

Tarkime, jog reikia sudaryti optimalų gamybos planą aprašytai įmonei, surandant vektoriaus $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ koordinačių x_j optimalias reikšmes.

Šio uždavinio optimizacinio modelio apribojimai sudaro tris grupes:

- 1) valdomųjų kintamųjų (gaminų kiekių) x_j neneigiamumo apribojimai: $x_j \geq 0$, kur $j=1,2,3,4$;
- 2) apribojimai, atsirandantys dėl gamybai reikalingų medžiagų atsargų ribotumo:

$$\sum_{j=1}^3 b_{ij}x_j + x_4 \sum_{j=1}^3 b_{ij}q_j \leq b_i, \text{ kur } i=1, 2, 3, 4;$$

- 3) apribojimai, atsirandantys dėl gamybinių pajėgumų ribotumo: $\sum_{j=1}^3 t_{kj}x_j + x_4 \sum_{j=1}^3 t_{kj}q_j \leq T_k$,

kur $k=1, 2, 3, 4, 5$.

Jei gamybinio plano optimalumo rodikliu pasirinktume pelną P , tai gautume tikslo funkciją

$$P = \sum_{j=1}^3 x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^4 a_i b_{ij} - \sum_{k=1}^5 d_{kj} t_{kj} \right) + x_4 \left[c_4 - r - \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^4 a_i b_{ij} q_j - \sum_{k=1}^5 d_{kj} t_{kj} q_j \right) \right] \rightarrow \max.$$

Įstatę modelio parametrų skaitmenines reikšmes, gausime tokį konkretų optimizacinį modelį:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0;$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 16x_4 \leq 1000;$$

$$4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 26x_4 \leq 2000;$$

$$+ 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 800;$$

$$x_1 + \quad + 2x_3 + 5x_4 \leq 600;$$

$$0,5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5,5x_4 \leq 700;$$

$$3x_1 + \quad + 1,5x_3 + 10,5x_4 \leq 900;$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 13x_4 \leq 1500;$$

$$x_1 + 4x_2 + \quad + 11x_4 \leq 1000;$$

$$1,5x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 + 9x_4 \leq 800;$$

$$P = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 30x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4}.$$

Įsivedę neneigiamus papildomus kintamuosius x_5, x_6, x_7, x_8 , vaizduojančius medžiagų likučius, ir $x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}$, vaizduojančius įrengimų k nenaudotą darbo laiką, optimizacinį modelį galime transformuoti į kanoninę formą ir užrašyti simplekso lentelėje (žiūr. 171-ją lentelę, kur $P_1 = -P$), o po to – ir išspręsti optimizavimo uždavinį (žiūr. 171-173 lenteles):

171. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	1000	3	2	3	16
x_6	2000	4	5	4	26
x_7	800	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	700	0,5	1	2	5,5
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5
x_{11}	1500	2	2	3	13
x_{12}	1000	1	4	0	11
x_{13}	800	1,5	2	0,5	9
P_1	0	3	5	4	30

172. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_5
x_4	62,5	0,1875	0,125	0,1875	0,0625
x_6	375	-0,875	1,75	-0,875	-1,625
x_7	362,5	-1,3125	1,125	1,6875	-0,4375
x_8	287,5	0,0625	-0,625	1,0625	-0,3125
x_9	356,25	-0,53125	0,3125	0,96875	-0,34375
x_{10}	243,75	1,03125	-1,3125	-0,46875	-0,65625
x_{11}	687,5	-0,4375	0,375	0,5625	-0,8125
x_{12}	312,5	-1,0625	2,625	-2,0625	-0,6875
x_{13}	237,5	-0,1875	0,875	-1,1875	-0,5625
P_1	-1875	-2,625	1,25	-1,625	-1,875

173-oji lentelė vaizduoja optimalų sprendinį, nes visi tikslo funkcijos koeficientai prie laisvųjų kintamųjų x_1, x_{12}, x_3 ir x_5 yra neigiami.

Optimalus planas yra toks: 1) negaminti pirmojo tipo detalių pardavimui, o tik sudėtingų gaminių gamybai; 2) taip pat negaminti trečiojo tipo detalių pardavimui, o gaminti jų tik tiek, kiek reikia sudėtingų gaminių gamybai; 3) gaminti $119 \frac{1}{21}$ antrojo tipo detalių pardavimui; 4) gaminti $47 \frac{13}{21}$ vienetų sudėtingų gaminių. Pelnas P , įvykdžius tokį planą, bus lygus $2023 \frac{17}{21}$ vienetų.

Žinoma, toks optimalus planas nėra realus, nes pagamintų ir skirtų pardavimui detalių bei gaminių skaičiai turi būti sveiki. Viena iš realių planų, artimų optimaliam planui (o kartais ir sutampančių su realiu optimaliu planu), galima gauti, suapvalinus optimalaus sprendinio koordinačių reikšmes, t. y., imant tik jų sveikąsias dalis ir atmetant trupmenines, t. y. suapvalinant nesveikaskaitinį sprendinį taip, kad gaunamas sveikaskaitinis sprendinys liktų leistinų sprendinių srityje.

173. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{12}	x_3	x_5
x_4	$\frac{1000}{21} = 47\frac{13}{21}$	$\frac{5}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{21}$
x_6	$\frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}$
x_7	$\frac{1600}{7} = 228\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_8	$\frac{7600}{21} = 361\frac{19}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{21}$
x_9	$\frac{6700}{21} = 319\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$-\frac{5}{42}$	$\frac{17}{14}$	$-\frac{11}{42}$
x_{10}	400	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1
x_{11}	$\frac{4500}{7} = 642\frac{6}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$
x_2	$\frac{2500}{21} = 119\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$\frac{8}{21}$	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{11}{42}$
x_{13}	$\frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
P_1	$-\frac{42500}{21} = -2023\frac{17}{21}$	$-\frac{89}{42}$	$-\frac{10}{21}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{65}{42}$

Mūsų nagrinėjamo atveju gautume sprendinį:
 $x_1=0$; $x_2=119$; $x_3=0$; $x_4=47$; $P=119\cdot 5+47\cdot 30=2005$.

Šį planą galima šiek tiek pagerinti, panaudojus resursų likučius papildomų detalių gamybai. Pavyzdžiui, galimi tokie variantai:

α) $x_1=3$; $x_2=119$; $x_3=0$; $x_4=47$; $P=2014$;

β) $x_1=0$; $x_2=120$; $x_3=0$; $x_4=47$; $P=2016$;

γ) $x_1=0$; $x_2=119$; $x_3=3$; $x_4=47$; $P=2017$;

δ) $x_1=0$; $x_2=120$; $x_3=2$; $x_4=47$; $P=2018$.

Taip gerinant gamybinį planą, kartais galima gauti ir optimalų sveikaskaitinį sprendinį, tačiau garantuoti, kad tai – tikrai optimalus sprendinys, negalima, nes egzistuoja atvejai, kada optimalus sveikaskaitinis sprendinys nepriklauso optimalaus nesveikaskaitinio sprendinio artimiausiai aplinkai. Todėl, norint gauti garantuotai optimalų sprendinį, tenka taikyti specialius metodus.

1.15.2.5.2. Optimalaus sveikaskaitinio sprendinio radimo algoritmas ir jo taikymo pavyzdys

Norėdami gauti optimalų sveikaskaitinį tiesinio programavimo uždavinio sprendinį, kurio optimalumas būtų garantuotas (įrodytas), mes galime pasinaudoti specialiais metodais, pavyzdžiui, **šakų ir ribų metodu, pasitelkdami jam į pagalbą jau mums žinomą simplekso algoritmą**. Trumpai aprašysime šakų ir ribų metodo esmę, iliustruodami tą aprašymą konkrečiu nagrinėjamo uždavinio sprendimo pavyzdžiu.

1. Pradžioje sprendžiame duotąjį optimizavimo uždavinį, atmesdami optimalaus sprendinio sveikaskaitiškumo sąlygą (apribojimus). Pavadinsime šį uždavinį Nr.0. Tokį uždavinį spręsti mes jau mokame, nes tai – tiesinis optimizavimo uždavinys.

Sprendžiant uždavinį Nr.0, galimi du atvejai.

Pirmas atvejis – uždavinio Nr.0 optimalus sprendinys yra sveikaskaitinis. Su tokiu atveju mes jau buvome susidūrę, sprenddami optimizavimo uždavinį 1.15.2.3.2. skyrelyje, kur gavome $x_1^{(opt)}=5$, $x_2^{(opt)}=3$. Tokiais atvejais uždavinio Nr.0 optimalus sprendinys yra kartu ir sveikaskaitinio optimizavimo uždavinio sprendinys.

Antras atvejis – uždavinio Nr.0 optimalus sprendinys nėra sveikaskaitinis. Su tokiu atveju mes susidūrėme šiame skyrelyje, kai, sprenddami uždavinį Nr.0 simplekso metodu, gavome: $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=119\frac{1}{21}$, $x_3^{(opt)}=0$, $x_4^{(opt)}=47\frac{13}{21}$, $P^{(opt)}=2023\frac{17}{21}$.

Šiuo atveju optimizavimo uždavinio leistinų sprendinių sritį (LSS) kurios nors nesveikaskaitinės optimalaus sprendinio koordinatės (pavyzdžiui, $x_4=47\frac{13}{21}$) atžvilgiu suskaidome į tris sritis, įvesdami papildomus tos koordinatės apribojimus (pavyzdžiui, 1) $x_4\leq 47$; 2) $47<x_4<48$; 3) $x_4\geq 48$), kurie gaunami, suapvalinant nesveikaskaitinę minėtosios koordinatės reikšmę iki artimiausių sveikųjų skaičių: mažesnio ir didesnio už optimalią nesveikaskaitinę reikšmę.

Tokiu būdu uždavinį Nr.0 dekomponuojame į tris uždavinius, kuriuos gauname iš uždavinio Nr.0, pridėdami prie jo apribojimų po vieną papildomą pasirinktosios koordinatės apribojimą.

Savaime suprantama kad, pridėję apribojimą $47<x_4<48$, mes gausime tokį optimizavimo uždavinį, kurio optimalus sprendinys jokių būdu negali būti sveikaskaitinis, nes koordinatė x_4 negalės būti sveikaskaitinė. Todėl šioje uždavinio Nr.0 LSS srityje ieškoti sveikaskaitinio optimalaus sprendinio nėra prasmės, ir belieka tik dvi sritys: 1) $x_4\leq 47$ ir 2) $x_4\geq 48$. Todėl iš uždavinio Nr.0, pridėdami po vieną iš šių papildomų apribojimų, **gauname du naujus uždavinius – sveikaskaitinio optimalaus sprendinio paieškos algoritmo šakas**. Pavadinsime uždavinį, gautą iš uždavinio Nr.0, pridėdant papildomą apribojimą $x_4\geq 48$, uždaviniu Nr.1, o uždavinį, gautą pridėdant papildomą apribojimą $x_4\leq 47$, uždaviniu Nr.2.

Turėdami uždavinio Nr.0 optimalų sprendinį, galime nustatyti optimalaus sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos optimalios reikšmės **pradinę žemutinę ribą**. Ją mes jau anksčiau esame apskaičiavę ir gavę: $P=0.3+119.5+0.4+47.30=2005$. Nagrinėjamo uždavinio optimalaus sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmė negali būti mažesnė už 2005, o gali būti tik didesnė arba lygi jai. Tai galima žemutinė tos funkcijos optimalios reikšmės riba. Pažymėsime ją $P^{(0)}$. Mūsų nagrinėjamo pavyzdžio atveju mes jau žinome, kad tą ribą galima žymiai sugriežtinti, nes jau esame radę sveikaskaitinį sprendinį, kai $P=2018$, ir galėjome priimti $P^{(0)}=2018$, kas leistų sutrumpinti optimalaus sveikaskaitinio sprendinio paieškos algoritmą, atmetant neperspektyviųjų šakų nagrinėjimą. Tačiau, mes čia to nedarysime, kadangi mes čia ne tik sprendžiame duotąjį uždavinį, bet ir dėstome šakų ir ribų metodą. Todėl paliksime $P^{(0)}=2005$.

2. Sprendžiame uždavinį Nr.1, kurį gavome iš uždavinio Nr.0, įvesdami papildomą apribojimą $x_4 \geq 48$. Šią nelygybę transformuojame į lygybę, įvesdami papildomą kintamąjį $x_{14} \geq 0$, vaizduojantį sudėtingų gaminių kiekio x_4 prieauglį skaičiaus 48 atžvilgiu: $x_4 = 48 + x_{14}$.

Jei laisvaisiais kintamaisiais, kaip ir sprendžiant uždavinį Nr.0, laikytume kintamuosius x_1, x_2, x_3, x_4 , o naująjį kintamąjį x_{14} – vienu iš bazinių kintamųjų, tai gautume, jog $x_{14} = -48 + x_4 = -48 - (-x_4)$. Esant pradinėms laisvųjų kintamųjų reikšmėms $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$, bazinio kintamojo x_{14} reikšmė taptų neleistina, nes tuomet gautume, jog $x_{14} = -48 < 0$, t. y., gautume pradinį planą, nepriklausantį leistinių planų aibei (arba, kitaip tariant, sprendinį, nepriklausantį LSS). Tai reiškia, kad, norėdami gauti leistiną pradinį planą, turėtume pakeisti kintamųjų bazę – pasirinkti kitus laisvuosius ir bazinius kintamuosius. Prisimindami, kad tokius pakeitimus galime daryti, naudodamiesi simplekso lentelių elementų apskaičiavimo metodu, mes galime **panaudoti simplekso algoritmą ne tik optimalaus sprendinio paieškai, bet ir neleistino plano pertvarkymui į leistiną (arba įrodymui, kad nagrinėjamas uždavinys leistinių sprendinių neturi)**.

