

15: tiesė $b_{21} = \frac{13}{19}b_{11}$ – trijų tiesių ($b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir $x_2 = 0$) susikirtimo taškų atvaizdas, vaizduojantis sąlygą, kurią turi tenkinti parametrai b_{11} ir b_{21} , kad minėtosios trys tiesės kirstųsi, besikeičiant b_{11} ir b_{21} ;

16: tiesė $b_{21} = 2b_{11}$ – trijų tiesių ($b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir $x_2 = 5$) susikirtimo taškų atvaizdas, vaizduojantis tų tiesių susikirtimo sąlygą;

17: tiesių $b_{21} = \frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11}$ ir $b_{21} = \frac{13}{6}$ susikirtimo taškas, turintis koordinatės $b_{11} = \frac{13}{15}$, $b_{21} = \frac{13}{6}$; kai $b_{21} = \frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11}$, tai pirmojo tipo vienodo pelno tiesės tampa lygiagrečios tiesėms $b_{21}x_1 + x_2 = 13$, o kai $b_{21} = \frac{13}{6}$ ir $0 \leq b_{11} \leq \frac{13}{5}$, tai $x_1^{(opt)} = 6$; $x_2^{(opt)} = 0$, t. y. optimumo taškas yra trijų tiesių ($b_{11}x_1 + x_2 = 13$, $x_1 = 6$ ir $x_2 = 0$) susikirtimo taškas.

Apibendrinami tai, kas pavaizduota 344 pav., matome, jog egzistuoja devynios skirtingos sritys – taškų, vaizduojančių optimalius sprendinius, koordinačių reikšmių **apskaičiavimo formulių stabilumo (tų formulių izomorfizmo) zonas**:

1) **sritis A**, kurioje optimalus sprendinys – taško A koordinatės $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; šią sritį aprašo predikatas $A(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[(0 \leq b_{11} \leq 7,8) \wedge \left(b_{21} \geq \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right) \right] \vee [(b_{11} \geq 7,8) \wedge (b_{21} \geq 0)] \right\}$; kai parametrai b_{11} ir b_{21} reikšmės tenkina šį predikatą (t. y. kai jo reikšmė tampa lygi loginiam vienetui), tai $x_1^{(opt)}(b_{11}, b_{21}) = x_1^{(A)} = 0$, $x_2^{(opt)}(b_{11}, b_{21}) = x_2^{(A)} = 5$;

2) **sritis 1.B $\cup$ 3.B**, kurią galima sutrumpintai pažymėti tiesiog **B**; joje optimumo taškai – taškai B*, kurių koordinatės apskaičiuojamos, naudojantis formulėmis $x_1^{(opt)}(b_{11}, b_{21}) = x_1^{(B^*)}(b_{11}, b_{21}) = \frac{4}{b_{11}}$, $x_2^{(opt)} = 5$; srities B ribas aprašo predikatas $B(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[\left(1 \frac{31}{86} \leq b_{11} < 1 \frac{4}{9} \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \leq b_{21} \leq 2b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(1 \frac{4}{9} \leq b_{11} \leq 4 \frac{19}{41} \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(4 \frac{19}{41} < b_{11} \leq \leq 5,85 \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right) \right] \vee \left[(5,85 < b_{11} < 7,8) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right) \right] \right\}$;

3) **sritis 3C**, kurią sutrumpintai galima pavadinti **C** ir kurioje optimumo taškai – tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškai C*, turintys koordinatės $x_1^{(C^*)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2^{(C^*)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$; šią sritį aprašo predikatas $C(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[\left(1 \frac{2}{37} < b_{11} < 1 \frac{31}{86} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11} < b_{21} \leq 2b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(1 \frac{31}{86} \leq b_{11} \leq 2 \frac{5}{93} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(2 \frac{5}{93} < b_{11} < 2 \frac{55}{93} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \right) \right] \right\}$;

4) **sritis 2.1.D $\cup$ 3.1.D**, kurią sutrumpintai galima pavadinti **D** ir kurioje optimumo taškai – tiesių $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo su tiesė $x_1 = 6$ taškai D*, turintys koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = 13 - 6b_{21}$; šios srities ribas apibrėžia predikatas $D(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{2}{3} \right) \wedge \left(\frac{4}{3} \leq b_{21} \leq \frac{13}{6} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{2}{3} \leq b_{11} \leq \frac{13}{15} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} \leq \frac{13}{6} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{13}{15} \leq b_{11} \leq \frac{191}{93} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} \leq \frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11} \right) \right] \right\}$;

5) **sritis 2.2. $\tilde{D}$** , kurią sutrumpintai galima pavadinti **$\tilde{D}$** ir kurioje optimumo taškai – tiesių $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo su tiesė $x_2 = 0$ taškai $\tilde{D}^*$, turintys koordinatės $x_1 = \frac{13}{b_{21}}$, $x_2 = 0$; šios srities ribas

apibrėžia predikatas $\tilde{D}(b_{11}, b_{21}) = \left(0 \leq b_{11} \leq \frac{13}{15}\right) \wedge \left(\frac{13}{16} \leq b_{21} \leq \frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11}\right)$;

6) **sritis 1.1.F, kurią sutrumpintai galima pavadinti F** ir kurioje optimumo taškai – tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ susikirtimo su tiese $x_1 = 6$ taškai F^* , turintys koordinates $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{19 - 6b_{11}}{3}$; šios srities

ribas apibrėžia predikatas $F(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[\left(\frac{2}{3} \leq b_{11} \leq \frac{241}{93} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{241}{93} < b_{11} < \frac{19}{6} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \right\}$;

7) **sritis 1.2. $\tilde{F}$, kurią sutrumpintai galima pavadinti $\tilde{F}$** ir kurioje optimumo taškai – tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ susikirtimo su tiese $x_2 = 0$ taškai $\tilde{F}^*$, turintys koordinates $x_1 = \frac{19}{b_{11}}$, $x_2 = 0$; šios srities ribas

apibrėžia predikatas $\tilde{F}(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[\left(\frac{19}{6} \leq b_{11} \leq \frac{183}{41} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{183}{41} < b_{11} \leq 5,85 \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \right\}$;

8) **sritis 2.G, kurią sutrumpintai galima pavadinti G** ir kurioje optimumo taškai – tai tiesių $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo su tiese $x_2 = 5$ taškai G^* , turintys koordinates $x_1 = \frac{8}{b_{21}}$, $x_2 = 5$; šios srities ribas

apibrėžia predikatas $G(b_{11}, b_{21}) = \left\{ \left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{39}{37} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{39}{37} < b_{11} \leq \frac{13}{9} \right) \wedge \left(2b_{11} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \right\}$;

9) **sritis O, kurią galima vadinti dar ir sritimi H**, nes optimumo taškas joje visada yra taškas H, turintis koordinates $x_1 = 6$, $x_2 = 5$; šios srities ribas apibrėžia predikatas $H(b_{11}, b_{21}) = \left(0 \leq b_{11} \leq \frac{2}{3} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{4}{3} \right)$.

Galima sudaryti **optimalaus sprendinio $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ radimo algoritmą tam atvejui, kai keičiasi parametrai b_{11} ir b_{21}** . Tas algoritmas tinka ir plokštumos (b_{11}, b_{21}) bet kurio taško priskyrimui vienai ar kitai iš sričių A, B, C, D, $\tilde{D}$, F, $\tilde{F}$, G, H. Tokio algoritmo blokinė schema parodyta 345 pav.

Tuo ir baigsiu parametru b_{11} , b_{21} kitimo ir jų poveikio optimaliam sprendiniui nagrinėjimą, palikdamas skaitytojui jo rezultatų patikrinimą. Taip pat siūlau skaitytojui pabandyti rasti atsakymą į klausimą, kaip pasikeistų optimalūs sprendiniai ir optimalios tikslo funkcijos reikšmės visais čia išnagrinėtais atvejais, jei turimo kapitalo ribose būtų leidžiama parduoti ir pirkti medžiagas kainomis a_i , nurodytomis nagrinėjamo optimizavimo uždavinio sąlygose.

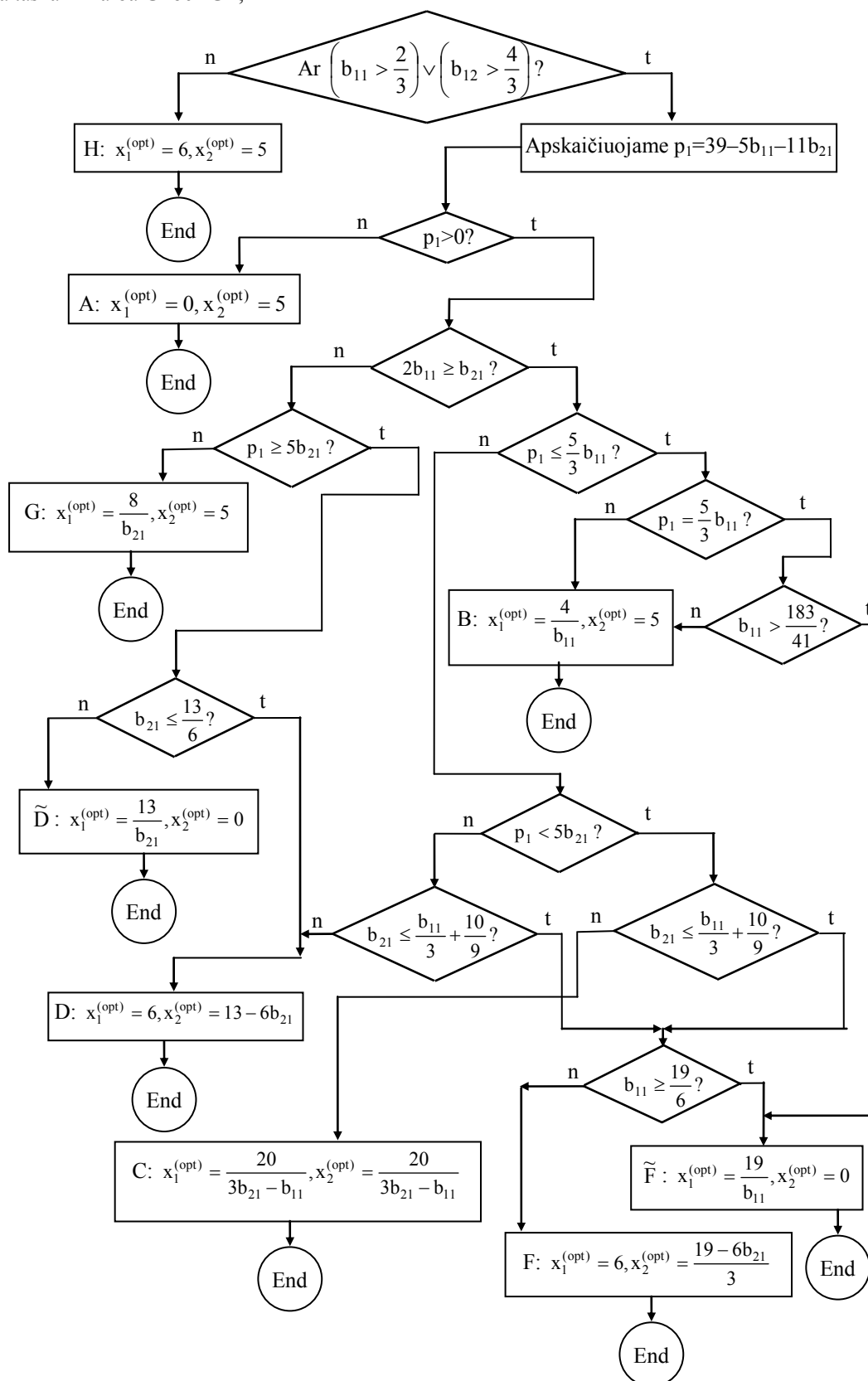
Palieku skaitytojui ir **situacijų, kai kartu kinta parametrai b_{12} ir b_{22} , nagrinėjimą**, nes tos situacijos skiriasi nuo ką tik aprašytųjų tik tuo, kad tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ pakeičiamos tiesėmis $2x_1 + b_{12}x_2 = 19$ ir $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$, o tikslo funkcija $P = p_1x_1 + 5x_2$ pakeičiama funkcija $P = 7x_1 + p_2x_2$, kur $p_2 = 31 - 5b_{12} - 11b_{22}$. Išlaidų funkcija $B = (61 - p_1)x_1 + 36x_2$ pakeičiama funkcija $B = 54x_1 + (41 - p_2)x_2$, lygybės $\frac{p_1}{5} = b_{21}$ ir $\frac{p_1}{5} = \frac{b_{11}}{3}$ pakeičiamos lygybėmis $\frac{p_2}{7} = \frac{b_{22}}{2}$ ir $\frac{p_2}{7} = \frac{b_{12}}{2}$, tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir

$b_{21}x_1 + x_2 = 13$ sukimasis aplink taškus $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{19}{3}$ ir $x_1 = 0$, $x_2 = 13$ pakeičiamas tiesių $2x_1 + b_{12}x_2 = 19$ ir $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ sukimusi aplink taškus $x_1 = 9,5$, $x_2 = 0$ ir $x_1 = 6,5$, $x_2 = 0$, o taškas A, turintis koordinates $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ pakeičiamas tašku E, turinčiu koordinates $x_1 = 6$, $x_2 = 0$.

Kaip ir parametru b_{11} , b_{21} kitimo atveju, gali būti išskirtos **keturios situacijos**:

- 1) kai tiesės $2x_1 + b_{12}x_2 = 19$ ir $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ neriboja LSS ir optimumo taškas yra taškas H;
- 2) kai LSS riboja tik tiesė $2x_1 + b_{12}x_2 = 19$, o tiesė $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ LSS neriboja ir optimumo taškai yra taškai F^* arba taškai B^* bei $\tilde{B}^*$;

3) kai LSS riboja tik tiesė $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$, o tiesė $2x_1 + b_{12}x_2 = 19$ LSS neriboją ir optimumo taškai yra taškai D^* arba G^* bei $\tilde{G}^*$;



345 pav.

4) Kai LSS riboja abi tiesės $2x_1 + b_{12}x_2 = 19$, $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ ir optimumo taškai yra taškai C^* arba D^* bei $\tilde{G}^*$.

Situacijos 1,2 ir 3 savo eile skaidomos į situacijas 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, o po to apskaičiuojama $\frac{p_2}{7} = \frac{31-5b_{12}-11b_{22}}{7}$ reikšmė ir nagrinėjami atvejai $\frac{p_2}{7} > \frac{b_{12}}{2}$, $\frac{p_2}{7} = \frac{b_{12}}{2}$, $0 < \frac{p_2}{7} < \frac{b_{12}}{2}$, $p_2 \leq 0$; $\frac{p_2}{7} > \frac{b_{12}}{2}$, $\frac{p_2}{7} = \frac{b_{12}}{2}$, $0 < \frac{p_2}{7} < \frac{b_{22}}{2}$, $\frac{b_{22}}{2} < \frac{p_2}{7} < \frac{b_{12}}{2}$, apskaičiuojamos $P^{(opt)}$ ir B reikšmės ir nustatomi optimumo taškai, t. y. išvedamos $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ apskaičiavimo formulės bei nustatomos sričių, kuriose tos formulės galioja, ribos.

Analogiškai galima išnagrinėti ir parametrų b_{ij} kitų porų kitimą ir to kitimo poveikį optimaliems sprendiniams. **Žymiai sudėtingiau nagrinėti atvejus, kai vienu metu kinta trijų (ir daugiau) parametrų reikšmės.** Pavyzdžiui, kai, keičiantis pirmojo gaminio gamybos technologijos, keičiasi parametrų b_{11} , b_{21} ir b_{41} reikšmės, tai tenka nagrinėti situacijas, kurios atsiranda kaip tiesių $2x_1+b_{12}x_2=19$ ir $2x_1+b_{22}x_2=13$ posūkio bei tiesės $b_{41}x_1=18$ poslinkio, o taip pat lyginamojo pelno $P_1=51-5b_{11}-11b_{21}-4b_{41}$ pokyčio rezultatas.

Taip pat žymiai sudėtingiau spręsti optimizavimo uždavinius ir nagrinėti jų sprendinių stabilumą ir jautrumą, kai valdomųjų kintamųjų x_j yra daugiau kaip 2. Tuomet grafiniai metodai tampa jau nebepraktiški ir tenka naudotis skaičiavimo matematikos metodais. Kai optimizavimo uždavinio apribojimais yra tiesinės lygybės ir nelygybės, o jo tikslo funkcija taip pat tiesinė, tai optimizavimo uždavinius spręsti ir analizuoti galima, naudojantis tiesinio programavimo metodais, pavyzdžiui, **simplekso algoritmu**. Kaip tai daroma, aprašysiu 1.15.5.4. skyrelyje.

1.15.5.3. skyrelyje buvo skirta gana daug dėmesio ir vietos **optimizacinio modelio ir optimizavimo uždavinio sprendinio jautrumo analizei**. Ta analizė bus pratęsta ir 1.15.5.4. skyrelyje, tik bus atliekama jau kitomis – universalesnėmis – priemonėmis.

Toks didelis dėmesys optimizacinio modelio bei jį atitinkančio optimalaus sprendinio analizei, to sprendinio jautrumo modelio parametrų pokyčiams nagrinėjimui čia skiriamas ne tik todėl, kad tokios analizės rezultatai labai reikalingi ir net būtini, norint pakankamai efektyviai pasinaudoti optimizavimo uždavinio sprendiniu, priimant valdymo sprendimus realioje besikeičiančioje situacijoje, bet dar ir dėl keturių kitų labai svarbių sistemotyros kursui priežasčių:

1) norima jau pirmojoje šios mokymo priemonės dalyje pademonstruoti pakankamai daug sisteminės analizės pavyzdžių, parodant, kaip sisteminiai analitikai sistemškai analizuoja ryšius tarp sistemos elementų ir nustato santykius (priklausomybes) tarp jų atributų bei atranda tų ryšių dėka atsirandančias sisteminės savybes bei dėsningumus, ir tokiu būdu konkretizuoti šios mokymo priemonės „Įvade“ įvestą sisteminės analizės sąvoką bei paruošti skaitytoją žymiai sudėtingesnei sudėtingų sistemų sisteminei analizei, kam antroje šios mokymo priemonės dalyje bus skirtas atskiras didelis skyrius, kuriame bus nagrinėjamos tokios svarbios sudėtingų sistemų sisteminės savybės kaip organizuotumas, labilumas, adaptyvumas, stabilumas, valdomumas, savivaldumas, gyvybingumas, patikimumas, autoregeneratyvumas ir t. t.;

2) stengiamasi parodyti, kad net tokioje visiškai paprastutėje sistemoje, aprašomoje tiesiniu optimizaciniu modeliu, turinčiu tik porą pagrindinių valdomųjų kintamųjų ir tik keturis apribojimus – tiesines nelygybes (neskaitant tokių apribojimų kaip valdomųjų kintamųjų bei kai kurių modelio parametrų neneigiamumas), sisteminiai analitikai sugeba pastebėti nemažai priklausomybių ir dėsningumų (kurie iš pirmo žvilgsnio nekrinta į akis ir dažnai net nebūna pastebimi), ir tokiu būdu siekiama, kad palaipsniui ugdytųsi skaitytojo suvokimas, jog sisteminė analizė – galingas pasaulio ir jo dėsningumų pažinimo instrumentas, ypatingai reikalingas ir efektyvus sudėtingų sistemų nagrinėjime;

3) norima pailustruoti konkrečiu pavyzdžiu, kuo užsiima ir kokiais metodais naudojasi šios mokymo priemonės „Įvade“ paminėtas **operacijų tyrimo (OT) mokslas**, įeinantis į sisteminį sąjūdį kaip sisteminės analizės mokslų atstovas,

specializuojantysis sudėtingų sistemų bei procesų optimizavimo ir optimalių sprendinių analizės srityje; tuo pačiu norima supažindinti skaitytoją su vienu iš operacijų tyrimo instrumentų – **simplekso algoritmo – panaudojimu ne tik optimalaus sprendinio radimui bet ir to sprendinio stabilumo bei jo jautrumo sistemos S parametrų pokyčiams analizei**, tuo labiau, kad **optimizavimo metodų kurse neretai apsiribojama tik optimalių sprendinių paieškos algoritmais, neskiriant pakankamai dėmesio rastų optimalių sprendinių analizei**, nors praktiniame optimizavimo metodų taikyme tai labai svarbu, kadangi optimizuojamų sistemų bei procesų parametrai nuolat kinta ir todėl ką tik rasti optimalūs sprendiniai, pasikeitus sąlygoms, gali tapti jau nebeoptimalūs ar net nerealizuojami; šių eilučių autorius tikisi, kad studentų supažindinimas su sisteminės analizės metodais pravers studijuojant operacijų tyrimą, nes, jau mokant naudotis tokiais metodais, bus galima daugiau laiko skirti konkrečių situacijų bei operacijų specifiniam (funkciniam ir objektiniam) tyrimui ir patį tą tyrimą padaryti visapusiškesnį ir gilesnį, daugiau atsižvelgiantį į realias gyvenimo sąlygas;

4) norima parodyti, kad **sisteminė analizė reikalauja daug kruopštaus juodo darbo, sudėtingų skaičiavimų, daugybės variantų analizės**, t. y., kad naujos savybės ir dėsningumai surandami tik didelio darbo rezultate, ir todėl **sisteminiai analitikai turi būti tam pasirengę ir tokio darbo nebijoti**.

