

Pavyzdžiui, kai $b_{21}=2$, tai b_{11} gali keistis ribose $7,8-3,2 \cdot 2 < b_{11} < 5,85-1,65 \cdot 2$, t. y. ribose $1,4 < b_{11} < 2,55$, kas sutampa su anksčiau gautais rezultatais, kai buvo nagrinėjamas parametro b_{11} kitimo poveikis, nesikeičiant visiems kitiems modelio parametrams.

$$\text{Kai tuo pačiu metu ir } b_{11}=2, \text{ tai gauname, jog } x_1^{(\text{opt})} = \frac{20}{3b_{21}-b_{11}} = 5, \quad x_2^{(\text{opt})} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}} = 3,$$

kas taip pat sutampa su anksčiau gautais rezultatais.

Nesunku pastebėti ryšį tarp 336 pav. ir 337 pav. bei 333 pav., t. y. pastebėti, kad 337 pav. yra 336 pav. taškų bei tiesių transformacija, pervedanti iš koordinačių sistemos (b_{21}, b_{11}) į koordinačių sistemą (x_1, x_2) , naudojantis lygybėmis $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$. Ir atvirkščiai: 336 pav. yra 337 pav. taškų bei tiesių transformacija, pervedanti iš koordinačių sistemos (x_1, x_2) į koordinačių sistemą (b_{21}, b_{11}) . Šias transformacijas aprašo formulės: $x_1 = \frac{20}{3b_{21}-b_{11}},$

$$x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}} \text{ ir } b_{11} = \frac{19-3x_2}{x_1}, \quad b_{21} = \frac{13-x_2}{x_1},$$

kurios gaunamos iš pirmosios ir antrosios 333 pav. tiesių lygčių sistemos $\begin{cases} b_{11}x_1 + 3x_2 = 19, \\ b_{21}x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$, kai ten vaizduojamų pirmosios ir antrosios tiesių pastovios

parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmės, lygios $b_{11}=2, b_{21}=2$, pakeičiamos kintamaisiais b_{11} ir b_{21} .

Tiesė BC iš 333 pav., koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje turinti lygtį $2x_1 + 3x_2 = 19$, kurioje $b_{11}=2$, pereinant į 336 pav. koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, transformuojasi į horizontalią tiesę $b_{11}=2$, o tiesė CD iš 333 pav., koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje turinti lygtį $2x_1 + x_2 = 13$, kurioje $b_{21}=2$, pereinant į 336 pav. koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, transformuojasi į vertikalią tiesę $b_{21}=2$. Taškas C – tiesių BC ir CD susikirtimo taškas 333 pav. – transformuojasi į tašką C', turintį koordinates $b_{21}=2, b_{11}=2$ ir priklausantį keturkampio M'N'P'R' vidinei sričiai. Tiesė AB, turinti lygtį $x_2=5$, transformuojasi į tiesę $b_{11}=0,5b_{21}$, o tiesė HF iš 333 pav., turinti lygtį $x_1=6$, pereinant į 336 pav., transformuojasi į tiesę $b_{11}=3b_{21} - \frac{10}{3}$.

Analogiškai gauname, jog tiesė P'N', 336 pav. koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemoje turinti lygtį $b_{11}=5,85-1,65b_{21}$, pereinant į 337 pav. koordinačių x_1 ir x_2 sistemą, transformuojasi į tiesę PN, turinčią lygtį $39x_1 + 31x_2 = \frac{809}{3}$, o tiesė R'M', koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemoje turinti lygtį $b_{11}=7,8-3,2b_{21}$, pereinant į 337 pav., transformuojasi į tiesę RM, turinčią lygtį $39x_1 + 31x_2 = 303$. Pasirodo, kad tiesės PN ir RM yra lygiagrečios, kai tuo tarpu tiesė P'N' ir R'M' kertasi taške U' ($b_{21} = \frac{39}{37} = 1\frac{8}{31}, b_{11} = \frac{117}{31} = 3\frac{24}{31}$), gulinčiame ant tiesės $b_{11}=3b_{21}$, kuri, pereinant į koordinačių x_1, x_2 sistemą, transformuojasi į begaliniai nutolusią tiesę.

Bendrai, lygiagretės tiesės $x_2=k_2$, kur $k_2=\text{const. ir } 0 \leq k_2 < 13$, pereinant į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, transformuojasi į tieses $b_{11} = \frac{19-3k_2}{13-k_2}$, kertančias koordinačių pradžios tašką $b_{21}=0, b_{11}=0$, plokštumoje (x_1, x_2) esantį begalybęje.

Ir atvirkščiai, tiesės $b_{11}=k_2'b_{21}$, kur $k_2'=\text{const ir } 0 \leq k_2' < 3$, pereinant į koordinačių x_1 ir x_2 sistemą, transformuojasi į lygiagretes tieses $x_2 = \frac{19-3k_2'}{13-k_2'}$.

Analogiškai gauname, jog lygiagretės tiesės $x_1=k_1$, kur $k_1=\text{const. ir } k_1 > 0$, pereinant į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, transformuojasi į lygiagretes tieses $b_{11} = 3b_{21} - \frac{20}{k_1}$, o tiesė $x_1=0$ transformuosis į begaliniai nutolusią tiesę. Taip pat gauname, jog lygiagretės tiesės $b_{11}=3b_{21}-k_1'$, kur $k_1'=\text{const. ir } k_1' > 0$, pereinant į koordinačių x_1 ir x_2 sistemą, transformuojasi į lygiagretes tieses $x_1 = \frac{20}{k_1'}$.

Tokiu būdu, bet kuris 333 pav. ir 337 pav. plokštumos taškas (x_1, x_2) , išskyrus taškus, priklausančius ordinačių ašiai $x_1=0$, transformuojasi į 336 pav. plokštumos tašką $\left(b_{11} = \frac{19-3x_2}{x_1}, \right.$

$b_{21} = \frac{13 - x_2}{x_1}$), o bet kuris 336 pav. plokštumos taškas (b_{21}, b_{11}) , išskyrus taškus, priklausančius tiesei

$b_{11}=3b_{21}$, transformuojasi į 333 pav. ir 337 pav. tašką $\left(x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}, x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}} \right)$.

