{156}$	$\frac{11}{156}$
y ₅	$\frac{23800}{13}$	$\frac{17}{156}$	$-\frac{49}{156}$
y ₆	$\frac{151200}{13}$	$-\frac{3}{52}$	$-\frac{77}{52}$
y ₇	$\frac{2400}{13}$	$-\frac{5}{52}$	$-\frac{7}{55}$
y ₈	$\frac{45500}{13}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{91}{156}$
y ₁	$\frac{16000}{13}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{39}$
y ₁₀	$\frac{4200}{13}$	$\frac{1}{52}$	$-\frac{9}{52}$
z ₁	$-\frac{16000}{13}$	$-\frac{1}{39}$	$-\frac{4}{39}$

273. lentelė

\	L.n.	y ₁	y ₂
y ₃	0	-2	1
y ₄	12000	7	4
y ₅	5600	1	3
y ₆	29400	11	5
y ₇	1800	2	-1
y ₈	10500	5	1
y ₉	0	11	-16
y ₁₀	2400	1	1
z ₂	0	0	1

274. lentelė

\	L.n.	y ₁	y ₃
y ₂	0	-2	1
y ₄	1200	15	-4
y ₅	5600	7	-3
y ₆	29400	21	-5
y ₇	1800	0	1
y ₈	10500	7	-1
y ₁	0	-21	16
y ₁₀	2400	3	-1
z ₂	0	2	-1

275. lentelė

\	L.n.	y ₁₀	y ₃
y ₂	1600	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y ₄	0	-5	1
y ₅	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$
y ₆	12600	-7	2
y ₇	1800	0	1
y ₈	4900	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$
y ₉	16800	7	9
y ₁	800	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
z ₂	-1600	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Iš 275-osios lentelės gauname, jog $y_2^{(\max)}=1600$ ir $x_{12}^{(\min)}=1000-1600=-600$. Šią y_2 reikšmę atitinka $y_1=800$, iš kur gauname, kad $x_5=1000-y_1=1000-800=200$.

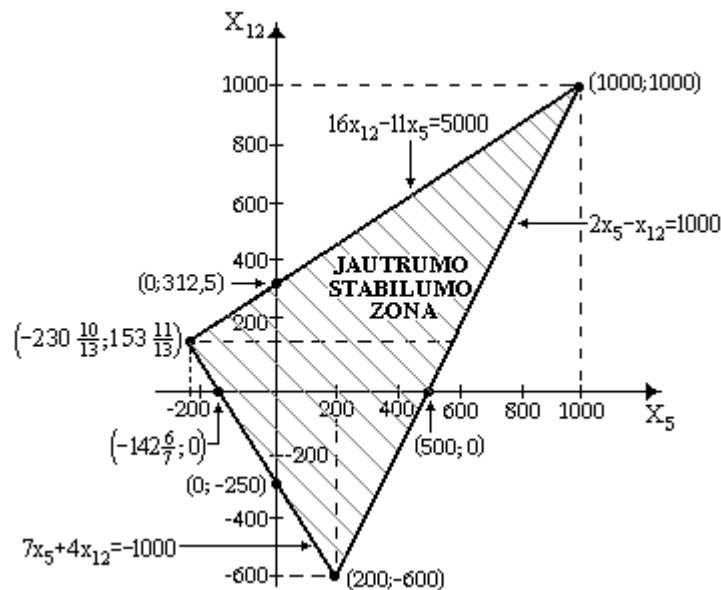
Optimalaus sprendinio jautrumo laisvųjų kintamųjų x_5 ir x_{12} pokyčiams stabilumo zonoje – trikampyje $(x_5=1000; x_{12}=1000)$, $(x_5=200; x_{12}=-6000)$, $\left(x_5=-230\frac{10}{13}, x_{12}=153\frac{11}{13}\right)$ – optimalus

sprendinys bus toks: $x_1^{(\text{opt})}=0$, $x_2^{(\text{opt})}=119\frac{1}{21}+\frac{11}{42}x_5-\frac{8}{21}x_{12}$, $x_3^{(\text{opt})}=0$, $x_4^{(\text{opt})}=47\frac{13}{21}-\frac{2}{21}x_5+\frac{1}{21}x_{12}$.

Optimali tikslo funkcijos reikšmė bus lygi $P=2023\frac{17}{21}-\frac{65}{42}x_5-\frac{10}{21}x_{12}=2023\frac{17}{21}+\frac{65}{42}\Delta b_1+\frac{10}{21}\Delta T_4$.

Optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo laisvųjų kintamųjų x_5 ir x_{12} kitimui zona pavaizduota 349 pav.

Iš 349 pav. matyti ir jautrumo koeficientų stabilumo pavieniams kintamųjų x_5 ir x_{12} pokyčiams zonų ribos. Pavyzdžiui, jei $x_{12}=0$, tai $x_5 \in \left[-142\frac{6}{7}; 500\right]$, o jei $x_5=0$, tai $x_{12} \in [-250; 312,5]$, ką mes jau buvome gavę, sprenddami atitinkamas nelygybių sistemas. Galima rasti ir eilę kitų jautrumo stabilumo pavieniams pokyčiams zonų ribų. Pavyzdžiui, jei $x_{12}=153\frac{11}{13}$, tai $x_5 \in \left[-230\frac{10}{13}; 576\frac{12}{13}\right]$, o jei $x_5=200$, tai $x_{12} \in [-600; 450]$.



349 pav.

Jei optimizavimo uždavinio modelio parametrai, charakterizuojantys resursus $b_2, b_3, b_4, T_1, T_2, T_3, T_5$, keisis optimalaus sprendinio stabilumo zonos ribose, o parametru b_1 ir T_4 pokyčiai $\Delta b_1 = -x_5$ ir $\Delta T = -x_{12}$ optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos, pavaizduotos 349 pav., ribose, tai

mes, žinodami jautrumo koeficientus $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial x_5}, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial x_{12}}, \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial x_5}, \frac{\partial x_4^{(opt)}}{\partial x_{12}}, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial x_5}, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial x_{12}}$, lengvai

rasime optimalaus sprendinio pokyčius $\Delta x_2, \Delta x_4$, ir ΔP , nespresdami optimizavimo uždavinio iš naujo. **O tai leistų organizacijos (įmonės, firmos įstaigos) valdymo personalui racionaliai (o neretai – ir optimaliai) reaguoti į organizacijos aplinkoje ir jos viduje vykstančius pokyčius, kas ir yra pagrindinė operacijų tyrimo, optimizavimo uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių stabilumo bei jautrumo analizės paskirtis. Aprūpinus organizaciją bei jų padalinių vadovų automatizuotas darbo vietas (ADV) atitinkama programine įranga, padedančia vadovams, reikalui atsiradus, greitai spręsti optimizavimo uždavinius bei analizuoti gautų sprendinių stabilumą ir jautrumą, galima žymiai pagerinti organizacijų valdymo kokybę.**

Atidesnis skaitytojas, matyt, jau pastebėjo, kad **nustatant optimalaus sprendinio x_5 ir x_{12} pokyčiams stabilumo zonų ribas, vietoj sudėtingos nelygybių sistemos sprendimo galima pasinaudoti standartiniu simplekso algoritmu ir, tokiu būdu, pasitelkiant standartinę simplekso programą, žymiai sumažinti rankinių skaičiavimų apimtį.**

Pavyzdžiui, norėdama nustatyti maksimalią leistiną kintamojo x_5 reikšmę, visiems kitiems laisviesiems kintamiesiems 173-ojoje lentelėje esant lygiams 0, jis galėjo toje lentelėje išmesti visus kitų laisvųjų kintamųjų (x_1, x_3 ir x_{12}) stulpelius ir pakeisti tikslo funkciją P_1 į tikslo funkciją $z_1 = 0 - x_5 \rightarrow \min$.

Tuomet jis būtų gavęs 276-ą lentelę, iš kurios, pritaikęs simplekso algoritmą, būtų gavęs 277-ą lentelę, rodančią, jog $x_5^{(max)} = 500$.

Norėdami rasti ne tik bazinių kintamųjų, bet ir optimalią tikslo funkcijos P reikšmę, kai $x_5 = 500$, galime pasinaudoti lygybe $P = 2023 \frac{17}{21} - \frac{65}{42} x_5$, iš kur gauname, jog $P = 1250$, kas atitinka dydį $P = x_2(c_2 - s_2) = 250 \cdot 5 = 1250$.

Norėdami rasti minimalią leistiną x_5 reikšmę, mes galime, pasinaudodami lygybe $x_5 = -x_{18} = -\Delta b_1$, kintamąjį x_5 pakeisti kintamuoju x_{18} , o tikslo funkciją pakeisti tikslo funkcija $z - x_{18} \rightarrow \min$.