1.15.2.4. Tiesinio programavimo uždavinių sprendimo ir sprendinių analizės, naudojantis simplekso algoritmu, pavyzdžiai

1.15.2.3.2. ir 1.15.2.3.3. skyreliuose optimizavimo uždavinio sprendimui ir gauto optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizei buvo taikomi grafiniai metodai, nes jie gerai tinka optimizavimo uždavinių sprendimo ir gautų sprendinių analizės procesų esmės atskleidimui ir tų procesų aprašymui reikalingų specialių sąvokų įvedimui, tų sąvokų turinio išaiškinimui.

Tačiau grafiniai metodai turi tik gana siaurą praktinio taikymo sritį, nes jais galima naudotis tik tada, kai optimizacinio modelio valdomųjų kintamųjų erdvė turi ne daugiau nei 3 matavimus, o patogiau naudotis tik tada, kai tos erdvės matavimų skaičius nėra didesnis už 2.

Tuo tarpu realūs optimizavimo uždaviniai, kurių sprendimas galėtų duoti praktinę naudą, dažniausiai būna žymiai sudėtingesni: jų modelių valdomųjų kintamųjų skaičius būna ne tik didesnis už 2 ar 3, bet kartais gali būti matuojamas ne tik dešimtimis, bet ir šimtais ar net tūkstančiais.

Tokių optimizavimo uždavinių sprendimui sukurti specialūs metodai. Daugiamačių tiesinių optimizavimo uždavinių sprendimui labai dažnai taikomas **simplekso metodas**. Šio metodo pavadinimas kilęs iš lotyniško žodžio „simplex“ (t. y. „paprastas“) ir buvo pavartotas todėl, kad matematikoje žodis „simpleksas“ reiškia paprasčiausią iškiląjį daugiasienį, kuriais naudojantis galima apibrėžti tiesinio optimizavimo uždavinio LSS ir nustatyti n -matės euklidinės erdvės tašką, vaizduojantį optimalų sprendinį ne tik tada, kai $n \leq 3$ ir simpleksai yra trimačiai tetraedrai ar dvimačiai trikampiai bei vienmatės atkarpos, bet ir tada, kai n yra bet kuris sveikas teigiamas baigtinis skaičius.

Šiame skyrelyje aš nekartosiu matematinės simplekso metodo teorijos, dėstomos specialiaame „Matematinis optimizavimo metodų“ kurse. Simplekso metodo esmę aiškinsiu, sprendamas tuo metodu optimizavimo uždavinį, jau išspręstą grafiniu metodu 1.15.2.3.2. skyrelyje, ir komentuodamas sprendimo procesą paaiškinimais, aprašančiais ir pagrindžiančiais **simplekso algoritmu**. Manau, kad toks supažindinimo

su simplekso metodu būdas, iliustruojant simplekso algoritmo aprašymą konkrečiu jo taikymo pavyzdžiu ir sugretinant simplekso algoritmo taikymą su grafinio metodo taikymu, daugumai skaitytojų bus lengviau suprantamas negu gana abstrakčių operacijų, atliekamų daugiamatėje matematinėje erdvėje, ir jų rezultatų gana abstraktūs aprašymai. Prie tokių apibendrintų aprašymų, mano nuomone, tikslinga eiti ne iškart, o tik po to, kai skaitytojas įgyja šiokių tokių intuityvų suvokimą apie dėstomo metodo esmę ir pajunta reikiamybę įsitikinti to metodo universalumu ar tiksliau apibrėžti to metodo taikymo sritį ir jo galimybes. Todėl tikiuosi, jog, išstudijavus šį skyrelį, skaitytojui bus daug lengviau suprasti ir apibendrintą abstraktų simplekso metodo aprašymą standartiniuose „Matematinų optimizavimo metodų“ vadovėliuose, jei jam kada nors tektų su jais susidurti. Svarbu dar ir tai, kad skaitytojas šiame skyrelyje ras nemažai tokios informacijos, kurios tuose vadovėliuose nėra, nors tokia informacija gana naudinga, nes pagilina simplekso metodo esmės supratimą ir padeda tą metodą taikyti žymiai kūrybiškiau, plačiau ir efektyviau.

1.15.2.4. skyrelį suskaidysiu į du antrojo lygio skyrelius: 1.15.2.4.1. ir 1.15.2.4.2. Pirmasis antrojo lygio skyrelis skiriamas tiesinio optimizavimo uždavinio sprendimui simplekso metodu ir simplekso algoritmo aprašymui bei pagrindimui, parodant, kad simplekso lentelės yra tiesinių lygčių sistemos kompaktiško užrašymo formos, o perėjimai nuo vienos simplekso lentelės prie kitos – tiesinių lygčių sistemos transformacijos, sukeičiant vieną laisvąją ir vieną bazinį valdomus kintamuosius vietomis. Antrasis – 1.15.2.4.2. – antrojo lygio skyrelis skiriamas simplekso metodo taikymams, atliekant optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizę. Jame pateikiama daug tokios analizės pavyzdžių, analogiškų 1.15.2.3.3. skyrelio pavyzdžiams.

1.15.2.4.1. Tiesinio optimizavimo uždavinio sprendimo simplekso metodu pavyzdys

Naudojantis simplekso algoritmu, optimizavimo uždavinio matematinis modelis turi būti pateiktas taip vadinamoje **kanoninėje formoje**. Šioje formoje visos nelygybės, išskyrus nelygybes $x_j \geq 0$, transformuojamos į lygybes. Tai padaroma, įvedant neneigiamus **papildomus valdomus kintamuosius**.

Pavyzdžiui, mūsų jau nagrinėtojo optimizavimo uždavinio nelygybių sistema transformuojama į lygybių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 \leq 18 \end{cases} \quad \text{transformuojama į lygybių sistemą} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18, \end{cases} \quad \text{kurioje papildomi valdomi}$$

kintamieji $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ vaizduoja atitinkamų medžiagų likučius. Jie gali likti, pagaminus x_1 pirmojo tipo ir x_2 antrojo tipo gaminių, ir gali būti apskaičiuoti, naudojantis iš minėtos lygybių sistemos

išplaukiančiomis formulėmis, sudarančiomis lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_3 = 19 - (2x_1 + 3x_2), \\ x_4 = 13 - (2x_1 + x_2), \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1, \end{cases} \quad \text{kurį pavadinsime}$$

pirmąją simplekso algoritmo lygčių sistemą, nes ji atitinka pirmąją simplekso lentelę (žiūr. 123-ją lentelę).

Šioje sistemoje **pagrindiniai valdomi kintamieji** x_1 ir x_2 vadinami **laisvaisiais kintamaisiais**, o x_3, x_4, x_5, x_6 – **baziniais kintamaisiais**. Pastarųjų reikšmės surandamos, pasirinkus leistinas laisvųjų kintamųjų reikšmes, t. y. reikšmes, priklausančias LSS, ir įstačius jas į pirmąją lygčių sistemą.

Simplekso algoritmas ieško optimalaus sprendinio apeidamas daugiasienio, vaizduojančio LSS (333 pav. tai daugiakampis ABCDEO), viršūnes, ir paiešką pradeda nuo koordinatinių sistemos pradžios.

Kadangi $x_1=0, x_2=0$ yra leistinos laisvųjų kintamųjų reikšmės (jos atitinka atvejį, kai nieko negaminama) ir gautos bazinių kintamųjų x_3, x_4, x_5, x_6 reikšmės $x_3=19, x_4=13, x_5=15, x_6=18$ taip pat yra leistinos (kai nieko negaminama, tai medžiagų likučiai yra lygūs jų atsargoms), tai gautas vektorius

$\bar{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(0;0;19;13;15;18)$ – yra **leistinas uždavinio sprendinys** (leistinas gamybos planas). Tikslo funkcijos reikšmė tuomet $P=7x_1+5x_2=0$, nes nieko negaminant ir pelno negaunama.

Didindami laisvųjų kintamųjų x_1, x_2 reikšmes, t. y. gamindami daugiau produkcijos, galime pelną didinti, tačiau x_1 ir x_2 galima didinti tik iki tol, kol bazinių kintamųjų reikšmės vis dar lieka neneigiamos (t. y. iki tol, kol dar užtenka turimų medžiagų atsargų.).

Pavyzdžiui, jei nekeistume x_2 reikšmės, palikdami ją lygiai 0, o didintume tik x_1 , tai maksimali leistina x_1 reikšmė lygtyje $x_3=19-(2x_1+3x_2)$ būtų lygi $\frac{19-x_3^{(\min)}}{2}=9,5$, lygtyje $x_4=13-(2x_1+x_2)$ būtų lygi $\frac{13-x_4^{(\min)}}{2}=6,5$, lygtyje $x_5=15-3x_2$ galėtų būti, kiek norima, didelė, lygtyje $x_6=18-3x_1$, būtų lygi $\frac{18-x_6^{(\min)}}{3}=6$.

Kad **visų** bazinių kintamųjų x_3, x_4, x_5, x_6 reikšmės išliktų leistinos, t. y. neneigiamos, iš ką tik apskaičiuotų maksimalių x_1 reikšmių pasirenkame minimalią reikšmę, vadinamą **minimaksine**: $\min x_1=\min(9,5; 6,5; +\infty; 6)=6$.

Taip elgiamės todėl, kad tik tuomet, kai $x_1=6, x_2=0$, visų bazinių kintamųjų reikšmės išlieka neneigiamos: $x_3=19-(2x_1+3x_2)=7, x_4=13-(2x_1+x_2)=1, x_5=15-3x_2=15, x_6=18-3x_1=0$.

Jei vietoj minimaksinės reikšmės būtume pasirinkę kurią nors kitą ką tik apskaičiuotą maksimalią x_1 reikšmę, pavyzdžiui, $x_1=9,5$, tai būtume gavę, jog $x_3=0, x_4=-6, x_5=15, x_6=-10,5$, t. y. būtume gavę neleistinas kai kurių bazinių kintamųjų reikšmes.

Didindami x_1 reikšmę nuo 0 iki leistos minimaksinės reikšmės $\min x_1=6$, galėtume padidinti pelną nuo $P=7 \cdot 0+5 \cdot 0=0$ iki $P=7 \cdot 6+5 \cdot 0=42$.

Kadangi iš lygties $x_6=18-3x_1$ gauname, kad $x_1=\frac{18-x_6}{3}$, tai, norėdami padidinti x_1 nuo 0 iki 6 ir pelną P nuo 0 iki 42, turime sumažinti leistiną x_6 reikšmę nuo 18 iki 0. Kad galėtume tai padaryti matematiškai, turime kintamuosius x_1 ir x_6 sukeisti vietomis: kintamąjį x_6 padaryti laisvuju, o kintamąjį x_1 – baziniu.

Pakeisdami senąjį laisvąjį kintamąjį x nauju laisvuju kintamuoju x_6 , t. y., įstatydami į senąją lygčių sistemą vietoj x_1 jo reikšmę $x_1=\frac{18-x_6}{3}$, gauname antrąją lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_3=19-\left(2 \cdot \frac{18-x_6}{3}+3x_2\right)=7-\left(-\frac{2}{3}x_6+3x_2\right), \\ x_4=13-\left(2 \cdot \frac{18-x_6}{3}+x_2\right)=1-\left(-\frac{2}{3}x_6+x_2\right), \\ x_5=15-3x_2, \\ x_1=6-\frac{1}{3}x_6, \\ P=7 \cdot \frac{18-x_6}{3}+5x_2=42-\frac{7}{3}x_6+5x_2. \end{cases}$$

Joje x_6, x_2 – nauji laisvieji kintamieji, o x_3, x_4, x_5, x_1 – nauji baziniai kintamieji. Laisvųjų kintamųjų reikšmėms esant lygioms nuliui, gauname naują leistiną sprendinį $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(6;0;7;1;15;0)$, kuri atitinka tikslo funkcija $P=42-\frac{7}{3}x_6+5x_2$ ir pelnas $P=42$.

Ši lygčių sistema atitinka antrąją simplekso lentelę (žiūr. 124-ąją lentelę) ir vaizduoja leistiną sprendinį, kurio grafinis atvaizdas yra taškas E (žiūr. 333 ir 334 pav.).

Kaip matome iš tikslo funkcijos formulės, pelną galima dar padidinti, didinant kintamojo x_2 reikšmę ir pervedant šį kintamąjį iš laisvųjų į bazinius kintamuosius.

Maksimali leistina x_2 reikšmė lygi $\min x_2=\min\left(\frac{7}{3};1;5;+\infty\right)=1$. Ji gaunama, kai $x_4=0, x_6=0$ lygybėje $x_4=1-\left(-\frac{2}{3}x_6+x_2\right)$.

Laisvąjį kintamąjį x_2 sukeičiame vietomis su baziniu kintamuoju x_4 , pasinaudodami jau minėta lygybe, iš kurios išplaukia lygybė $x_2=1-\left(-\frac{2}{3}x_6+x_4\right)$.

$$\text{Gauname trečiąją lygčių sistemą: } \begin{cases} x_3 = 7 - \left[-\frac{2}{3}x_6 + 3\left(1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4\right) \right] = 4 - \left(\frac{4}{3}x_6 - 3x_4\right), \\ x_2 = 1 - \left(-\frac{2}{3}x_6 + x_4\right), \\ x_5 = 15 - 3\left(1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4\right) = 12 - (2x_6 - 3x_4), \\ x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6, \\ P = 42 - \frac{7}{3}x_6 + 5\left(1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4\right) = 47 + x_6 - 5x_4. \end{cases}$$

Ši sistema atitinka trečiąją simplekso lentelę (žiūr. 125-ąją lentelę).

Naujas leistinas sprendinys yra $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6; 1; 4; 0; 12; 0)$, o jį atitinkantis pelnas yra $P=47$. Šį sprendinį vaizduoja taškas D (žiūr. 334 pav.).

Kaip matyti iš tikslo funkcijos formulės $P=47+x_6-5x_4$, pelną galima padidinti, didinant laisvojo kintamojo x_6 reikšmę. Maksimali leistina x_6 reikšmė yra $\text{minimax } x_6 = \min(3; +\infty; 6; 18) = 3$, kuri gaunama, kai $x_3=0, x_4=0$ lygybėje $x_3 = 4 - \left(\frac{4}{3}x_6 - 3x_4\right)$.

Kintamuosius x_3 ir x_6 sukeičiame vietomis, naudodamiesi formule $x_6 = 3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4$.

$$\text{Gauname ketvirtąją lygčių sistemą: } \begin{cases} x_6 = 3 - \left(\frac{3}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_4\right), \\ x_2 = 1 - \left[-\frac{2}{3}\left(3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4\right) + x_4\right] = 3 - \left(\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right), \\ x_5 = 12 - \left[2\left(3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4\right) - 3x_4\right] = 6 - \left(-\frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right), \\ x_1 = 6 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4\right) = 5 - \left(-\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4\right), \\ P = 47 + 1\left(3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4\right) - 5x_4 = 50 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{11}{4}x_4, \end{cases}$$

atitinkančią ketvirtąją simplekso lentelę (žiūr. 126-ąją lentelę).

Naujas leistinas sprendinys yra optimalus, nes iš tikslo funkcijos formulės $P = 50 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{11}{4}x_4$ matyti, jog, didinant laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_4 reikšmes, pelnas tik mažėtų, ir todėl maksimalus pelnas gaunamas būtent tada, kai $x_3=0$ ir $x_4=0$. Jis lygus $P^{(\max)}=50$. Optimalų sprendinį $\bar{x}^{(\text{opt})} = (x_1^{(\text{opt})}, x_2^{(\text{opt})}, x_3^{(\text{opt})}, x_4^{(\text{opt})}, x_5^{(\text{opt})}, x_6^{(\text{opt})}) = (5; 3; 0; 0; 6; 3)$ 334 pav. vaizduoja taškas C.

Lygčių pertvarkymus, keičiant laisvuosius ir bazinius kintamuosius ir artėjant prie optimalaus gamybinio plano, galima daryti žymiai kompaktiškiau, patogiau ir greičiau, atliekant skaičiavimus su lygčių koeficientų ir laisvųjų narių matricomis – simplekso algoritmo lentelėmis, kaip tai parodyta 123-126 lentelėse.

123. lentelė

B.k\L.k	L.n	x_1	x_2
x_3	19	2	3
x_4	13	2	1
x_5	15	0	3
x_6	18	3	0
P_1	0	7	5

124. lentelė

B.k\L.k	L.n	x_6	x_2
x_3	7	$-\frac{2}{3}$	3
x_4	1	$-\frac{2}{3}$	1
x_5	15	0	3
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	-42	$-\frac{7}{3}$	5

125. lentelė

B.k\L.k	L.n	x_6	x_4
x_3	4	$\frac{4}{3}$	-3
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	1
x_5	12	2	-3
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	-47	1	-5

Trumpai aprašysiu, kaip buvo gautos šios lentelės, atvaizduojančios pradinės lygčių sistemos pertvarkymo į galutinę lygčių sistemą, vaizduojančią optimalų sprendinį, etapus.

Visų pirma, sudarant šias lenteles, maksimizavimo uždavinys buvo transformuotas į minimizavimo uždavinį, įvedant naują tikslo funkciją $P_1 = -P = 0 - (7x_1 + 5x_2) \rightarrow \min_{x_1, x_2}$.