Taip pat, bet kuri 333 pav. ir 337 pav. tiesė, išskyrus tiesę $x_1=0$, transformuojasi į atitinkamą 336 pav. tiesę, kuri gaunama, pakeitus x_1 ir x_2 jų išraiškomis koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemoje:

$x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}, x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$. Ir atvirkščiai: bet kuri 336 pav. tiesė, išskyrus tiesę $b_{11}=3b_{21}$, transformuojasi į atitinkamą plokštumos x_1 ir x_2 tiesę, kuri gaunama, pakeitus b_{21} ir b_{11} jų išraiškomis koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje: $b_{21} = \frac{13 - x_2}{x_1}, b_{11} = \frac{19 - 3x_2}{x_1}$. Plokštumos x_1 ir x_2 tiesių susikirtimo

taškai, nepriklausantys tiesei $x_1=0$, transformuojasi į atitinkamų plokštumos b_{21} ir b_{11} tiesių susikirtimo taškus, nepriklausančius tiesei $b_{11}=3b_{21}$, ir atvirkščiai.

Jei kokios nors tiesės koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje kertasi taške, priklausančiame tiesei $x_1=0$, tai, transformuodami tas tieses į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, gausime lygiagrečias tieses. Įrodysime tai.

Tarkime, kad koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje turime tiesių $vx_1+x_2=k_2$ šeimą, kurios visos tiesės kerta tiesę $x_1=0$ tame pačiame taške, turinčiame koordinatę $x_2=k_2=\text{const.}$, ir skiriasi viena nuo kitos tik to kirtimo kampu, priklausančiu nuo kintamojo v . Transformuodami lygtį $vx_1+x_2=k_2$ į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, gausime lygtį $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$. Keisdami transformuojamų tiesių kampo koeficientą v ir nekeisdami tiesės $x_1=0$ kirtimo taško ordinatės $x_2=k_2$, gausime lygiagrečių tiesių, turinčių vienodą kampo koeficientą $v' = \frac{3k_2 - 19}{13 - k_2}$, šeimą.

Gautų lygiagrečių tiesių $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ pasvirimo kampas priklauso nuo parametro k_2 . Jei, pavyzdžiui, $k_2=\frac{19}{3}$, tai $v'=0$, ir tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ tampa 336 pav.

horizontalėmis $b_{11}=3v$, ką mes jau buvome gavę, transformuodami tiesę $2x_1+3x_2=19$, kurios $v=\frac{2}{3}$, o

$k_2=\frac{19}{3}$. Jei $k_2=13$, tai tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ pavirsta vertikaliomis tiesėmis $b_{21}=v$, ką mes

jau buvome gavę, transformuodami tiesę $2x_1+x_2=13$, kurios $v=2$, o $k_2=13$. Jei $\frac{19}{3} < k_2 < 13$, tai $v'>0$, ir

lygiagretės tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ bus pasvirusios į kairę, o jei $k_2 < \frac{19}{3}$ arba $k_2 > 13$, tai $v'>0$,

ir lygiagretės tiesės bus pasvirusios į dešinę, kaip, pavyzdžiui, pasvirusios lygiagretės tiesės $2b_{11}-b_{21}=5v$, gaunamos transformuojant tieses $vx_1+x_2=5$, kertančias tiesę $x_1=0$ taške, turinčiame koordinatę $x_2=5$. Vieną iš tokių tiesių, būtent, tiesę $x_2=5$, kuri gaunama iš tiesės $vx_1+x_2=5$, kai $v=0$, mes jau esame transformavę ir gavome tiesę $2b_{11}-b_{21}=0$, t. y. tiesę $b_{11}=0,5b_{21}$ (žiūr. 336 pav.). Pasvirusios į dešinę bus ir tiesių $x_1=k_1$ transformacijos $3b_{21}-b_{11}=\frac{20}{k_1}$, nes tiesės $x_1=k_1$ turi „susikirtimo su tiese $x_1=0$

tašką“ begalybėje, t. y., už segmento $\frac{19}{3} \leq k_2 \leq 13$ ribų. Tokias tieses mes jau taip pat esame

transformavę: pavyzdžiui, tiesę $x_1=6$ į tiesę $3b_{21}-b_{11}=\frac{10}{3}$. Tiesės $x_1=k_1$ yra vienintelės koordinačių x_1 ir

x_2 sistemos lygiagretės tiesės, kurios, pereinant į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, transformuojasi taip pat į lygiagretes tieses $3b_{21}-b_{11}=\frac{20}{k_1}$, tame tarpe ir į tiesę $b_{11}=3b_{21}$ (žiūr. 336 pav.), kuri gaunama iš tiesių

$x_1=k_1$, kai $k_1 \rightarrow +\infty$. Tiesė $x_1=0$, kaip jau buvo minėta anksčiau, transformuojasi į begaliniai nutolusią tiesę, kurią galime laikyti lygiagrečia tiesei $3b_{21}-b_{11}=0$, o kartu ir kitoms tiesių $x_1=k_1$ transformacijoms $3b_{21}-b_{11}=\frac{20}{k_1}$. Visos kitos koordinačių x_1 ir x_2 sistemos lygiagretės tiesės, nesutampančios su tiesėmis

$x_1=k_1$, pereinant į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, negali transformuotis į lygiagrečias tieses, nes jos kerta

tiesę $x_1=0$ skirtinguose taškuose k_2 . Visų šių tiesių transformacijos koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemoje kertasi tiesės $b_{11}=3b_{21}$ taškuose, kitaip tariant, koordinačių x_1 ir x_2 sistemos „begalybėje“. Įrodysime tai.

Tarkime, jog turime dvi lygiagretes tieses, kertančias tiesę $x_1=0$ skirtinguose taškuose, turinčiuose koordinates $x_2^{(1)}=k^{(1)}$ ir $x_2^{(2)}=k^{(2)}$. Kadangi tos tiesės koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje yra lygiagretės, tai jų kampo koeficientai v – vienodi. Tų tiesių lygtys koordinačių x_1 ir x_2 sistemoje yra $vx_1+x_2=k_2^{(1)}$ ir $vx_1+x_2=k_2^{(2)}$. Transformuodami jas į koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemą, gausime tieses $(3k_2^{(1)}-19)b_{21}+(13-k_2^{(1)})b_{11}=20v$ ir $(3k_2^{(2)}-19)b_{21}+(13-k_2^{(2)})b_{11}=20v$. Šių tiesių susikirtimo taško koordinatės yra $b_{11}=3v$ ir $b_{21}=v$, iš kur išplaukia, kad tas taškas priklauso tiesei $b_{11}=3b_{21}$. Pavyzdžiui, mūsų jau nagrinėtos lygiagrečios tiesės PN ir RM (žiūr. 337 pav.), aprašomos lygtimis $39x_1+31x_2=\frac{809}{3}$ ir $39x_1+31x_2=303$, transformuojasi į tieses P'N' ir R'M' (žiūr. 336 pav.), aprašomas lygtimis $b_{11}=5,85-1,65b_{21}$ ir $b_{11}=7,8-3,2b_{21}$. Tiesės P'N' ir R'M', kaip jau buvo minėta, susikerta taške U', turinčiame koordinates $b_{21}=\frac{39}{31}$ ir $b_{11}=\frac{117}{31}$ ir priklausančiame tiesei $b_{11}=3b_{21}$.