Tuomet iš 173-osios (arba, kas yra tas pats, iš 276-osios) lentelės gautume 278-ą lentelę, iš kurios, pasinaudodami simplekso algoritmu, gautume 279-ą lentelę, rodančią, jog $x_5^{(min)} = -x_{18}^{(max)} = -142 \frac{6}{7}$.

Šiuo atveju galėjome tikslo funkcijos P_1 nekeisti ir, kaip rodo 229-oji ir 230-oji lentelės, vis tiek būtume gavę tą patį rezultatą ir dar papildomai suradę naują optimalią tikslo funkcijos reikšmę.

276. lentelė

\	L.n.	x_5
x_4	$47 \frac{13}{21}$	$\frac{2}{21}$
x_6	$166 \frac{2}{3}$	$-\frac{7}{6}$
x_7	$228 \frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_8	$361 \frac{19}{21}$	$-\frac{10}{21}$
x_9	$319 \frac{1}{21}$	$-\frac{11}{42}$
x_{10}	400	-1
x_{11}	$642 \frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$
x_2	$119 \frac{1}{21}$	$-\frac{11}{42}$
x_{13}	$133 \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
z_1	0	1

277. lentelė

\	L.n.	x_4
x_5	500	$\frac{21}{2}$
x_6	750	$\frac{49}{4}$
x_7	300	1,5
x_8	600	5
x_9	450	$\frac{11}{4}$
x_{10}	900	10,5
x_{11}	1000	7,5
x_2	250	$\frac{11}{4}$
x_{13}	300	7,5
z_1	-500	-10,5

278. lentelė

\	L.n.	x_{18}
x_4	$47 \frac{13}{21}$	$-\frac{2}{21}$
x_6	$166 \frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}$
x_7	$228 \frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_8	$361 \frac{19}{21}$	$\frac{10}{21}$
x_9	$319 \frac{1}{21}$	$\frac{11}{42}$
x_{10}	400	1
x_{11}	$642 \frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$
x_2	$119 \frac{1}{21}$	$\frac{11}{42}$
x_{13}	$133 \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	0	1

279. lentelė

\	L.n.	x_6
x_4	$61 \frac{11}{49}$	$\frac{4}{49}$
x_6	$142 \frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$
x_7	$208 \frac{8}{49}$	$-\frac{6}{49}$
x_8	$293 \frac{43}{49}$	$-\frac{20}{49}$
x_9	$281 \frac{31}{49}$	$-\frac{11}{49}$
x_{10}	$257 \frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$
x_{11}	$542 \frac{42}{49}$	$-\frac{30}{49}$
x_2	$81 \frac{31}{49}$	$-\frac{11}{49}$
x_{13}	$85 \frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$
z	$-142 \frac{6}{7}$	$-\frac{6}{7}$

Jei būtume norėję nustatyti kintamojo x_5 leistinas kitimo ribas, esant kitoms leistinoms (ne būtinai nulinėms) laisvųjų kintamųjų x_1, x_3, x_{12} reikšmėms, tai būtume galėję pasinaudoti ką tik aprašytu metodu, tačiau būtume privalėję prieš tai įstatyti į 173-osios lentelės bazinių kintamųjų lygtis laisvųjų kintamųjų reikšmes ir apskaičiuoti naujas laisvųjų narių reikšmes.

Pavyzdžiui, jei $x_1=0, x_3=0, x_{12} = 153 \frac{11}{13} = \frac{2000}{13}$, tai būtume gavę tokias lygtis:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 47 \frac{13}{21} - \left(-\frac{1}{21} \cdot \frac{2000}{13} + \frac{2}{21} x_5 \right) = \frac{5000}{91} - \frac{2}{21} x_5, \quad x_6 = 166 \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{7}{6} x_5 \right) = \frac{3500}{13} + \frac{7}{6} x_5, \\
 x_7 &= 228 \frac{4}{7} - \left(-\frac{3}{7} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{1}{7} x_5 \right) = \frac{26800}{91} + \frac{1}{7} x_5, \quad x_8 = 361 \frac{19}{21} - \left(\frac{5}{21} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{10}{21} x_5 \right) = \frac{29600}{91} + \frac{10}{21} x_5, \\
 x_9 &= 319 \frac{1}{21} - \left(-\frac{5}{42} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{11}{42} x_5 \right) = \frac{30700}{91} + \frac{11}{42} x_5, \quad x_{10} = 400 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2000}{13} - x_5 \right) = \frac{4200}{13} + x_5, \\
 x_{11} &= 642 \frac{6}{7} - \left(-\frac{1}{7} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{5}{7} x_5 \right) = \frac{56500}{91} - \frac{5}{7} x_5, \quad x_2 = 119 \frac{1}{21} - \left(\frac{8}{21} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{11}{42} x_5 \right) = \frac{10300}{91} + \frac{11}{42} x_5, \\
 x_{13} &= 133 \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{2000}{13} - \frac{1}{3} x_5 \right) = \frac{2400}{13} + \frac{1}{3} x_5.
 \end{aligned}$$