126. lentelė

BVL	L.n	x_3	x_4
x_6	3	0,75	-2,25
x_2	3	0,5	-0,5
x_5	6	-1,5	1,5
x_1	5	-0,25	0,75
P_1	-50	-0,75	-2,75

Tuomet pirmosios lygčių sistemos visų lygčių forma tapo

$$\text{vienoda: } \begin{cases} x_3 = 19 - (2x_1 + 3x_2), \\ x_4 = 13 - (2x_1 + x_2), \\ x_5 = 15 - (0 \cdot x_1 + 3x_2), \\ x_6 = 18 - (3x_1 + 0 \cdot x_2), \\ P_1 = 0 - (7x_1 + 5x_2). \end{cases}$$

Po to šių lygčių laisvieji nariai ir nežinomųjų koeficientai su jų ženklais buvo surašyti į 123-ją lentelę (žiūr. 123-ją lentelę, atkreipkite dėmesį į ženklus).

Kadangi šioje lentelėje tikslo funkcijos P_1 eilutėje laisvųjų kintamųjų koeficientai – teigiami skaičiai, tai iš to buvo padaryta išvada, jog, didinant bet kurio laisvojo kintamojo reikšmę, galima mažinti tikslo funkcijos P_1 reikšmę, tuo pačiu didinant pelną $P = -P_1$.

Pasirinkome didinamą **vedančiuoju laisvuoju kintamuoju** kintamąjį x_1 (o jo stulpelį – **vedančiuoju stulpeliu**) ir dalinome apribojimus vaizduojančių lygčių laisvuosius narius iš tų lygčių teigiamų koeficientų, stovinčių vedančiojo kintamojo x_1 stulpelyje, norėdami nustatyti minimaksinę x_1

reikšmę, t. y. ieškodami **vedančiosios eilutės, kurioje dalmuo $\frac{b_i}{b_{i1}}$ būtų mažiausias** (pagalvokite ir

prisiminkite, kodėl ieškoma **mažiausio** dalmens).

Tokia eilutė pasirodė esanti eilutė, priklausanti baziniam kintamajam x_6 . Taip suradome vedančiąsias eilutes ir vedančiojo stulpelio susikirtimo vietoje esantį **vedantįjį lentelės elementą**, kurį pažymėjome langelio fono patamsinimu.

Pereidami nuo 123-sios lentelės prie 124-sios lentelės, **vedančiojo stulpelio** ir **vedančiosios eilutės** kintamuosius x_1 ir x_2 **sukeitėme vietomis**, o vedančiojo elemento **atvirkštinę reikšmę** įrašėme į atitinkamą 124-sios lentelės langelį. Kitus **vedančiosios eilutės elementus, padalinę juos iš vedančiojo elemento reikšmės**, perrašėme į 124-ją lentelę. Vedančiojo stulpelio elementus taip pat **padalinome iš vedančiojo elemento ir tuos dalmenis, pakeitę jų ženklus į priešingus**, perrašėme į 124-sios lentelės atitinkamą stulpelį (kintamojo x_6 stulpelį). Visus kitus 124-sios lentelės elementus e_{ij} , kur i – eilutės

numeris, o j – stulpelio numeris, suradome, naudodamiesi „**kryžmine formule**“ $e'_{ij} = \frac{e_{ij} \cdot e_{i^*j^*} - e_{i^*j} \cdot e_{ij^*}}{e_{i^*j^*}}$,

kur e_{ij} – atitinkamas 123-sios lentelės elementas, stovintis toje pačioje eilutėje i ir tame pačiame stulpelyje j , kaip ir 124-sios lentelės elementas e'_{ij} , i^* – vedančiosios eilutės numeris, j^* – vedančiojo stulpelio numeris, $e_{i^*j^*}$ – vedantysis elementas, e_{i^*j} – elementas, priklausantis vedančiajai eilutei ir stovintis tame pačiame stulpelyje, kaip ir apskaičiuojamasis elementas, e_{ij^*} – elementas, priklausantis vedančiajam stulpeliui ir stovintis toje pačioje eilutėje, kaip ir apskaičiuojamasis elementas e'_{ij} .

„Kryžminę formulę“ galima supaprastinti: $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{e_{i^*j} \cdot e_{ij^*}}{e_{i^*j^*}}$.

Primygtinai rekomenduojau skaitytojui **palyginti 124-osios simplekso lentelės gavimo iš 123-osios lentelės procesą su šiame skyrelyje šiek tiek anksčiau aprašytu antrosios lygčių sistemos gavimo iš pirmosios lygčių sistemos procesu** ir įsitikinti, jog čia aprašytas antrosios (t. y. 124-osios) simplekso lentelės elementų apskaičiavimo algoritmas, kurio sudėtinės dalys yra ir pirmosios simplekso lentelės (t. y. 123-osios lentelės) **vedančiojo elemento reikšmės pakeitimas jo atvirkštine reikšme**, ir visų kitų pirmosios lentelės **vedančiosios eilutės elementų dalinimas iš vedančiojo elemento**, ir visų kitų **vedančiojo stulpelio elementų dalinimas iš vedančiojo elemento, keičiant gaunamo dalmens ženklą**, ir visų likusių **antrosios simplekso lentelės elementų apskaičiavimas, taikant „kryžminę formulę“**, yra naujos (šiuo konkrečiu atveju – antrosios) **lygčių sistemos koeficientų apskaičiavimo algoritmas**, kuriuo naudojotės, transformuodami senosios (šiuo konkrečiu atveju – pirmosios) lygčių sistemos lygtis į naujosios sistemos lygtis.

Formalų šio teiginio įrodymą gautume, atlikę lygčių sistemų transformaciją, apskaičiuodami naujosios lygčių sistemos koeficientus tuo atveju, kai senosios lygčių sistemos koeficientai būtų užrašyti simbolinėje formoje (t. y. ne skaičiais, o raidėmis). Jei skaitytojas, bandydamas atlikti tokią transformaciją, susidurtų su kokiais nors neaiškumais, jis galėtų pasižiūrėti, kaip tokia transformacija

atliekama knygoje [47], kurioje pateiktas gana paprastai ir aiškiai išdėstytas simplekso algoritmo aprašymas. Šioje knygoje skaitytojas ras ir kitos naudingos, gana suprantamai ir nuosekliai išdėstytos, informacijos. Nuorodas į knygą [47] šioje mokymo priemonėje pastabus skaitytojas galėjo pastebėti ir anksčiau (pavyzdžiui, 1.4. ir 1.14. skyriuose).

124-joje lentelėje tik vienas tikslo funkcijos koeficientų liko teigiamas. Todėl vedančiuoju stulpeliu j^* galėjo būti tik vienas stulpelis – kintamojo x_2 stulpelis. Dalindami iš to stulpelio teigiamų elementų apribojimų lygčių laisvuosius narius, suradome minimalų dalmenį ir vedančiąją eilutę. Tai kintamojo x_4 eilutė. Pažymėję vedantįjį elementą $e_{i^*j^*} = e_{4,2} = 1$ jo langelio fono patamsinimu ir, naudodamiesi jau aprašytu algoritmu, 124-ją lentelę transformavome į 125-ją lentelę, apskaičiuodami jos elementų e_{ij}^* reikšmes. Kadangi 125-sios lentelės tikslo funkcijos P_1 eilutėje dar buvo teigiamų koeficientų, tai dar buvo galima mažinti tikslo funkcijos P_1 reikšmę. Analogiškai suradome vedantįjį tos lentelės elementą $e_{i^*j^*} = e_{3,6} = \frac{4}{3}$ ir 125-ją lentelę transformavome į 126-ją. Joje **tikslo funkcijos eilutėje**

jau nebebuvo teigiamų elementų – koeficientų prie laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_4 . Tai parodė, kad **tikslo funkcijos P_1 reikšmė ($P_1=50$) jau pasiekė sąlyginį minimumą**, nes sumažinti tą reikšmę, didinant laisvųjų kintamųjų reikšmes, jau nebebuvo galima. Kitaip tariant, **šis požymis, vadinamas simplekso lentelės optimalumo pakankamu požymiu, parodė, jog 126-jį lentelę vaizduoja jau optimalų sprendinį, kuris gaunamas, kai $x_3=0$ ir $x_4=0$.**

Nagrinėjant šį optimizavimo uždavinio sprendimo pavyzdėlį, naudojantis simplekso metodu, buvo siekiama trijų tikslų:

1) aprašyti simplekso algoritmą ir pailustruoti, kaip juo naudojamas;
2) parodyti, iš kur algoritmas išplaukia, t. y. parodyti, kad **simplekso lentelių transformacijos yra optimizacinio modelio lygčių sistemos transformacijų, keičiant laisvuosius ir bazinius kintamuosius, matricinė išraiška, leidžianti tas transformacijas kompaktiškiau užrašyti ir „algoritmiškiau“ realizuoti;**

3) atkreipti skaitytojų dėmesį į tai, kad **optimalų sprendinį vaizduojančios simplekso lentelės (mūsų atveju – 126-sios lentelės) eilutės vaizduoja kompaktiškai užrašytas tikslo funkcijos ir bazinių kintamųjų optimalių reikšmių tiesines priklausomybes nuo laisvųjų kintamųjų reikšmių ir leidžia rasti optimalaus sprendinio, tikslo funkcijos ir kitų bazinių kintamųjų jautrumo laisvųjų kintamųjų pokyčiams koeficientus.***

Ties šiuo – trečiuoju – tikslu apsistosiu kiek detaliau, nes jis matematinėje literatūroje nėra taip plačiai nagrinėjamas, kaip pirmieji du. Tam skiriu atskirą 1.15.2.4.2. skyrelį.

1.15.2.4.2. Simplekso metodo taikymai optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizėje

Prisimindami, kad **simplekso lentelių eilutės yra kompaktiškai užrašytos lygtys** ir pasinaudodami 126-ąja lentele, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1^{(opt)} = 5 - (-0,25x_3 + 0,75x_4), \\ x_2^{(opt)} = 3 - (0,5x_3 - 0,5x_4), \\ x_5^{(opt)} = 6 - (-1,5x_3 + 1,5x_4), \\ x_6^{(opt)} = 3 - (0,75x_3 - 2,25x_4), \\ P_1^{(opt)} = -50 - (-0,75x_3 - 2,25x_4), \text{ t.y. } P^{(opt)} = 50 - (0,75x_3 + 2,25x_4). \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties, atsižvelgdami į tai, kad $\Delta x_3 = -\Delta b_1$, $\Delta x_4 = -\Delta b_2$, ir diferencijuodami tą

lygtį, gauname jautrumo koeficientų reikšmes $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = -0,25$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} = 0,75$, rodančias koordinačių x_1

ir x_2 optimalių reikšmių kitimo tempus, keičiantis pirmosios ir antrosios medžiagų atsargų dydžiams b_1 ir b_2 .

* Galima įrodyti, jog tiesines lygtis vaizduoja ne tik simplekso lentelių eilutės, bet ir tų lentelių stulpeliai, tik tos lygtys charakterizuoja jau kitą optimizavimo uždavinio matematinį modelį – dualų tam modeliui, kurį vaizduoja simplekso lentelės eilutės (žiūr. [128]).

Iš antrosios lygties analogiškai gauname: $\frac{\Delta x_2^{(opt)}}{\Delta b_1} = 0,5$, $\frac{\Delta x_2^{(opt)}}{\Delta b_2} = -0,5$, t. y. $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = -0,5$.

Atsižvelgdami į tai, kad $P_1 = -P$, gauname: $\frac{\partial P}{\partial b_1} = -\frac{\partial P_1}{\partial b_1} = 0,75$, $\frac{\partial P}{\partial b_2} = -\frac{\partial P_1}{\partial b_2} = 2,25$. Tai sutampa su rezultatais, gautais 1.15.5.3. skyrelyje.

Analogiškai gauname: $\frac{\partial x_5^{(opt)}}{\partial b_1} = -1,5$, $\frac{\partial x_5^{(opt)}}{\partial b_2} = 1,5$, $\frac{\partial x_6^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,75$, $\frac{\partial x_6^{(opt)}}{\partial b_2} = -2,25$.

Naudodamiesi simplekso algoritmu, galime rasti ne tik jautrumo koeficientus, bet ir jų stabilumo zonų ribas.

Pavyzdžiui, pažymėję Δb_1 žymeniu β_1 ir atlikę 127-sios simplekso lentelės transformaciją į 128-ją lentelę ta pačia tvarka, kokia buvo atlikta 123-osios lentelės transformacija į 124-ją, o po to analogiškai transformuodami 128-ją lentelę į 129-ją, po to – į 130-ją, paskutinės lentelės laisvųjų narių stulpelyje gausime algebrines sumas, kurias turėtų būti neneigiamos visiems baziniams kintamiesiems x_6, x_2, x_5, x_1 .

127. lentelė				128. lentelė				129. lentelė				130. lentelė			
B\L	x_1	x_2	L.n.	B\L	x_6	x_2	L.n.	B\L	x_6	x_4	L.n.	B\L	x_3	x_4	L.n.
x_3	2	3	$19+\beta_1$	x_3	$-\frac{2}{3}$	3	$7+\beta_1$	x_3	$\frac{4}{3}$	-3	$4+\beta_1$	x_6	0,75	-2,25	$3+0,75\beta_1$
x_4	2	1	13	x_4	$-\frac{2}{3}$	1	1	x_2	$-\frac{2}{3}$	1	1	x_2	0,5	-0,5	$3+0,5\beta_1$
x_5	0	3	15	x_5	0	3	15	x_5	2	-3	12	x_5	-1,5	1,5	$6-1,5\beta_1$
x_6	3	0	18	x_1	$\frac{1}{3}$	0	6	x_1	$\frac{1}{3}$	0	6	x_1	-0,25	0,75	$5-0,25\beta_1$
P_1	7	5	0	P_1	$-\frac{7}{3}$	5	-42	P_1	1	-5	-47	P_1	-0,75	-0,25	$-50-2,75\beta_1$

Prisimindami, kad simplekso lentelės eilutės yra lygtys, bei tai, kad optimumo taške laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_4 reikšmės yra lygios 0, o bazinių kintamųjų x_6, x_2, x_5 ir x_1 reikšmės besikeisdamos negali tapti neigiamos, gauname atitinkamas nelygybes, kurias spęsdami, mes rasime tą Δb_1 kitimo diapazoną, kuriame optimalaus sprendinio koordinatė x_6, x_2, x_5 ir x_1 jautrumo parametro b_1 pokyčiams Δb_1 koeficientai bus stabilūs:

$$1) \begin{cases} 3 + \frac{3}{4}\beta_1 \geq 0, \\ 3 + \frac{1}{2}\beta_1 \geq 0, \\ 6 - \frac{3}{2}\beta_1 \geq 0, \\ 5 - \frac{1}{4}\beta_1 \geq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \beta_1 \geq -4, \\ \beta_1 \geq -6, \\ \beta_1 \leq 4, \\ \beta_1 \leq 20; \end{cases} \quad 3) -4 \leq \beta_1 \leq 4, \text{ t. y. } 15 \leq b_1 \leq 23.$$

Iš gauto nelygybių sistemos sprendinio išplaukia, jog, kai b_1 keisis diapazone $[15;23]$, tai jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_6^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_5^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$ reikšmės nesikeis. Patys jautrumo koeficientai bus lygūs laisvųjų narių stulpelio koeficientams prie kintamojo β_1 (paaiškinkite, kodėl).

Analogiškai pakeitę 123-joje lentelėje senąją parametro b_2 reikšmę $b_2=13$ į naują to parametro reikšmę $b_2^{(n)}=13+\beta_2$ ir atlikę atitinkamas simplekso lentelių transformacijas, gausime nelygybių

$$\text{sistemą: 1) } \begin{cases} 5 + \frac{3}{4}\beta_2 \geq 0, \\ 6 + \frac{3}{2}\beta_2 \leq 0, \\ 3 - \frac{1}{2}\beta_2 \geq 0, \\ 3 - \frac{9}{4}\beta_2 \geq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \beta_2 \geq -\frac{20}{3}, \\ \beta_2 \geq -4, \\ \beta_2 \leq 6, \\ \beta_2 \leq \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Iš šios sistemos išplaukia: 1) $\Delta b_2 \in \left[-4; \frac{4}{3}\right]$, 2) $b_2 \in \left[9; 14\frac{1}{3}\right]$.

Lygiai taip pat galima rasti, jog $-6 \leq \beta_3 < +\infty$, $-3 \leq \beta_4 < +\infty$, iš kur išplaukia, jog $9 \leq b_3 < +\infty$, $15 \leq b_4 < +\infty$ – yra jautrumo koeficientų stabilumo zonos. Kadangi optimalaus sprendinio jautrumo pokyčiams Δb_3 , Δb_4 koeficientai yra lygūs 0, tai iš čia išplaukia, jog **šios zonos yra ir optimalaus sprendinio stabilumo zonos**.

Analogiškai galima nustatyti ir jautrumo koeficientų $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_1} = 5$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial p_1} = 0$ ir $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial p_1} = 0$

stabilumo zonų ribas. Pažymėję Δp_1 žymėjimu γ_1 ir pakeitę $p_1=7$ nauja jo reikšme $p_1^{(n)}=7+\gamma_1$, taikydami simplekso algoritmą, gausime (131-134 lenteles):

131. lentelė

B\L	x_1	x_2	L.n.
x_3	2	3	19
x_4	2	1	13
x_5	0	3	15
x_6	3	0	18
P_1	$7+\gamma_1$	5	0

132. lentelė

B\L	x_6	x_2	L.n.
x_3	$-\frac{2}{3}$	3	7
x_4	$-\frac{2}{3}$	1	1
x_5	0	3	15
x_1	$\frac{1}{3}$	0	6
P_1	$-\frac{7}{3}-\frac{\gamma_1}{3}$	5	$-42-\gamma_1$

133. lentelė

B\L	x_6	x_4	L.n.
x_3	$\frac{4}{3}$	-3	4
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	1
x_5	0	-3	12
x_1	$\frac{1}{3}$	0	6
P_1	$1-\frac{\gamma_1}{3}$	-5	$-47-6\gamma_1$

134. lentelė

B\L	x_3	x_4	L.n.
x_6	0,75	-2,25	3
x_2	0,5	-0,5	3
x_5	-1,5	1,5	6
x_1	-0,25	0,75	5
P_1	$\frac{-3+\gamma_1}{4}$	$\frac{-11-3\gamma_1}{4}$	$-50-5\gamma_1$

Jei norime, kad 134-ji lentelė vaizduotų optimalų sprendinį, tai reikia, kad tikslo funkcijos P_1 eilutėje laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_4 koeficientai nebūtų teigiami, t. y., kad būtų tenkinamos nelygybės:

$$\begin{cases} \frac{-3+\gamma_1}{4} \leq 0, \\ \frac{-11-3\gamma_1}{4} \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 \leq 3 \\ \gamma_1 \geq -\frac{11}{3}. \end{cases}$$

Iš šių nelygybių gauname, jog $\left[-\frac{11}{3} \leq \gamma_1 \leq 3\right]$ ir $\left[\frac{10}{3} \leq p_1 \leq 10\right]$.

Lygiai taip pat, pakeitę $p_2=5$ į $p_2^{(n)}=5+\gamma_2$, gauname, jog jautrumo koeficientų $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_2} = 3$,

$\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial p_2} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial p_2} = 0$ stabilumo zona yra $[-1,5 \leq \Delta p_2 \leq 5,5]$ arba $[3,5 \leq p_2 \leq 10,5]$.