Lygiagretes tieses $vx_1+x_2=k_2$, kur $v=\text{const.}$, vaizduojančių tiesių $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ susikirtimo taško plokštumoje b_{21} , b_{11} padėtų vienareikšmiškai apsprendžia konstanta v , o kiekvienos iš tų tiesių pasvirimo kampą – skirtinga kiekvienos iš tiesių $vx_1+x_2=k_2$ parametro k_2 reikšmė, nes
$$v' = \frac{3k_2 - 19}{13 - k_2}.$$

Kai $v=0$, tai visos lygiagretės tiesės $vx_1+x_2=k_2$ transformosis į tieses $\frac{3k_2 - 19}{13 - k_2} b_{21} + b_{11} = 0$, susikertančias koordinačių pradžios taške $b_{21}=0$, $b_{11}=0$, ką mes jau buvome gavę, transformuodami tiesę $x_2=5$. Abscisių x_1 ašis $x_2=0$ transformosis į tiesę $b_{11}=\frac{19}{13} b_{21}$, kuri, kaip ir tiesės $x_2=5$ transformacija $b_{11}=0,5b_{21}$, turės neigiamą v' reikšmę, o tiesę $x_2=9$ transformosis į tiesę $2b_{21}+b_{11}=0$, taip pat kertančią tašką $b_{21}=0$, $b_{11}=0$, tačiau turinčią jau teigiamą v' (t. y. sudarančią su kintamojo b_{21} ašimi $b_{11}=0$ jau teigiamą kampą), todėl taško judėjimas tiese $x_2=k_2$ nuo $x_1=0$ iki $x_1=+\infty$ transformosis į taško judėjimą tiese $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=0$ nuo taško $(b_{21}=+\infty, b_{11}=+\infty)$ iki taško $(b_{21}=0, b_{11}=0)$, kai $k_2 < \frac{19}{13}$, arba nuo taško $(b_{21}=-\infty, b_{11}=-\infty)$ iki taško $(b_{21}=0, b_{11}=0)$, kai $k_2 > \frac{19}{13}$, arba nuo taško $(b_{21}=+\infty, b_{11}=-\infty)$ iki taško $(b_{21}=0, b_{11}=0)$, kai $\frac{19}{13} < k_2 < 13$.

Judėjimas tiese $x_2=\frac{19}{13}$ transformuojasi į judėjimą abscisių ašimi $b_{11}=0$ nuo taško $b_{21}=+\infty$ iki taško $b_{21}=0$, o judėjimas tiese $x_2=13$, didinant x_2 nuo 0 iki $+\infty$, transformosis į judėjimą ordinačių ašimi $b_{21}=0$ nuo taško $b_{11}=+\infty$ iki taško $b_{11}=0$.

Judėjimas tiese $x_1=k_1$, kur $k_1 > 0$, didinant x_2 nuo 0 iki $+\infty$, transformosis į taško (b_{21}, b_{11}) judėjimą tiese $b_{11}=3b_{21}-\frac{20}{k_1}$ nuo taško, turinčio koordinates $b_{21}=\frac{13}{k_1}$, $b_{11}=\frac{19}{k_1}$, iki taško, turinčio koordinates $b_{21}=-\infty$, $b_{11}=-\infty$.

Tiesės $x_1=k_1$ stūmimas lygiagrečiai jai pačiai, didinant k_1 nuo 0 iki $+\infty$, transformosis į tiesės $b_{11}=3b_{21}-\frac{20}{k_1}$ judėjimą lygiagrečiai pačiai sau į kairę ir kartu į viršų nuo padėties, kai ši tiesė kerta abscisių b_{21} ašį $b_{11}=0$ taške, turinčiame begaliniai didelę teigiamą $(+\infty)$ abscisės b_{21} reikšmę, o ordinačių b_{11} ašį $b_{21}=0$ – taške, turinčiame begalinę neigiamą $(-\infty)$ ordinačių b_{11} reikšmę, iki padėties, kai ši tiesė kirs minėtas koordinačių ašis koordinačių sistemos pradžioje ir sutaps su tiese $b_{11}=3b_{21}$.

Tiesės $x_2=k_2$ stūmimas lygiagrečiai jai pačiai, didinant k_2 nuo 0 iki $+\infty$, transformuojasi į tiesės $b_{11}=\frac{19-3k_2}{13-k_2}$ sukimąsi aplink koordinačių b_{21} ir b_{11} sistemos pradžią laikrodžio rodyklės judėjimo

kryptimi. Didinant k_2 nuo 0 iki $\frac{19}{3}$, tiesė $b_{11}=\frac{19-3k_2}{13-k_2} b_{21}$ pasisuka nuo padėties $b_{11}=\frac{19}{3} b_{21}$ iki padėties $b_{11}=0$; toliau didinant k_2 iki 13, ši tiesė per pirmąjį neigiamą koordinačių plokštumos kvadrantą ($b_{21} > 0$, $b_{11} < 0$) pasiekia padėtį $b_{21}=0$, o dar toliau didinant k_2 iki $+\infty$, ši tiesė, judėdama antruoju neigiamu

ir pirmuoju teigiamu kvadrantais, pasiekia padėtį $b_{11}=3b_{21}$.

Jei k_2 mažintume nuo $+\infty$ iki $-\infty$, tai tiesė $b_{11}=\frac{19-3k_2}{13-k_2}$ suktųsi priešinga laikrodžio rodyklės judėjimui kryptimi nuo padėties $b_{11}=3b_{21}$ iki padėties $b_{11}=3b_{21}$. Mažinant k_2 nuo $+\infty$ iki 13, ši tiesė pasisuktų per pirmąjį ir trečiąjį teigiamus kvadrantus iki padėties $b_{21}=0$; toliau mažinant k_2 iki $k_2=\frac{19}{3}$, tiesė pasisuktų antruoju ir ketvirtuoju teigiamais kvadrantais iki padėties $b_{11}=0$; dar toliau mažinant k_2 iki reikšmės $k_2=0$, tiesė pasisuktų trečiuoju ir pirmuoju kvadrantais iki padėties $b_{11}=\frac{19}{3}b_{21}$, o mažinant k_2 nuo 0 iki $-\infty$, tiesė, toliau sukdamasi trečiajame ir pirmajame kvadrante, artėtų prie padėties $b_{11}=3b_{21}$. Tai reiškia, jog padėtį $b_{11}=3b_{21}$ tiesė $b_{11}=\frac{19-3k_2}{13-k_2}b_{21}$ gali pasiekti tiek sukdamasi laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi, kai k_2 artėja prie $+\infty$, tiek sukdamasi priešinga kryptimi, kai k_2 artėja prie $-\infty$.