Sudarome simplekso lentelę, vaizduojančią pradinį (tačiau dar neleistiną) planą (žiūr. 174-ją lentelę).

174. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	1000	3	2	3	16
x_6	2000	4	5	4	26
x_7	800	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	700	0,5	1	2	5,5
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5
x_{11}	1500	2	2	3	13
x_{12}	1000	1	4	0	11
x_{13}	800	1,5	2	0,5	9
x_{14}	-48	0	0	0	-1
P_1	0	3	5	4	30

175. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_{14}
x_5	232	3	2	3	16
x_6	752	4	5	4	26
x_7	764	0	2	3	7
x_8	360	1	0	2	5
x_9	436	0,5	1	2	5,5
x_{10}	396	3	0	1,5	10,5
x_{11}	876	2	2	3	13
x_{12}	472	1	4	0	11
x_{13}	368	1,5	2	0,5	9
x_4	48	0	0	0	-1
P_1	-1440	3	5	4	30

176. lentelė

\	L.n.	x_1	x_5	x_3	x_{14}
x_2	116	1,5	0,5	1,5	8
x_6	172	-3,5	-2,5	-3,5	-14
x_7	232	-3	-1	0	-9
x_8	360	1	0	2	5
x_9	230	-1	-0,5	0,5	-2,5
x_{10}	396	3	0	1,5	10,5
x_{11}	644	-1	-1	0	-3
x_{12}	8	-5	-2	-6	-21
x_{13}	136	-15	-1	-2,5	-7
x_4	48	0	0	0	-1
P_1	-2020	-4,5	-2,5	-3,5	-10

Norėdami iš neleistino plano, kurį vaizduoja 174-oji lentelė, gauti leistiną, nagrinėjame toje lentelėje laisvųjų narių stulpelio L.n. **neigiamus elementus** ir ieškome jų eilutėse **neigiamų koeficientų** prie kokių nors laisvųjų kintamųjų. Jei tokių koeficientų neatsirastų, tai reikštų, kad **neleistiną planą transformuoti į leistiną neįmanoma**, t. y., kad uždavinys, esant duotiems apribojimams, neturi sprendinių. Mūsų nagrinėjamo atveju taip nėra, nes 174-sios lentelės neigiamojo laisvojo nario (-48) eilutėje yra stulpelis x_4 , kurio koeficientas yra neigiamas. Kadangi 174-ojoje lentelėje kitų neigiamų elementų nėra, tai galima tik vienintelę transformaciją, keičianti kintamuosius x_{14} ir x_4 vietomis. Gauname 175-ąją lentelę, kuri atitinka jau leistiną sprendinį, nes laisvųjų narių stulpelyje neigiamų elementų jau nebėra. Jei jų dar būtų, tektų tęsti kintamųjų pakeitimo procedūrą tol, kol laisvųjų narių stulpelyje neigiamų elementų nebėliktų (arba kol įsitikintume, kad uždavinys leistinių sprendinių neturi). Jei 174-osios lentelės laisvųjų narių stulpelyje būtų buvę keletas neigiamų elementų, tai, ieškant leistino plano, būtų buvę tikslinga pasirinkti vedančiąją eilutę tą eilutę, kurioje neigiamojo laisvojo nario ir neigiamojo koeficiento (vedančiojo elemento) **santykis yra didžiausias** (transformuodami leistiną planą į geresnį leistiną planą, elgiamės atvirkščiai: vedančiuoju elementu vedančiajame stulpelyje renkamės tą, kuriam laisvojo nario ir teigiamo koeficiento **santykis yra mažiausias**). Palieku skaitytojui savarankiškai išsiaiškinti, kodėl atsiranda šis skirtumas ir kodėl dabar tikslinga pasirinkti didžiausią santykį. Kitas leistino plano gavimo iš neleistino būdas bus aprašytas 1.15.2.6. skyrelyje.

Turėdami leistiną planą, kurį vaizduoja 175-oji lentelė, jam taikome jau mums žinomą optimizavimo metodą – simplekso metodą – ir gauname 176-ąją lentelę, vaizduojančią jau optimalų

planą, nes tikslo funkcijos P_1 eilutės visi koeficientai – neigiami skaičiai. Šis optimalus planas ($x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=116$, $x_3^{(opt)}=0$, $x_4^{(opt)}=48$) pasirodo besas sveikaskaitinis, turintis tikslo funkcijos reikšmę $P^{(opt)}=2020$. Kadangi ši reikšmė yra geresnė negu $P^{(0)}=2005$, tai keičiame pradinę žemutinės ribos reikšmę į naują $P^{(1)}=2020$. Kadangi uždavinio Nr.1 optimalus sprendinys yra sveikaskaitinis, tai jo skaidyti į naujus uždavinius jau nebereikia. Tai reiškia, jog šakos Nr.1 nagrinėjimas jau baigtas ir galima pereiti prie šakos Nr.2. Šakos Nr.1 nagrinėjimo užbaigimas 347 pav. pažymėtas dvigubu apskritimu.

3. Sprendžiame uždavinį Nr.2, kurį gauname, pridėję prie uždavinio Nr.0 papildomą apribojimą $x_4 \leq 47$. Gauname, jog $x_4 + x_{14} = 47$, kur $x_{14} = 47 - x_4 = 47 - (x_4) \geq 0$.

Pradinis planas, kuriame x_1, x_2, x_3, x_4 – laisvieji kintamieji, šiuo atveju yra leistinas. Jį vaizduoja 177-oji lentelė. Naudodamiesi simplekso algoritmu, randame uždavinio Nr.2 optimalų sprendinį $x_1=0$; $x_2=120,75$; $x_3=2\frac{1}{6}$; $x_4=47$; $P=2022\frac{5}{12}$ (žiūr. 177-180 lenteles).

177. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	1000	3	2	3	16
x_6	2000	4	5	4	26
x_7	800	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	700	0,5	1	2	5,5
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5
x_{11}	1500	2	2	3	13
x_{12}	1000	1	4	0	11
x_{13}	800	1,5	2	0,5	9
x_{14}	47	0	0	0	1
P_1	0	3	5	4	30

178. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_{14}
x_4	248	3	2	3	-16
x_6	778	4	5	4	-26
x_7	471	0	2	3	-7
x_8	365	1	0	2	-5
x_9	441,5	0,5	1	2	-5,5
x_{10}	406,5	3	0	1,5	-10,5
x_{11}	889	2	2	3	-13
x_{12}	483	1	4	0	-11
x_{13}	377	1,5	2	0,5	-9
x_4	47	0	0	0	1
P_1	-1410	3	5	4	-30

179. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{12}	x_3	x_{14}
x_5	6,5	2,5	-0,5	3	-10,5
x_6	174,25	2,75	-1,25	4	-12,25
x_7	229,5	-0,5	-0,5	3	-1,5
x_8	365	1	0	2	-5
x_9	320,75	0,25	-0,25	2	-2,75
x_{10}	406,5	3	0	1,5	-10,5
x_{11}	647,5	1,5	-0,5	3	-7,5
x_2	120,75	0,25	0,25	0	-2,75
x_{13}	135,5	1	-0,5	0,5	-3,5
x_4	47	0	0	0	1
P_1	-2013,75	1,75	-1,25	4	-16,25

180. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{12}	x_5	x_{14}
x_3	$2\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	-3,5
x_6	$165\frac{7}{12}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{4}{3}$	1,75
x_7	223	-3	0	-1	9
x_8	$360\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
x_9	$316\frac{5}{12}$	$-\frac{17}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	4,25
x_{10}	403,25	1,75	0,25	-0,5	-5,25
x_{11}	641	-1	0	-1	3
x_2	120,75	0,25	0,25	0	-2,75
x_{13}	$134\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{6}$	-1,75
x_4	47	0	0	0	1
P_1	$-2022\frac{5}{12}$	$-\frac{19}{12}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{4}{3}$	-2,25

Kadangi uždavinio Nr.2 optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmė $P=2022\frac{5}{12}$ yra geresnė negu $P^{(1)}=2020$, tai uždavinio Nr.2 leistinų sprendinių srityje, galbūt, dar gali būti sveikaskaitinių sprendinių, turinčių tikslo funkcijos reikšmę, geresnę negu $P^{(1)}$. Todėl šaką Nr.2 dar tikslinga nagrinėti toliau, ieškant joje optimalaus sveikaskaitinio sprendinio, ir todėl uždavinį Nr.2 skaidome į du naujus uždavinius (šakas), įvesdami papildomus apribojimus nesveikaskaitinės koordinatės $x_2=120,75$ atžvilgiu: 1) $x_2 \leq 120$ ir 2) $x_2 \geq 121$.

Uždavinį, kurį gausime, pridėję prie uždavinio Nr.2 apribojimų papildomą apribojimą $x_2 \leq 120$, pavadinsime uždaviniu Nr.3, o kitą uždavinį, kurį gausime, pridėję apribojimą $x_2 \geq 121$, – uždaviniu Nr.4.

4. Sprendžiame uždavinį Nr.3, įsivesdami papildomą kintamąjį $x_{15} = \Delta x_2 = 120 - x_2$. Gauname 181-184 simplekso lenteles.

181. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	1000	3	2	3	16
x ₆	2000	4	5	4	26
x ₇	800	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	700	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
P ₁	0	3	5	4	30

182. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁₄
x ₅	248	3	2	3	-16
x ₆	778	4	5	4	-26
x ₇	471	0	2	3	-7
x ₈	365	1	0	2	-5
x ₉	441,5	0,5	1	2	-5,5
x ₁₀	406,5	3	0	1,5	-10,5
x ₁₁	889	2	2	3	-13
x ₁₂	483	1	4	0	-11
x ₁₃	377	1,5	2	0,5	-9
x ₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
P ₁	-1410	3	5	4	-30

183. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₁₄
x ₅	8	3	-2	3	-16
x ₆	178	4	-5	4	-26
x ₇	231	0	-2	3	-7
x ₈	365	1	0	2	-5
x ₉	321,5	0,5	-1	2	-5,5
x ₁₀	406,5	3	0	1,5	-10,5
x ₁₁	649	2	-2	3	-13
x ₁₂	3	1	-4	0	-11
x ₁₃	137	1,5	-2	0,5	-9
x ₄	47	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
P ₁	-2010	3	-5	4	-30

184. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₅	x ₁₄
x ₃	$2\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
x ₆	$167\frac{1}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$
x ₇	223	-3	0	-1	9
x ₈	$359\frac{2}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{3}$
x ₉	$316\frac{1}{6}$	-1,5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{6}$
x ₁₀	402,5	1,5	1	-0,5	-2,5
x ₁₁	641	-1	0	-1	3
x ₁₂	3	1	-4	0	-11
x ₁₃	$135\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-1
x ₄	47	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
P ₁	$-2020\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{3}$

Uždavinio Nr.3 optimalaus sprendinio tikslo funkcijos optimali reikšmė $P=2020\frac{2}{3}$ yra dar šiek tiek didesnė už $P^{(1)}=2020$, todėl uždavinį Nr.3 dar skaidome į dvi naujas šakas – į uždavinius Nr.5 ir Nr.6, kuriuos gauname iš uždavinio Nr.3, pridėję prie jo apribojimus $x_3 \leq 2$ ir $x_3 \geq 3$ vienintelės likusios nesveikaskaitinės koordinatės x_3 atžvilgiu. Tikėtis, kad gausime optimalų sveikaskaitinį sprendinį, geresnį už uždavinio Nr.1 sprendinį, žinant, kad lyginamieji pelnai $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=4$, $p_4=30$ yra sveiki skaičiai, jau nėra ko, tačiau gali būti, kad uždavinių Nr.5 ir Nr.6 sveikaskaitiniai sprendiniai bus ne blogesni už uždavinio Nr.1 sprendinį.

5. Sprendžiame uždavinį Nr.5, gautą iš uždavinio Nr.3, pridėjus prie jo apribojimų papildomą apribojimą $x_3 \leq 2$ ir įsivedus papildomą kintamąjį $x_{16}=\Delta x_3=2-x_3$. Gauname 185-189 lenteles.

185. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	1000	3	2	3	16
x ₆	2000	4	5	4	26
x ₇	800	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	700	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
x ₁₆	2	0	0	1	0
P ₁	0	3	5	4	30

186. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁₄
x ₅	248	3	2	3	-16
x ₆	778	4	5	4	-26
x ₇	471	0	2	3	-7
x ₈	365	1	0	2	-5
x ₉	441,5	0,5	1	2	-5,5
x ₁₀	406,5	3	0	1,5	-10,5
x ₁₁	889	2	2	3	-13
x ₁₂	483	1	4	0	-11
x ₁₃	377	1,5	2	0,5	-9
x ₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
x ₁₆	2	0	0	1	0
P ₁	-1410	3	5	4	-30

187. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₁₄
x ₅	8	3	-2	3	-16
x ₆	178	4	-5	4	-26
x ₇	231	0	-2	3	-7
x ₈	365	1	0	2	-5
x ₉	321,5	0,5	-1	2	-5,5
x ₁₀	406,5	3	0	1,5	-10,5
x ₁₁	649	2	-2	3	-13
x ₁₂	3	1	-4	0	-11
x ₁₃	137	1,5	-2	0,5	-9
x ₄	47	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
x ₁₆	2	0	0	1	0
P ₁	-2010	3	-5	4	-30

188. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₁₆	x ₁₄
x ₅	2	3	-2	-3	-16
x ₆	170	4	-5	-4	-26
x ₇	225	0	-2	-3	-7
x ₈	361	1	0	-2	-5
x ₉	317,5	0,5	-1	-2	-5,5
x ₁₀	403,5	3	0	-1,5	-10,5
x ₁₁	643	2	-2	-3	-13
x ₁₂	3	1	-4	0	-11
x ₁₃	136	1,5	-2	-0,5	-9
x ₄	47	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
x ₃	2	0	0	1	0
P ₁	-2018	3	-5	-4	-30

189. lentelė

\	L.n.	x ₅	x ₁₅	x ₅	x ₁₄
x ₁	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{16}{3}$
x ₆	$167\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$
x ₇	225	0	2	-3	-7
x ₈	$360\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
x ₉	$317\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	-1,5	$-\frac{17}{6}$
x ₁₀	401,5	-1	2	1,5	5,5
x ₁₁	$641\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$
x ₁₂	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	1	$-\frac{17}{3}$
x ₁₃	135	-0,5	-1	1	-1
x ₄	47	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
x ₃	2	0	0	1	0
P ₁	-2020	-1	-3	-1	-14

Uždavinio Nr.5 optimalaus sprendinio $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=120$, $x_3=2$, $x_4=47$ tikslo funkcijos optimali reikšmė yra $P=2020$. Ji sutampa su $P^{(1)}=2020$, todėl skaidyti uždavinį Nr.5 vienintelės nesveikaskaitinės koordinatės $x_1=\frac{2}{3}$ atžvilgiu dar į du uždavinius, ieškant optimalaus sveikaskaitinio sprendinio, jau nebėra prasmės, nes tokio sveikaskaitinio optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmė gali būti tik mažesnė už $P^{(1)}$. Todėl šakos Nr.5 toliau jau nebeagrinėsime ir pereisime prie uždavinio Nr.4, kuris (kaip ir uždavinys Nr.6) dar liko neišspręstas.