Kadangi optimalios x_1 ir x_2 reikšmės nepriklauso nuo γ_1 ir γ_2 , tai jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial p_1}$,

$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial p_1}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial p_2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial p_2}$ stabilumo zonose optimalus sprendinys yra stabilus, t. y. šiuo atveju jautrumo

koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial p_1}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial p_1}$ ir $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial p_2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial p_2}$ stabilumo zonos yra ir optimalaus sprendinio stabilumo zonos.

Simplekso algoritmą galima taikyti ir visų kitų optimizacinio modelio parametrų pokyčių poveikio į optimalų sprendinį nagrinėjimui.

Pavyzdžiui, jei pakeistume pirmosios medžiagos sunaudojimo normą $b_{11}=2$ į naują $b_{11}^{(n)} = b_{11}^{(s)} + \alpha_{11}$, tai, atsižvelgdami į tai, kad tuomet pasikeistų ir lyginamasis pelnas p_1 , tapdamas lygus $p_1^{(n)} = 7 - 5\alpha_{11}$, gautume naują pradinę simplekso lentelę (žiūr. 135-ją lentelę).

135. lentelė

B\L	x_1	x_2	L.n.
x_3	$2+\alpha_{11}$	3	19
x_4	2	1	13
x_5	0	3	15
x_6	3	0	18
P_1	$7-5\alpha_{11}$	5	0

136. lentelė

B\L	x_6	x_2	L.n.
x_3	$-\frac{1}{3}(2+\alpha_{11})$	3	$7-6\alpha_{11}$
x_4	$-\frac{2}{3}$	1	1
x_5	0	3	15
x_1	$\frac{1}{3}$	0	6
P_1	$-\frac{1}{3}(7-5\alpha_{11})$	5	$-42+30\alpha_{11}$

137. lentelė

B\L	x_6	x_4	L.n.
x_3	$\frac{1}{3}(4-\alpha_{11})$	-3	$4-6\alpha_{11}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	1
x_5	2	-3	12
x_1	$\frac{1}{3}$	0	6
P_1	$1+\frac{5}{3}\alpha_{11}$	-5	$-47+30\alpha_{11}$

Naudodamiesi simplekso algoritmu ta pačia tvarka, kaip gaunant iš 131-sios lentelės 134-ją, iš 135-sios lentelės gautume 138-ją, vaizduojančią optimalų sprendinį ir jo priklausomybę nuo laisvųjų kintamųjų x_3, x_4 ir nuo pokyčio $\Delta b_{11} = \alpha_{11}$.

138. lentelė

B\L	x_3	x_4	L.n.
x_6	$\frac{3}{4-\alpha_{11}}$	$-\frac{9}{4-\alpha_{11}}$	$6 \cdot \frac{2-3\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$
x_2	$\frac{2}{4-\alpha_{11}}$	$-\frac{2+\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$	$\frac{12-13\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$
x_5	$-\frac{6}{4-\alpha_{11}}$	$3 \cdot \frac{2+\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$	$24 \cdot \frac{1+\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$
x_1	$-\frac{1}{4-\alpha_{11}}$	$\frac{3}{4-\alpha_{11}}$	$\frac{20}{4-\alpha_{11}}$
P_1	$-\frac{3+5\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$	$\frac{20\alpha_{11}-11}{4-\alpha_{11}}$	$-50 + \frac{115\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}$

Iš 138-sios lentelės išplaukia, kad **optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė priklauso nuo pokyčio $\Delta b_{11} = \alpha_{11}$ jau netiesiškai.**

Galima gauti $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ bei $P^{(opt)}$ priklausomybes ir nuo b_{11} , b_1 ir b_2 :

$$x_1^{(opt)} = \frac{20}{4-\alpha_{11}} - \left(-\frac{x_3}{4-\alpha_{11}} + \frac{3x_4}{4-\alpha_{11}} \right) = \frac{1}{4-\Delta b_{11}} [20 - (\Delta b_1 - 3\Delta b_2)] = \frac{1}{4-b_{11}+2} (20-b_1+19+ \\ + 3b_2-39) = \frac{3b_2-b_1}{6-b_{11}}; \quad x_2^{(opt)} = \frac{1}{4-\Delta b_{11}} \left\{ 12-13\Delta b_{11} - [-2\Delta b_1 + (2+\Delta b_{11})\Delta b_2] \right\} = \frac{2b_1-b_{11}b_2}{6-b_{11}}; \\ P^{(opt)} = 50 - \frac{115\Delta b_1}{4-\Delta b_{11}} - \frac{1}{4-\Delta b_{11}} [-(3+5\Delta b_{11})\Delta b_1 + (20\Delta b_{11}-11)\Delta b_2] = 50 - \frac{1}{6-b_{11}} (20b_{11}b_2 - 5b_{11}b_1 - \\ - 50b_{11} + 7b_1 - 51b_2 + 300).$$

$$\text{Kai } x_3 = -\Delta b_1 = 0 \quad \text{ir} \quad x_4 = -\Delta b_2 = 0, \quad \text{tai} \quad x_1^{(opt)} = \frac{20}{4-\alpha_{11}} = \frac{20}{4-(b_{11}^{(n)}-2)} = \frac{20}{6-b_{11}^{(n)}} = \frac{20}{6-b_{11}}; \\ x_2^{(opt)} = \frac{12-13\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}} = \frac{12-13(b_{11}^{(n)})}{4-(b_{11}^{(n)}-2)} = \frac{38-13b_{11}^{(n)}}{6-b_{11}^{(n)}} = 13 - \frac{40}{6-b_{11}}; \\ P^{(opt)} = 50 - \frac{115\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}} = 50 - \frac{115(b_{11}^{(n)}-2)}{4-(b_{11}^{(n)}-2)} = 165 - \frac{460}{6-b_{11}}.$$

Šie rezultatai sutampa su 1.15.2.3.3. skyrelyje gautais rezultatais, tačiau, naudojantis 138-ja lentele, galima nustatyti ir nagrinėti, kaip keičiasi optimalus sprendinys ir tikslo funkcijos reikšmė, **keičiantis iškart 3 parametrams:** b_{11} , b_1 ir b_2 . Tai 1.15.2.3.3. skyrelyje nebuvo nagrinėta ir nebūtų buvę paprasta tai padaryti.

Naudodamiesi 138-ja lentele, galime nustatyti ir α_{11} kitimo ribas, kuriose optimumo taškas lieka tiesių $(2+\alpha_{11})x_1+3x_2=19$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo tašku C^* . Tuomet α_{11} turi tenkinti nelygybes:

$$\frac{20}{4-\alpha_{11}} \geq 0, \frac{1+\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}} \geq 0, \frac{12-13\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}} \geq 0, \frac{2-3\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}} \geq 0, \frac{20\alpha_{11}-11}{4-\alpha_{11}} \leq 0, -\frac{3+5\alpha_{11}}{4-\alpha_{11}}.$$

$$\text{Gauname nelygybių sistemą: } \begin{cases} 4-\alpha_{11} > 0, \\ 1+\alpha_{11} \geq 0, \\ 12-13\alpha_{11} \geq 0, \\ 2-3\alpha_{11} \geq 0, \\ 20\alpha_{11}-11 \leq 0, \\ 3+5\alpha_{11} \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11} < 4, \\ \alpha_{11} \geq -1, \\ \alpha_{11} \leq \frac{12}{13}, \\ \alpha_{11} \leq \frac{2}{3}, \\ \alpha_{11} \leq \frac{11}{20}, \\ \alpha_{11} \geq -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Iš tų nelygybių išplaukia, jog $(-0,6 \leq \alpha_{11} \leq 0,55)$, t. y., jog $(1,4 \leq b_{11} \leq 2,55)$, kas taip pat sutampa su 1.15.2.3.3. skyrelyje gautu rezultatu.

Analogiškai, naudodamiesi simplekso metodu, galėtume rasti optimalaus sprendinio priklausomybę nuo b_{21} , b_1 , ir b_2 pokyčių ir nustatyti šių parametru kitimo ribas, kuriose optimumo tašku lieka tiesių $2x_1+3x_2=19$ ir $(2+\alpha_{21})x_1+x_2=13$ susikirtimo taškas C^* . Rekomenduoju skaitytojui tai padaryti savarankiškai.

Galima rasti optimalaus sprendinio priklausomybę nuo dar didesnio modelio parametru pokyčių skaičiaus, pavyzdžiui, kaip parodyta lentelėse 139-142, nuo parametru b_{11} , b_{21} , b_1 ir b_2 pokyčių.

Kadangi 142-sios lentelės visi elementai turi bendrą daliklį $4-\alpha_{11}+3\alpha_{21}$, tai 142-ojoje lentelėje užrašyti tik trupmenų skaitikliai ir, norint rasti tikrąją tos lentelės elemento reikšmę, reikia atitinkamo langelio turinį padalinti iš $4-\alpha_{11}+3\alpha_{21}=3b_{21}-b_{11}$.

139. lentelė

B\L	x_1	x_2	L.n.
x_3	$2+\alpha_{11}$	3	19
x_4	$2+\alpha_{21}$	1	13
x_5	0	3	15
x_6	3	0	18
P_1	$7-5\alpha_{11}-11\alpha_{21}$	5	0

140. lentelė

B\L	x_6	x_2	L.n.
x_3	$-\frac{2+\alpha_{11}}{3}$	3	$7-6\alpha_{11}$
x_4	$-\frac{2+\alpha_{21}}{3}$	1	$1-6\alpha_{21}$
x_5	0	3	15
x_1	$\frac{1}{3}$	0	6
P_1	$-\frac{7-5\alpha_{11}-11\alpha_{21}}{3}$	5	$-42+30\alpha_{11}+66\alpha_{21}$

141. lentelė

B\L	x_6	x_4	L.n.
x_3	$\frac{1}{3}(4-\alpha_{11}+3\alpha_{21})$	-3	$4-6\alpha_{11}+18\alpha_{21}$
x_2	$-\frac{1}{3}(2+\alpha_{21})$	1	$1-6\alpha_{21}$
x_5	$2+2\alpha_{21}$	-3	$12+18\alpha_{21}$
x_1	$\frac{1}{3}$	0	6
P_1	$7+\frac{5}{3}\alpha_{11}-\frac{16}{3}\alpha_{21}$	-5	$-47+30\alpha_{11}+96\alpha_{21}$

142. lentelė

B\L	x_3	x_4	L.n.
x_6	3	-9	$6(2-3\alpha_{11}+9\alpha_{21})$
x_2	$2+\alpha_{21}$	$-(2+\alpha_{11})$	$12-13\alpha_{11}+19\alpha_{21}$
x_5	$-3(2+\alpha_{21})$	$3(2+\alpha_{11})$	$12(2+\alpha_{11}-\alpha_{21})$
x_1	-1	3	20
P_1	$-(3+5\alpha_{11}+6\alpha_{21})$	$-11+20\alpha_{11}+33\alpha_{21}$	$-200+165\alpha_{11}+125\alpha_{21}$

$$\begin{aligned} \text{Iš 142-osios lentelės matome, kad } x_1^{(\text{opt})} &= \frac{20 - (\Delta b_1 - 3\Delta b_2)}{4 - \alpha_{11} + 3\alpha_{21}} = \frac{20 - (\Delta b_1 - 3\Delta b_2)}{3b_{21} - b_{11}} = \frac{3b_2 - b_1}{3b_{21} - b_{11}}; \\ x_2^{(\text{opt})} &= \frac{12 - 13\Delta b_{11} + 19\Delta b_{21} - [(2 + \Delta b_{21})\Delta b_1 + (2 + \Delta b_{11})\Delta b_2]}{4 - \Delta b_{11} + 3\Delta b_{21}} = \frac{b_1 \cdot b_{21} - b_{21} \cdot b_{11}}{3b_{21} - b_{11}}; \\ P^{(\text{opt})} &= \frac{200 - 165\Delta b_{11} - 125\Delta b_{21} - [(3 + 5\Delta b_{11} + 16\Delta b_{21})\Delta b_1 + (-11 + 20\Delta b_{11} + 33\Delta b_{21})\Delta b_2]}{4 - \Delta b_{11} + 3\Delta b_{21}} = \\ &= \frac{172b_2 - 39b_1 + 5b_1b_{11} + 16b_1b_{21} - 20b_2b_{11} - 33b_2b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}. \end{aligned}$$

Gavome formules, išreiškiančias **optimalaus sprendinio** (kai optimalus taškas yra tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = b_1$ ir $b_{21}x_2 + x_2 = b_2$ susikirtimo taškas C^*) **priklausomybę nuo keturių optimizacinio modelio parametrų** b_1, b_2, b_{11} ir b_{21} . Be to gavome ir formules, išreiškiančias trečiosios ir ketvirtosios medžiagų likučių x_5 ir x_6 priklausomybes nuo minėtųjų modelio parametrų:

$$\begin{aligned} x_5^{(\text{opt})} &= \frac{12(2 + 2\alpha_{11} - \alpha_{21}) + 3(2 + \alpha_{21})x_3 - 3(2 + \alpha_{11})x_4}{4 - \alpha_{11} + 3\alpha_{21}} = \frac{24b_{11} - 12b_{21} - 3b_{21}\Delta b_1 + 3b_{11}\Delta b_2}{3b_{21} - b_{11}} = \\ &= 15 - 3 \frac{b_1b_{21} - b_2b_{11}}{3b_{21} - b_{11}} = 15 - 3x_2^{(\text{opt})}; \\ x_6^{(\text{opt})} &= \frac{6(2 - \alpha_{11} + 9\alpha_{21}) - 3x_3 + 9x_4}{4 - \alpha_{11} + 3\alpha_{21}} = \frac{6(9b_{21} - 3b_{11} - 20) + 3\Delta b_1 - 9\Delta b_2}{3b_{21} - b_{11}} = 3 \frac{18b_{21} - 6b_{11} + b_1 - 3b_2}{3b_{21} - b_{11}} = \\ &= 18 - 3 \frac{3b_2 - b_1}{3b_{21} - b_{11}} = b_4 - \frac{3b_2 - b_1}{3b_{21} - b_{11}} \cdot b_{41}. \end{aligned}$$

Gauti tokį rezultatą, 1.15.2.3.3 skyrelyje naudotu grafiniu metodu būtų buvę žymiai sunkiau, jei iš viso būtų įmanoma. Siūlyčiau skaitytojui pabandyti, naudojantis grafiniu metodu, gauti formules

$x_1^{(\text{opt})} = \frac{3b_2 - b_1}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2^{(\text{opt})} = \frac{b_2b_{21} - b_2b_{11}}{3b_{21} - b_{11}}$ ir nustatyti ribas tos keturmatės srities, kurioje galioja šios formulės, t. y. nustatyti, kuo šiuo atveju pavirsta sritis pavaizduota 336 ir 344 paveiksluose keturkampiu $R'P'N'M'$.

Kai $\Delta b_1 = -x_3 = 0$ ir $\Delta b_2 = -x_4 = 0$ (arba, kai $b_1 = 19$, $b_2 = 13$), tai iš ką tik išvestų formulų gauname rezultatus, sutampančius su 1.15.2.3.3 skyrelio rezultatais:

$$\begin{aligned} x_1^{(\text{opt})} &= \frac{20}{4 - \Delta b_{11} + 3\Delta b_{21}} = \frac{20}{4 - (b_{11} - 2) + 3(b_{21} - 2)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}; \\ x_2^{(\text{opt})} &= \frac{12 - 13\Delta b_{11} + 19\Delta b_{21}}{4 - \Delta b_{11} + 3\Delta b_{21}} = \frac{19b_{21} - 13b_{11}}{3b_{21} - b_{11}} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}; \\ P^{(\text{opt})} &= \frac{200 - 165\Delta b_{11} - 125\Delta b_{21}}{4 - \Delta b_{11} + 3\Delta b_{21}} = \frac{780 - 165b_{11} - 125b_{21}}{3b_{21} - b_{11}} = 165 - \frac{620b_{21} - 780}{3b_{21} - b_{11}}. \end{aligned}$$

Kad optimumo taškais būtų tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškai C^* , pokyčiai α_{11} ir α_{21} privalo tenkinti nelygybes: $4 - \alpha_{11} + 3\alpha_{21} > 0$, $2 - 3\alpha_{11} + 9\alpha_{21} \geq 0$, $12 - 13\alpha_{11} + 19\alpha_{21} \geq 0$, $2 + 2\alpha_{11} - \alpha_{21} \geq 0$, $3 + 5\alpha_{11} + 16\alpha_{21} \geq 0$, $-11 + 20\alpha_{11} + 33\alpha_{21} \leq 0$, nes 142-osios lentelės bazinių kintamųjų reikšmės negali būti neigiamos.

Kintamuosius α_{11} ir α_{21} galima pakeisti kintamaisiais b_{11} ir b_{21} , naudojantis lygybėmis $\alpha_{11} = b_{11} - 2$, $\alpha_{21} = b_{21} - 2$. Tuomet gauname nelygybių sistemą:

$$1) \begin{cases} 3b_{21} - b_{11} > 0, \\ 9b_{21} - 3b_{11} - 10 \geq 0, \\ 19b_{21} - 13b_{11} \geq 0, \\ 16b_{21} + 5b_{11} - 39 \geq 0, \\ 33b_{21} + 20b_{11} - 117 \leq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} b < 3b_{21}, \\ b_{11} \leq 3b_{21} - \frac{10}{3}, \\ b_{11} \geq 0,5b_{21}, \\ b_{11} \geq 7,8 - 3,2b_{21}, \\ b_{11} \leq 5,85 - 1,65b_{21}. \end{cases}$$

Kaip matome, naudodamiesi simplekso algoritmu, gavome tas pačias nelygybes, kurias buvome gavę 1.15.2.3.3. skyrelyje, ir papildomai dar gavome lygtis, vaizduojančias optimalaus sprendinio, tikslo funkcijos ir trečiosios bei ketvirtosios medžiagų likučių x_5 ir x_6 priklausomybes nuo

Δb_{11} , Δb_{21} , Δb_1 ir Δb_2 (arba nuo b_{11} , b_{21} , b_1 ir b_2), ko ten nebuvome gavę ir ką gauti būtų buvę ne taip jau lengva.

Naudodamiesi šiomis lygtimis, galime išreikšti ne tik x_5 ir x_6 per x_3 ir x_4 , bet ir x_3 bei x_4 per x_5 ir x_6 , t. y. galime keisti laisvuosius ir bazinius kintamuosius vietomis.