Apibendrinami transformacijų $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=13-\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$ nagrinėjimo rezultatus, gausime, kad bet kuri koordinačių x_1 ir x_2 plokštumos tiesė $px_1+qx_2=m$, nelygiagreti tiesei $x_1=0$, kirsdama šią tiesę taške $x_2=k_2=\frac{m}{q}$ kampu, kurį charakterizuoja dydis $v=\frac{p}{q}$, transformuojasi į tiesę

$(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$, kertančią tiesę $b_{11}=3b_{21}$ taške, turinčiame koordinatės $b_{21}=v$, $b_{11}=3v$. Judėjimas tiesė $px_1+qx_2=m$ nuo taško $x_1=0$, $x_2=k_2$ į dešinę koordinatės x_1 didėjimo iki $+\infty$ kryptimi transformuojasi į judėjimą tiesė $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ iš dešinės į kairę nuo taško, koordinatės kurio abscisė b_{21} yra teigiama ir begaliniai didelė, link šios tiesės susikirtimo taško su tiesė $b_{11}=3b_{21}$ taško, turinčio koordinatės $b_{21}=v$, $b_{11}=3v$. Jei judėjimas tiesė $px_1+qx_2=m$ vyksta į kairę nuo taško $x_1=0$, $x_2=k_2$ koordinatės x_1 mažėjimo iki $-\infty$ kryptimi, tai tas judėjimas transformuojasi į judėjimą tiesė $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ iš kairės į dešinę, nuo taško, turinčio abscisė $b_{21}=-\infty$ link šios tiesės susikirtimo su tiesė $b_{11}=3b_{21}$ taško. Jei tiesę $px_1+qx_2=m$ stumti lygiagrečiai jai pačiai, nekeičiant dydžio $v=\frac{p}{q}$ reikšmės, tai šis judėjimas transformuosis į tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ sukimąsi aplink pastovų tašką ($b_{21}=v$, $b_{11}=3v$) laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi, jei $k_2=\frac{m}{q}$ didėja, ir atvirkščiai, jei k_2

mažėja. Kai $k_2=\frac{19}{3}$, tai besisukanti tiesė pasiekia horizontalią padėtį ir tampa tiesė $b_{11}=3v$, o jei $k_2=13$, tai besisukanti tiesė tampa vertikalia tiesė $b_{21}=v$. Kai k_2 artėja prie $+\infty$ ar prie $-\infty$, tai besisukanti tiesė artėja prie padėties $b_{11}=3b_{21}$. Tiesės $px_1+qx_2=m$ sukimas aplink pastovų tašką, turintį koordinatės $x_1=0$, $x_2=k_2=\frac{m}{q}$, transformuojasi į tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ judėjimą lygiagrečiai pačiai sau: sukan-

tiesę $px_1+qx_2=m$ laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi, kampo koeficientas $v=\frac{p}{q}$ didės ir tiesė

$(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ slinks į viršų taip, kad jos susikirtimo su tiesė $b_{11}=3b_{21}$ taško koordinatės $b_{21}=v$, $b_{11}=3v$ didės. Sukant tiesę $px_1+qx_2=m$ atvirkščia kryptimi, tiesė $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ slinks lygiagrečiai pačiai sau žemyn. Tiesei $px_1+qx_2=m$ pasiekus horizontalią padėtį ir tapus tiesė $x_2=k_2$, tiesė $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ kirs koordinačių b_{21} ir b_{11} pradžių $b_{21}=0$, $b_{11}=0$ ir taps tiesė $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=0$, o vertikali sukamos tiesės $px_1+qx_2=m$ padėtis $x_1=0$ transformuosis į tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ begalinį nutolinimą, t. y. į tos tiesės padėtį, $\lim_{v \rightarrow \infty} [(3k_2-19)b_{21} + (13-k_2)b_{11} = 20v]$.

Transformacijoms iš koordinačių x_1 ir x_2 sistemos į koordinačių b_{21} , b_{11} sistemą ir atvirkščiai būdingi tam tikro simetriškumo bruožai: visi taškai, turintys baigtines koordinačių x_1 ir x_2 reikšmes, išskyrus taškus, priklausančius tiesei $x_1=0$, vienareikšmiškai transformuojasi į taškus, nepriklausančius tiesei $b_{11}=3b_{21}$ ir turinčius baigtines koordinačių b_{21} ir b_{11} reikšmes, ir atvirkščiai – visi taškai, turintys baigtines koordinačių b_{21} ir b_{11} reikšmes, išskyrus taškus, priklausančius tiesei $b_{11}=3b_{21}$, vienareikšmiškai transformuojasi į taškus, nepriklausančius tiesei $x_1=0$ ir turinčius baigtines koordinačių x_1 ir x_2 reikšmes; tiesės $x_1=0$ taškai transformuojasi į taškus, begaliniai nutolusius nuo koordinačių b_{21} ir b_{11} pradžių, ir atvirkščiai – tiesės $b_{11}=3b_{21}$ taškai transformuojasi į taškus, begaliniai nutolusius nuo