Norėdami rasti $x_5^{(\max)}$, t. y. minimizuodami $z_1 = -x_5$, būtume gavę 280-281 lenteles, o norėdami rasti $x_5^{(\min)}$ – 282-283 lenteles.

280. lentelė

\	L.n.	x_5
x_4	$\frac{5000}{91}$	$\frac{2}{21}$
x_6	$\frac{3500}{13}$	$-\frac{7}{6}$
x_7	$\frac{26800}{91}$	$-\frac{1}{7}$
x_8	$\frac{29600}{91}$	$-\frac{10}{21}$
x_9	$\frac{30700}{91}$	$-\frac{11}{42}$
x_{10}	$\frac{4200}{13}$	-1
x_{11}	$\frac{56500}{91}$	$-\frac{5}{7}$
x_2	$\frac{10300}{91}$	$-\frac{11}{42}$
x_{13}	$\frac{2400}{13}$	$-\frac{1}{3}$
z_1	0	1

281. lentelė

\	L.n.	x_4
x_5	$\frac{7500}{13}$	10,5
x_6		$\frac{49}{4}$
x_7		1,5
x_8		5
x_9		2,75
x_{10}		10,5
x_{11}		7,5
x_2		2,75
x_3		7,5
z_1	$-576 \frac{12}{13}$	$-\frac{21}{2}$

282. lentelė

\	L.n.	x_{18}
x_4	$\frac{5000}{91}$	$-\frac{2}{21}$
x_6	$\frac{3500}{13}$	$\frac{7}{6}$
x_7	$\frac{26800}{91}$	$\frac{1}{7}$
x_8	$\frac{29600}{91}$	$\frac{10}{21}$
x_9	$\frac{30700}{91}$	$\frac{11}{42}$
x_{10}	$\frac{4200}{13}$	1
x_{11}	$\frac{56500}{91}$	$\frac{5}{7}$
x_2	$\frac{10300}{91}$	$\frac{11}{42}$
x_{13}	$\frac{2400}{13}$	$\frac{1}{3}$
z	0	1

283. lentelė

\	L.n.	x_6
x_4		$\frac{4}{49}$
x_{18}	$\frac{3000}{13}$	$\frac{6}{7}$
x_7		$-\frac{6}{49}$
x_8		$-\frac{20}{49}$
x_9		$-\frac{11}{49}$
x_{10}		$-\frac{6}{7}$
x_{11}		$-\frac{30}{49}$
x_2		$-\frac{11}{49}$
x_{13}		$-\frac{2}{7}$
z	$-230 \frac{10}{13}$	$-\frac{6}{7}$

Kaip matome, gautos $x_5^{(max)} = 576 \frac{12}{13}$ ir $x_5^{(min)} = -230 \frac{10}{13}$ reikšmės sutampa su anksčiau kitu būdu gautomis $x_5^{(max)}$ ir $x_5^{(min)}$ reikšmėmis, kai $x_{12} = 153 \frac{11}{13}$.

Analogiškai galima gauti ir $x_{12}^{(max)}$ ir $x_{12}^{(min)}$, kai $x_1=0$, $x_3=0$, $x_5=0$, o taip pat ir tuo atveju, kai $x_1=0$, $x_3=0$, $x_5=200$ (žiūr. 284-291 lentelės).