Pavyzdžiui, iš 142-sios lentelės gauname lygybes:

$$\begin{aligned}x_6 &= \frac{6(2-3\alpha_{11}+9\alpha_{21})-3x_3+9x_4}{4-\alpha_{11}+3\alpha_{21}} = 18 + \frac{9x_4-3x_3-60}{3b_{21}-b_{11}}, \\x_1 &= \frac{20+x_3-3x_4}{4-\alpha_{11}+3\alpha_{21}} = \frac{20+x_3-3x_4}{3b_{21}-b_{11}}, \\x_2 &= \frac{12-13\alpha_{11}+19\alpha_{21}-(2+\alpha_{21})x_3+(2+\alpha_{11})x_4}{4-\alpha_{11}+3\alpha_{21}} = \frac{19b_{21}-13b_{11}-b_{21}x_3+b_{11}x_4}{3b_{21}-b_{11}} = 13 - \\&\quad - \frac{20b_{21}+b_{21}x_3-b_{11}x_4}{3b_{21}-b_{11}}, \\x_5 &= \frac{12(2+2\alpha_{11}-\alpha_{21})+3(2+\alpha_{21})x_3-3(2+\alpha_{11})x_4}{4-\alpha_{11}+3\alpha_{21}} = \frac{24b_{11}-12b_{21}+3b_{21}x_3-3b_{11}x_4}{3b_{21}-b_{11}}.\end{aligned}$$

Iš pirmosios lygybės laisvąjį kintamąjį x_4 galima išreikšti per kintamuosius x_3 ir x_6 , t. y. sukeisti buvusįjį laisvąjį kintamąjį x_4 su buvusiu baziniu kintamuoju x_6 vietomis. Gauname lygybę

$$x_4 = \frac{60+3x_3+(x_6-18)(3b_{21}-b_{11})}{9}, \text{ kuria pasinaudodami išreiškiame } x_1^{(\text{opt})}, x_2^{(\text{opt})} \text{ ir } x_5^{(\text{opt})} \text{ kaip naujų}$$

laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_6 funkcijas:

$$\begin{aligned}x_1^{(\text{opt})} &= \frac{20+x_3-\frac{1}{3}[60+3x_3+(x_6-18)(3b_{21}-b_{11})]}{3b_{21}-b_{11}} = 6 - \frac{1}{3}x_6, \\x_2^{(\text{opt})} &= 13 - \frac{20b_{21}+b_{21}x_3-\frac{1}{9}b_{11}[60+3x_3+(x_6-18)(3b_{21}-b_{11})]}{3b_{21}-b_{11}} = \frac{19}{3} - 2b_{11} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{9}b_{11}x_6, \\x_5^{(\text{opt})} &= \frac{24b_{11}-12b_{21}+3b_{21}x_3-\frac{1}{3}b_{11}[60+3x_3+(x_6-18)(3b_{21}-b_{11})]}{3b_{21}-b_{11}} = 6b_{11} - 4 + x_3 - \frac{b_{11}}{3}x_6.\end{aligned}$$

Kai $b_{11}=2$, $b_{21}=2$, $x_3=0$, $x_6=3$, tai gauname, jog $x_1^{(\text{opt})}=5$, $x_2^{(\text{opt})}=3$, $x_5^{(\text{opt})}=6$, t. y., tą patį optimalų sprendinį, kurį buvome gavę anksčiau, sprenddami pradinį optimizavimo uždavinį. Tačiau mes galime laikyti x_6 nauju laisvuuoju kintamuoju, kurio optimali reikšmė turėtų būti lygi 0, o taip pat galime pakeisti laisvuosius kintamuosius x_3 ir x_6 kintamaisiais b_1 ir b_4 , naudodamiesi lygybėmis: pirmosios medžiagos likutis $x_3=19-b_1^{(n)}$, ketvirtosios medžiagos likutis $x_6=18-b_4^{(n)}$, kur $b_1^{(n)}$ ir $b_4^{(n)}$ – naujos pirmosios ir ketvirtosios medžiagų atsargų reikšmės, pasirinktos taip, kad jos būtų pilnai sunaudotos ir jų dydis apspręstų optimumo taško koordinatinių reikšmių.

$$\begin{aligned}\text{Tuomet gauname, jog } x_1^{(\text{opt})} &= 6 - \frac{1}{3}x_6 = 6 - \frac{1}{3}(18-b_4) = \frac{b_4}{3}, \\x_2^{(\text{opt})} &= \frac{19}{3} - 2b_{11} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{9}b_{11}x_6 = \frac{19}{3} - 2b_{11} - \frac{1}{3}(19-b_1) + \frac{1}{9}b_{11}(18-b_4) = \frac{b_1}{3} - \frac{1}{9}b_{11}b_4, \\x_5^{(\text{opt})} &= 6b_{11} - 4 + x_3 - \frac{1}{3}b_{11}x_6 = 6b_{11} - 4 + (19-b_1) - \frac{1}{3}b_{11}(18-b_4) = 15 - b_1 + \frac{1}{3}b_{11}b_4, \\x_4^{(\text{opt})} &= \frac{60+3x_3+(x_6-18)(3b_{21}-b_{11})}{9} = \frac{60+3(19-b_1)+(18-b_4-18)(3b_{21}-b_{11})}{9} = \\&= 13 - \frac{b_1}{3} - \frac{b_4b_{21}}{3} + \frac{b_4b_{11}}{9}.\end{aligned}$$

Gavome naują optimumo tašką – naujųjų judrių tiesių $b_{11}x_1+3x_2=b_1$ ir $3x_1=b_4$ susikirtimo tašką.

Tuo nesunku įsitikinti: 1) tiesių $b_{11}x_1+3x_2=b_1$ ir $3x_1=b_4$ susikirtimo taško koordinatės yra $x_1 = \frac{b_4}{3}$,

$$x_2 = \frac{b_1}{3} - \frac{1}{9}b_{11}b_4, \text{ kas sutampa su ką tik gautomis naujomis } x_1^{(\text{opt})}, x_2^{(\text{opt})} \text{ reikšmėmis;}$$

2) kai $x_1 = \frac{b_4}{3}$, $x_2 = \frac{b_1}{3} - \frac{1}{9}b_{11}b_4$, tai antrosios medžiagos likutis yra $x_4 = 13 - b_{11}x_1 - x_2 =$
 $= 13 - b_{11}\frac{b_4}{3} - \frac{b_1}{3} + \frac{1}{9}b_{11}b_4$, kas sutampa su ką tik gauta x_4 reikšme;

3) trečios medžiagos likutis yra $x_5 = 15 - 3x_2 = 15 - 3\left(\frac{b_1}{3} - \frac{1}{9}b_{11}b_4\right) = 15 - b_1 + \frac{1}{3}b_{11}b_4$, kas
 sutampa su ką tik apskaičiuota x_5 reikšme;

4) likučiai x_3 ir x_6 naujame optimumo taške bus lygūs 0, nes pirmoji ir ketvirtoji medžiagos bus pilnai sunaudotos.

Nesunku nustatyti, kokias sąlygas turėtų tenkinti optimizacinio modelio parametrai b_1 , b_4 , b_{11} ir b_{21} , kad optimumo taško koordinatės būtų tokios, kokias ką tik gavome. Palieku tų sąlygų nustatymą skaitytojui, o taip pat ir kito galimo atvejo nagrinėjimą, kai, pavyzdžiui, optimumo tašku tampa kitų judrių tiesių – būtent tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = b_1$ ir $3x_2 = b_3$ susikirtimo taškas. Galimi dar ir kiti atvejai, kuriuos taip pat galėtume išvesti iš 142-osios lentelės, keisdami bazinius ir laisvuosius kintamuosius vietomis, pavyzdžiui, galimas atvejis, kai optimumo taškas – tiesių $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir $3x_3 = b_3$ susikirtimo taškas ir t. t.. Visus tokius atvejus galima gauti iš 142-osios simplekso algoritmo lentelės lygčių, išreiškiant vienus kintamuosius per kitus.

Galima eiti dar toliau – gauti optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės priklausomybę tiesių $(2 + \Delta b_{11})x_1 + (3 + \Delta b_{12})x_2 = b_1$ ir $(2 + \Delta b_{21})x_1 + (1 + \Delta b_{22})x_2 = b_2$ susikirtimo taško aplinkoje nuo 6 parametrų pokyčių Δb_{11} , Δb_{12} , Δb_{21} , Δb_{22} , Δb_1 , Δb_2 (o taip pat ir nuo pokyčių Δb_{11} , Δb_{12} , Δb_{21} , Δb_{22} , Δb_3 , Δb_4).

Tuomet pradinė simplekso lentelė atrodytų taip (žiūr. 143-ją lentelę).

143. lentelė

B/L	x_1	x_2	L.n.
x_3	$2 + \alpha_{11}$	$3 + \alpha_{21}$	19
x_4	$2 + \alpha_{21}$	$1 + \alpha_{22}$	13
x_5	0	3	15
x_6	3	0	18
P_1	$7 - 5\alpha_{11} - 11\alpha_{21}$	$5 - 5\alpha_{21} - 11\alpha_{22}$	0

Transformuojant ją ta pačia tvarka, t. y. pasirenkant tuos pačius vedančiuosius elementus, kaip transformuojant 135-138 lenteles, gausime simplekso lentelę, vaizduojančią optimalų sprendinį. Naudodamiesi ta lentele, galėsime sudaryti tiesines lygtis:

$$x_1^{(opt)} = f_1(\Delta b_{11}, \Delta b_{12}, \Delta b_{21}, \Delta b_1, \Delta b_2),$$

$$x_2^{(opt)} = f_2(\Delta b_{11}, \Delta b_{12}, \Delta b_{21}, \Delta b_{22}, \Delta b_1, \Delta b_2),$$

$$x_5^{(opt)} = f_3(\Delta b_{11}, \Delta b_{12}, \Delta b_{21}, \Delta b_{22}, \Delta b_1, \Delta b_2),$$

$$x_6^{(opt)} = f_4(\Delta b_{11}, \Delta b_{12}, \Delta b_{21}, \Delta b_{22}, \Delta b_1, \Delta b_2),$$

$$P^{(opt)} = F(\Delta b_{11}, \Delta b_{12}, \Delta b_{21}, \Delta b_{22}, \Delta b_1, \Delta b_2). \text{ Siūlau}$$

skaitytojui gauti tas lygtis.

Naudodamiesi tomis lygtimis, kintamuosius Δb_1 ir Δb_2 galime pakeisti kintamaisiais Δb_3 , Δb_4 ir gauti $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ ir $P^{(opt)}$ priklausomybes nuo Δb_{11} , Δb_{12} , Δb_{21} , Δb_{22} , Δb_3 , Δb_4 .

Dar daugiau didinti kintamųjų, nuo kurių pokyčių priklauso $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ ir $P^{(opt)}$, pavyzdžiui, pridėdant prie laisvai pasirenkamų pokyčių Δb_{11} , Δb_{21} dar ir laisvai pasirenkamą pokytį Δb_{32} , jau nebetikslinga, nes tuomet jau iš anksto taptų aišku, kad, pavyzdžiui, esant $\Delta b_{11} = -2$, $\Delta b_{41} = -3$ (arba $\Delta b_{12} = -3$, $\Delta b_{22} = -1$, $\Delta b_{32} = -3$), naujosios medžiagų sunaudojimo normos taptų lygios 0, ir apribojimai iš turimų medžiagų atsargų leistų pagaminti be galo daug gaminių ir gauti be galo didelį pelną, t. y. **optimizavimo uždavinys taptų trivialus**.

Naudojantis simplekso algoritmu, galima nagrinėti ne tik taško C^* , bet ir kitų taškų (pavyzdžiui, B, D, $\tilde{D}$, F, $\tilde{F}$, G, žiūr. 340÷343 pav.) aplinkas, tik tuomet optimalaus sprendinio simplekso lentelėje bus jau kiti baziniai ir laisvieji kintamieji, t. y., bus jau kita vedančiųjų elementų pasirinkimo tvarka. Siūlau skaitytojui pabandyti išsinagrinėti vieno iš taškų (pavyzdžiui, tiesių $(3 + \Delta b_{23})x_2 = 15$ ir $(2 + \Delta b_{21})x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taško B^*) aplinką ir rasti $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ ir $P^{(opt)}$ priklausomybes nuo atitinkamų parametrų pokyčių ir tų pokyčių kitimo ribas (pavyzdžiui, tokias Δb_{23} ir

Δb_{21} kitimo ribas, kuriose optimumo tašku išliktų taškas B^* , turintis koordinatas $x_2^{(opt)} = \frac{15}{3 + \Delta b_{23}}$,

$$x_1^{(opt)} = \frac{24 + 13\Delta b_{23}}{(2 + \Delta b_{21})(3 + \Delta b_{23})}.$$

Išnagrinėti pavyzdžiai rodo, jog, **suprantant, kad simplekso lentelės eilutės yra lygtys, galima iš jų gauti daug įvairios informacijos**, naudingos nagrinėjant priklausomybes tarp modelio valdomųjų kintamųjų ir modelio parametrų.

Norėtusi atkreipti skaitytojų dėmesį dar ir į tai, jog ir **simplekso lentelių stulpeliai taip pat vaizduoja lygtis, tačiau priklausančias jau ne tiesioginio, o dualaus optimizavimo uždavinio modeliui**, kuris gaunamas iš tiesioginio, jį transformuojant. Apie dualius uždavinius ir jų modelius mes pakankamai plačiai kalbėsime operacijų tyrimo kurse (žiūr. [128]), todėl čia prie jų neapsistosisiu.

Čia tik pažymėsiu, jog kiekvienas simplekso lentelės, vaizduojančios optimalų sprendinį, elementas turi „fizinę“ (fizinę, ekonominę ir pan.) bei matematinę prasmę (interpretaciją), o kiekviena tos lentelės eilutė ir stulpelis yra lygtis, vaizduojanti tiesinę priklausomybę tarp tos eilutės ar stulpelio elementų. Pavyzdžiui, 126-ojoje lentelėje tikslo funkcijos P_1 eilutė vaizduoja pelno P priklausomybę nuo pirmosios ir antrosios medžiagų likučių x_3 ir x_4 , o koeficientai prie šių kintamųjų – tikslo funkcijos jautrumą šių likučių ir medžiagų atsargų b_1 ir b_2 pokyčiams Δb_1 ir Δb_2 . 126-ojoje ir 130-ojoje lentelėse tie koeficientai yra konstantos, 138-ojoje lentelėje – kintamojo $\alpha_{11}=\Delta b_{11}=b_{11}-2$ funkcijos, o 142-ojoje lentelėje – kintamųjų $\alpha_{11}=\Delta b_{11}=b_{11}-2$ ir $\alpha_{21}=\Delta b_{21}=b_{21}-2$ funkcijos. Analogiškai gauname, kad 126-ojoje lentelėje bazinio kintamojo x_1 eilutės koeficientai $-0,25$ ir $0,75$ vaizduoja to kintamojo jautrumą pokyčiams Δb_1 ir Δb_2 , o bazinio kintamojo x_5 eilutė – trečiosios medžiagos likučio x_5 priklausomybę nuo pirmosios ir antrosios medžiagos likučių x_3 ir x_4 bei nuo atsargų b_1 ir b_2 pokyčių Δb_1 ir Δb_2 optimaliame plane, kuri vaizduoja tiesių $b_{11}x_1+b_{12}x_2=b_1$ ir $b_{21}x_1+b_{22}x_2=b_2$ susikirtimo taškas C^* , turintis koordinates $x_1=\frac{D_{x_1}}{D}=\frac{b_1b_{22}-b_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}$,

$$x_2=\frac{D_{x_2}}{D}=\frac{b_2b_{11}-b_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}, \quad \text{kur } D, \quad D_{x_1}, \quad D_{x_2} \quad - \text{ atitinkami lygčių sistemos}$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = b_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{ir jos nežinomųjų } x_1 \text{ ir } x_2 \text{ determinantai.}$$

Galima interpretuoti ir visų kitų eilučių bei stulpelių elementus, o taip pat ir visų kitų simplekso lentelių, vaizduojančių atitinkamus planus (ne būtinai tik optimalius) eilutes, stulpelius ir jų elementus.

Visa tai rodo, jog simplekso algoritmas gali būti ne tik optimalaus sprendinio radimo, bet ir to sprendinio jautrumo bei stabilumo tyrimo instrumentu, leidžiančiu gauti naudingų išvadų apie tai, ką ir kiek naudinga keisti optimizaciniame modelyje, kaip reikia keisti gamybos planą, keičiantis sąlygoms ir pan.

Optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos jautrumo koeficientus bei tų koeficientų stabilumo zonų ribas galima nustatyti, net nesudarinėjant specialių programų, bet naudojantis standartinėmis tiesinio planavimo programomis. Jautrumo koeficientus galime rasti simplekso lentelėje, vaizduojančioje sprendinį, išvesdami tą lentelę į displėjaus ekraną ar spausdindami spausdintuvu. Norint rasti jautrumo koeficientų stabilumo zonų ribas, naudojantis standartinėmis simplekso algoritmo programomis, tenka šiek tiek pertvarkyti optimizacinį modelį.

Pavyzdžiui, norint nustatyti Δb_1 kitimo zonos, kurioje optimalaus sprendinio, vaizduojamo tašku C^* , jautrumo koeficientai išlieka stabilūs, viršutinę ribą, tenka vietoj nelygybės $2x_1+3x_2 \leq 19$ (ir lygybės $2x_1+3x_2+x_3=19$) sudaryti nelygbę $2x_1+3x_2 \leq 19+x_7$ (ir lygbę $2x_1+3x_2+x_3=19+x_7$), kur x_7 – papildomai perkamos pirmosios medžiagos kiekis.

Tuomet vietoj 135-sios lentelės gauname 144-ją lentelę, kurią, spręsdami tiesinį optimizavimo uždavinį simplekso metodu, pertvarkome į 145-ją, po to – į 146-ją, į 147-ją ir 148-ją lenteles.

144. lentelė

B\L	L.n.	x ₁	x ₂	x ₇
x ₃	19	2	3	-1
x ₄	13	2	1	0
x ₅	15	0	3	0
x ₆	18	3	0	0
P ₁	0	7	5	0

145. lentelė

B\L	L.n.	x ₆	x ₂	x ₇
x ₃	7	$-\frac{2}{3}$	3	-1
x ₄	1	$-\frac{2}{3}$	1	0
x ₅	15	0	3	0
x ₁	6	$\frac{1}{3}$	0	0
P ₁	-42	$-\frac{7}{3}$	5	0

146. lentelė

B\L	L.n.	x ₆	x ₄	x ₇
x ₃	4	$\frac{4}{3}$	-3	-1
x ₂	1	$-\frac{2}{3}$	1	0
x ₅	12	2	-3	0
x ₁	6	$\frac{1}{3}$	0	0
P ₁	-47	1	-5	0

147. lentelė

B\L	L.n.	x ₅	x ₄	x ₇
x ₆	3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x ₂	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x ₅	6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x ₁	5	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
P ₁	-50	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{3}{4}$

148. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₄	x ₅
x ₆	6	0	-1,5	0,5
x ₂	5	0	0	$\frac{1}{3}$
x ₇	4	-1	1	$\frac{2}{3}$
x ₁	4	0	0,5	$-\frac{1}{6}$
P ₁	-53	0	-3,5	-0,5

Optimalų sprendinį vaizduojančioje 148-ojoje lentelėje matome, kad tuo atveju, kai keičiasi tik b_1 reikšmė, optimali (ir maksimali) kintamojo x_7 reikšmė yra 4 ir todėl parametro b_1 kitimo viršutinė riba, nekeičiant kitų modelio parametrų, yra $19+4=23$. Visa pirmoji medžiaga (ir seniau buvusi ir naujai nupirktoji) bus pilnai sunaudota, jokių teigiamų jos likučių neliks (nes $x_3 = -\Delta b_1 = -x_7$) ir kintamasis x_3 , būdamas pakeistas kintamuoju x_7 (su priešingu ženklu), jau nebedarys jokio poveikio optimaliam sprendiniui (nuo kintamojo x_3 priklausys tik kintamojo x_7 reikšmė – žiūr. į 148-sios lentelės kintamojo x_3 stulpelį). Bus pilnai sunaudotos ir trečiosios medžiagos atsargos ir liks nesunaudoti tik 6 vienetai ketvirtosios medžiagos (žiūr. 148-ją lentelę, kur $x_6^{(opt)} = 6$, $x_3^{(opt)} = x_4^{(opt)} = x_5^{(opt)} = 0$).

Jei, nekeisdami kitų modelio parametrų, būtume papildomai pirkę x_8 vienetų antrosios medžiagos, tai vietoj lygybės $x_4=13-(2x_1+x_2)$ būtume gavę lygybę $x_4=13-(2x_1+x_2-x_8)$ ir 149-153 simplekso lenteles.