6. Sprendžiame uždavinį Nr.4, kurį gavome iš uždavinio Nr.2, pridėję papildomą sąlygą $x_2 \geq 121$.

Įvedę papildomą valdomą kintamąjį $x_{15}=x_2-121 \geq 0$ ir pasirinkdami laisvaisiais kintamaisiais kintamuosius x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , pradžioje gauname sprendinį, kuris nėra leistinas. Tą pradinį sprendinį vaizduoja 190-oji lentelė. Iš jos, naudodamiesi metodu, aprašytu, sprendžiant uždavinį Nr.1, gauname 191-ją lentelę, vaizduojančią jau leistiną sprendinį. Po to, naudodamiesi simplekso algoritmu, randame optimalų sprendinį $x_1=0$, $x_2=121$, $x_3=2\frac{16}{33}$, $x_4=46\frac{10}{11}$, $P=2022\frac{7}{33}$ (žiūr. 190-193 lenteles).

Kadangi uždavinio Nr.4 sprendinys nėra sveikaskaitinis ir jo tikslo funkcijos reikšmė $P=2022\frac{7}{33}$ yra geresnė už $P^{(1)}=2020$, tai šio uždavinio LSS dar gali turėti sveikaskaitinių sprendinių, geresnių už uždavinio Nr.1 sveikaskaitinį sprendinį. Todėl šį uždavinį dar tenka skaidyti į dvi šakas, pavyzdžiui, į uždavinį Nr.7, kurį gautume, pridėję prie uždavinio Nr.4 apribojimų papildomą apribojimą $x_4 \geq 47$, ir į uždavinį Nr.8, kurį gautume pridėję prie uždavinio Nr.4 apribojimų papildomą apribojimą $x_4 \leq 46$.

190. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	1000	3	2	3	16
x ₆	2000	4	5	4	26
x ₇	800	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	700	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	-121	0	-1	0	0
P ₁	0	3	5	4	30

191. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₄
x ₅	758	3	2	3	16
x ₆	1395	4	5	4	26
x ₇	558	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	579	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1258	2	2	3	13
x ₁₂	516	1	4	0	11
x ₁₃	558	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
P ₁	-605	3	5	4	30

192. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₁₂
x ₅	2	3	-2	-3	-16
x ₆	170	4	-5	-4	-26
x ₇	225	0	-2	-3	-7
x ₈	361	1	0	-2	-5
x ₉	317,5	0,5	-1	-2	-5,5
x ₁₀	403,5	3	0	-1,5	-10,5
x ₁₁	643	2	-2	-3	-13
x ₄	3	1	-4	0	-11
x ₁₃	136	1,5	-2	-0,5	-9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
P ₁	-2018	3	-5	-4	-30

193. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₅	x ₁₂
x ₃	$2\frac{16}{33}$	$\frac{17}{33}$	$-\frac{14}{11}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{33}$
x ₆	$165\frac{14}{33}$	$-\frac{14}{33}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{33}$
x ₇	$222\frac{2}{11}$	$-\frac{29}{11}$	$\frac{36}{11}$	-1	$\frac{9}{11}$
x ₈	$360\frac{16}{33}$	$-\frac{16}{33}$	$\frac{8}{11}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{33}$
x ₉	$316\frac{1}{33}$	$-\frac{34}{33}$	$\frac{17}{11}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{66}$
x ₁₀	$404\frac{7}{33}$	$-\frac{14}{11}$	$-\frac{21}{11}$	-0,5	$-\frac{5}{22}$
x ₁₁	$640\frac{8}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{3}{11}$	-1	$\frac{3}{11}$
x ₄	$46\frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{1}{11}$
x ₁₃	$134\frac{19}{33}$	$\frac{14}{33}$	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{33}$
x ₁₄	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{4}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$
x ₂	121	0	-1	0	0
P ₁	$-2022\frac{7}{33}$	$-\frac{59}{33}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{33}$

7. Iš sprendinių uždavinių sąrašo, kurį sudaro uždaviniai Nr.6, Nr.7 ir Nr.8, pasirenkame uždavinį Nr.6 ir sprendžiame jį.

Uždavinio Nr.6 apribojimai buvo gauti iš uždavinio Nr.3 apribojimų, pridėjus prie jų papildomą apribojimą $x_3 \geq 3$, t. y., įvedus papildomą kintamąjį $x_{16} \geq 0$, kur $x_{16} = -3 + x_3 = -3 - (-x_3)$.

Jei laisvieji kintamieji pradžioje yra kintamieji x_1, x_2, x_3, x_4 , tai mes tuomet gauname pradinį sprendinį, nepriklausantį leistinų sprendinių aibei (žiūr. 191-ąją lentelę). Sukeitę vietomis kintamuosius x_{16} ir x_3 , gauname leistiną sprendinį – 195-ąją lentelę, kurią toliau transformuodami gauname optimalų sprendinį (žiūr. 195-198 lenteles).

194. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	1000	3	2	3	16
x ₆	2000	4	5	4	26
x ₇	800	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	700	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
x ₁₆	-3	0	0	-1	0
P ₁	0	3	5	4	30

195. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₁₆	x ₄
x ₅	991	3	2	3	16
x ₆	1988	4	5	4	26
x ₇	791	0	2	3	7
x ₈	594	1	0	2	5
x ₉	694	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	895,5	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	491	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	798,5	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
x ₃	3	0	0	-1	0
P ₁	-12	3	5	4	30

196. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₁₆	x ₁₄
x ₅	239	3	2	3	-16
x ₆	766	4	5	4	-26
x ₇	462	0	2	3	-7
x ₈	359	1	0	2	-5
x ₉	435,5	0,5	1	2	-5,5
x ₁₀	402	3	0	1,5	-10,5
x ₁₁	880	2	2	3	-13
x ₁₂	483	1	4	0	-11
x ₁₃	375,5	1,5	2	0,5	-9
x ₄	47	0	0	0	1
x ₁₅	120	0	1	0	0
x ₃	3	0	0	-1	0
P ₁	-1422	3	5	4	-30

Kadangi optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmė $P = 2020\frac{1}{8}$ yra truputį didesnė už $P^{(1)} = 2020$, tai uždavinio Nr.6 LSS, galbūt, dar gali būti sveikaskaitinių sprendinių, neblogesnių negu uždavinio Nr.1 sprendinys. Todėl uždavinį Nr.6 suskaidome į du uždavinius: uždavinį Nr.9, kurį gauname, pridėdami prie uždavinio Nr.6 apribojimų papildomą apribojimą $x_4 \geq 47$, ir uždavinį Nr.10, kurį gauname pridėdami prie uždavinio Nr.6 apribojimų papildomą apribojimą $x_4 \leq 46$.

8. Iš turimos dar neišspręstų uždavinių aibės, kurią sudaro uždaviniai Nr.7, Nr.8, Nr.9 ir Nr.10, sprendžiame uždavinį Nr.7, kurį gauname, pridėję prie uždavinio Nr.4 apribojimų papildomą apribojimą $x_4 \geq 47$.

197. lentelė

\	L.n.	x_1	x_5	x_{16}	x_{14}
x_5	119,5	1,5	0,5	1,5	-8
x_6	168,5	-3,5	-2,5	-3,5	14
x_7	223	-3	-1	0	9
x_8	359	1	0	2	-5
x_9	316	-1	-0,5	0,5	2,5
x_{10}	402	3	0	1,5	-10,5
x_{11}	641	-1	-1	0	3
x_4	5	-5	-2	-6	21
x_{13}	136,5	-1,5	-1	-2,5	7
x_4	47	0	0	0	1
x_{15}	0,5	-1,5	-0,5	-1,5	8
x_3	3	0	0	-1	0
P_1	-2019,5	-4,5	-2,5	-3,5	10

198. lentelė

\	L.n.	x_1	x_5	x_{16}	x_{15}
x_2	120	0	0	0	1
x_6	$167\frac{5}{8}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{13}{8}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{4}$
x_7	$222\frac{7}{16}$	$-\frac{21}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{27}{16}$	$-\frac{9}{8}$
x_8	$359\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{5}{8}$
x_9	$315\frac{27}{32}$	$-\frac{27}{32}$	$-\frac{11}{32}$	$\frac{31}{32}$	$-\frac{5}{16}$
x_{10}	$402\frac{21}{32}$	$-\frac{63}{32}$	$-\frac{21}{32}$	$-\frac{15}{32}$	$\frac{21}{16}$
x_{11}	$640\frac{13}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{13}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{3}{8}$
x_{12}	$3\frac{11}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$-\frac{33}{16}$	$-\frac{21}{8}$
x_{13}	$136\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{19}{16}$	$-\frac{7}{8}$
x_4	$46\frac{15}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$
x_{14}	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
x_3	3	$\frac{3}{16}$	0	-1	0
P_1	$-2020\frac{1}{8}$	$-\frac{21}{8}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{13}{8}$	$-\frac{5}{4}$

Kadangi šio uždavinio optimalus sprendinys privalo tenkinti apribojimus $x_4 \leq 47$ (žiūr. uždavinio Nr.2 apribojimus, pavaizduotus 347 pav.) ir $x_4 \geq 47$ (žiūr. apribojimą, kuris pridedamas, pereinant nuo uždavinio Nr.4 prie uždavinio Nr.7), tai gauname, jog šio uždavinio sprendinys turi tenkinti sąlygą $x_4 = 47$. Todėl kintamąjį x_4 galime eliminuoti iš uždavinio Nr.7 sąlygų, įstatydami į jas vietoj x_4 skaičių 47. Gauname 199-ją lentelę, kuri vaizduoja dar neleistiną sprendinį.

199. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3
x_5	248	3	2	3
x_6	778	4	5	4
x_7	471	0	2	3
x_8	365	1	0	2
x_9	441,5	0,5	1	2
x_{10}	406,5	3	0	1,5
x_{11}	889	2	2	3
x_{12}	483	1	4	0
x_{13}	377	1,5	2	0,5
x_{15}	-121	0	-1	0
P_1	-1410	3	5	4

200. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{15}	x_3
x_4	6	3	2	3
x_6	173	4	5	4
x_7	229	0	2	3
x_8	365	1	0	2
x_9	320,5	0,5	1	2
x_{10}	406,5	3	0	1,5
x_{11}	647	2	2	3
x_{12}	-1	1	4	0
x_{13}	135	1,5	2	0,5
x_2	121	0	-1	0
P_1	-2015	3	5	4

Transformuodami šią lentelę būdu, aprašytu sprendžiant uždavinį Nr.1, gauname 200-ją lentelę, iš kurios matyti, kad uždavinys Nr.7 neturi sprendinių, nes kintamojo x_{12} eilutėje laisvasis narys yra neigiamas, o visi kiti tos eilutės koeficientai – neneigiami skaičiai. Todėl šaka Nr.7 atkrinta kaip neturinti sprendinių. Belieka šakos Nr.8, Nr.9 ir Nr.10.

9. Sprendžiame uždavinį Nr.8, kurį gavome iš uždavinio Nr.4, pridėdami papildomą apribojimą $x_4 \leq 46$. Gauname 201-205 lenteles.

Kadangi uždavinio Nr.8 optimalaus sprendinio tikslo funkcijos optimali reikšmė $P^{(opt)} = 2020\frac{1}{6}$

yra dar šiek tiek didesnė už $P^{(1)} = 2020$, tai uždavinį Nr.8 skaidome į du: į uždavinį Nr.11, kurį gauname, papildydami uždavinio Nr.8 apribojimus apribojimu $x_2 \leq 123$ ir į uždavinį Nr.12, kurį gauname, papildydami uždavinio Nr.8 apribojimus apribojimu $x_2 \geq 124$. Sprendžiant šiuos uždavinius, sveikaskaitinio optimalaus sprendinio, geresnio už uždavinio Nr.1 sprendinį, mes negausime, tačiau lygiavertį jam galbūt dar galima gauti.

201. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	1000	3	2	3	16
x ₆	2000	4	5	4	26
x ₇	800	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	700	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	46	0	0	0	1
x ₁₅	-121	0	-1	0	0
P ₁	0	3	5	4	30

202. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₄
x ₅	758	3	2	3	16
x ₆	1395	4	5	4	26
x ₇	558	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	579	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1258	2	2	3	13
x ₁₂	516	1	4	0	11
x ₁₃	558	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	46	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
P ₁	-605	3	5	4	30

203. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₁₄
x ₅	22	3	2	3	-16
x ₆	199	4	5	4	-26
x ₇	236	0	2	3	-7
x ₈	370	1	0	2	-5
x ₉	326	0,5	1	2	-5,5
x ₁₀	417	3	0	1,5	-10,5
x ₁₁	660	2	2	3	-13
x ₁₂	10	1	4	0	-11
x ₁₃	144	1,5	2	0,5	-9
x ₄	46	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
P ₁	-1985	3	5	4	-30

204. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₅	x ₁₄
x ₃	$\frac{22}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
x ₆	$169\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$
x ₇	214	-3	0	-1	9
x ₈	$355\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{3}$
x ₉	$311\frac{1}{3}$	-1,5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{6}$
x ₁₀	406	1,5	1	-0,5	-2,5
x ₁₁	638	-1	0	-1	3
x ₁₂	10	1	4	0	-11
x ₁₃	$140\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{3}$
x ₄	46	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
P ₁	$-2014\frac{1}{3}$	-1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{3}$

205. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₅	x ₁₄
x ₃	$5\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	-3,5
x ₆	$163\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{4}{3}$	1,75
x ₇	214	-3	0	-1	9
x ₈	$358\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
x ₉	$312\frac{1}{6}$	$-\frac{17}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	4,25
x ₁₀	408,5	1,75	0,25	-0,5	-5,25
x ₁₁	638	-1	0	-1	3
x ₁₅	2,5	0,25	0,25	0	-2,75
x ₁₃	$136\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{6}$	-1,75
x ₄	46	0	0	0	1
x ₂	123,5	0,25	0,25	0	-2,75
P ₁	$-2020\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{12}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{4}{3}$	-2,25

10. Iš spęstinių uždavinių aibės, kurią sudaro uždaviniai Nr.9, Nr.10, Nr.11 ir Nr.12, išsirenkame uždavinį Nr.9 ir sprendžiame jį, prisimindami, kad uždavinys Nr.9 buvo gautas iš uždavinio Nr.6, papildžius jo apribojimus apribojimu $x_4 \geq 47$.

Kadangi uždavinio Nr.6 apribojimuose buvo apribojimas $x_4 \leq 47$ (žiūr. uždavinį Nr.2 ir 347 pav.), tai gauname, kad uždavinyje Nr.9 $x_4 = 47$, ir kintamąjį x_4 galima eliminuoti iš uždavinio sąlygų, pakeičiant jį skaičiumi 47. Gauname pradinę simplekso lentelę (žiūr. 206-ąją lentelę), kuri vaizduoja sprendinį, dar nepriklausantį leistinių sprendinių aibei. Transformuodami šią lentelę analogiškai, kaip sprendžiant uždavinį Nr.1, gauname 207-ąją lentelę, o po to ir 208-ąją lentelę, vaizduojančią optimalų sprendinį.

206. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃
x ₅	248	3	2	3
x ₆	778	4	5	4
x ₇	471	0	2	3
x ₈	365	1	0	2
x ₉	441,5	0,5	1	2
x ₁₀	406,5	3	0	1,5
x ₁₁	889	2	2	3
x ₁₂	483	1	4	0
x ₁₃	377	1,5	2	0,5
x ₁₅	120	0	1	0
x ₁₆	-3	0	0	-1
P ₁	-1410	3	5	4

207. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₁₆
x ₅	239	3	2	3
x ₆	766	4	5	4
x ₇	462	0	2	3
x ₈	359	1	0	2
x ₉	435,5	0,5	1	2
x ₁₀	402	3	0	1,5
x ₁₁	880	2	2	3
x ₁₂	483	1	4	0
x ₁₃	375,5	1,5	2	0,5
x ₁₅	120	0	-1	0
x ₃	3	0	0	-1
P ₁	-1422	3	5	4

208. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₅	x ₁₆
x ₂	119,5	1,5	0,5	1,5
x ₆	168,5	-3,5	-2,5	-3,5
x ₇	223	-3	-1	0
x ₈	359	1	0	2
x ₉	316	-1	-0,5	0,5
x ₁₀	402	3	0	1,5
x ₁₁	641	-1	-1	0
x ₁₂	5	-5	-2	-6
x ₁₃	136,5	-1,5	-1	-2,5
x ₁₅	0,5	-1,5	-0,5	-1,5
x ₃	3	0	0	-1
P ₁	-2019,5	-4,5	-2,5	-3,5

Gavome uždavinio Nr.9 optimalų sprendinį $x_1=0$, $x_2=119,5$, $x_3=3$, $x_4=47$, kuris nėra sveikaskaitinis. Tačiau šio uždavinio jau nebeskaidysime į naujus uždavinius, nes uždavinio Nr.9 optimali tikslo funkcijos reikšmė $P=2019,5$ yra jau mažesnė už $P^{(1)}=2020$. Tai reiškia, kad tęsdami šakos Nr.9 nagrinėjimą, mes jau negausime sveikaskaitinių sprendinių, geresnių už uždavinio Nr.1 sprendinį, ar tolygių jam. Todėl šakos Nr.9 nagrinėjimą nutraukiame ir pereiname prie uždavinio Nr.10 sprendimo.

11. Uždavinys Nr.10 buvo gautas iš uždavinio Nr.6, papildžius jo apribojimus apribojimu $x_4 \leq 46$. Spręsdami šį uždavinį, gauname 209-213 lenteles.

Kaip matome, uždavinys Nr.10 turi sveikaskaitinį optimalų sprendinį $x_1=0$, $x_2=120$, $x_3=8$, $x_4=46$, tačiau optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=2012$ yra mažesnė už $P^{(1)}=2020$. Tuo šakos Nr.10 nagrinėjimas ir baigiasi. Belieka išspręsti uždavinius Nr.11 ir Nr.12, kuriuos gavome, skaidydami uždavinį Nr.8.

209. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	1000	3	2	3	16
x_6	2000	4	5	4	26
x_7	800	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	700	0,5	1	2	5,5
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5
x_{11}	1500	2	2	3	13
x_{12}	1000	1	4	0	11
x_{13}	800	1,5	2	0,5	9
x_{14}	46	0	0	0	1
x_{15}	120	0	1	0	0
x_{16}	-3	0	0	-1	0
P_1	0	3	5	4	30

210. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{16}	x_4
x_5	991	3	2	3	16
x_6	1988	4	5	4	26
x_7	791	0	2	3	7
x_8	594	1	0	2	5
x_9	694	0,5	1	2	5,5
x_{10}	895,5	3	0	1,5	10,5
x_{11}	1491	2	2	3	13
x_{12}	1000	1	4	0	11
x_{13}	798,5	1,5	2	0,5	9
x_{14}	46	0	0	0	1
x_{15}	120	0	1	0	0
x_3	3	0	0	-1	0
P_1	-12	3	5	4	30

211. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_{16}	x_{14}
x_5	255	3	2	3	-16
x_6	792	4	5	4	-26
x_7	469	0	2	3	-7
x_8	364	1	0	2	-5
x_9	441	0,5	1	2	-5,5
x_{10}	412,5	3	0	1,5	-10,5
x_{11}	893	2	2	3	-13
x_{12}	494	1	4	0	-11
x_{13}	384,5	1,5	2	0,5	-9
x_4	46	0	0	0	1
x_{15}	120	0	1	0	0
x_3	3	0	0	-1	0
P_1	-1392	3	5	4	-30

212. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{15}	x_{16}	x_{14}
x_5	15	3	-2	3	-16
x_6	192	4	-5	4	-26
x_7	229	0	-2	3	-7
x_8	364	1	0	2	-5
x_9	321	0,5	-1	2	-5,5
x_{10}	412,5	3	0	1,5	-10,5
x_{11}	653	2	-2	3	-13
x_{12}	14	1	-4	0	-11
x_{13}	144,5	1,5	-2	0,5	-9
x_4	46	0	0	0	1
x_2	120	0	-1	0	0
x_3	3	0	0	-1	0
P_1	-1992	3	-5	4	-30

213. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{15}	x_5	x_{14}
x_{16}	5	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
x_6	172	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$
x_7	214	-3	0	-1	9
x_8	354	-1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{3}$
x_9	311	-1,5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{6}$
x_{10}	405	1,5	1	-0,5	-2,5
x_{11}	638	-1	0	-1	3
x_{15}	14	1	-4	0	-11
x_{13}	142	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{3}$
x_4	46	0	0	0	1
x_2	120	0	1	0	0
x_3	8	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
P_1	-2012	-1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{3}$

12. Sprendžiame uždavinį Nr.11, kuris gaunamas, papildžius uždavinio Nr.8 apribojimus apribojimu $x_2 \leq 123$. Įvedame papildomą kintamąjį $x_{17}=123-x_2 \geq 0$. Spręsdami uždavinį Nr.11, gauname taip pat sveikaskaitinį sprendinį (žiūr. 214-218 lenteles).

214. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	1000	3	2	3	16
x_6	2000	4	5	4	26
x_7	800	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	700	0,5	1	2	5,5
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5

215. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{15}	x_3	x_4
x_5	758	3	2	3	16
x_6	1395	4	5	4	26
x_7	558	0	2	3	7
x_8	600	1	0	2	5
x_9	579	0,5	1	2	5,5
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5

216. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{15}	x_3	x_{14}
x_5	22	3	2	3	-16
x_6	199	4	5	4	-26
x_7	236	0	2	3	-7
x_8	370	1	0	2	-5
x_9	326	0,5	1	2	-5,5
x_{10}	417	3	0	1,5	-10,5

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	46	0	0	0	1
x ₁₅	-121	0	-1	0	0
x ₁₇	123	0	1	0	0
P ₁	0	3	5	4	30

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₄
x ₁₁	1258	2	2	3	13
x ₁₂	516	1	4	0	11
x ₁₃	558	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	46	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
x ₁₇	2	0	0	1	0
P ₁	-605	3	5	4	30

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₁₄
x ₁₁	660	2	2	3	-13
x ₁₂	10	1	4	0	-11
x ₁₃	144	1,5	2	0,5	-9
x ₄	46	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
x ₁₇	2	0	0	1	0
P ₁	-1985	3	5	4	-30

Uždavinio Nr.11 sprendinys, kaip jau minėjome, yra sveikaskaitinis: $x_1=0$, $x_2=123$, $x_3=6$, $x_4=46$, tačiau jo tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=2019$ yra mažesnė už $P^{(1)}=2020$.

217. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₅	x ₁₄
x ₃	$7\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
x ₆	$169\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$
x ₇	214	-3	0	-1	9
x ₈	$355\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{3}$
x ₉	$311\frac{1}{3}$	-1,5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{6}$
x ₁₀	406	1,5	-1	-0,5	-2,5
x ₁₁	638	-1	0	-1	3
x ₁₂	10	1	4	0	-11
x ₁₃	$140\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{3}$
x ₄	46	0	0	0	1
x ₂	121	0	-1	0	0
x ₁₇	2	0	1	0	$-\frac{16}{3}$
P ₁	$-2014\frac{1}{3}$	-1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{3}$

218. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₅	x ₁₄
x ₁₆	5	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
x ₆	172	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$
x ₇	214	-3	0	-1	9
x ₈	354	-1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{3}$
x ₉	311	-1,5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{6}$
x ₁₀	405	1,5	1	-0,5	-2,5
x ₁₁	638	-1	0	-1	3
x ₁₅	14	1	-4	0	-11
x ₁₃	142	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{3}$
x ₄	46	0	0	0	1
x ₂	120	0	1	0	0
x ₃	8	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$
P ₁	-2019	-1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{3}$

Tuo šakos Nr.11 nagrinėjimas baigiasi, ir galima pereiti prie šakos Nr.12.

13. Sprendžiame uždavinį Nr.12, kurį gavome, skaidydami uždavinį Nr.8 ir pridėdami prie jo apribojimų apribojimą $x_2 \geq 124$. Šis apribojimas yra stipresnis už apribojimą $x_2 \geq 121$, kurį uždavinys Nr.8 paveldėjo iš uždavinio Nr.4, todėl, sprenddami uždavinį Nr.12, galime apribojimą $x_2 \geq 121$ pakeisti stipresniu $x_2 \geq 124$. Gauname 219-222 lenteles.

219. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
x ₅	1000	3	2	3	16
x ₆	2000	4	5	4	26
x ₇	800	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	700	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1500	2	2	3	13
x ₁₂	1000	1	4	0	11
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	46	0	0	0	1
x ₁₅	-124	0	-1	0	0
P ₁	0	3	5	4	30

220. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₄
x ₅	752	3	2	3	16
x ₆	1380	4	5	4	26
x ₇	552	0	2	3	7
x ₈	600	1	0	2	5
x ₉	576	0,5	1	2	5,5
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5
x ₁₁	1252	2	2	3	13
x ₁₂	504	1	4	0	11
x ₁₃	552	1,5	2	0,5	9
x ₁₄	46	0	0	0	1
x ₂	124	0	-1	0	0
P ₁	-620	3	5	4	30

221. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₅	x ₃	x ₁₂
x ₅	$18\frac{10}{11}$	$\frac{17}{11}$	$-\frac{42}{11}$	3	$-\frac{16}{11}$
x ₆	$188\frac{8}{11}$	$\frac{18}{11}$	$-\frac{49}{11}$	4	$-\frac{26}{11}$
x ₇	$231\frac{3}{11}$	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{6}{11}$	3	$-\frac{7}{11}$
x ₈	$370\frac{10}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-\frac{20}{11}$	2	$-\frac{5}{11}$
x ₉	324	0	-1	2	-0,5
x ₁₀	$418\frac{10}{11}$	$\frac{45}{22}$	$-\frac{42}{11}$	1,5	$-\frac{21}{22}$
x ₁₁	$656\frac{4}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{30}{11}$	3	$-\frac{13}{11}$
x ₄	$45\frac{9}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{1}{11}$
x ₁₃	$139\frac{7}{11}$	$\frac{15}{22}$	$-\frac{14}{11}$	0,5	$-\frac{9}{11}$
x ₁₄	$\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{4}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$
x ₂	124	0	-1	0	0
P ₁	$-1994\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{65}{11}$	4	$-\frac{30}{11}$

219. lentelė

\	L.n.	x_1	x_{15}	x_5	x_{12}
x_3	$6\frac{10}{33}$	$\frac{17}{33}$	$-\frac{14}{11}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{33}$
x_6	$163\frac{17}{33}$	$-\frac{14}{33}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{33}$
x_7	$212\frac{12}{33}$	$-\frac{24}{33}$	$\frac{36}{11}$	-1	$\frac{9}{11}$
x_8	$358\frac{10}{33}$	$-\frac{16}{33}$	$\frac{8}{11}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{17}{33}$
x_9	$311\frac{11}{33}$	$-\frac{34}{33}$	$\frac{17}{11}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{31}{66}$
x_{10}	$409\frac{15}{33}$	$\frac{14}{11}$	$-\frac{21}{11}$	$-0,5$	$-\frac{5}{22}$
x_{11}	$637\frac{15}{33}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{12}{11}$	-1	$\frac{3}{11}$
x_4	$46\frac{9}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{1}{11}$
x_{13}	$136\frac{16}{33}$	$\frac{14}{33}$	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{19}{33}$
x_{14}	$\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{4}{11}$	0	$\frac{1}{11}$
x_2	124	0	-1	0	0
P_1	$-2019\frac{25}{33}$	$-\frac{59}{33}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{26}{33}$

Uždavinio Nr.12 optimalus sprendinys, kurį vaizduoja 221-oji lentelė, nėra sveikaskaitinis nes $x_1=0$, $x_2=124$, $x_3=6\frac{10}{33}$,

$x_4=45\frac{9}{11}$, tačiau jo jau nebeskaidysime į naujus uždavinius, nes

to sprendinio tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=2019\frac{25}{33}$ yra mažesnė už $P^{(1)}=2020$.

Kadangi visi uždaviniai, kuriuos sprendžiant buvo galima tikėtis gauti sveikaskaitinį sprendinį, neblogesnį už uždavinio Nr.1 sprendinį, jau išspręsti ir sveikaskaitinio sprendinio, geresnio už sprendinį $x_1=0$, $x_2=116$, $x_3=0$, $x_4=48$, $P=2020$, neradome, tai galime teigti, kad uždavinio Nr.1 sprendinys yra optimalus sveikaskaitinis pradinio uždavinio (uždavinio Nr.0, papildyto sprendinio koordinatinių sveikaskaitiškumo reikalavimais) sprendinys.

Apibendrinami optimalaus sveikaskaitinio sprendinio paieškos šakų ir ribų metodu aprašymą, suformuluosime kai kurias išvadas.

1. Kadangi, taikant šį metodą, **nagrinėjamų uždavinių LSS kaskart mažėja, tai optimalus sveikaskaitinis sprendinys, jei jis egzistuoja, anksčiau ar vėliau būtinai bus surastas, o jei tokio sprendinio nėra, tai po baigtinio žingsnių skaičiaus bus prieita prie tokių dalinių uždavinių, kurių LSS negali turėti taškų su sveikaskaitinėmis koordinatėmis, ir tokiu būdu bus įrodyta, kad uždavinys neturi sveikaskaitinio sprendinio.** Svarbu tik mokėti spręsti dalinius bendrojo (nesveikaskaitinio) optimizavimo uždavinius.

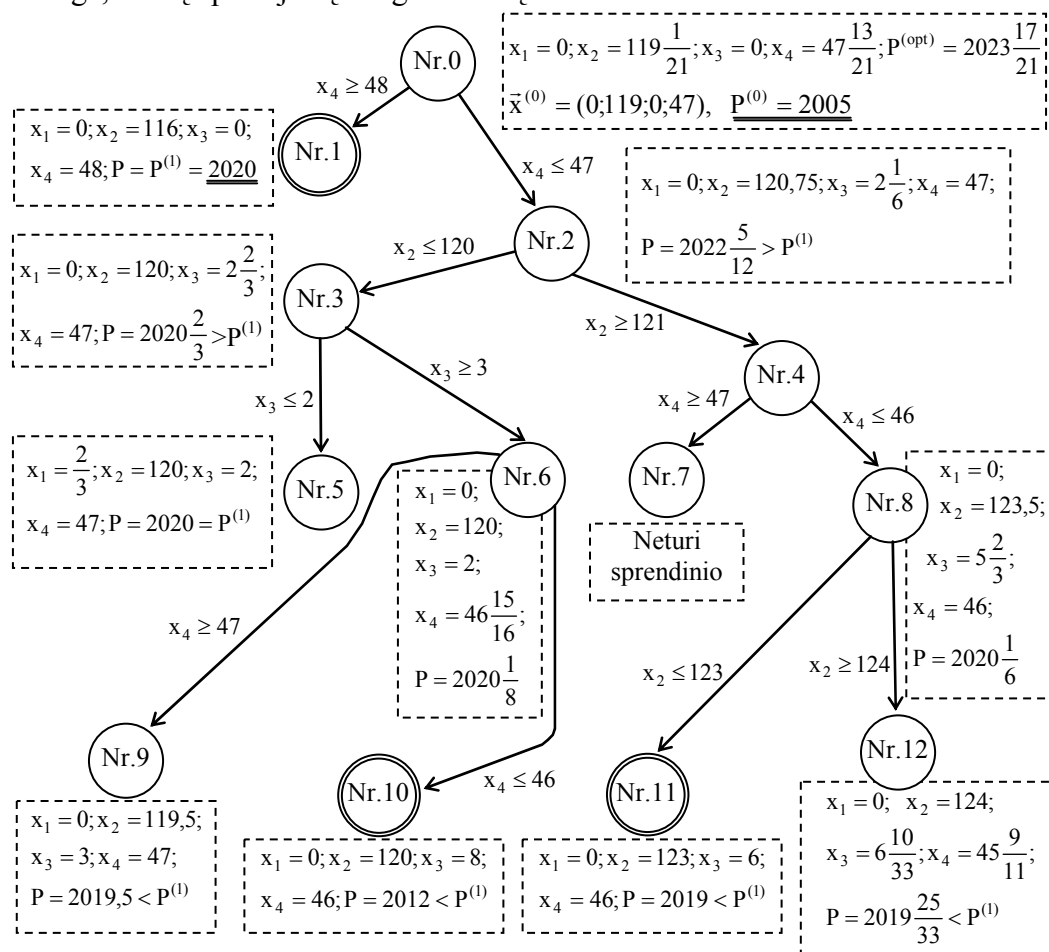
2. Sprendžiant sveikaskaitinio optimalaus sprendinio paieškos šakų ir ribų metodu uždavinį, **tenka spręsti gana daug dalinių optimizavimo uždavinių, perrenkant dalinių uždavinių variantų medžio (žiūr. 347 pav.) šakas, kurių skaičius, didėjant valdomųjų kintamųjų skaičiui, labai greitai auga.** Todėl, sprendžiant šiek tiek sudėtingesnius sveikaskaitinio optimizavimo uždavinius, tikslinga naudotis kompiuteriu.

3. Tačiau **net ir greitaiegiai kompiuteriai nėra pajėgūs per praktiškai priimtina laiką išspręsti sveikaskaitinio optimizavimo uždavinį, turintį daug valdomųjų kintamųjų ir sudėtingą dalinių uždavinių variantų medį, nes visų galimų variantų skaičius gali būti didesnis už skaičius, kuriuos mes įpratę vadinti „astronominiais“.** Todėl, sprendžiant tokius uždavinius, dažniausiai atsisakoma nuo sprendinio optimalumo įrodymo ir tenkinamasi pakankamai gero sveikaskaitinio sprendinio radimu. Organizuojant tokio sprendinio paiešką šakų ir ribų metodu, patogiu naudotis kompiuteriu dialogo režime ir nagrinėti tik tas dalinių uždavinių variantų medžio šakas, kurios atrodo perspektyvios.

Pavyzdžiui, jei, sprendžiant ką tik išnagrinėtąjį uždavinį, mums būtų reikėję tik surasti optimalų sveikaskaitinį sprendinį ir nebūtų reikėję įrodyti, kad toks sprendinys šiame uždavinyje vienintelis, tai būtų užtekę išspręsti tik uždavinius Nr.0, Nr.1, Nr.2, Nr.3, Nr.4, Nr.7 ir Nr.8, o jei būtų reikėję surasti tik pakankamai gerą (pakankamai artimą optimaliam) sprendinį, tai būtų užtekę išspręsti tik uždavinio Nr.0 ir Nr.1 ir nebūtų reikėję spręsti dar vienuolikos dalinių uždavinių, kurių sprendimas ir buvo reikalingas, tik tam, kad įrodytume, jog pasirinktas pakankamai geras sveikaskaitinis sprendinys yra tikrai optimalus ir be to – vienintelis.

4. **Ieškant optimalaus sveikaskaitinio sprendinio dialogo režime, tikslinga vaizduoti dalinių uždavinių variantų medį grafiškai.** Tai padeda nepasiklysti to

medžio šakose ir palengvina papildomų apribojimų visumos analizę, kuri tampa gana sudėtinga, kai tų apribojimų daug ir visus įsiminti darosi sunku.



347 pav.

Mūsų išspręsto konkretaus uždavinio dalinių uždavinių variantų medis pavaizduotas 347 pav. Analizuodami tą medį matome, kad ieškodami uždavinio optimalaus sveikaskaitinio sprendinio, mes radome ne tik jį, bet ir dar kelis sveikaskaitinius sprendinius, šiek tiek blogesnius už optimalų, tačiau geresnius už „artutinį“ $\bar{x}^{(0)} = (0; 119; 0; 47)$, gautą „suapvalinant“ optimalų uždavinio Nr.0 sprendinį $x_1=0; x_2=119\frac{1}{2}; x_3=0; x_4=47\frac{13}{21}; P=2023\frac{17}{21}$.

Tai uždavinių Nr.10 ir Nr.11 sprendiniai:

- $x_1=0; x_2=120; x_3=8; x_4=46; P=2012;$
- $x_1=0; x_2=123; x_3=6; x_4=46; P=2019.$

Prieš pradėdami naudotis šakų ir ribų metodu šio uždavinio sprendimui, mes buvome nustatę, jog nagrinėjamas uždavinys turi keletą sveikaskaitinių sprendinių, geresnių už „artutinį“ ir, matyt, pakankamai artimų optimaliam sprendiniui. Mes buvome pažymėję tuos sveikaskaitinius sprendinius raidėmis α, β, γ ir δ . Spręsdami optimizavimo uždavinį šakų ir ribų metodu, mes tų sprendinių kažkodėl nesutikome. Skaitytojui gali kilti klausimas, **ar visus sveikaskaitinius sprendinius galima surasti, naudojantis šakų ir ribų metodu. Atsakymas į šį klausimą yra teigiamas**, nes skaidant LSS į dalis nelygybėmis, ribojančiomis sprendinio koordinačių kitimo sritis, visuomet galima išskirti tokią sritį, kurioje optimalus sprendinys turės mūsų norimas koordinačių reikšmes, o spręsdami optimizavimo uždavinį šakų ir ribų metodu, mes sprendinių α, β, γ ir δ nesutikome tik todėl, kad, turėdami ribą $P^{(1)}=2020$, mes iki tų sprendinių „nepriejome“. Jei būtume nuleidę ribą kiek žemiau, būtume „pasiekę“ ir minėtuosius sprendinius.

Pavyzdžiui, jei nesustodami ties riba $P^{(1)}=2020$, būtume suskaidę uždavinį Nr.5 (žiūr. 347 pav.) į du uždavinius: į uždavinį Nr.13, kurį gautume papildę uždavinio Nr.5 apribojimus apribojimu $x_1 \leq 0$, ir į uždavinį Nr.14, kurį gautume papildę uždavinio Nr.5 apribojimus apribojimu $x_1 \geq 1$, tai būtume gavę

naujų sveikaskaitinių sprendinių, kurių tarpe būtų buvęs ir sprendinys $x_1=0$; $x_2=120$; $x_3=2$; $x_4=47$; $P=2018$, mūsų pažymėtas raide δ .

Parodysime tai, išspręsdami uždavinį Nr.13. Kadangi iš nelygybių $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 0$ išplaukia, jog $x_1=0$, tai kintamąjį x_1 galima iš uždavinio sąlygų eliminuoti, pakeičiant jį skaičiumi 0 ir iš 185-osios lentelės gaunant 223-ją lentelę.

Spręsdami uždavinį Nr.13, gauname 223-226 lenteles ir optimalų sprendinį δ .

Skaidydami ne tik penktąjį, bet taip pat dar ir devintąjį bei dvyliktąjį uždavinius ir spręsdami atitinkamus dalinius optimizavimo uždavinius, mes galime gauti eilę kitų sveikaskaitinių sprendinių. Palieku tuo įsitikinti pačiam skaitytojui.