284. lentelė

\	L.n.	x_{12}
x_4	$47 \frac{13}{21}$	$-\frac{1}{21}$
x_6	$166 \frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_7	$228 \frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$
x_8	$361 \frac{19}{21}$	$\frac{5}{21}$
x_9	$319 \frac{1}{21}$	$-\frac{5}{42}$
x_{10}	400	0,5
x_{11}	$642 \frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_2	$119 \frac{1}{21}$	$\frac{8}{21}$
x_{13}	$133 \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
z_1	0	1

285. lentelė

\	L.n.	x_2
x_4	62,5	$\frac{1}{8}$
x_{12}	312,5	$\frac{21}{8}$
z_1	-312,5	$-\frac{21}{8}$

286. lentelė

\	L.n.	x_{19}
x_4	$47 \frac{13}{21}$	$\frac{1}{21}$
x_6	$166 \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_7	$228 \frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_8	$361 \frac{19}{21}$	$-\frac{5}{21}$
x_9	$319 \frac{1}{21}$	$\frac{5}{42}$
x_{10}	400	-0,5
x_{11}	$642 \frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_2	$119 \frac{1}{21}$	$-\frac{8}{21}$
x_{13}	$133 \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	0	1

287. lentelė

\	L.n.	x_6
x_{19}	250	1,5
z	-250	$-\frac{3}{2}$

288. lentelė

\	L.n.	x_{12}
x_4	$\frac{200}{7}$	$-\frac{1}{21}$
x_6	400	$-\frac{2}{3}$
x_7	$\frac{1800}{7}$	$-\frac{3}{7}$
x_8	$\frac{3200}{7}$	$\frac{5}{21}$
x_9	$\frac{2600}{7}$	$-\frac{5}{42}$
x_{10}	600	0,5
x_{11}	$\frac{5500}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_2	$\frac{1200}{7}$	$\frac{8}{21}$
x_{13}	200	$-\frac{1}{3}$
z_1	0	1

289. lentelė

\	L.n.	x_2
x_4	50	0,125
x_6		
x_7		
x_8		
x_9		
x_{10}		
x_{11}		
x_{12}	450	$\frac{21}{8}$
x_{13}		
z_1	-450	$-\frac{21}{8}$

290. lentelė

\	L.n.	x_{19}
x_4	$\frac{200}{7}$	$\frac{1}{21}$
x_6	400	$\frac{2}{3}$
x_7	$\frac{1800}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_8	$\frac{3200}{7}$	$-\frac{5}{21}$
x_9	$\frac{2600}{7}$	$\frac{5}{42}$
x_{10}	600	-0,5
x_{11}	$\frac{5500}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_2	$\frac{1200}{7}$	$-\frac{8}{21}$
x_{13}	200	$\frac{1}{3}$
z	0	1

291. lentelė

\	L.n.	x_6
x_4	0	
x_{19}	600	1,5
x_7	0	
x_8	600	
x_9	300	
x_{10}	900	
x_{11}	700	
x_2	400	$\frac{4}{7}$
x_{13}	0	
z	-600	-1,5

Iš šių lentelių matome, jog, kai $x_1=0$, $x_3=0$, $x_5=0$, tai $x_{12}^{(max)}=312,5$ ir $x_{12}^{(min)}=-250$, o kai $x_1=0$, $x_3=0$, $x_5=200$, tai $x_{12}^{(max)}=450$ ir $x_{12}^{(min)}=-600$, kas sutampa su rezultatais, pavaizduotais 349 pav.

Gauti rezultatai rodo, jog optimalaus sprendinio jautrumą turimų rezultatų pokyčiams, o taip pat to jautrumo koeficientų stabilumo zonas galima nustatyti, naudojantis standartinėmis simplekso algoritmo programomis. Naudodamiesi tomis programomis, galime nagrinėti optimalaus sprendinio jautrumą ir kitų optimizacinio modelio parametrų (pavyzdžiui, resursų panaudojimo normų bei kainų) pokyčiams, tačiau toks nagrinėjimas reikalauja jau daugkartinio tokių programų panaudojimo eksperimentų su optimizaciniu modeliu režime: keisdami resursų panaudojimo normas bei kainas, ir sprenddami kiekviename eksperimente naują optimizavimo uždavinį, gautą pakeitus modelio parametrus, galime stebėti, kaip keičiasi optimalaus sprendinio koordinatės bei optimali tikslo funkcijos reikšmė. **Toks nagrinėjimo metodas yra panašus į eksperimentavimą su imitaciniu modeliu dialogo režime ir turi tą trūkumą, kad reikalauja gana daug bandymų ir gana daug laiko. Laiko sąnaudas**

galima sumažinti, keičiant optimizacinio modelio parametrus ne atsitiktinai, o planingai, realizuojant taip vadinamą eksperimentatoriaus mokymosi algoritmą, kuriame eksperimentatorius naujų eksperimentų planavime naudoja jau atliktų eksperimentų rezultatais.