149. lentelė

B\L	L.n.	x ₁	x ₂	x ₈
x ₃	19	2	3	0
x ₄	13	2	1	-1
x ₅	15	0	3	0
x ₆	18	3	0	0
P ₁	0	7	5	0

150. lentelė

B\L	L.n.	x ₆	x ₂	x ₈
x ₃	7	$-\frac{2}{3}$	3	0
x ₄	1	$-\frac{2}{3}$	1	-1
x ₅	15	0	3	0
x ₁	6	$\frac{1}{3}$	0	0
P ₁	-42	$-\frac{7}{3}$	5	0

151. lentelė

B\L	L.n.	x ₆	x ₄	x ₈
x ₃	4	$\frac{4}{3}$	-3	3
x ₂	1	$-\frac{2}{3}$	1	-1
x ₅	12	2	-3	3
x ₁	6	$\frac{1}{3}$	0	0
P ₁	-47	1	-5	5

152. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₄	x ₈
x ₆	3	0,75	-2,25	2,25
x ₂	3	0,5	-0,5	0,5
x ₅	6	-1,5	1,5	-1,5
x ₁	5	-0,25	0,75	-0,75
P ₁	-50	-0,75	-2,75	2,75

153. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₄	x ₆
x ₈	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{9}$
x ₂	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{9}$
x ₅	8	-1	0	$\frac{2}{3}$
x ₁	6	0	0	$\frac{1}{3}$
P ₁	$-53\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{11}{9}$

Iš 153-sios lentelės gauname, kad optimali (ir maksimali leistina) kintamojo x_8 reikšmė, nekeičiant kitų modelio parametrų, yra $\frac{4}{3}$. Todėl antrosios medžiagos atsargas tikslinga padidinti iki

$b_2 = 14\frac{1}{3}$. Kadangi $x_4 = -\Delta b_2 = -x_8$, tai, įvedus kintamąjį x_8 , kintamasis x_4 tampa priklausomas nuo x_8 ir todėl jo stulpelio koeficientai tampa lygūs 0, išskyrus kintamojo x_8 eilutę. Šiuo atveju ketvirtosios medžiagos atsargos sunaudojamos pilnai ir lieka nesunaudoti 8 vienetai trečiosios medžiagos.

Jei, nekeisdami kitų modelio parametrų, būtume kartu pirkę pirmąją ir antrąją medžiagas, tai pradinėje simplekso lentelėje būtų atsiradę papildomų kintamųjų x_7 ir x_8 stulpeliai (žiūr. 154-159 lenteles).

154. lentelė

B\L	L.n.	x_1	x_2	x_8	x_8
x_3	19	2	3	-1	0
x_4	13	2	1	0	-1
x_5	15	0	3	0	0
x_6	18	3	0	0	0
P_1	0	7	5	0	0

155. lentelė

B\L	L.n.	x_6	x_2	x_7	x_8
x_3	7	$-\frac{2}{3}$	3	-1	0
x_4	1	$-\frac{2}{3}$	1	0	-1
x_5	15	0	3	0	0
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	0	0
P_1	-42	$-\frac{7}{3}$	5	0	0

156. lentelė

B\L	L.n.	x_6	x_4	x_7	x_8
x_3	4	$\frac{4}{3}$	-3	-1	3
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	1	0	-1
x_5	12	2	-3	0	3
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	0	0
P_1	-47	1	-5	0	5

157. lentelė

B\L	L.n.	x_3	x_4	x_7	x_8
x_6	3	0,75	-2,25	-0,75	2,25
x_2	3	0,5	-0,5	0,5	0,5
x_5	6	-1,5	1,5	1,5	-1,5
x_1	5	-0,25	0,75	0,25	-0,75
P_1	-50	-0,75	-2,75	0,75	2,75

158. lentelė

B\L	L.n.	x_3	x_4	x_5	x_8
x_6	6	0	-1,5	0,5	1,5
x_2	5	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_7	4	-1	1	$\frac{2}{3}$	-1
x_1	4	0	0,5	$-\frac{1}{6}$	-0,5
P_1	-53	0	-3,5	-0,5	3,5

159. lentelė

B\L	L.n.	x_3	x_4	x_5	x_6
x_8	4	0	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	5	0	0	$\frac{1}{3}$	0
x_7	8	-1	0	1	$\frac{2}{3}$
x_1	6	0	0	0	$\frac{1}{3}$
P_1	-67	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Iš 159-sios lentelės gauname, jog šiuo atveju visų medžiagų visos atsargos bus sunaudotos, jei bus papildomai nupirkta $x_7=8$ ir $x_8=4$ pirmosios ir antrosios medžiagų. Bus pagaminta $x_1=6$ ir $x_2=5$ vienetai pirmojo ir antrojo tipo gaminių ir bus gautas pelnas $P=67$. Optimalus sprendinys – taško H koordinatės (žiūr. 333 ir 334 pav.).

Sistematizuodami simplekso algoritmo panaudojimo optimalaus sprendinio gavimui ir jo jautrumo bei stabilumo analizei pavyzdžius, galime sudaryti **bendrą algoritmą, leidžiantį rasti visus galimus optimalius sprendinius, atsirandančius, keičiantis optimizacinio modelio parametrus, o taip pat tų optimalių sprendinių jautrumo koeficientų stabilumo bei optimalaus sprendinio vektoriaus koordinatinių apskaičiavimo formulių izomorfiškumo zonas**.

Pagrindinę to algoritmo idėją sudaro **keičiamųjų modelio parametrų reikšmių simplekso algoritmo pradinėje lentelėje pakeitimas raidėmis ir po to sekantis simplekso algoritmo lentelės galimų variantų nagrinėjimas**. Atliekant šį darbą kompiuteriu, gana patogu naudotis galinčiomis dirbti su simbolinės algebros formulėmis MAPLE paketo priemonėmis.

Pailiustruosiu išsakytos idėjos taikymą, nagrinėdamas konkretų pavyzdį.

Tarkime, jog mūsų nagrinėjamame modelyje mes keičiame jo parametą b_1 ir norime nustatyti, kaip tokiu atveju keičiasi optimalus sprendinys, jo jautrumo koeficientai bei kokios tų jautrumo koeficientų stabilumo zonos.

Sudarome pradinę simplekso algoritmo lentelę (žiūr. 160-ją lentelę).

160. lentelė

B\L	L.n.	x_1	x_2
x_3	b_1	2	3
x_4	13	2	1
x_5	15	0	3
x_6	18	3	0
P_1	0	7	5

160.1. lentelė

B\L	L.n.	x_3	x_2
x_1	$0,5b_1$	0,5	1,5
x_4	$13-b_1$	-1	-2
x_5	15	0	3
x_6	$18-1,5b_1$	-1,5	-4,5
P_1	$-3,5b_1$	-3,5	-5,5

160.2. lentelė

B\L	L.n.	x_6	x_2
x_3	b_1-12	$-\frac{2}{3}$	3
x_4	1	$-\frac{2}{3}$	1
x_5	15	0	3
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	-42	$-\frac{7}{3}$	5

Tarkime, jog, norėdami sumažinti tikslo funkcijos $P_1 = P = 0 - (7x_1 + 5x_2)$ reikšmę, mes nutarėme padidinti laisvojo kintamojo x_1 reikšmę, sukeisdami jį vietomis su kuriuo nors baziniu kintamuoju.

Priklausomai nuo b_1 reikšmės galimi du variantai:

$$1) \text{ kai } b_1 \leq 12, \text{ tai } \min_{x_1} x_1 = \min\left(\frac{b_1}{2}; \frac{13}{12}; +\infty; 6\right) = \frac{b_1}{2} \text{ ir } x_1 \text{ turi būti keičiamas vietomis su } x_3.$$

Tuomet gaunama nauja lentelė, kurią pažymėsime numeriu 160.1.;

$$2) \text{ kai } b_1 \geq 12, \text{ tai } \min_{x_1} x_1 = \min\left(\frac{b_1}{2}; \frac{13}{12}; +\infty; 6\right) = 6 \text{ ir } x_1 \text{ turi būti keičiamas vietomis su } x_6.$$

Tuomet gaunama nauja lentelė, kurią žymėsime numeriu 160.2.

160.1-oji lentelė vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1^{(opt)} = 0,5b_1$, $x_2^{(opt)} = 0$, kurį gauname, kai b_1 tenkina nelygybes: 1) $b_1 \leq 12$, 2) $b_1 \geq 0$, 3) $18 - 1,5b_1 \geq 0$, iš kurių išplaukia, jog jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5$ ir $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$ stabilumo, vykstant parametro b_1 pokyčiams, zona yra $0 \leq b_1 \leq 12$. Apribojimas

$b_1 \geq 0$ išplaukia iš b_1 prasmės: medžiagų atsargos negali būti neigiamos.

160.2-oji lentelė dar nevaizduoja optimalaus sprendinio, ir egzistuoja du laisvojo kintamojo x_2 keitimo vietomis su baziniu variantai:

$$1) \text{ kai } b_1 - 12 \leq 3, \text{ tai } \min_{x_2} x_2 = \min\left(\frac{b_1 - 12}{3}; 1; 5; +\infty\right) = \frac{b_1 - 12}{3} \text{ ir } x_2 \text{ turi būti keičiamas}$$

vietomis su x_3 . Tuomet gaunama nauja lentelė 160.2.1.;

$$2) \text{ kai } b_1 - 12 \geq 3, \text{ tai } \min_{x_2} x_2 = \min\left(\frac{b_1 - 12}{3}; 1; 5; +\infty\right) = 1 \text{ ir } x_2 \text{ turi būti keičiamas vietomis su}$$

x_4 . Tuomet gaunama nauja lentelė 160.2.2.

160.2.1. lentelė

B/L	L.n	x_6	x_3
x_2	$\frac{(b_1 - 12)}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
x_4	$\frac{(15 - b_1)}{3}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$
x_5	$27 - b_1$	$\frac{2}{3}$	-1
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	$-\frac{(66 + 5b_1)}{3}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{5}{3}$

160.2.2. lentelė

B/L	L.n	x_6	x_4
x_3	$b_1 - 15$	$\frac{4}{3}$	-3
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	1
x_5	12	2	-3
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	-47	1	-5

160.2.1. lentelė vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1^{(opt)} = 6$, $x_2^{(opt)} = (b_1 - 12)/3$, kurį gauname, kai b_1 tenkina nelygybes: 1) $b_1 \geq 12$, 2) $15 - b_1 \geq 0$, 3) $27 - b_1 \geq 0$, iš kur išplaukia, jog ši optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = -\frac{\partial P_1^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{5}{3}$ stabilumo zona parametro b_1 pokyčių atžvilgiu yra $12 \leq b_1 \leq 15$.

160.2.2. lentelė dar nevaizduoja optimalaus sprendinio, ir, keisdami laisvąjį kintamąjį x_6 , gauname vėl du variantus:

$$1) \text{ kai } [(b_1 - 15) : 4] \cdot 3 \leq \frac{12}{2} \text{ ir kintamąjį } x_6 \text{ privalome keisti vietomis su } x_3, \text{ gaudami 160.2.2.1.}$$

lentelę;

$$2) \text{ kai } [(b_1 - 15) : 4] \cdot 3 \geq \frac{12}{2} \text{ ir kintamąjį } x_6 \text{ privalome keisti vietomis su } x_5, \text{ gaudami 160.2.2.2.}$$

lentelę.

160.2.2.1. lentelė vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1^{(opt)} = 9,75 - 0,25b_1$, $x_2^{(opt)} = 0,5b_1 - 6,5$, $P^{(opt)} = 35,75 + 0,75b_1$ bei jo priklausomybę nuo parametro b_1 pokyčių jo jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = -0,25$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,75$ stabilumo zonoje $15 \leq b_1 \leq 23$, kuri nustatoma, išsprendus

nelygybių sistemą: 1) $0,75b_1 - 11,25 \geq 0$, 2) $34,5 - 1,5b_1 \geq 0$.

160.2.2.1. lentelė

B\L	L.n	x ₃	x ₄
x ₆	0,75b ₁ -11,25	0,75	-2,25
x ₂	0,5b ₁ -6,5	0,5	-0,5
x ₅	34,5-1,5b ₁	-1,5	1,5
x ₁	9,75-0,25b ₁	-0,25	0,75
P ₁	-35,75-0,75b ₁	-0,75	-2,25

160.2.2.2. lentelė

B\L	L.n	x ₅	x ₄
x ₃	b ₁ -23	$-\frac{2}{3}$	-1
x ₂	5	$\frac{1}{3}$	0
x ₆	6	0,5	-1,5
x ₁	4	$-\frac{1}{6}$	0,5
P ₁	-53	-0,5	-3,5

160.2.2.2. lentelė taip pat vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=4$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=53$, kuris egzistuoja to sprendinio jautrumo parametro b_1 pokyčiams koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0$ stabilumo zonoje $b_1 \geq 23$. Ši zona nustatoma naudojantis 160.2.2.2. lentelės pirmąja eilute $x_3^{(opt)}=b_1-23 - \left(\frac{2}{3}x_5^{(opt)} - x_4^{(opt)}\right)$, iš kur, atsižvelgiant į tai, jog $x_5^{(opt)}=0$ ir $x_4^{(opt)}=0$, ir pareikalaudami, kad x_3 būtų neneigiamas dydis, gauname, jog $b_1 \geq 23$.

Suveddami gautus rezultatus, randame:

$$1) \text{ kai } 0 \leq b_1 \leq 12, \text{ tai } x_1^{(opt)}=0,5b_1, x_2^{(opt)}=0, P^{(opt)}=3,5b_1, \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0,5, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=3,5;$$

$$2) \text{ kai } 12 \leq b_1 \leq 15, \text{ tai } x_1^{(opt)}=6, x_2^{(opt)}=(b_1-12)/3, P^{(opt)}=(66+5b_1)/3, \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{5}{3};$$

$$3) \text{ kai } 15 \leq b_1 \leq 23, \text{ tai } x_1^{(opt)}=9,75-0,25b_1, x_2^{(opt)}=0,5b_1-6,5, P^{(opt)}=35,75+0,75b_1, \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=-0,25,$$

$$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0,5, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0,75;$$

$$4) \text{ kai } b_1 \geq 23, \text{ tai } x_1^{(opt)}=4, x_2^{(opt)}=5, P^{(opt)}=53, \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0.$$

Rezultatai, gauti naudojantis simplekso metodu, pilnai sutampa su rezultatais, anksčiau gautais naudojantis grafiniu metodu, t. y. simplekso metodas gali pakeisti grafinį metodą. Tačiau simplekso metodą galima taikyti ir tada, kada dėl didelio valdomųjų kintamųjų skaičiaus grafiniu metodu pasinaudoti tampa nebeįmanoma. Be to simplekso algoritmo taikymą optimalaus sprendinio jautrumo bei stabilumo analizei nesunku kompiuterizuoti. Todėl čia ką tik pademonstruotas metodas yra pranašesnis už 1.15.2.3. skyrelyje išdėstytą grafinį metodą.

Skaitytojui gali kilti klausimas, kam tuomet buvo dėstomas grafinis metodas, jei jį iškart buvo galima pakeisti pranašesniu simplekso metodu. Atsakymą į šį klausimą skaitytojas ras pats, prisiminęs vieną iš svarbių sisteminio modeliavimo principų: **modeliuotojas bei sudėtingų problemų sprendėjas turi pradėti nuo paprastų modelių ir paprastų bei intuityviai labai aiškių sprendimo metodų, palaipsniui pereidamas prie vis labiau sudėtingų ir tuos perėjimus organizuodamas taip, kad neprarastų intuityvaus suvokimo apie tai, kaip, naudodamiesi tais metodais ir kompiuterine technine bei programine įranga, mes sprendžiame sudėtingą problemą. Labai svarbu, kad modeliuotojas visą laiką sugebėtų interpretuoti gaunamus rezultatus ir net prognozuoti juos, t. y., kad, sprendžiamas kokią nors problemą, sprendėjas ne tik gautų patį sprendinį, bet ir pagilintų sprendžiamos problemos ir jos sprendimo būdų suvokimą, kas yra net svarbiau už patį sprendinį.**

Taip, ateityje, sprendžiamas tiesinio optimizavimo uždavinius ir analizuojamas gautų sprendinių stabilumą bei jų jautrumą modelio parametrų pokyčiams, šių eilučių skaitytojas, aišku, naudosis ne grafiniu, o progresyvesniu ir universalesniu simplekso metodu, tačiau tas **optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo intuityvaus suvokimo lygis, kurį skaitytojas įsigijo, operuodamas grafiniu metodu, išliks ir ateityje, ir tai padės jam naudotis simplekso metodu ne mechaniškai, kaip dabar gana dažnai daro dauguma studentų, o gerai suvokiant, ką daro pats sprendėjas ir jo kompiuteris, ką reikšia gauti rezultatai ir kaip jie galėtų pasikeisti, šiek tiek pasikeitus sąlygoms.**

Todėl, manau, laikas, sugaištas, susipažįstant su grafiniu metodu, iliustruojančiu uždavinio sprendimo ir gauto sprendinio stabilumo bei jautrumo analizės procesų esmę, ateityje pilnai atsipirks.

Simplekso metodą galima taikyti ne tik tada, kada keičiasi tik koks nors vienas modelio parametras. Galima vienu metu keisti ir keletą modelio parametrų. Metodo taikymo idėja išlieka ta pati, tik padidėja nagrinėjamų variantų skaičius.

Pavyzdžiui, jei vienu metu keistųsi parametrai b_1 ir b_2 , tai antrajame žingsnyje gautume jau ne dvi, o tris simplekso lenteles (žiūr. 161.1., 161.2. ir 161.3. lenteles).

161. lentelė				161.1. lentelė				161.2. lentelė				161.3. lentelė			
B\L	L.n	x_1	x_2	B\L	L.n	x_3	x_2	B\L	L.n	x_4	x_2	B\L	L.n	x_6	x_2
x_3	b_1	2	3	x_1	$0,5b_1$	0,5	1,5	x_3	b_1-b_2	-1	2	x_3	b_1-12	$-\frac{2}{3}$	3
x_4	b_2	2	1	x_4	b_2-b_1	-1	-2	x_1	$0,5b_2$	0,5	0,5	x_4	b_2-12	$-\frac{2}{3}$	1
x_5	15	0	3	x_5	15	0	3	x_5	15	0	3	x_5	15	0	3
x_6	18	3	0	x_6	$18-1,5b_1$	-1,5	-4,5	x_6	$18-1,5b_2$	-1,5	-1,5	x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	0	7	5	P_1	$-3,5b_1$	-3,5	-5,5	P_1	$-3,5b_2$	-3,5	1,5	P_1	-42	$-\frac{7}{3}$	5

161.1-oji lentelė gaunama tada, kada $b_1 \leq 12$ ir $b_1 \leq b_2$. Ji vaizduoja optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0,5b_1$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=3,5b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0,5$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=3,5$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=0$.

161.2-oji lentelė gaunama tada, kada $b_2 \leq 12$ ir $b_2 \leq b_1$. Ši lentelė dar nevaizduoja optimalaus sprendinio. Keičiant laisvąjį kintamąjį x_2 vietomis su baziniais kintamaisiais, priklausomai nuo parametrų b_1 ir b_2 reikšmių galima gauti tris naujas lenteles: 161.2.1., 161.2.2. ir 161.2.3.