223. lentelė

\	L.n.	x_2	x_3	x_4
x_5	1000	2	3	16
x_6	2000	5	4	26
x_7	800	2	3	7
x_8	600	0	2	5
x_9	700	1	2	5,5
x_{10}	900	0	1,5	10,5
x_{11}	1500	2	3	13
x_{12}	1000	4	0	11
x_{13}	800	2	0,5	9
x_{14}	47	0	0	1
x_{15}	120	1	0	0
x_{16}	2	0	1	0
P_1	0	5	4	30

224. lentelė

\	L.n.	x_2	x_3	x_{14}
x_5	248	2	3	-16
x_6	778	5	4	-26
x_7	471	2	3	-7
x_8	365	0	2	-5
x_9	441,5	1	2	-5,5
x_{10}	406,5	0	1,5	-10,5
x_{11}	889	2	3	-13
x_{12}	483	4	0	-11
x_{13}	377	2	0,5	-9
x_4	47	0	0	1
x_{15}	120	1	0	0
x_{16}	2	0	1	0
P_1	-1410	5	4	-30

225. lentelė

\	L.n.	x_{15}	x_3	x_{12}
x_5	8	-2	3	-16
x_6	178	-5	4	-26
x_7	231	-2	3	-7
x_8	365	0	2	-5
x_9	321,5	-1	2	-5,5
x_{10}	406,5	0	1,5	-10,5
x_{11}	649	-2	3	-13
x_{12}	3	-4	0	-11
x_{13}	137	-2	0,5	-9
x_4	47	0	0	1
x_2	120	1	0	0
x_{16}	2	0	1	0
P_1	-2110	-5	4	-30

226. lentelė

\	L.n.	x_{15}	x_{16}	x_{14}
x_5	2	-2	-3	-16
x_6	170	-5	-4	-26
x_7	225	-2	-3	-7
x_8	361	0	-2	-5
x_9	317,5	-1	-2	-5,5
x_{10}	403,5	0	-1,5	-10,5
x_{11}	643	-2	-3	-13
x_{12}	3	-4	0	-11
x_{13}	136	-2	-0,5	-9
x_4	47	0	0	1
x_2	120	1	0	0
x_3	2	0	1	0
P_1	-2018	-5	-4	-30

Atkreipčiau skaitytojo dėmesį dar į tai, jog 347 pav. pavaizduotas dalinių uždavinių variantų medis duotajam sveikaskaitinio optimizavimo uždaviniui nėra vienintelis. Pavyzdžiui, turėdami uždavinio Nr.0 optimalų sprendinį, kuris yra vienintelis, mes šį uždavinį galėjome suskirstyti į uždavinius Nr.1 ir Nr.2, naudodamiesi ne tik nelygybėmis $x_4 \geq 48$ ir $x_4 \leq 47$, bet ir nelygybėmis $x_2 \geq 120$ ir $x_2 \leq 119$. Tuomet būtume gavę visai kitą dalinių uždavinių variantų medį ir būtume suradę optimalų sveikaskaitinį sprendinį $x_1=0$; $x_2=116$; $x_3=0$; $x_4=48$ šiek tiek vėliau, skaidydami uždavinio Nr.2, gauto iš uždavinio Nr.0, pridėdant apribojimą $x_2 \leq 120$, šaką. Kai optimalus nesveikaskaitinis sprendinys turi kelias nesveikaskaitines koordinates, visuomet galimi keli skaidymo variantai. Todėl 347 pav. vaizduojamą medį ir vadiname **galimu dalinių uždavinių variantų medžiu**.

Sprendžiant sveikaskaitinio optimizavimo uždavinius (ne būtinai tiesinius) **dialogo su kompiuteriu režime**, skaidymo variantus pasirenka pats sprendėjas. Jis taip pat pats pasirenka tas medžio šakas, kurias reikėtų analizuoti pirmoje eilėje, pats nusprendžia, kada kokios šakos analizę tikslinga baigti, o taip pat, kurį sprendinį priimti esančiu optimaliu ar pakankamai geru ir tuo baigti optimalaus sveikaskaitinio sprendinio paieškos algoritmo darbą.

Tiesinius sveikaskaitinio optimizavimo uždavinius galima spręsti ir **automatiniame režime**. Spręsdamas tokiame režime kompiuteris, suradęs eilinį dalinio uždavinio optimalų sprendinį, pradžioje palygina tikslo funkcijos gautąją reikšmę su eiline riba $P^{(1)}$ ir, jei gautoji tikslo funkcijos reikšmė P^* yra blogesnė negu $P^{(1)}$ (pavyzdžiui, mažesnė, jei sprendžiamas maksimizavimo uždavinys, arba didesnė, jei sprendžiamas minimizavimo uždavinys), atmeta šį sprendinį ir nutraukia tolimesnį šios šakos nagrinėjimą, pereidamas prie eilinio dar neišspręsto dalinio uždavinio

sprendimo. Jei gautoji tikslo funkcijos reikšmė F^* yra geresnė (ar bent jau ne blogesnė) negu $P^{(i)}$, kompiuteris peržiūri gautojo optimalaus sprendinio koordinačių reikšmes eilės tvarka (pavyzdžiui, koordinačių indeksų didėjimo tvarka) ir, suradęs pirmąją nesveikaskaitinę koordinatę, skaido analizuojamą išspręstąjį dalinį uždavinį į du naujus ir įtraukia juos į dar neišspręstų dalinių uždavinių sąrašą, iš kurio po to pasirenka eilinį dalinį uždavinį (pavyzdžiui, turintį mažiausią numerį) ir toliau tęsia dalinių uždavinių sprendimo darbą. Jei, peržiūrėdamas eilinio dalinio uždavinio optimalaus sprendinio koordinačių reikšmes, kompiuteris, peržiūrėjęs visas koordinates, nesveikaskaitinės koordinatės nesuranda, tai reiškia, kad surastas optimalus sprendinys yra sveikaskaitinis. Tuomet kompiuteris pakeičia eilinę ribos reikšmę $P^{(i)}$ griežtesne (geresne, artimesne optimaliai sveikaskaitinio sprendinio tikslo funkcijos reikšmei) nauja ribos reikšmė $P^{(i+1)}=P^*$ ir pereina prie dar neišspręstų dalinių uždavinių sąrašo nagrinėjimo, tuo užbaigdamas eilinės šakos, atvedusios į sveikaskaitinį sprendinį, turinčios tikslo funkcijos reikšmę P^* , nagrinėjimą. Jei tame sąrašė jau nebėra uždavinių, kurių optimalių sprendinių tikslo funkcijos reikšmės būtų geresnės negu $P^{(i+1)}$, tai kompiuteris baigia darbą, pranešdamas, kad optimalus sprendinys – tai tas sveikaskaitinis sprendinys, kurio tikslo funkcijos reikšmė P^* lygi $P^{(i+1)}$. O jei tame sąrašė dar yra uždavinių, kurių optimalių sprendinių tikslo funkcijų reikšmės yra geresnės už $P^{(i+1)}$, kompiuteris toliau analizuoja tuos uždavinius, skaido juos į naujus ir t. t., kol galų gale pasiekia jau minėtąją situaciją, kada dalinių uždavinių sąrašė jau nebelieka neišspręstų uždavinių, kurių tikslo funkcijų optimalios reikšmės galėtų būti geresnės už eilinę ribą.

1.15.2.5.3. Sudėtingesnio optimizavimo uždavinio sprendinio jautrumo analizės ir jos rezultatų panaudojimo pavyzdys

Kaip jau buvo anksčiau minėta, simplekso metodą ir kompiuterius galima taikyti ne tik optimizavimo uždavinių sprendimui, bet taip pat ir optimalaus sprendinio analizei – jo stabilumo zonų bei jautrumo koeficientų apskaičiavimui, jautrumo koeficientų stabilumo zonų nustatymui ir gautų rezultatų panaudojimui, priimant sistemą S ir/ar jos funkcionavimą keičiančius sprendinius.

Iliustruosiu šį teiginį konkrečiais pavyzdžiais. Nagrinėdami optimalų sprendinį vaizduojančią 173-ąją lentelę, matome, jog optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė nesikeis, jei resursai – antrosios, trečiosios ir ketvirtosios medžiagų atsargos b_2 , b_3 ir b_4 bei pirmojo, antrojo, trečiojo ir penktojo įrengimų darbo laiko fondai T_1 , T_2 , T_3 ir T_5 keisis ribose: $2000-166\frac{2}{3} \leq b_2 < +\infty$; $800-228\frac{4}{7} \leq b_3 < +\infty$; $600-361\frac{19}{21} \leq b_4 < +\infty$; $700-319\frac{1}{21} \leq T_1 < +\infty$; $900-400 \leq T_2 < +\infty$; $1500-642\frac{6}{7} \leq T_3 < +\infty$; $800-133\frac{1}{3} \leq T_5 < +\infty$. Resursų likučius $x_6=166\frac{2}{3}$; $x_7=228\frac{4}{7}$; $x_8=361\frac{19}{21}$; $x_9=319\frac{1}{21}$; $x_{10}=400$; $x_{11}=642\frac{6}{7}$; $x_{13}=133\frac{1}{3}$ galima net parduoti ir už gautas lėšas racionaliau organizuoti gamybą, kaip tai buvo parodyta 1.15.2.4.2. skyrelio pabaigoje, arba galima pabandyti padidinti pirmosios medžiagos atsargas b_1 bei ketvirtojo tipo įrengimų darbo laiko fondą T_4 ir po to pilniau panaudoti kitų resursų atsargas b_2 , b_3 , b_4 , T_1 , T_2 , T_3 ir T_5 , gaminant daugiau produkcijos ir gaunant didesnę pelną P .

Kadangi $\Delta b_1 = -x_5$ ir $\Delta T_4 = -x_{12}$, tai iš 173-osios lentelės lygties $P_1 = -2023\frac{17}{21} - \left(-\frac{89}{42}x_1 - \frac{10}{21}x_2 - \frac{9}{14}x_3 - \frac{65}{42}x_5\right)$ gauname, jog $P = -P_1 = 2023\frac{17}{21} - \frac{89}{42}x_1 + \frac{10}{21}\Delta T_4 - \frac{9}{14}x_3 + \frac{65}{42}\Delta b_1$, iš kur išplaukia tikslo funkcijos P jautrumo pokyčiams Δb_1 ir ΔT_4 koeficientai: $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{65}{42}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_4} = \frac{10}{21}$.

Tarkime, jog mūsų nagrinėjamoje situacijoje atsirado galimybė padidinti kurio nors vieno resurso atsargas. Kyla klausimas, kurio resurso atsargas tikslingiausia didinti pirmojoje eilėje ir iki kokie dydžio jas tikslinga didinti, jei visų kitų resursų atsargos liktų tos pačios.

Suprantama, jog šiuo atveju tikslinga didinti tik atsargas b_1 arba T_4 , kurių likučiai x_5 ir x_{12} optimaliame sprendinyje lygūs 0.

Jei mus domintų tik maksimalus pelno didinimas ir nebūtų svarbios išlaidos (tame tarpe ir sunaudojamų resursų kainos), nes jos vis tiek įeina į pagamintos ir parduodamos produkcijos savikainą (o kartu su planuojamu pelnu ir į produkcijos realizavimo kainą), tai pirmoje eilėje atrodytų tikslingiausia didinti Δb_1 , didinant pirmosios medžiagos atsargas b_1 , nes $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} > \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial T_4}$. Žinoma, jei

atsižvelgtume į papildomas išlaidas, surištas su gamybos apimtys didinimu, ir į kapitalo investavimo efektyvumą, tai galėtų pasirodyti, kad kartais pirmoje eilėje tikslingiau didinti ne Δb_1 , o ΔT_4 , bet apie tai pakalbėsime vėliau. Dabar gi pabandydysime nustatyti, iki kokio dydžio tikslinga didinti Δb_1 ir b_1 .

Kaip jau matėme 1.15.2.4.2. skyrelyje, egzistuoja keletas Δb_1 kitimo viršutinės ribos nustatymo būdų. Naudojantis standartinėmis simplekso algoritmo programomis, įeinančiomis į standartinės kompiuterių programinės įrangos sudėtį, šį uždavinį patogiausia spręsti, suformulavus kaip optimizavimo (maksimizavimo) uždavinį.

Pažymėję Δb_1 , kaip papildomą valdomą kintamąjį, žymėjimu $x_{18} \geq 0$, gauname nelygybę $\sum_{j=1}^3 b_{ij}x_j + x_4 \sum_{j=1}^3 b_{ij}q_j \leq b_1 + x_{18}$, kurią kaip ir anksčiau, galime suvesti į lygybę $x_5 = b_1 - \left(\sum_{j=1}^3 b_{ij}x_j + x_4 \sum_{j=1}^3 b_{ij}q_j - x_{18} \right)$.

Šia lygybe pakeičiame ankstesniame uždavinio modelyje – 171-ojoje lentelėje – lygybę $x_5 = b_1 - \left(\sum_{j=1}^3 b_{ij}x_j + x_4 \sum_{j=1}^3 b_{ij}q_j \right)$.

Gauname naują uždavinio modelį ir naują pradinę simplekso lentelę (žiūr. 227-ją lentelę), kuri skiriasi nuo 171-osios lentelės tik tuo, kad atsirado papildomas kintamojo x_{18} stulpelis, kurio eilutėje, vaizduojančioje pirmosios medžiagos likutį x_5 , įrašytas skaičius (–1), o visuose kituose to stulpelio langeliuose įrašyti nuliai.

227. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{18}
x_5	1000	3	2	3	16	–1
x_6	2000	4	5	4	26	0
x_7	800	0	2	3	7	0
x_8	600	1	0	2	5	0
x_9	700	0,5	1	2	5,5	0
x_{10}	900	3	0	1,5	10,5	0
x_{11}	1500	2	2	3	13	0
x_{12}	1000	1	4	0	11	0
x_{13}	800	1,5	2	0,5	9	0
P_1	0	3	5	4	30	0

228. lentelė

\	L.n.	x_1	x_2	x_3	x_5	x_{18}
x_5	62,5	0,1875	0,125	0,1875	0,0625	–0,0625
x_6	375	–0,875	1,75	–0,875	–1,625	1,625
x_7	362,5	–1,3125	1,125	1,6875	–0,4375	0,4375
x_8	287,5	0,0625	–0,625	1,0625	–0,3125	0,3125
x_9	356,25	–0,53125	0,3125	0,96875	–0,34375	0,34375
x_{10}	243,75	1,03125	–1,3125	–0,46875	–0,65625	0,65625
x_{11}	687,5	–0,4375	0,375	0,5625	–0,8125	0,8125
x_{12}	312,5	–1,0625	2,625	–2,0625	–0,6875	0,6875
x_{13}	237,5	–0,1875	0,875	–1,1875	–0,5625	0,5625
P_1	–1875	–2,625	1,25	–1,625	–1,875	1,875

Kintamieji x_5 ir x_{18} yra priklausomi, nes $x_{18} = -x_5$, todėl vieną iš jų galima eliminuoti, tačiau to galima ir nedaryti, norint rasti viršutinę x_{18} kitimo ribą, naudojantis standartine simplekso algoritmo programa. Minimizuodami P_1 , gauname 229÷231 lenteles.

Kaip matome iš 231-osios lentelės, viršutinė Δb_1 kitimo riba yra lygi $x_{18} = 230\frac{10}{13}$, t. y., pirmosios medžiagos atsargas b_1 , nedidinant kitų resursų, tikslinga padidinti iki $1230\frac{10}{13}$. Tuomet pelnas

P padidės $283\frac{241}{273}$ vieneto, t. y. nuo $2023\frac{17}{21}$ iki $2307\frac{9}{13}$. Lygindami 230-ąją lentelę su 173-ąja, matome, kad resursų likučiai žymiai sumažėjo, o likučiai x_6 net tapo lygūs 0. Dar mažesni resursų likučiai tapo, pereinant į 231-ąją lentelę, tačiau joje atsirado likutis x_{12} , kuris 173-ojoje lentelėje buvo lygus 0. Tai rodo, kad atsargų b_1 panaudojimo maksimumas nesutampa su resurso T_4 panaudojimo maksimumu.

229. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₁₈
x ₄	$47\frac{13}{21}$	$\frac{5}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{21}$
x ₆	$166\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0,5	$-\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$
x ₇	$228\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
x ₈	$361\frac{19}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$
x ₉	$319\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$-\frac{5}{41}$	$\frac{17}{14}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{11}{42}$
x ₁₀	400	0,5	0,5	$-\frac{3}{2}$	-1	1
x ₁₁	$642\frac{4}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$
x ₂	$119\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$\frac{8}{2}$	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{11}{42}$
x ₁₃	$133\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-0,5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
P ₁	$-2023\frac{17}{21}$	$-\frac{89}{42}$	$-\frac{10}{21}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{65}{42}$	$\frac{65}{42}$

230. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₆
x ₄	$\frac{3000}{49} = 61\frac{11}{49}$	$\frac{11}{49}$	$-\frac{5}{49}$	$\frac{16}{49}$	0	$\frac{4}{49}$
x ₁₈	$\frac{1000}{7} = 142\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	-1	$\frac{6}{7}$
x ₇	$\frac{10200}{49} = 208\frac{8}{49}$	$-\frac{41}{49}$	$-\frac{17}{49}$	$\frac{123}{49}$	0	$-\frac{6}{49}$
x ₈	$\frac{14400}{49} = 293\frac{43}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{18}{49}$	0	$-\frac{20}{49}$
x ₉	$\frac{13800}{49} = 281\frac{31}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{3}{98}$	$\frac{54}{49}$	0	$-\frac{11}{49}$
x ₁₀	$\frac{1800}{7} = 257\frac{1}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{14}$	$-\frac{27}{14}$	0	$-\frac{6}{7}$
x ₁₁	$\frac{26500}{49} = 542\frac{42}{49}$	$-\frac{9}{49}$	$\frac{13}{49}$	$\frac{27}{49}$	0	$-\frac{30}{49}$
x ₂	$\frac{4000}{49} = 81\frac{31}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{26}{49}$	$-\frac{44}{49}$	0	$-\frac{11}{49}$
x ₁₃	$\frac{600}{7} = 85\frac{5}{7}$	$\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{9}{14}$	0	$-\frac{2}{7}$
P ₁	$-\frac{110000}{49} = -2244\frac{44}{49}$	$-\frac{93}{49}$	$\frac{20}{49}$	$-\frac{64}{49}$	0	$-\frac{65}{49}$

231. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₆
x ₄	$\frac{1000}{13} = 76\frac{12}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{1}{26}$
x ₁₈	$\frac{3000}{13} = 230\frac{10}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{7}{13}$	-1	$\frac{8}{13}$
x ₇	$\frac{3400}{13} = 261\frac{7}{13}$	$-\frac{14}{13}$	$\frac{17}{26}$	$\frac{25}{13}$	0	$-\frac{7}{26}$
x ₈	$\frac{2800}{13} = 215\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$-\frac{25}{26}$	$\frac{16}{13}$	0	$-\frac{5}{26}$
x ₉	$\frac{3600}{13} = 276\frac{12}{13}$	$-\frac{9}{26}$	$-\frac{3}{52}$	$\frac{15}{13}$	0	$-\frac{11}{52}$
x ₁₀	$\frac{1200}{13} = 92\frac{4}{13}$	$\frac{18}{13}$	$-\frac{105}{52}$	$-\frac{3}{26}$	0	$-\frac{21}{52}$
x ₁₁	500	0	-0,5	1	0	-0,5
x ₁₂	$\frac{2000}{13} = 153\frac{11}{13}$	$-\frac{9}{13}$	$\frac{49}{26}$	$-\frac{22}{13}$	0	$-\frac{11}{26}$
x ₁₃	$\frac{1400}{13} = 107\frac{9}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{7}{26}$	$-\frac{23}{26}$	0	$-\frac{9}{26}$
P ₁	$-\frac{30000}{13} = -2307\frac{9}{13}$	$-\frac{21}{13}$	$-\frac{10}{13}$	$-\frac{8}{13}$	0	$-\frac{15}{13}$

Pastebėsime dar vieną įdomų reiškinį: **kai tik kintamasis x₁₈ tampa baziniu, kintamojo x₅ stulpelis išsigimsta į stulpelį, turintį (-1) kintamojo x₁₈ eilutėje ir nulius visur kitur.** Taip ir turėjo įvykti dėl priklausomybės x₅=-x₁₈.

232. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₁₉
x ₅	1000	3	2	3	16	0
x ₆	2000	4	5	4	26	0
x ₇	800	0	2	3	7	0
x ₈	600	1	0	2	5	0
x ₉	700	0,5	1	2	5,5	0
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5	0
x ₁₁	1500	2	2	3	13	0
x ₁₂	1000	1	4	0	11	-1
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9	0
P ₁	0	3	5	4	30	0

233. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₁₉
x ₄	62,5	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
x ₆	375	$-\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{13}{8}$	0
x ₇	362,5	$-\frac{21}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$-\frac{7}{16}$	0
x ₈	287,5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{5}{16}$	0
x ₉	356,5	$-\frac{17}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{31}{32}$	$-\frac{11}{32}$	0
x ₁₀	243,5	$\frac{33}{32}$	$-\frac{21}{16}$	$-\frac{15}{32}$	$-\frac{21}{32}$	0
x ₁₁	587,5	$-\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{13}{16}$	0
x ₁₂	312,5	$-\frac{17}{16}$	$\frac{21}{8}$	$-\frac{33}{16}$	$-\frac{11}{16}$	-1
x ₁₃	237,5	$-\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{19}{16}$	$-\frac{9}{16}$	0
P ₁	-187,5	$-\frac{21}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{8}$	$-\frac{15}{8}$	0

Jei būtume pradžioje didinę ne b₁, o T₄, tai, įvedę naują papildomą kintamąjį x₁₉=ΔT₄≥0, būtume gavę vietoj lygties x₁₂=1000-(x₁+4x₂+11x₄) 168-ojoje lentelėje naują lygtį x₁₂=1000-(x₁+4x₂+11x₄-x₁₉) (žiūr. 229-ąją lentelę) ir naują optimalų sprendinį (žiūr. 229–232 lenteles).

234. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₁₉
x ₄	47 $\frac{13}{21}$	$\frac{5}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$
x ₆	166 $\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0,5	$-\frac{7}{6}$	$\frac{2}{3}$
x ₇	228 $\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
x ₈	361 $\frac{19}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{21}$	$-\frac{5}{21}$
x ₉	319 $\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$-\frac{5}{42}$	$\frac{17}{14}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{5}{42}$
x ₁₀	400	0,5	0,5	$-\frac{3}{2}$	-1	-0,5
x ₁₁	642 $\frac{6}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$
x ₂	119 $\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$\frac{8}{21}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{11}{42}$	$-\frac{8}{21}$
x ₁₃	133 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-0,5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
P ₁	-2023 $\frac{17}{21}$	$-\frac{89}{12}$	$-\frac{10}{21}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{65}{42}$	$\frac{10}{21}$

235. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₆
x ₄	35 $\frac{5}{7}$	0,25	0	0,25	$\frac{5}{28}$	$-\frac{1}{14}$
x ₁₉	250	-0,25	-1	0,75	-1,75	1,5
x ₇	121 $\frac{3}{7}$	-0,75	0	2,25	$\frac{17}{28}$	$-\frac{9}{14}$
x ₈	421 $\frac{3}{7}$	-0,25	0	0,75	$-\frac{25}{28}$	$\frac{5}{14}$
x ₉	289 $\frac{2}{7}$	-0,375	0	1,125	$-\frac{3}{56}$	$-\frac{5}{28}$
x ₁₀	525	0,375	0	-1,125	$-\frac{15}{8}$	0,75
x ₁₁	607 $\frac{1}{7}$	-0,25	0	0,75	$-\frac{13}{28}$	$-\frac{3}{14}$
x ₂	214 $\frac{2}{7}$	-0,5	0	-0,5	$-\frac{13}{14}$	$\frac{4}{7}$
x ₁₃	50	0,25	0	-0,75	0,25	-0,5
P ₁	-2142 $\frac{6}{7}$	-2	0	-1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$

Kaip matome iš 235-osios lentelės, viršutinė ΔT_4 kitimo riba, nekeičiant kitų resursų, yra lygi 250. Vadinasi, ketvirtojo tipo įrengimų darbo laiko fondą, jei kiti resursai nesikeičia, tikslinga padidinti iki 1250 vienetų. Tuomet pelnas P padidės $119 \frac{1}{21}$ vieneto, t. y. nuo $2023 \frac{17}{21}$ iki $2142 \frac{6}{7}$. Pelno prieauglis, didinant T_4 , bus žymiai mažesnis, negu didinant b_1 , tačiau kapitalo investavimo bendrasis

efektyvumas $E = \frac{P}{B} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j}{\sum_{j=1}^n s_j x_j}$ šiuo atveju bus šiek tiek didesnis negu tuomet, kuomet didinant b_1 , buvo

pasiektas maksimalus pelnas, lygus $2307 \frac{9}{13}$. Įrodysime tai.

$$\begin{aligned} \text{Pirmuoju atveju, kai } \Delta b_1 = 230 \frac{10}{13} \text{ ir } b_1 \text{ tampa } b_1 = 1230 \frac{10}{13}, \text{ gauname, jog } E = \frac{x_4 \cdot p_4}{x_4 \cdot s_4} = \\ = \frac{76 \frac{12}{13} \cdot 30}{76 \frac{12}{13} \cdot 370} = \frac{3}{37} \approx 0,081081 \approx 8,11\%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Antruoju atveju, kai } \Delta T_4 = 250 \text{ ir } T_4 \text{ tampa } T_4 = 1250, \text{ gauname, jog } E = \frac{x_2 p_2 + x_4 p_4}{x_2 s_2 + x_4 s_4} = \\ = \frac{214 \frac{2}{7} \cdot 5 + 35 \frac{5}{7} \cdot 30}{214 \frac{2}{7} \cdot 55 + 35 \frac{5}{7} \cdot 370} = \frac{3}{35} \approx 0,0857142 \approx 8,57\%. \end{aligned}$$

Jei būtų galimybė kartu didinti ir pirmosios medžiagos atsargas b_1 , ir ketvirtojo tipo įrengimų darbo laiko fondą T_4 , tai gautume matematinį modelį, kurį vaizduoja 236-oji lentelė. Spręsdami šį uždavinį, gautume 236-237 lenteles.

236. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₁₈	x ₁₉
x ₅	1000	3	2	3	16	-1	0
x ₆	2000	4	5	4	26	0	0
x ₇	800	0	2	3	7	0	0
x ₈	600	1	0	2	5	0	0
x ₉	700	0,5	1	2	5,5	0	0
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5	0	0
x ₁₁	1500	2	2	3	13	0	0

237. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₁₉
x ₄	62,5	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0
x ₆	375	$-\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{13}{8}$	$\frac{13}{8}$	0
x ₇	362,5	$-\frac{21}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	0
x ₈	287,5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	0
x ₉	356,25	$-\frac{17}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{31}{32}$	$-\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$	0
x ₁₀	243,75	$\frac{33}{32}$	$-\frac{21}{16}$	$-\frac{15}{32}$	$-\frac{21}{32}$	$\frac{21}{32}$	0
x ₁₁	687,5	$-\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	0

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₁₈	x ₁₉
x ₁₂	1000	1	4	0	11	0	-1
x ₁₃	800	1,5	2	0,5	9	0	0
P ₁	0	3	5	4	30	0	0

238. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₁₉
x ₄	47 $\frac{13}{21}$	$\frac{5}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$
x ₆	166 $\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0,5	$-\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{2}{3}$
x ₇	228 $\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
x ₈	361 $\frac{19}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$-\frac{5}{21}$
x ₉	319 $\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$-\frac{5}{42}$	$\frac{17}{14}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{11}{42}$	$\frac{5}{42}$
x ₁₀	400	0,5	0,5	-1,5	-1	1	-0,5
x ₁₁	642 $\frac{6}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$
x ₂	119 $\frac{1}{21}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{8}{21}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{11}{42}$	$-\frac{8}{21}$
x ₁₃	133 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-0,5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
P ₁	-2023 $\frac{17}{21}$	$-\frac{89}{42}$	$-\frac{10}{21}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{65}{42}$	$\frac{65}{42}$	$\frac{10}{21}$

240. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₁₉
x ₄	61 $\frac{11}{49}$	$\frac{11}{49}$	$-\frac{5}{49}$	$\frac{16}{49}$	0	$-\frac{4}{49}$	$\frac{5}{49}$
x ₆	142 $\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	-1	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{7}$
x ₇	208 $\frac{8}{49}$	$-\frac{41}{49}$	$-\frac{17}{49}$	$\frac{123}{49}$	0	$-\frac{6}{49}$	$\frac{17}{49}$
x ₈	293 $\frac{43}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{18}{49}$	0	$-\frac{20}{49}$	$-\frac{25}{49}$
x ₉	281 $\frac{31}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{3}{98}$	$\frac{54}{49}$	0	$-\frac{11}{49}$	$-\frac{3}{98}$
x ₁₀	257 $\frac{1}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{15}{14}$	$-\frac{27}{14}$	0	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{15}{14}$
x ₁₁	540 $\frac{40}{49}$	$-\frac{9}{49}$	$\frac{13}{49}$	$\frac{27}{49}$	0	$-\frac{30}{49}$	$-\frac{13}{49}$
x ₂	81 $\frac{31}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{26}{49}$	$-\frac{44}{49}$	0	$-\frac{11}{49}$	$-\frac{26}{49}$
x ₁₃	85 $\frac{5}{7}$	$\frac{3}{14}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{9}{14}$	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
P ₁	-2244 $\frac{44}{49}$	$-\frac{93}{49}$	$\frac{20}{49}$	$-\frac{64}{49}$	0	$-\frac{65}{49}$	$-\frac{20}{49}$

242. lentelė

	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₁₈	x ₂₀
x ₅	1000	3	2	3	16	-1	0
x ₆	2000	4	5	4	26	0	-1
x ₇	800	0	2	3	7	0	0
x ₈	600	1	0	2	5	0	0

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₁₉
x ₁₂	312,5	$-\frac{17}{16}$	$\frac{21}{8}$	$-\frac{33}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$\frac{11}{16}$	-1
x ₁₃	237,5	$-\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{19}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0
P ₁	-1875	$-\frac{21}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{8}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$	0

239. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₆	x ₁₈
x ₄	35 $\frac{5}{7}$	0,25	0	0,25	$\frac{5}{28}$	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{5}{28}$
x ₁₉	250	-0,25	-1	0,75	-1,75	1,5	1,75
x ₇	121 $\frac{3}{7}$	-0,75	0	2,25	$\frac{17}{28}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{17}{28}$
x ₈	421 $\frac{3}{7}$	-0,25	0	0,75	$-\frac{25}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{25}{28}$
x ₉	289 $\frac{2}{7}$	-0,375	0	1,125	$-\frac{3}{56}$	$-\frac{5}{28}$	$\frac{3}{56}$
x ₁₀	525	0,375	0	-1,125	$-\frac{15}{8}$	0,75	$\frac{15}{8}$
x ₁₁	607 $\frac{1}{7}$	-0,25	0	0,75	$-\frac{13}{28}$	$-\frac{3}{14}$	$\frac{13}{28}$
x ₂	214 $\frac{2}{7}$	-0,5	0	-0,5	$-\frac{13}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{13}{14}$
x ₁₃	50	0,25	0	-0,75	0,25	-0,5	-0,25
P ₁	-2142 $\frac{6}{7}$	-2	0	-1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$

241. lentelė

\	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₆	x ₁₉
x ₄	76 $\frac{12}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{1}{26}$	0
x ₁₈	230 $\frac{10}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{7}{13}$	-1	$\frac{8}{13}$	0
x ₇	261 $\frac{7}{13}$	$-\frac{14}{13}$	$\frac{17}{26}$	$\frac{25}{13}$	0	$-\frac{7}{26}$	0
x ₈	215 $\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$-\frac{25}{26}$	$\frac{16}{13}$	0	$-\frac{5}{26}$	0
x ₉	276 $\frac{12}{13}$	$-\frac{9}{26}$	$-\frac{3}{52}$	$\frac{15}{13}$	0	$-\frac{11}{52}$	0
x ₁₀	92 $\frac{4}{13}$	$\frac{18}{13}$	$-\frac{105}{52}$	$-\frac{3}{26}$	0	$-\frac{21}{52}$	0
x ₁₁	500	0	-0,5	1	0	-0,5	0
x ₁₂	153 $\frac{11}{13}$	$-\frac{9}{13}$	$\frac{49}{26}$	$-\frac{22}{13}$	0	$-\frac{11}{26}$	-1
x ₁₃	107 $\frac{9}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{7}{26}$	$-\frac{23}{26}$	0	$-\frac{9}{26}$	0
P ₁	2307 $\frac{9}{13}$	$-\frac{21}{13}$	$-\frac{10}{13}$	$-\frac{8}{13}$	0	$-\frac{15}{13}$	0

240-oji lentelė ir 241-oji lentelės sutapo su anksčiau gautomis 230-ąja ir 231-ąja lentelėmis, ir optimalus sprendinys tuo atveju, kada galima pirkti pirmąją medžiagą ir didinti ketvirtojo tipo įrenginių darbo laiko fondą, liko toks pat, kaip ir tuo atveju, kada buvo galima pirkti tik pirmąją medžiagą ir didinti jos atsargas, nekeičiant kitų atsargų. Tai ir nenuostabu, nes didinant pirmosios medžiagos atsargas, optimalus gamybos planas taip pasikeičia, kad ketvirtojo tipo įrengimų darbo laikas ne tik pilnai nesunaudojamas, bet dar lieka jo likučiai. Todėl, aišku, jog, didinant b₁, nebuvo prasmės didinti T₄. Iš 231-osios ir 241-osios lentelių matyti, kad didinant b₁, tikslinga didinti ne T₄, o b₂, nes tos medžiagos likutis x₆, pasiekus optimumą, tampa lygus 0.

Jei įvestume papildomą kintamąjį x₂₀ ≥ 0, lygų Δb₂, ir kartu didintume b₁ ir b₂, tai gautume optimizavimo uždavinį, kurio modelį sudaro 242-oji lentelė. Spręsdami šį uždavinį, gautume 242-249 lenteles.

243. lentelė

	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₂₀
x ₄	62,5	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0
x ₆	375	$-\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{13}{8}$	$\frac{13}{8}$	-1
x ₇	362,5	$-\frac{21}{16}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	0
x ₈	287,5	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	0

	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₁₈	x ₂₀		L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₂₀
x ₉	700	0,5	1	2	5,5	0	0	x ₉	356,25	$-\frac{17}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{31}{32}$	$-\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$	0
x ₁₀	900	3	0	1,5	10,5	0	0	x ₁₀	243,75	$\frac{33}{32}$	$-\frac{21}{16}$	$-\frac{15}{32}$	$-\frac{21}{32}$	$\frac{21}{32}$	0
x ₁₁	1500	2	2	3	13	0	0	x ₁₁	687,5	$-\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	0
x ₁₂	1000	1	4	0	11	0	0	x ₁₂	312,5	$-\frac{17}{16}$	$\frac{21}{8}$	$-\frac{33}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$\frac{11}{16}$	0
X ₁₃	800	1,5	2	0,5	9	0	0	x ₁₃	237,5	$-\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{19}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	0
P ₁	0	3	5	4	30	0	0	P ₁	-1875	$-\frac{21}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{13}{8}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$	0

244. lentelė

245. lentelė

	L.n.	x ₁	x ₁₂	x ₃	x ₅	x ₁₈	x ₂₀
x ₄	47 $\frac{13}{21}$	$\frac{5}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{21}$	0
x ₆	166 $\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0,5	$-\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	-1
x ₇	228 $\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0
x ₈	361 $\frac{19}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	0
x ₉	319 $\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$-\frac{5}{42}$	$\frac{17}{14}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{11}{42}$	0
x ₁₀	400	0,5	0,5	-1,5	-1	1	0
x ₁₁	642 $\frac{6}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	0
x ₂	119 $\frac{1}{21}$	$-\frac{17}{42}$	$\frac{8}{21}$	$-\frac{11}{14}$	$-\frac{11}{42}$	$\frac{11}{42}$	0
x ₁₃	133 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-0,5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
P ₁	-2023 $\frac{17}{21}$	$-\frac{89}{42}$	$-\frac{10}{21}$	$-\frac{9}{14}$	$-\frac{65}{42}$	$\frac{65}{42}$	0

246. lentelė

247. lentelė

	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₆	x ₂₀
x ₁	76 $\frac{12}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{1}{26}$	$-\frac{1}{26}$
x ₁₈	230 $\frac{10}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$\frac{14}{13}$	$-\frac{7}{13}$	-1	$\frac{8}{13}$	$-\frac{8}{13}$
x ₇	261 $\frac{7}{13}$	$-\frac{14}{13}$	$\frac{17}{26}$	$\frac{25}{13}$	0	$-\frac{7}{26}$	$\frac{7}{26}$
x ₈	215 $\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$-\frac{25}{26}$	$\frac{16}{13}$	0	$-\frac{5}{26}$	$\frac{5}{26}$
x ₉	276 $\frac{12}{13}$	$-\frac{9}{26}$	$-\frac{3}{52}$	$\frac{15}{13}$	0	$-\frac{11}{52}$	$\frac{11}{52}$
x ₁₀	92 $\frac{4}{13}$	$\frac{18}{13}$	$-\frac{105}{52}$	$-\frac{3}{26}$	0	$-\frac{21}{52}$	$\frac{21}{52}$
x ₁₁	500	0	-0,5	1	0	-0,5	0,5
x ₁₂	153 $\frac{11}{13}$	$-\frac{9}{13}$	$\frac{49}{26}$	$-\frac{22}{13}$	0	$-\frac{11}{26}$	$\frac{11}{26}$
x ₁₃	107 $\frac{9}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{7}{26}$	$-\frac{23}{26}$	0	$-\frac{9}{26}$	$\frac{9}{26}$
P ₁	-2307 $\frac{9}{13}$	$-\frac{21}{13}$	$-\frac{10}{13}$	$-\frac{8}{13}$	0	$-\frac{15}{13}$	$\frac{15}{13}$

	L.n.	x ₁	x ₂	x ₃	x ₅	x ₆	x ₁₀
x ₄	85 $\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{2}{21}$
x ₁₈	371 $\frac{3}{7}$	$\frac{11}{7}$	-2	$-\frac{5}{7}$	-1	0	$\frac{32}{21}$
x ₇	200	-2	2	2	0	0	$-\frac{2}{3}$
x ₈	171 $\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	0	0	$-\frac{10}{21}$
x ₉	228 $\frac{4}{7}$	$\frac{15}{14}$	1	$\frac{17}{14}$	0	0	$-\frac{11}{21}$
x ₂₀	228 $\frac{4}{7}$	$\frac{24}{7}$	-5	$-\frac{2}{7}$	0	-1	$\frac{52}{21}$
x ₁₁	385 $\frac{5}{7}$	$-\frac{12}{7}$	2	$\frac{8}{7}$	0	0	$-\frac{26}{21}$
x ₁₂	57 $\frac{1}{7}$	$\frac{15}{17}$	4	$-\frac{11}{7}$	0	0	$-\frac{22}{21}$
x ₁₃	28 $\frac{4}{7}$	$-\frac{15}{14}$	2	$-\frac{11}{14}$	0	0	$-\frac{6}{7}$
P ₁	-2571 $\frac{3}{7}$	$-\frac{39}{7}$	5	$-\frac{2}{7}$	0	0	$-\frac{20}{7}$

Iš šių lentelių matome, kad nagrinėjamu atveju pirmosios medžiagos atsargas būtų tikslinga padidinti $492 \frac{4}{13}$ vieneto, t. y. iki $1492 \frac{4}{13}$ vieneto, o antrosios – $438 \frac{6}{13}$ vieneto, t. y. iki $2438 \frac{6}{13}$ vieneto. Tuomet ketvirtojo tipo įrengimų darbo laiko fondas būtų pilnai sunaudotas, nes $x_{12}^{(opt)}=0$. Taip pat būtų pilnai sunaudotos trečiosios medžiagos atsargos ir sunaudoti antrojo bei penktojo tipų įrengimų darbo laiko fondai. Visa tai duotų pelno padidėjimą net $722 \frac{94}{273}$ vieneto, t. y. nuo $2023 \frac{17}{21}$ iki $2746 \frac{2}{13}$ vieneto. Kapitalo investavimo efektyvumas šiek tiek sumažėtų ir taptų lygus

$$E = \frac{38 \frac{6}{13} \cdot 5 + 61 \frac{7}{13} \cdot 4 + 76 \frac{12}{13} \cdot 30}{38 \frac{6}{13} \cdot 55 + 61 \frac{7}{13} \cdot 81 + 76 \frac{12}{13} \cdot 370} \approx 0,07722 \approx 7,75\%.$$

Norėdami pelną padidinti dar daugiau, turėtume padidinti jau ne tik b_1 ir b_2 , bet taip pat dar kuri nors iš dydžių b_3 , T_2 , T_4 , T_5 ar kurią nors jų grupę, ar net visus tuos dydžius kartu.