Žinoma, tiriant optimalaus sprendinio priklausomybę nuo optimizacinio modelio parametrų keitimosi, galima eiti ir kitu keliu: kurti specialią programinę įrangą, realizuojančią idėją, kurią taikant buvo gautos 127-143 lentelės. Tai leistų gauti analizines minėtųjų priklausomybių išraiškas, kuriomis naudojantis, galima būtų spręsti optimalaus sprendinio jautrumo bei stabilumo klausimus taip, kaip buvo parodyta, analizuojant 135-ąją ir 139-ąją÷142-ąją lenteles.

Naudojantis MAPLE ar MATHCAD (ar kito kokio nors paketo, **atliekančio kompiuteryje matematinės operacijas ne tik su skaičiais, bet ir su simboliais**) priemonėmis ir papildant paketą specialiai sudarytomis pagalbinėmis programomis, galima kompiuterizuoti gana universalų **algebrinį tiesinio optimizavimo uždavinio su „≤“ tipo apribojimais sprendimo ir gautojo sprendinio jautrumo modelio parametrų pokyčiams analizės algoritmą**. Jis galėtų būti taikomas ir tada, kai keičiamieji optimizacinio modelio parametrai simplekso algoritmo lentelėse vaizduojami raidėmis, kurių reikšmės nėra iš anksto apibrėžtos, o nustatomos, sprendžiant nelygybių sistemas, sudarytas naudojantis simplekso algoritmo lentelių turiniu (žiūr. lenteles 160, 160.1, 160.2, 160.2.1, 160.2.2, 160.2.2.1, 160.2.2.2; 161, 161.1, 161.2, 161.3, 161.2.1, 161.2.2, 161.2.3, 161.3.1, 161.3.2, 161.3.3, 161.3.2.1, 161.3.2.2, 161.3.2.3).

Kadangi, peržiūrint turimus programų paketus bei programines sistemas, tokios specialios programinės įrangos nepavyko rasti, tai ji buvo kuriama Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto studentų pastangomis.

1.15.2.6. Bendrasis tiesinis optimizacinis modelis ir jo taikymai. Bendrasis simplekso algoritmas

Mūsų išnagrinėtus du tiesinius optimizacinius modelius dar negalima laikyti **bendrųjų tiesinių optimizacinių modelių pavyzdžiais**, nes abiejuose konkrečiuose optimizaciniuose modeliuose, nagrinėtuose 1.15.2.3., 1.15.2.4. ir 1.15.2.5. skyreliuose,

turėjome tik „≤“ tipo apribojimus $\sum_{j=1}^m b_{ij}x_j \leq b_i$. Tuose apribojimuose $i=1, 2, \dots, n$ yra

naudojamų resursų rūšių identifikatoriai, n – naudojamų resursų rūšių skaičius, b_i – turimi tų resursų kiekiai, $j=1, 2, \dots, m$ – gaminamos produkcijos rūšių identifikatoriai, m – gaminamos produkcijos rūšių skaičius, b_{ij} – resurso i kiekiai, reikalingi produkcijos j vieneto pagaminimui, x_j – planuojami pagaminti produkcijos j kiekiai – optimizacinio modelio valdomieji kintamieji, vadinami dar ir modelio **pagrindiniais kintamaisiais**.

Taikydami standartinį simplekso algoritmą optimalaus sprendinio paieškai, mes nelygybes $\sum_{j=1}^m b_{ij}x_j \leq b_i$ pertvarkydavome į lygybes $\sum_{j=1}^m b_{ij}x_j + x_{m+i} = b_i$, įsivesdami

neneigiamus papildomus kintamuosius x_{m+i} , reiškiančius resursų i likučių kiekius.

Iš šių lygybių, išsireikšdami papildomus kintamuosius x_{m+i} per pagrindinius kintamuosius, mes labai paprastai gaudavome simplekso algoritmo taikymo pradžiai reikalingą leistiną **pradinį bazinį sprendinį** $x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^m b_{ij}x_j$, $i=1, 2, \dots, n$, kuriame

papildomieji kintamieji buvo pasirenkami kaip **baziniai** kintamieji, o pagrindiniai – kaip **laisvieji (nebaziniai)** kintamieji.

Priimdami, kad laisvųjų kintamųjų reikšmės yra lygios 0, mes iškart gaudavome **leistiną sprendinį**: $x_{m+i}=b_i$, kai $i=1, 2, \dots, n$, ir $x_j=0$, kai $j=1, 2, \dots, m$.