161.3-oji lentelė gaunama tada, kada $b_1 \geq 12$ ir $b_2 \geq 12$. Ši lentelė taip pat dar nevaizduoja optimalaus sprendinio. Keisdami laisvąjį kintamąjį x_2 vietomis su baziniais kintamaisiais, priklausomai nuo b_1 ir b_2 reikšmių galime gauti tris naujas lenteles: 161.3.1., 161.3.2. ir 161.3.3.

161.2.1. lentelė				161.2.2. lentelė				161.2.3 lentelė			
B\L	L.n.	x_4	x_3	B\L	L.n.	x_4	x_1	B\L	L.n.	x_4	x_5
x_2	$0,5(b_1-b_2)$	-0,5	0,5	x_3	b_1-3b_2	-3	-4	x_3	b_1-b_2-10	-1	$-\frac{2}{3}$
x_1	$0,75b_2-0,25b_1$	0,75	-0,25	x_2	b_2	1	2	x_1	$0,5b_2-2,5$	0,5	$-\frac{1}{6}$
x_5	$15-1,5b_1+1,5b_2$	1,5	-1,5	x_5	$15-3b_2$	-3	-6	x_2	5	0	$\frac{1}{3}$
x_6	$18+0,75b_1-2,25b_2$	-2,25	0,75	x_6	18	0	3	x_6	$25,5-1,5b_2$	-1,5	0,5
P_1	$-2,75b_2-0,75b_1$	-2,75	-0,75	P_1	$-5b_2$	-5	-3	P_1	$-3,5b_2-7,5$	-3,5	-0,5

161.3.1. lentelė				161.3.2. lentelė				161.3.3. lentelė			
B\L	L.n.	x_6	x_3	B\L	L.n.	x_6	x_4	B\L	L.n.	x_6	x_5
x_2	$\frac{b_1-12}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	x_3	b_1-3b_2+24	$\frac{4}{3}$	-3	x_3	b_1-27	$-\frac{2}{3}$	-1
x_4	$b_2-12-\frac{b_1-12}{3}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$	x_2	b_2-12	$-\frac{2}{3}$	1	x_4	b_2-17	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_5	$27-b_1$	$\frac{2}{3}$	-1	x_5	$51-3b_2$	2	-3	x_2	5	0	$\frac{1}{3}$
x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	x_1	6	$\frac{1}{3}$	0	x_1	6	$\frac{1}{3}$	0
P_1	$-42-\frac{5(b_1-12)}{3}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{5}{3}$	P_1	$18-5b_2$	1	-5	P_1	-67	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$

161.2.1-oji lentelė vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0,75b_2-0,25b_1$, $x_2^{(opt)}=0,5(b_1-b_2)$, $P^{(opt)}=2,75b_2+0,75b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=-0,25$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0,75$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0,5$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=-0,5$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0,75$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=2,75$. Šis sprendinys gaunamas, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_2 \leq 12$, 2) $b_2 \leq b_1$, 3) $(b_1-b_2)/2 \leq b_2$, 4) $(b_1-b_2)/2 \leq 5$, t. y., kai plokštumos (b_1, b_2) taškų koordinatės tenkina predikatą: $(b_2 \leq b_1 \leq 3b_2) \wedge (b_2 \leq 12) \wedge (b_2 + 10 \geq b_1) = 1$.

161.2.2-oji lentelė taip pat vaizduoja jau optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=b_2$, $P^{(opt)}=5b_2$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=1$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=5$. Šis sprendinys gaunamas, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_2 \leq 12$, 2) $b_2 \leq b_1$, 3) $(b_1 - b_2)/2 \geq b_2$, 4) $b_2 \leq 5$, t. y., kai plokštumos (b_1, b_2) taškų koordinatės tenkina predikatą: $(0 \leq b_2 \leq 5) \wedge (b_1 \geq 3b_2) = 1$, nes medžiagų atsargų kiekis b_2 negali būti neigiamas dydis.

161.2.3-oji lentelė irgi vaizduoja optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0,5b_2-2,5$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=3,5b_2+7,5$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0,5$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=1$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=3,5$. Šis sprendinys gaunamas, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_2 \leq 12$, 2) $b_2 \leq b_1$, 3) $(b_1 - b_2)/2 \geq 5$, 4) $b_2 \geq 5$, t. y., kai plokštumos (b_1, b_2) taškų koordinatės tenkina predikatą: $(5 \leq b_2 \leq 12) \wedge (b_1 \geq b_2 + 10) = 1$.

161.3.1-oji lentelė taip pat vaizduoja optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=(b_1-12)/3$, $P^{(opt)}=22+\frac{5}{3}b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{1}{3}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{5}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=0$. Šis sprendinys gaunamas, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_1 \geq 12$, 2) $b_2 \geq 12$, 3) $(b_1-12)/3 \leq b_2-12$, 4) $(b_1-12)/3 \leq 5$, t. y., kai plokštumos (b_1, b_2) taškų koordinatės tenkina predikatą:

$$\left[(12 \leq b_1 \leq 27) \wedge \left(b_2 \geq \frac{b_1}{3} + 8 \right) \right] = 1.$$

Optimalų sprendinį vaizduoja ir 161.3.3-oji lentelė, kuri gaunama, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_1 \geq 12$, 2) $b_2 \geq 12$, 3) $(b_1-12)/3 \geq 5$, 4) $b_2-12 \geq 5$, t. y., kai plokštumos (b_1, b_2) taškų koordinatės tenkina predikatą: $\left[(b_1 \geq 27) \wedge (b_2 \geq 17) \right] = 1$. Tuomet $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=67$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=0$.

Liko vienintelė 161.3.2-oji lentelė, kuri dar nevaizduoja optimalaus sprendinio. Sukeisdami laisvąjį kintamąjį x_6 su baziniais kintamaisiais, gauname dar tris naujas lenteles: 161.3.2.1., 161.3.2.2. ir 161.3.2.3.

161.3.2.1. lentelė

B/L	L.n	x_3	x_4
x_6	$(3b_1-9b_2+72)/4$	0,75	-2,25
x_2	$0,5b_1-0,5b_2$	0,5	-0,5
x_5	$15-1,5b_1+1,5b_2$	-1,5	1,5
x_1	$0,75b_2-0,25b_1$	-0,25	0,75
P_1	$-2,75b_2-0,75b_1$	-0,75	-2,75

161.3.2.2. lentelė

B/L	L.n	x_5	x_4
x_3	b_1-b_2-10	$-\frac{2}{3}$	-1
x_2	5	$\frac{1}{3}$	0
x_6	$\frac{(51-3b_2)}{2}$	0,5	-1,5
x_1	$0,5b_2-2,5$	$-\frac{1}{6}$	0,5
P_1	$-3,5b_2-7,5$	-0,5	-3,5

161.3.2.3. lentelė

B/L	L.n	x_1	x_4
x_3	b_1-3b_2	-4	-3
x_2	b_2	2	1
x_5	$15-3b_2$	-6	-3
x_6	18	3	0
P_1	$-5b_2$	-3	-5

161.3.2.1-oji lentelė sutampa su 161.2.1-ja lentele ir vaizduoja tokį patį optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0,75b_2-0,25b_1$, $x_2^{(opt)}=0,5(b_1-b_2)$, $P^{(opt)}=2,75b_2+0,75b_1$. Šis sprendinys gaunamas, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_1 \geq 12$, 2) $b_2 \geq 12$, 3) $b_2-12 \leq \frac{b_1-12}{3}$, 4) $b_2-12 \leq 5$, 5) $\frac{3b_1-9b_2+72}{4} \leq \frac{51-3b_2}{2}$, 6) $\frac{3b_1-9b_2+72}{4} \leq 18$. Iš šių nelygybių išplaukia, kad parametrai b_1 ir b_2 reikšmės turi tenkinti predikatą: $\left[(12 \leq b_2 \leq 17) \wedge (3b_2-24 \leq b_1 \leq b_2+10) \right] = 1$.

161.3.2.1. ir 161.2.1. lentelių aprašomus sprendinius ir jų egzistavimo sritis galima sujungti. Tokią sujungtą sritį $(161.3.2.1) \cup (161.2.1)$ aprašo predikatas: $\left[(b_2 \leq b_1 \leq 3b_2) \wedge (b_2 \leq 12) \wedge (b_1 \leq b_2+10) \right] \vee \left[(12 \leq b_2 \leq 17) \wedge (3b_2-24 \leq b_1 \leq b_2+10) \right] = 1$. Šį sudėtingą predikatą galima supaprastinti. Gauname predikatą $(b_2 \leq b_1 \leq 3b_2) \wedge (3b_2-24 \leq b_1 \leq b_2+10) = 1$, aprašantį optimizacinio modelio parametrai b_1 ir b_2 kitimo sritį, kurioje $x_1^{(opt)}=0,75b_2-0,25b_1$, $x_2^{(opt)}=0,5(b_1-b_2)$, $P^{(opt)}=2,75b_2+0,75b_1$. Ta sritis – tai 335 pav. užštrichuota sritis, gauta analizuojant grafiniu būdu parametrai b_1 ir b_2 kitimo poveikį tokiam optimaliam sprendiniui, kurį vaizduoja tiesių $2x_1+3x_2=b_1$ ir $2x_1+x_2=b_2$ susikirtimo taškas C^* .

161.3.2.2-oji lentelė sutampa su 161.2.3-ja lentele ir vaizduoja tokį patį optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0,5b_2-2,5$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=3,5b_2+7,5$. Šis sprendinys gaunamas, kai parametrai b_1 ir b_2 tenkina nelygybes: 1) $b_1 \geq 12$, 2) $b_2 \geq 12$, 3) $b_2-12 \leq \frac{b_1-12}{3}$, 4) $b_2-12 \leq 5$, 5) $\frac{3b_1-9b_2+72}{4} \leq \frac{51-3b_2}{2}$, 6) $\frac{51-3b_2}{2} \geq 18$. Iš šių nelygybių išplaukia predikatas: $[(12 \leq b_2 \leq 17) \wedge (b_1 \geq b_2+10)]=1$, aprašantis 161.3.2.2-osios lentelės LSS.

Šį predikatą galima sujungti su predikatu, aprašančiu 161.2.3-osios lentelės LSS, ir gauti jungtinį bendrą sprendinį $x_1^{(opt)}=0,5b_2-2,5$, $x_2^{(opt)}=5$, galiojantį jungtinėje srityje $(161.3.2.2) \cup (161.2.3)$, kurią aprašo predikatas $[(5 \leq b_2 \leq 17) \wedge (b_1 \geq b_2+10)]=1$.

161.3.2.3-oji lentelė sutampa su 161.2.2-ja lentele ir vaizduoja tokį patį optimalų sprendinį $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=b_2$. Šis sprendinys turėtų galioti srityje, kurioje parametrai b_1 ir b_2 turėtų tenkinti nelygybes: 1) $b_1 \geq 12$, 2) $b_2 \geq 12$, 3) $b_2-12 \leq \frac{b_1-12}{3}$, 4) $b_2-12 \leq 5$, 5) $\frac{3b_1-9b_2+72}{4} \geq 18$, 6) $\frac{51-3b_2}{2} \geq 18$.

Tačiau šios sąlygos yra prieštaringos, nes parametras b_2 negali vienu metu būti nemažesnis už 12 ir nedidesnis už 5. Todėl papildomos srities, atitinkančios 161.3.2.3-ją lentelę, kurioje galiotų optimalus sprendinys, kurį vaizduoja 161.2.2-oji lentelė, egzistuoti negali. Lieka tik sritis, kurią aprašo predikatas $[(0 \leq b_2 \leq 5) \wedge (b_1 \geq b_2+10)]=1$.

Sistematizuodami parametų b_1 ir b_2 kitimo poveikio tyrimo rezultatus, gauname:

1) kai $[(0 \leq b_1 \leq 12) \wedge (b_2 \geq b_1)]=1$, tai optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=0,5b_1$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=3,5b_1$ (sritis 161.1.);

2) kai $\left[(12 \leq b_1 \leq 27) \wedge \left(b_2 \geq \frac{b_1}{3} + 8 \right) \right] = 1$, tai optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=\frac{b_1-12}{3}$,

$P^{(opt)}=\frac{5}{3}b_1+22$ (sritis 161.3.1.);

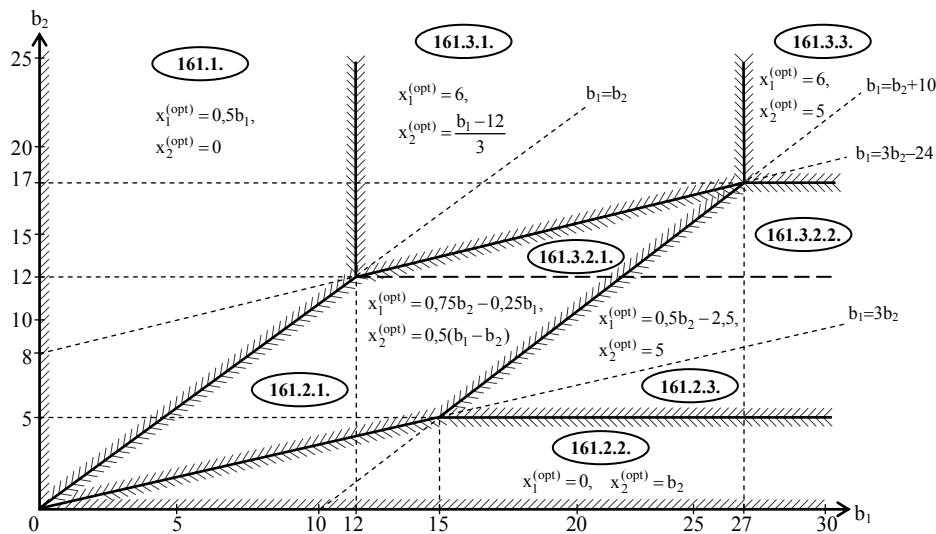
3) kai $[(b_1 \geq 27) \wedge (b_2 \geq 17)]=1$, tai optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=67$ (sritis 161.3.3.);

4) kai $[(0 \leq b_2 \leq 5) \wedge (b_1 \geq 3b_2)]=1$, tai optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=b_2$, $P^{(opt)}=5b_2$ (sritis 161.2.2.);

5) kai $[(5 \leq b_2 \leq 17) \wedge (b_1 \geq b_2+10)]=1$, tai optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=0,5b_2-2,5$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=3,5b_2+7,5$ (jungtinė sritis 161.2.3. $\cup$ 161.3.2.2.);

6) kai $(b_2 \leq b_1 \leq 3b_2) \wedge (3b_2-24 \leq b_1 \leq b_2+10)$, tai optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=0,75b_2-0,25b_1$, $x_2^{(opt)}=0,5(b_1-b_2)$, $P^{(opt)}=2,75b_2-0,75b_1$ (jungtinė sritis 161.2.1. $\cup$ 161.3.2.1.).

Gautus rezultatus vaizduoja 346 pav., kuris papildoma ir apibendrina 335 pav., gautą naudojantis grafiniu metodu.



346 pav.

Naudojantis čia jau aprašytu simplekso algoritmo taikymo optimalaus sprendinio jautrumo analizėje metodu, galima gauti ir tuos rezultatus, kuriuos buvome gavę grafiniu metodu, nagrinėdami parametru b_{11} ir b_{21} kitimo poveikį optimaliam sprendiniui.

Sudarę pradinę simplekso algoritmo lentelę (žiūr. 162-ją lentelę), jau antrajame žingsnyje, nagrinėdami 163-ją lentelę, gautume du variantus.

Kai $39-5b_{11}-11b_{21} \leq 0$, t. y., kai $p_1 \leq 0$, tai 163-oji lentelė vaizduoja jau optimalų sprendinį atitinkantį tašką $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=5$.

To optimalaus sprendinio galiojimo sritis – zona A (žiūr. 344 pav.)

Kai $39-5b_{11}-11b_{21} > 0$, tai 163-ji lentelė dar nevaizduoja optimalaus sprendinio ir, ieškant jo, galimi trys variantai:

- 1) $\left(\frac{4}{b_{11}} \leq \frac{8}{b_{21}}\right) \wedge \left(\frac{4}{b_{11}} \leq \frac{18}{3}\right)$ (žiūr. 163.1-ją lentelę);
- 2) $\left(\frac{8}{b_{21}} \leq \frac{4}{b_{11}}\right) \wedge \left(\frac{8}{b_{21}} \leq \frac{18}{3}\right)$ (žiūr. 163.2-ją lentelę);
- 3) $\left(\frac{18}{3} \leq \frac{4}{b_{11}}\right) \wedge \left(\frac{18}{3} \leq \frac{8}{b_{21}}\right)$ (žiūr. 163.3-ją lentelę).

162. lentelė

B\L	L.n.	x_1	x_2
x_3	19	b_{11}	3
x_4	13	b_{21}	1
x_5	15	0	3
x_6	18	3	0
P_1	0	$39-5b_{11}-11b_{21}$	5

163. lentelė

B\L	L.n.	x_1	x_5
x_3	4	b_{11}	-1
x_4	8	b_{21}	$-\frac{1}{3}$
x_2	5	0	$\frac{1}{3}$
x_6	18	3	0
P_1	-25	$39-5b_{11}-11b_{21}$	$-\frac{5}{3}$

163.1. lentelė

B\L	L.n.	x_3	x_5
x_1	$\frac{4}{b_{11}}$	$\frac{1}{b_{11}}$	$-\frac{1}{b_{11}}$
x_4	$8 - \frac{4b_{21}}{b_{11}}$	$-\frac{b_{21}}{b_{11}}$	$\frac{b_{21}}{b_{11}} - \frac{1}{3}$
x_2	5	0	$\frac{1}{3}$
x_6	$18 - \frac{12}{b_{11}}$	$-\frac{3}{b_{11}}$	$\frac{3}{b_{11}}$
P_1	$-25 - \frac{4}{b_{11}}(39-5b_{11}-11b_{21})$	$-\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{b_{11}}$	$-\frac{5}{3} + \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{b_{11}}$

163.2. lentelė

B\L	L.n.	x_4	x_5
x_3	$4 - \frac{8b_{11}}{b_{21}}$	$-\frac{b_{11}}{b_{21}}$	$-1 + \frac{b_{11}}{3b_{21}}$
x_1	$\frac{8}{b_{21}}$	$\frac{1}{b_{21}}$	$-\frac{1}{3b_{21}}$
x_2	5	0	$\frac{1}{3}$
x_6	$18 - \frac{24}{b_{21}}$	$-\frac{3}{b_{21}}$	$\frac{1}{b_{21}}$
P_1	$-25 - \frac{8}{b_{21}}(39-5b_{11}-11b_{21})$	$-\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{b_{21}}$	$-\frac{5}{3} + \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{3b_{21}}$

163.1-ji lentelė vaizduoja optimalų sprendinį $x_1^{(opt)} = \frac{4}{b_{11}} 0$, $x_2^{(opt)} = 5$, kai tenkinama nelygybė

$-\frac{5}{3} + \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{3b_{21}} \leq 0$, nes $-\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{b_{11}} < 0$, kadangi, pereidami nuo 163-osios lentelės prie

163.1, 163.2 ir 163.3 lentelių, mes buvome priėmę, jog $39-5b_{11}-11b_{21} > 0$, o parametras b_{11} „fiziškai“ negali turėti neigiamos reikšmės.