koordinatų x_1 ir x_2 pradžios; visos tiesės, kertančios tiesę $x_1=0$ bet kuriame jos taške $x_2=k_2$, transformuojasi į lygiagretes tieses, kurių pasvirimo kampas priklauso nuo dydžio k_2 , ir atvirkščiai – visos tiesės, kertančios tiesę $b_{11}=3b_{21}$ viename taške, transformuojasi į lygiagretes tieses, kurių pasvirimo kampas priklauso nuo to taško, kuriame transformuojamos tiesės kertasi, koordinatų; visos tiesės, lygiagrečios tiesei $x_1=0$, bet nesutampančios su ja, transformuojasi į tieses, lygiagrečias tiesei $b_{11}=3b_{21}$, bet nesutampančias su ja, ir atvirkščiai – visos tiesės, lygiagrečios tiesei $b_{11}=3b_{21}$, bet nesutampančios su ja, transformuojasi į tieses, lygiagrečias tiesei $x_1=0$, bet nesutampančias su ja; tiesės, lygiagrečios tiesei $x_1=0$, lygiagretus stūmimas nuo padėties $x_1=0$ link $+\infty$ (arba $-\infty$), transformuojasi į tiesės, lygiagrečios tiesei $b_{11}=3b_{21}$ lygiagretų stūmimą atvirkščia kryptimi – nuo $+\infty$ (arba $-\infty$) link padėties $b_{11}=3b_{21}$; tiesės, nelygiagrečios tiesei $x_1=0$, lygiagretus stūmimas, didinant jos susikirtimo su tiese $x_1=0$ ordinatę $x_2=k_2$ nuo 0 iki $+\infty$ (mažinant nuo 0 iki $-\infty$), transformuojasi į jos atvaizdo sukimą laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi (arba atvirkščiai) aplink pastovų tiesės $b_{11}=3b_{21}$ tašką, turintį abscisę $b_{21}=v$, kur v stumiamos tiesės pasvirimo kampo charakteristika, ir atvirkščiai – kokios nors tiesės, kertančios tiesę $x_1=0$ taške, kurio ordinatė $x_2=k_2$, sukimas aplink tą tašką transformuojasi į tiesės $(3k_2-19)b_{21}+(13-k_2)b_{11}=20v$ lygiagretų stūmimą, didinant arba mažinant v . Pavyzdžiui, tiesės $vx_1+x_2=\frac{19}{3}$ sukimas aplink tašką $x_1=0$, $x_2=\frac{19}{3}$, didinant v , transformuojasi į tiesės $b_{11}=3v$ lygiagretų stūmimą, didinant b_{11} nuo 0 iki $+\infty$, o tiesės $b_{21}=v$ lygiagretus stūmimas, didinant v , transformuojasi į tiesės $vx_1+x_2=13$ sukimą aplink tašką $x_1=v$, $x_2=13$ laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, didinant parametą $v=b_{21}$ nuo 0 iki $+\infty$, t. y., tai tiesei pasisukant 90° kampu.

Transformacijos iš koordinatų x_1 , x_2 sistemos į koordinatų b_{21} , b_{11} sistemą ir atvirkščiai yra gana įdomus 1.8. skyriuje nagrinėtų **izomorfizmų pavyzdys**, vaizduojantis **ne tik statinį** (izomorfizmą tarp taškų, tiesių bei kitų plokščių figūrų), **bet ir dinaminį izomorfizmą** (t. y. **izomorfizmą tarp taškų, tiesių ir kitų plokščių figūrų judėjimų**). Kaip tik dėl šių priežasčių, atsižvelgiant į **izomorfizmo sąvokos svarbą sistemų teorijoje**, ir buvo tiek ilgai ir tiek detalai apsiesta prie šių transformacijų, nes nagrinėjamo optimizacinio uždavinio optimalaus sprendinio stabilumo ir jautrumo analizei tokia detali šių transformacijų analizė, tuo labiau kintamųjų x_1 , x_2 , b_{21} , b_{11} kitimo analizė intervale $(0, -\infty)$, nereikalinga. Pažymėsime tik, kad ir į 335 pav. galima žiūrėti kaip į 333 pav. kai kurių tiesių ir taškų transformaciją iš koordinatų x_1 ir x_2 sistemos į koordinatų b_{21} ir b_{11} sistemą.

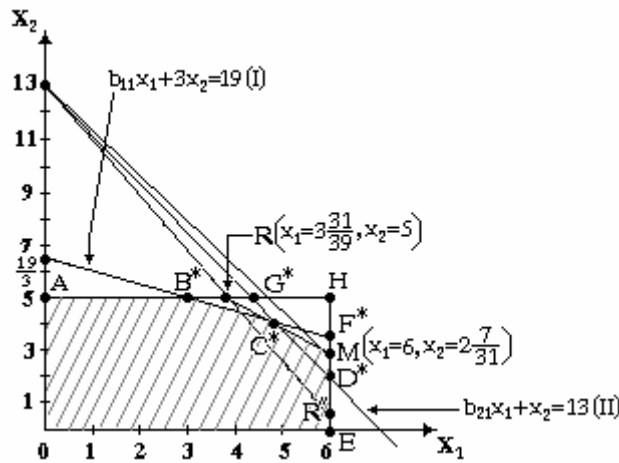
Galime suformuluoti apibendrinantį teiginį: **optimizavimo uždavinio modelio parametrų „leistino kitimo“ sritis (LKS) galima rasti, transformuojant leistinų sprendinių sritį LSS iš koordinatų sistemos, kurią sudaro sprendinio koordinatės, į koordinatų sistemą, kurią sudaro koordinatės, vaizduojančios keičiamus modelio parametrus.**

Grįšime prie parametrų b_{21} ir b_{11} kitimo poveikio optimaliam sprendiniui nagrinėjimo.

Mes jau nustatėme, jog b_{11} ir b_{21} kintant taip, kad tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ kirstųsi keturkampio PRMN viduje, optimalų sprendinį vaizduoja tų tiesių susikirtimo taškai C^* , turintys koordinatas $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$.

Dabar išnagrinėsime atvejus, kai tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ kertasi taškuose, priklausančiuose keturkampio PRMN kraštinėms.

Tarkime jog tos tiesės kertasi atkarpos RM taške C^* (žiūr. 338 pav.).



338 pav.

Atkarpa RM, kurią aprašo lygtis $39x_1 + 31x_2 = 303$ ir nelygybės $\frac{148}{39} \leq x_1 \leq 6$, $\frac{69}{31} \leq x_2 \leq 5$ (arba $b_{11} = 7,8 - 3,2b_{21}$, $\frac{39}{37} \leq b_{11} \leq \frac{191}{93}$, $\frac{167}{93} \leq b_{21} \leq \frac{78}{37}$), yra būdinga, jog jos taškuose $\frac{p_1}{5} = b_{21}$, ir todėl vienodo pelno tiesė $P = p_1x_1 + 5x_2 = (39 - 5b_{11} - 11b_{21})x_1 + 5x_2$ sutampa su antrąja LSS ribojančiąja tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$.

Kitaip tariant, atkarpa C^*D^* (žiūr. 338 pav.), kuri gaunama, pravedus per bet kuri atkarpos RM tašką C^* antrąja LSS ribojančiąja tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ iki susikirtimo su ketvirtąja LSS ribojančiąja tiesė $x_1 = 6$, visuomet bus vienodo pelno tiesės atkarpa, kurios taškuose tikslo funkcijos reikšmė $P = p_1x_1 + 5x_2 = 5\left(\frac{p_1}{5}x_1 + x_2\right) = 5(b_{21}x_1 + x_2) = 5 \cdot 13 = 65 = \text{const}$.

Taškai C^* gaunami, pasirenkant atitinkamą parametro b_{21} reikšmę iš intervalo $\left[\frac{167}{93}, \frac{78}{37}\right]$ ir apskaičiuojant $b_{11} = 7,8 - 3,2b_{21}$, o po to – ir $x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$.