Tas sprendinys būdavo leistinas todėl, kad visi b_i pagal savo ekonominę prasmę (kaip resursų i turimi kiekiai) būdavo neneigiami dydžiai.

Turėdami pradinį leistiną sprendinį, galėdavome užpildyti simplekso algoritmo taikymui reikalingą pradinę lentelę, o po to, taikydami standartinį simplekso lentelių pertvarkymo algoritmą, galėdavome, kaskart sukeisdami vietomis po vieną bazinį ir po vieną laisvąjį kintamąjį, „keliauti“ nuo vienos simplekso lentelės prie kitos, t. y. nuo LSS vieno kampinio taško prie kaimyninio, kaskart mažindami tikslo funkcijos $F_1 = -P$, kur P – įmonės pelnas, reikšmę, iki tol, kol pasiekdavome tokį LSS kampinį tašką, kuriame funkcijos F_1 reikšmė būdavo mažiausia iš visų apribojimais leistinų reikšmių, o pelnas P – didžiausias.

Tačiau, sudarant optimizacinius modelius **bendruoju atveju**, apribojimai ne visada išreiškiami tik „ $\leq$ “ tipo nelygybėmis. Neretai pasitaiko ir „ $\geq$ “ tipo nelygybės. Tokias nelygybes, pavyzdžiui, gauname, kai matematiškai išreiškiame reikalavimus, jog gamybos apimtys bei įmonės pajamos turėtų būti ne mažesnės už tam tikrus duotus dydžius. Pertvarkant „ $\geq$ “ tipo nelygybes į lygybes, papildomus kintamuosius tenka įvedinėti **jau ne su pliuso, o su minuso ženklu**, nes nelygybė $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \geq b_i$, kai

papildomasis kintamasis x_{m+i} turi tenkinti sąlygą $x_{m+i} \geq 0$, gali būti pervesta tik į lygybę $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j - x_{m+i} = b_i$.

Išreikšdami papildomąjį kintamąjį x_{m+i} per pagrindinius kintamuosius x_j , t. y. pereidami prie lygybės $x_{m+i} = -b_i + \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j$ ir priimdami, kad visi laisvieji kintamieji x_j yra lygūs nuliui, mes tuo atveju, kai $b_i > 0$, jau negauname leistinos bazinio kintamojo reikšmės, nes x_{m+i} negali būti lygus neigiamam skaičiui ($-b_i$).

Tokiais atvejais **iškyla klausimas, kaip gauti pradinį leistiną sprendinį, reikalingą simplekso algoritmo taikymui**, nes metodas, taikytas atvejui, kai į optimizacinio modelio sudėtį įeidavo tik „ $\leq$ “ tipo nelygybės, pasirodo, jau nebetinka.

Pasirodo, kad šią problemą galima nesunkiai išspręsti, įvedant dar vieną simplekso metodo taikymo etapą – **leistino bazinio sprendinio radimo etapą**, kurį pavadinsime **simplekso bendrojo algoritmo pirmuoju etapu**. Mums iš 1.15.2.4.1. ir 1.15.2.5.1. skyrelių jau žinomą optimalaus sprendinio radimo etapą, turint pradinį leistiną sprendinį, pavadinsime simplekso **bendrojo algoritmo antruoju etapu**.

Kai tiesinis optimizacinis modelis turėjo savo sudėtyje tik „ $\leq$ “ tipo nelygybes, pirmasis etapas buvo nereikalingas, ir mes galėjome iškart pradėti nuo antrojo etapo. Bendruoju atveju dažniausiai būna reikalingi abu etapai: pradžioje pirmasis, o po to – ir antrasis, nors būna ir atvejų, kai pakanka kurio nors vieno etapo.

Pereisime prie bendrojo tiesinio optimizacinio uždavinio sprendimo algoritmo aprašymo.

Bendrajį tiesinį optimizacinį modelį sudaro tikslo funkcija ir apribojimai:

- 1) $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \geq b_i$, $i=1, 2, \dots, n_1$, 2) $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq b_i$, $i=n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$, 3) $x_j \geq 0$, $j=1, 2, \dots, m$.

Pervedant šį modelį į **standartinę tiesinio programavimo uždavinio modelio formą**, apribojimai (1) ir (2), išreikšti nelygybėmis, pervedami į lygybių formą, o tikslo funkcija, reikalui esant, pertvarkoma taip, kad taptų funkcija, kurią, sprendžiant optimizavimo uždavinį, reikėtų minimizuoti.