163.3. lentelė

B\L	L.n.	x_6	x_5
x_3	$4-6b_{11}$	$-\frac{b_{11}}{3}$	-1
x_4	$8-6b_{21}$	$-\frac{b_{21}}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	5	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$18-6$	$\frac{1}{3}$	0
P_1	$-259+30b_{11}-66b_{21}$	$-\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Kad tas optimalus sprendinys priklausytų LSS, turi būti tenkinamos sąlygos: 1) $8 - \frac{4b_{21}}{b_{11}} \geq 0$,
 2) $18 - \frac{12}{b_{11}} \geq 0$. Šios sąlygos sutampa su perėjimo nuo 163-osios prie 163.1-osios lentelės sąlygomis:
 1) $\frac{4}{b_{11}} \leq \frac{8}{b_{21}}$, 2) $\frac{4}{b_{11}} \leq \frac{18}{3}$.

Nesunku įsitikinti, jog sprendinys, kurį vaizduoja 163.1-ji lentelė yra B^* tipo sprendinys, priklausantis sričiai B (žiūr. 344 pav.).

Kai nebetenkinama optimumo sąlyga, t. y., kai $-\frac{5}{3} + \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{3b_{21}} > 0$, tai iš 163.1-sios lentelės gali būti gautos 3 naujos lentelės 163.1.1., 163.1.2. ir 163.1.3., kurių gavimą ir analizę palieku skaitytojui.

163.2-oji lentelė, kai $-\frac{5}{3} + \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{3b_{21}} \leq 0$, $4 - \frac{8b_{11}}{b_{21}} \geq 0$ ir $18 - \frac{24}{b_{21}} \geq 0$ taip pat vaizduoja optimalų sprendinį priklausantį G^* tipui. Kai $-\frac{5}{3} + \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{3b_{21}} > 0$, tai iš 163.2-osios lentelės gali būti gautos trys naujos lentelės 163.2.1., 163.2.2. ir 163.2.3.

163.3-oji lentelė vaizduoja optimalų sprendinį priklausantį H sričiai.

Palieku skaitytojui baigti parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo poveikio optimaliam sprendiniui analizę, įsitikinant, kad tokiu būdu gauti rezultatai pilnai sutampa su rezultatais, gautais grafiniu metodu (žiūr. 344 pav.).

Naudojantis simplekso algoritmu ir standartinėmis programomis, galima rasti ir tai, kiek ko tikslinga gaminti, kiek ko pirkti ir kiek ko parduoti, pasiliekant turimo kapitalo ribose. Pailiustruosiu šį teiginį, pasinaudodamas nagrinėjamo optimizavimo uždaviniu.

Bendroji išlaidų (ir investuoto kapitalo) suma, perkant 19 vienetų pirmosios, 13 vienetų antrosios, 15 vienetų trečiosios ir 18 vienetų ketvirtosios medžiagų bei gaminant 5 pirmojo ir 3 antrojo tipo gaminius yra lygi $19 \cdot 5 + 13 \cdot 11 + 15 \cdot 1 + 18 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 396$. Tą pačią sumą būtume gavę, apskaičiuodami pagamintos produkcijos savikainą ir medžiagų likučių vertę: $5 \cdot 54 + 3 \cdot 36 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 396$.

Pažymėję x_3, x_4, x_5, x_6 – medžiagų likučius, x_7, x_8, x_9, x_{10} – papildomai perkamus jų kiekius, x_{11} – nepanaudotą turimo kapitalo likutį, gausime tokį optimizavimo uždavinio modelį:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 + x_7$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 13 + x_8$$

$$3x_2 + x_5 = 15 + x_9$$

$$3x_1 + x_6 = 18 + x_{10}$$

$$54x_1 + 36x_2 + x_{11} = 396$$

$$P = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \text{ (arba } P_1 = -P = -7x_1 - 5x_2 \rightarrow \min)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0, x_9 \geq 0, x_{10} \geq 0, x_{11} \geq 0.$$

Spręsdami šį optimizavimo uždavinį simplekso metodu ir naudodamiesi standartine programa, gausime tokias simplekso lenteles (žiūr. 164-170 lenteles):

164. lentelė

B\L	L.n.	x ₁	x ₂	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
x ₃	19	2	3	-1	0	0	0
x ₄	13	2	1	0	-1	0	0
x ₅	15	0	3	0	0	-1	0
x ₆	18	3	0	0	0	0	-1
x ₁₁	396	54	36	0	0	0	0
P ₁	0	7	5	0	0	0	0

165. lentelė

B\L	L.n.	x ₆	x ₂	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
x ₃	7	$-\frac{2}{3}$	3	-1	0	0	$\frac{2}{3}$
x ₄	1	$-\frac{2}{3}$	1	0	-1	0	$\frac{2}{3}$
x ₅	15	0	3	0	0	-1	0
x ₁	6	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$
x ₁₁	72	-18	36	0	0	0	18
P ₁	-42	$-\frac{7}{3}$	5	0	0	0	$\frac{7}{3}$

166. lentelė

B\L	L.n.	x ₆	x ₄	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
x ₃	4	$\frac{4}{3}$	-3	-1	3	0	$-\frac{4}{3}$
x ₂	1	$-\frac{2}{3}$	1	0	-1	0	$\frac{2}{3}$
x ₅	12	2	-3	0	3	-1	-2
x ₁	6	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$
x ₁₁	36	6	-36	0	36	0	-6
P ₁	-47	1	-5	0	5	0	-1

167. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₄	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
x ₆	3	0,75	-2,25	-0,75	2,25	0	-1
x ₂	3	0,5	-0,5	-0,5	0,5	0	0
x ₅	6	-1,5	1,5	1,5	-1,5	-1	0
x ₁	5	-0,25	0,75	0,25	-0,75	0	0
x ₁₁	18	-4,5	-22,5	4,5	22,5	0	0
P ₁	-50	-0,75	-2,75	0,75	2,75	0	0

168. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₄	x ₅	x ₈	x ₉	x ₁₀
x ₆	6	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
x ₂	5	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
x ₇	4	-1	1	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	0
x ₁	4	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0
x ₁₁	0	0	-27	-3	27	3	0
P ₁	-53	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

169. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₄	x ₇	x ₈	x ₁₁	x ₁₀
x ₆	6	0	-6	0	6	$\frac{1}{6}$	-1
x ₂	5	0	-3	0	3	$\frac{1}{9}$	0
x ₇	4	-1	-5	0	5	$\frac{2}{9}$	0
x ₁	4	0	2	0	-2	$-\frac{1}{18}$	0
x ₉	0	0	-9	-1	9	$\frac{1}{3}$	0
P ₁	-53	0	1	0	-1	$-\frac{1}{6}$	0

170. lentelė

B\L	L.n.	x ₃	x ₁	x ₅	x ₈	x ₁₁	x ₁₀
x ₆	18	0	3	0	0	0	-1
x ₂	11	0	1,5	0	0	$\frac{1}{36}$	0
x ₇	14	-1	2,5	0	0	$\frac{1}{12}$	0
x ₄	2	0	0,5	0	-1	$-\frac{1}{36}$	0
x ₉	18	0	4,5	-1	0	$\frac{1}{12}$	0
P ₁	-55	0	-0,5	0	0	$-\frac{5}{36}$	0

Gavome, jog tuo atveju, kada medžiagas galima pirkti ir parduoti turimo kapitalo ribose, optimalus planas yra: $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=11$, $P^{(opt)}=55$.

Kadangi $x_4=2$, $x_6=18$, $x_7=14$ ir $x_9=18$, tai vykdydami šį planą, galėsime parduoti 2 vienetus antrosios ir 18 vienetų ketvirtosios medžiagos, pirkdami 14 vienetų pirmosios ir 18 vienetų trečiosios medžiagos. Tikslu funkcijos formulė $P=55-0,5x_1-\frac{5}{36}x_{11}$ rodo, kad pradėjus gaminti pirmojo tipo gaminius, pelnas sumažėtų po 0,5 vieneto kiekvienam gaminiui, nes to gaminio gamybai reikėtų resursų, kuriuos būtų galima gauti tik sumažinus

labiau pelningų antrojo tipo gaminių gamybą.

Jei būtų galima padidinti turimą kapitalą, kuris vykdant gamybinį planą, buvo visas pilnai sunaudotas, nes kapitalo likutis $x_{11}^{(opt)}=0$, tai pelnas padidėtų ir pelno prieauglis taptų lygus

$\Delta P = -\frac{5}{36}\Delta x_{11}$, kas pilnai suprantama, nes tuomet kapitalo likučio x_{11} prieauglis Δx_{11} taptų teigiamu

dydžiu, o kapitalo investavimo į antrojo tipo gaminių gamybą efektyvumas, kaip žinome, yra

$E_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{5}{36}$, iš kur ir išplaukia formulė $\Delta P = -\frac{5}{36}\Delta x_{11}$.

Įdomu stebėti, kaip **simplekso lentelės imituoja gamybinio plano tobulinimo, didinant pelną P, procesą.**

Pradžioje (žiūr. 164-ją lentelę) turime situaciją, kai gamybinis procesas dar nepradėtas: medžiagų likučiai lygūs turimoms jų atsargoms ir pelnas, aišku, dar lygus 0.

165-oji lentelė vaizduoja gamybinį planą, kada sunaudojamos ketvirtosios medžiagos visos atsargos ($x_6=0$) ir pagaminami 6 pirmojo tipo gaminiai ($x_1=6$). Pelnas P tampa lygus $7 \cdot 6=42$.

166-oji lentelė vaizduoja planą, kai papildomai pagaminamas vienas antrojo tipo gaminys ($x_2=1$). Pilnai sunaudojamos antrosios medžiagos atsargos ($x_4=0$). Pelnas P tampa lygus $6 \cdot 7 + 1 \cdot 5=47$.

167-oji lentelė vaizduoja tokį gamybinio plano variantą, kada, sumažinant mažesnę kapitalo investavimo efektyvumą turinčių pirmojo tipo gaminių kiekį, papildomai pagaminami dar 2 antrojo tipo gaminiai. Tuomet suvartojamos visos pirmosios medžiagos atsargos, tačiau lieka nesuvartoti 3 vienetai ketvirtosios ir 6 vienetai trečiosios medžiagos. Pelnas P tampa lygus $5 \cdot 7 + 3 \cdot 5=50$.

168-oji lentelė vaizduoja gamybinį planą, kuris sudaromas, papildomai perkant 4 vienetų pirmosios medžiagos. Tai leidžia dar 2 vienetais padidinti pagamintų antrojo tipo gaminių kiekį, tiesa, sumažinant dar vienu vienetu pirmojo tipo gaminių kiekį. Pelnas P tampa lygus $4 \cdot 7 + 5 \cdot 5=53$. Turimo kapitalo likutis tampa lygus 0 (žiūr. $x_{11}=0$).

169-oji lentelė vaizduoja tik bazinio kintamojo x_{11} pakeitimą kintamuoju x_9 . Kadangi bazinio kintamojo x_{11} reikšmė buvo lygi 0, tai tas sukeitymas dviejų kintamųjų, lygių 0, vietomis nieko nepakeitė gamybos plane ir, aišku, nepakeitė pelno P dydžio.

170-oji lentelė vaizduoja jau optimalų (duotomis sąlygomis) gamybinį planą, kada visai atsisakoma mažiau efektyvių pirmojo tipo gaminių gamybos ir visas turimas kapitalas skiriamas antrojo tipo gaminių gamybai. Jų pagaminama 11 vienetų ($x_2=11$). Kad būtų galima pagaminti tiek šių gaminių, parduodamos visos ketvirtosios medžiagos atsargos ($x_6=18$) ir 2 vienetai antrosios medžiagos ($x_4=2$), o už gautus pinigus perkama 18 vienetų trečiosios medžiagos ($x_9=18$), 14 vienetų pirmosios medžiagos ($x_7=14$) ir papildomai užmokami 6 vienetai už gamybą, nes 11 antrojo tipo gaminių gamyba kainuoja $7 \cdot 11=77$ vienetų, kas 6 vienetais viršija 5 vienetų pirmojo tipo gaminių ir 3 antrojo tipo gaminių pagaminimo išlaidas, lygias $5 \cdot 10 + 7 \cdot 3=71$.

Reikėtų atkreipti skaitytojų dėmesį, kad tais atvejais, kai pagamintą produkciją galima bet kuriais kiekiais laisvai parduoti, o gamybai reikalingus resursus galima laisvai bet kuriais kiekiais pirkti ir parduoti, sprendžiant optimizavimo uždavinius ne visuomet būtina ir tikslinga naudotis gana sudėtingu simplekso algoritmu ir kitais specialiais sąlyginių ekstremumų paieškos metodais, nes tuomet pakanka apskaičiuoti kapitalo investavimo į gaminių j gamybą efektyvumo

koeficientus $E_j = \frac{P_j}{S_j}$ ir gaminti maksimalų galimų tų gaminių j kiekį x_j , kurių E_j yra didžiausi.

Pavyzdžiui, mūsų atveju $E_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{7}{54}$, $E_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{5}{36}$. Kadangi $\frac{5}{36} > \frac{7}{54}$, tai, nesant apribojimų tiekime, gamyboje ir prekyboje, tikslingiau visą turimą kapitalą investuoti į antrojo tipo gaminių gamybą. Tuomet turėdami 396 vienetų kapitalo, galime pagaminti $\frac{396}{36} = 11$ antrojo tipo gaminių, kurių savikaina yra $S_2=36$, negaminant pirmojo tipo gaminių. Gautas pelnas bus lygus $P=P_2 \cdot x_2=55$, o gamybai reikalingas $b_{12} \cdot x_2=3 \cdot 11=33$ vienetų pirmosios medžiagos, $b_{22} \cdot x_2=1 \cdot 11=11$ vienetų – antrosios, $b_{32} \cdot x_2=3 \cdot 11=33$ vienetų – trečiosios ir $b_{42} \cdot x_2=0 \cdot 11=0$ vienetų ketvirtosios medžiagos. Todėl teks pirkti $b_{12} \cdot x_2 - b_1=33-19=14$ vienetų pirmosios ir $b_{32} \cdot x_2 - b_3=33-15=18$ vienetų trečiosios medžiagos, bei bus galima parduoti $b_2 - b_{22} \cdot x_2=13-11=2$ vienetus antrosios ir $b_4 - b_{42} \cdot x_2=18-0=18$ vienetų ketvirtosios medžiagos.

Kaip matome, **samprotaudami visai paprastai, gavome tuos pačius rezultatus, ką davė gana sudėtingi skaičiavimai, naudojantis simplekso metodu.**

Šis pavyzdėlis iliustruoja dar vieną iš priežasčių, dėl kurių specialūs optimizavimo metodai praktikoje nėra taip plačiai taikomi, kaip, atrodytų, turėtų būti taikomi. Jei optimizacinių modelių apribojimai nėra griežti ir jei juos galima „apeiti“, tai optimizavimo uždaviniai gali būti išspręsti žymiai paprasčiau, nesinaudojant sudėtingais optimizavimo metodais. Tai, žinoma, nereiškia, kad specialūs optimizavimo metodai neturi jokios praktinės reikšmės ir nereikia mokėti jais naudotis. Tai reiškia tik tai, kad visuomet naudinga pakankamai giliai išnagrinėti probleminę situaciją ir pasirinkti jos sprendimui pačius paprasčiausius ir pigiausius metodus, duodančius didžiausią efektą. Probleminės situacijos matematinio modelio sudarymas ir to modelio analizė kaip tik ir yra viena iš priemonių, leidžiančių geriau susivokti situacijoje, ir skatinančių tokį suvokimą. Todėl bandyti kurti matematinius probleminius situacijų modelius naudinga net ir tada, kai problemos bus sprendžiamos paprastais metodais, nesinaudojant sudėtingu matematiniu aparatu.

Reikia padaryti ir antrąją išvadą, išplaukiančią iš ką tik išnagrinėtų pavyzdėlių: **simplekso metodas – gana universali priemonė, kurią galima taikyti ne tik tiesinių optimizavimo uždavinių sprendimui, bet ir tiesinių optimizacinių modelių jautrumo ir stabilumo analizei.** Šiuo metodu ypatingai patogiu naudotis, pasitelkus kompiuterinę techniką ir tokią jos programinę įrangą, kuri leistų operuoti ir su simboliais (pavyzdžiui, MAPLE programų paketą). Tai žymiai pagreitina bei palengvina varginančius ir nuobodžius skaičiavimus ir leidžia daryti su optimizaciniu modeliu įvairius eksperimentus (pavyzdžiui, nustatyti optimalaus sprendinio stabilumo ir jo apskaičiavimo formulių izomorfiškumo zonas), tame tarpe ir dialogo su kompiuteriu režime.

1.15.2.5. Sudėtingesnio tiesinio optimizacinio modelio sudarymo, optimizavimo uždavinio sprendimo ir sprendinio analizės pavyzdys

Pasinaudodami simplekso algoritmo programa bei kompiuteriu, išspręsimė šiek tiek sudėtingesnę optimizacinę uždavinį, raskdami absoliučiai optimalų ir optimalų sveikaskaitinį sprendinius, ir išnagrinėsime optimalaus sprendinio jautrumą ir jautrumo koeficientų stabilumo zonas. Pasinaudosime tos analizės rezultatais, racionaliai didindami medžiagų atsargas ir gamybinius pajėgumus. Išspręsti šį uždavinį, naudojantis grafiniu metodu, būtų jau nebeįmanoma.

1.15.2.5.1. Sudėtingesnio tiesinio optimizacinio modelio sudarymo ir optimalaus sprendimo radimo simplekso metodu pavyzdys

Tarkime, kad įmonė gali gaminti n tipų detales, kurių kiekius žymėsime x_j : $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$. Jas gaminant, naudojamos m rūšių medžiagos i , kur $i=1, 2, \dots, m$. Medžiagų panaudojimo vienetines normas žymėsime b_{ij} .

Tarkime, jog medžiagų i suvartojimo, gaminant gaminio j vienetą, technologinių normų b_{ij} matrica $m \times n=4 \times 3$ yra tokia:

$$\|b_{ij}\| = \begin{array}{c|ccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Medžiagų i turimų atsargų b_i vektorius $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) = (1000, 2000, 800, 600)$.

Įrenginių k laiko panaudojimo, gaminant gaminio j vienetą (kur $k=1, 2, \dots, \ell$, o ℓ – įrenginių tipų skaičius), technologinių normų t_{kj} matrica yra tokia:

$$\|t_{kj}\| = \begin{array}{c|ccc} k \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0,5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1,5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 1,5 & 2 & 0,5 \end{array}$$

Įrengimų k darbo laiko fondų T_k vektorius $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = (700; 900; 1500; 1000; 800)$.

Medžiagų i vieneto kainų a_i vektorius $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (5; 4; 8; 10)$.

Darbo laiko vieneto, gaminant detalę j ir naudojant įrengimą k , kainų d_{kj} matrica:

$$\|d_{kj}\| = \begin{array}{c|ccc} k \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1,5 & & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1,5 & 0,5 \\ 4 & 4 & 1 & 0,5 & \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Detalių j vieneto realizavimo kainų c_j vektorius $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = (55; 60; 85)$.

Tarkime, jog įmonė gali prekiauti ne tik detalėmis $j(j=1; 2; 3)$, bet ir sudėtingesniais gaminiais, kuriuos galima surinkti iš tų detalių. Tarkime, kad vieno tokio gaminio sudėtį sudaro visų detalių komplektai po q_j detalių kiekviename, ir $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) = (3; 2; 1)$.

Tarkime taip pat, kad sudėtingo gaminio surinkimo išlaidos $r_4=23$, o sudėtingo gaminio realizavimo kaina $c_4=400$.