Didinant b_{21} reikšmę, taškas C^* slinks atkarpa RM nuo taško M taško R link. Atitinkamai slinks ir atkarpos C^*D^* taškas D^* , slinkdamas tiesė $x_1 = 6$ žemyn nuo taško M (kur D^* susilieja su M, kai $b_{21} = \frac{167}{93} = 1\frac{74}{93}$) iki taško R", kuriame $x_2 = 13 - \frac{78}{37} \cdot 6 = \frac{13}{37}$. Visuose tokiu būdu gaunamuose taškuose C^* ir visuose tokiu būdu gaunamų atkarpų C^*D^* taškuose tikslo funkcijos reikšmė išliks pastovi ir lygi 65.

Atkarpų C^*D^* taškai, būdami kiekvienu momentu LSS ribiniais taškais, jau nebebus (išskyrus pačius taškus C^*) ribiniais keturkampio MRPN (ir keturkampio M'R'P'N') taškais, nes jie yra ne pirmosios ir antrosios tiesių ($b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$) susikirtimo taškai, o antrosios tiesės ($b_{21}x_1 + x_2 = 13$) atkarpų nuo jos susikirtimo su pirmąja ($b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$) iki susikirtimo su ketvirtąja ($x_1 = 6$) LSS ribojančiąja tiesė taškais, Kiekviena atkarpa C^*D^* , tai ribinė atkarpa tokios LSS, kuri susidaro, kai $b_{21} \in \left[\frac{167}{93}, \frac{78}{37}\right]$ ir $b_{11} = 7,8 - 3,2b_{21}$.

Judant atkarpa C^*D^* , nesikeičia ne tik tikslo funkcijos reikšmė, kuri išlieka pastovi ir lygi 65, bet ir parametrai b_{11} ir b_{21} reikšmės, atitinkančios tašką C^* . Keičiasi tik x_1 ir x_2 reikšmės, o ryšium su tuo – ir išlaidos B bei efektyvumas E.

Naudojantis vien tik pelno maksimumo kriterijumi, optimaliu sprendiniu galėtų būti bet kuris atkarpos C^*D^* taškas, nes visuose tuose taškuose pelnas yra vienodas ir maksimalus duotoms b_{11} ir b_{21} reikšmėms. Tačiau, jei atsižvelgtume į tai, jog išlaidos $B = (61 - p_1)x_1 + 36x_2 = (61 - 5b_{21})x_1 + 36x_2 = (61 - 5b_{21})x_1 + 36(13 - b_{21}x_1) = 36 \cdot 13 + (61 - 41b_{21})x_1$ keičiasi, keičiantis x_1 , galėtume optimumo tašku pasirinkti tokį tašką (x_1, x_2), kuriame ne tik pelnas, bet ir kapitalo investavimo efektyvumas būtų maksimalūs.

Kadangi atkarpoje RM $b_{21} \in \left[\frac{167}{93}, \frac{78}{37}\right]$ išlaidų B formulės koeficientas prie x_1 , esantis lygus $61 - 41b_{21}$, visuomet bus neigiamas, nes $\frac{61}{41} < \frac{167}{93}$, tai, didėjant x_1 , išlaidos B mažės ir efektyvumo koeficientas pasieks maksimumą taške D^* .

Todėl tuo atveju, kai parametrai b_{11} ir b_{21} reikšmės priklauso atkarpai R'M' (žiūr. 336 pav.) optimaliu sprendiniu tikslinga pasirinkti ne taškų C^* koordinates $x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, o taškų D^* koordinates $x_1 = 6$, $x_2 = 13 - 6b_{21}$, t. y. ne pirmosios ir antrosios tiesių, o antrosios ir ketvirtosios tiesių susikirtimo taškus.

Kitaip tariant, **atkarpos R'M' taškus tikslinga priskirti ne keturkampiui R'M'N'P', o jo išorei** pakeičiant 338 pav. atkarpa RM į jos projekciją į tiesę $x_1 = 6$, t. y. į atkarpa R''M. Taškas M projektuosis pats į save, kas ir suprantama, nes kai $b_{11} = \frac{191}{93}$ ir $b_{21} = \frac{167}{93}$, tai formulės $x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}} = \frac{20 \cdot 93}{3 \cdot 167 - 191} = 6$, $x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}} = 13 - \frac{6 \cdot 167}{93} = 2\frac{7}{3}$, ir formulės $x_1 = 6$, $x_2 = 13 - 6b_{21} = 13 - \frac{6 \cdot 167}{93} = 2\frac{7}{3}$, duoda tas pačias x_1 ir x_2 reikšmes.

Atviros atkarpos $M'N'$ taškuose, kuriuose parametrai b_{11} ir b_{21} tenkina sąlygas $\left(\frac{167}{93} < b_{21} < \frac{551}{279}\right) \wedge \left(b_{11} = 3b_{21} - \frac{10}{3}\right)$, lyginamasis pelnas p_1 tenkina sąlygą $\frac{b_{11}}{3} < \frac{p_1}{5} < b_{21}$, ir todėl negali būti atveju, kada vienodo pelno tiesės yra lygiagrečios pirmajai ar antrajai tiesėms. Todėl optimumo taškai nustatomi vienareikšmiškai pagal pelno maksimumo kriterijų. Tai pirmosios ir antrosios tiesių susikirtimo taškai C^* su koordinatėmis $x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$. Tačiau,

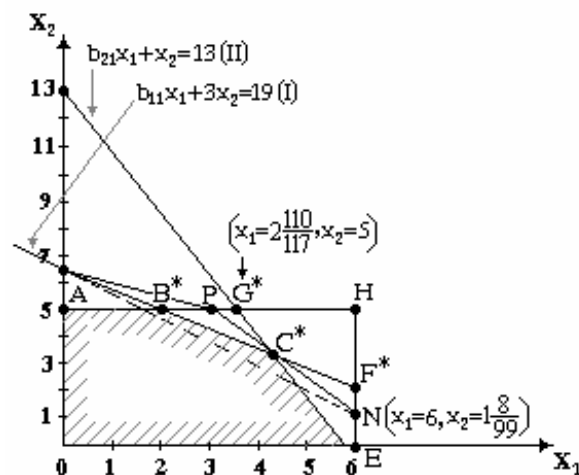
kadangi atkarpos $M'N'$ taškai tenkina lygybę $b_{11} = 3b_{21} - \frac{10}{3}$, tai atkarpos MN taškai priklauso tiesei $x_1 = 6$ ir optimumo taškai šiuo atveju yra trijų tiesių: $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir $x_1 = 6$ susikirtimo taškai. Kitaip tariant, **atkarpoje MN taškai C^* susilieja su taškais D^* ir F^* , kurie taip pat susilieja į vienintelius trijų tiesių susikirtimo taškus, išsidėsčiusius tiesėje $x_1 = 6$ priklausomai nuo b_{11} ir b_{21} reikšmių. Pavyzdžiui, didėjant b_{11} reikšmei x_2 reikšmė mažėja.**