Pertvarkant nelygybes (2), t. y., nelygybes $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq b_i$, $i=n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$,

pakanka įsivesti papildomus kintamuosius $x_{m+i} \geq 0$, kurių skaičius lygus tokių nelygybių skaičiui n_2 , tačiau pertvarkant nelygybes (1), t. y. nelygybes $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \geq b_i$, $i=1, 2, \dots, n_1$,

to, kaip jau matėme, nebepakanka, ir tenka įsivesti ne tik n_1 papildomųjų kintamųjų, bet dar ir **pagalbinius (dirbtinius) kintamuosius (artificial variable) x_{m+n+i}** , $i=1, 2, \dots, n_1$, kur $n=n_1+n_2$ yra bendras (1) ir (2) tipo nelygybių, o kartu – ir papildomųjų kintamųjų x_{m+i} skaičius, n_1 – „ $\geq$ “ tipo nelygybių skaičius, o kartu – ir pagalbinių kintamųjų skaičius, n_2 – „ $\leq$ “ tipo nelygybių skaičius.

$$\text{Gauname lygybes: } \begin{cases} 1) \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j - x_{m+i} + x_{m+n+i} = b_i, i=1, 2, \dots, n_1, \\ 2) \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j + x_{m+i} = b_i, i=n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2. \end{cases}$$

Šiose lygybėse visas konstantas b_i galima laikyti teigiamais ar bent jau neneigiamais dydžiais, kadangi, jei nelygybėse, iš kurių buvo gautos šios lygybės, kai kurios konstantos b_i buvo neigiamos, tai tos nelygybės, prieš pervedant jas į lygybes, galėjo būti pertvarkytos į priešingo ženklo nelygybes, tuo pačiu metu pakeičiant konstantų b_i ženklus.

Dirbtiniai kintamieji x_{m+n+i} , kur $i=1, 2, \dots, n_1$, įsivedami tuo tikslu, kad pirmajame bendrojo algoritmo etape, **minimizuodami to etapo tikslo funkciją**

$W = \sum_{i=1}^{n_1} x_{m+n+i}$, lygią visų tų kintamųjų sumai, galėtume gauti leistiną bazinį sprendinį, kurį, kaip nesunku suvokti, charakterizuoja W reikšmė, lygi 0.

Tokio leistino bazinio sprendinio paieška pradedama nuo bazinio sprendinio, kuris dar nėra leistinas, sudarymo, priimant lygybėse (1) baziniais kintamaisiais dirbtinius kintamuosius x_{m+n+i} , o lygybėse (2) – papildomus kintamuosius x_{m+i} .

$$\text{Gauname lygybių sistemą: } \begin{cases} x_{m+n+i} = b_i - \left(-x_{m+i} + \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right), i=1, 2, \dots, n_1, \\ x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j, i=n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2. \end{cases}$$

Šią sistemą atitinkantis bazinis sprendinys ($x_j=0$, kai $j=1, 2, \dots, m$; $x_{m+i}=0$, kai $i=1, 2, \dots, n_1$, $x_{m+n+i}=b_i$, kai $i=n_1+1, n_1+2, \dots, n$; $x_{m+n+i}=b_i$, kai $i=1, 2, \dots, n_1$; $x_{m+n+i}=0$, kai $i=n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$) dar nepriklauso bendrojo tiesinio optimizacinio modelio leistinų sprendinių sričiai, nes jis netenkina nelygybių $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \geq b_i$, $i=1, 2, \dots, n_1$.

Kad patenkintume šias nelygybes, turime didinti pagrindinių kintamųjų x_j reikšmes, tuo pačiu metu mažindami dirbtinių kintamųjų x_{m+n+i} , kur $i=1, 2, \dots, n_1$, reikšmes.

Jei mums pavyktų visų tų dirbtinių kintamųjų reikšmes sumažinti iki 0, tuo pačiu padidinant x_j reikšmes iki reikšmių, kurias pažymėsime x_j^* , tai gautume, jog

$$b_i + x_{m+i} - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^* = 0, \text{ kai } i=1, 2, \dots, n_i, \text{ iš kur išplauktų, kad } \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^* = b_i + x_{m+i},$$

t. y., kad $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^* \geq b_i$, kai $i=1, 2, \dots, n_1$, o tai ir reikštų, kad gautasis sprendinys jau būtų leistinas.