Optimumo taškų koordinatinių apskaičiavimui šiuo atveju galima naudotis bet kuria iš trijų porų formulių: 1) $x_1^{(C^*)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2^{(C^*)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$; 2) $x_1^{(D^*)} = 6$, $x_1^{(F^*)} = 13 - 6b_{21}$; 3) $x_1^{(F^*)} = 6$, $x_2^{(F^*)} = \frac{19 - 6b_{11}}{3}$. Pavyzdžiui, kai $b_{21} = \frac{16}{9}$, kur $\frac{16}{9} \in \left(\frac{167}{93}; \frac{551}{279}\right)$, tai $b_{11} = 3b_{21} - \frac{10}{3} = 2$ ir $x_1^{(C^*)} = x_1^{(D^*)} = x_1^{(F^*)} = 6$, $x_2^{(C^*)} = x_2^{(D^*)} = x_2^{(F^*)} = \frac{7}{3}$.

Nesunku įsitikinti taip pat, kad ir taškas M yra taip pat taškų C^* , D^* ir F^* susiliejimo taškas, kurio koordinatės taip pat gali būti apskaičiuotos, naudojantis bet kuria iš trijų porų formulių. Todėl ir **visą pusiau uždara atkarpą $[M'N')$ galima priskirti kaip keturkampio $R'M'N'P'$ vidui, taip pat ir jo išorei.**

Pereinant iš šio keturkampio vidaus į jo išorę per kraštinę $[M'N')$, kintamųjų $x_1^{(opt)}$ ir $x_2^{(opt)}$ reikšmės keičiasi tolydžiai (be trūkių), o šuoliu gali keistis tik jautrumo koeficientai.

Uždaroje atkarpoje $[NP]$, kurią aprašo lygtis $39x_1 + 33x_2 = \frac{803}{3}$ ir nelygybės $\frac{107}{99} \leq x_2 \leq 5$ (arba lygtis $b_{11} = 5,85 - 1,65b_{21}$ ir nelygybės $\frac{551}{279} \leq b_{21} \leq \frac{117}{43}$), galioja lygybė $\frac{p_1}{5} = \frac{b_{11}}{3}$, ir todėl vienodo pelno tiesės yra lygiagrečios pirmajai tiesei $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, ribojančiai LSS. Maksimalaus pelno taškai ($x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$) bus išsidėstę tų tiesių atkarpoje B^*C^* (žiūr. 339 pav.), kur C^* – tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškai, išsidėstę atkarpoje $[NP]$.



339 pav.

Tikslo funkcijos $P = p_1x_1 + 5x_2$ reikšmė visuose atkarpos $[NP]$ taškuose C^* ir visuose pirmosios tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ atkarpų B^*C^* taškuose pastovi ir lygi $P^{(max)} = 5 \left(\frac{p_1}{5} x_1 + x_2 \right) =$

$$= 5 \left(\frac{b_{11}}{3} + x_2 \right) = \frac{5}{3} (b_{11}x_1 + x_2) = \frac{5}{3} \cdot 19 = 31 \frac{2}{3}.$$

Kadangi išlaidos $B = (61 - p_1)x_1 + 36x_2 = \left(61 - 5 \frac{b_{11}}{3} \right) x_1 + 36 \left(\frac{19 - b_{11}x_1}{3} \right) = 12 \cdot 19 + (61 - \frac{41}{3} b_{11}) x_1$ mažėja, mažėjant x_1 , nes atkarpoje B^*C^* parametras $b_{11} \leq \frac{241}{93} < \frac{183}{41}$ ir todėl $61 - \frac{41}{3} b_{11} > 0$, tai optimumo taškais atkarpoje B^*C^* tikslinga pasirinkti ne taškus C^* esančius atkarpoje

[NP], o atkarpoje $x_2=5$ esančius taškus B^* , turinčius koordinates $x_1 = \frac{4}{b_{11}}$, $x_2=5$, nes juose, esant pastovioms parametru b_{11} ir b_{21} reikšmėms, tenkinančioms sąlygas $(b_{11}=5,85-1,65b_{21}) \wedge \left(\frac{551}{279} \leq b_{21} \leq \frac{117}{43} \right)$, pasiekiamas ne tik maksimalus šiuo atveju pelnas $P=31 \frac{2}{3}$, bet ir didžiausias efektyvumas $E = \frac{95}{4 \left(130 + \frac{183}{b_{11}} \right)}$.

Tuo atveju, kai $b_{21} = \frac{177}{43}$, o $b_{11} = \frac{177}{86}$, taškai C^* ir B^* susilieja į vieną tašką P, turintį koordinates $x_1 = 2 \frac{110}{117}$, $x_2=5$, kurias galima apskaičiuoti, naudojantis kaip formulėmis $x_1^{(C^*)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2^{(C^*)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, taip ir formulėmis $x_1^{(B^*)} = \frac{4}{b_{11}}$, $x_2^{(B^*)} = 5$.

Kadangi tašką P kerta ir antroji tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$, tai su tuo tašku P susilieja ir taškas G^* , kurio koordinatės apskaičiuojamos naudojantis formulėmis $x_1^{(G^*)} = \frac{8}{b_{21}}$, $x_2^{(G^*)} = 5$.

Iš to, kas pasakyta apie atkarpos [NP] (o kartu ir [N'P']) taškus, galima padaryti išvadą: kai b_{11} ir b_{21} reikšmės yra tokios, kad jos priklauso atkarpai [N'P'], optimalaus sprendinio, tenkinančio ne tik pelno maksimumo, bet ir kapitalo investavimo maksimumo reikalavimus, koordinates $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ galima rasti kaip atkarpos [NP] projekcijos į tiesę $x_2=5$ taškų koordinates $x_1^{(B^*)} = \frac{4}{b_{11}}$, $x_2^{(B^*)} = 5$. Taip projektuojant, taškas P pasilieka vietoje, o taškas N projektuojasi į tašką N'' su koordinatėmis $x_1 = \frac{372}{241} = 1 \frac{131}{241}$, $x_2=5$.

Pusiau uždaros atkarpos [PR] (o taip pat [P'R']) taškuose parametru b_{11} ir b_{21} reikšmės yra tokios, kad optimumo taškai – tai trijų tiesių (pirmosios $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, antrosios $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir trečiosios $x_2=5$) susikirtimo taškai. Juose susilieja taškai C^* , B^* ir G^* . Todėl, kai $b_{11}=0,5b_{21}$ ir $b_{21} \in \left(\frac{78}{37}; \frac{117}{43} \right]$, tai $x_1^{(opt)}$ ir $x_2^{(opt)}$ galima apskaičiuoti, naudojantis bet kuria iš trijų porų formulių:

$$1) x_1^{(C^*)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}, x_2^{(C^*)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}; 2) x_1^{(B^*)} = \frac{4}{b_{11}}, x_2^{(B^*)} = 5; 3) x_1^{(G^*)} = \frac{8}{b_{21}}, x_2^{(G^*)} = 5.$$

Kai $b_{11} = \frac{39}{37}$, $b_{21} = \frac{78}{37}$, kas atitinka taško R' koordinates, optimumo tašką, kaip jau buvo minėta, galima rinktis antrosios tiesės $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ atkarpos C^*D^* taškuose (žiūr. 338 pav.), nes tikslo funkcijos optimali reikšmė $P^{(opt)}$ visuose tos atkarpos taškuose yra vienoda. Tačiau, **jei vadovautumės ne tik maksimalaus pelno, bet ir kapitalo investavimo efektyvumo maksimumo kriterijumi, tai optimumo tašką būtų galima ir tikslinga pasirinkti vienareikšmiškai:** būtent taško R projekciją į tiesę $x_1=6$, t. y. tašką R'' (žiūr. 338 pav.) su koordinatėmis $x_1=6$, $x_2 = \frac{13}{37}$.

Todėl tašką R tikslinga priskirti ne atkarpai PR, o atkarpai RM (žiūr. 336, 337 ir 338 pav.), panašiai, kaip ir tašką N, – ne atkarpai NM, o atkarpai NP.

Pačią pusiau uždara atkarpą [RP] (kaip ir pusiau uždara atkarpą [NM]) galima priskirti tiek keturkampio PRMN vidinei sričiai, tiek ir jo išorei. Pereinant per ją iš keturkampio vidaus į

jo išorę, optimalaus sprendinio koordinačių ir tikslo funkcijos reikšmės keičiasi tolydžiai, o pačios atkarpos (RP) taškuose gali būti apskaičiuotos, kaip jau buvo minėta, naudojantis taškų B^* , C^* ir G^* (kurie atkarpoje (RP) susilieja) koordinačių x_1 ir x_2 priklausomybės nuo b_{11} ir b_{21} formulėmis.

Tuo tarpu jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}}$ atkarpos (R'P') taškuose nėra apibrėžti ir, pereinant tuos taškus, gali keistis šuoliu.

Pavyzdžiui, atkarpos (R'P') taške, turinčiame koordinates $b_{11}=1,25 \in \left(1\frac{2}{37}; 1\frac{31}{86}\right]$ ir $b_{21}=2,5 \in \left(2\frac{4}{37}; 2\frac{31}{43}\right]$, gautume, jog $x_1^{(opt)}=3,2$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=41,8$. Tokius rezultatus gautume nepriklausomai nuo to, kaip interpretuotume tą tašką: ar kaip tašką C^* , ar kaip tašką B^* , ar kaip tašką G^* . Truputį padidinę b_{11} reikšmę, nekeisdami b_{21} , patektume į keturkampio P'N'M'R' vidų, kur galioja tik taško C^* koordinačių apskaičiavimo formulės: $x_1^{(opt)}=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2^{(opt)}=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$. Kai $\Delta b_{11}=0,25$, gautume, jog $x_1^{(opt)}=\frac{20}{3b_{21}-(b_{11}+\Delta b_{11})}=\frac{20}{6}=3\frac{1}{3}$, $x_2^{(opt)}=\frac{20b_{21}}{3b_{21}-(b_{11}+\Delta b_{11})}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$. Artėjant Δb_{11} prie +0, $x_1^{(opt)}$ tolydžiai mažėtų ir artėtų prie $x_1^{(opt)}=3,2$, $x_2^{(opt)}$ tolydžiai didėtų ir artėtų prie $x_2^{(opt)}=5$. Jei b_{11} truputį sumažintume, nekeisdami b_{21} , tai patektume į keturkampio P'N'M'R' išorę, kurioje $x_1^{(opt)}=\frac{8}{b_{21}}$, $x_2^{(opt)}=5$, t. y., gautume tas pačias $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ reikšmes kaip atkarpos (R'P') taške su koordinatėmis $b_{11}=1,25$, $b_{21}=2,5$.

Tačiau optimalaus sprendinio jautrumo koeficientai, pereinant per atkarpą (R'P'), pasikeistų: keturkampio P'N'M'R' viduje $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=20(3b_{21}-b_{11})^{-2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=-20b_{21}(3b_{21}-b_{11})^{-2}$, o taške šalia šio keturkampio, kuriame $x_1^{(opt)}=\frac{8}{b_{21}}$, $x_2^{(opt)}=5$, gautume, jog $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$. Taigi, artėdami prie atkarpos (R'P') taško $b_{11}=1,25$, $b_{21}=2,5$ iš keturkampio P'N'M'R' vidaus pusės, šiame taške gautume $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0,512$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=-1,28$, o artėdami prie šio taško iš keturkampio išorės taip, kad keistųsi tik b_{11} , gautume $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$.

Jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}$ gali keistis šuoliu, pereinant bet kurią keturkampio P'N'M'R' kraštinę, o pereinant atkarpas [R'M'] ir [P'N'], šuoliu gali keistis ne tik optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų reikšmės, bet ir to sprendinio koordinatės $x_1^{(opt)}$ ir $x_2^{(opt)}$. Tuo šios atkarpos skiriasi nuo atkarpų [P'R'] ir [N'M'], pereinant kurias, šuoliu keičiasi tik jautrumo koeficientai, o optimalaus sprendinio koordinačių reikšmės keičiasi tolydžiai.

Atkarpas [P'N'] ir [R'M'] tikslinga priskirti ne keturkampiu P'N'M'R', o jo išorei, nes, kai parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmės priklauso toms atkarpoms ir mes pasirenkame optimalias x_1 ir x_2 reikšmes taip, kad būtų pasiektas ne tik galimo pelno, bet ir kapitalo investavimo efektyvumo maksimumas, tai $x_1^{(opt)}$ ir $x_2^{(opt)}$ apskaičiavimo formulės atkarpų [P'N'] ir [R'M'] taškuose sutampa ne su formulėmis, galiojančiomis keturkampio P'N'M'R' viduje, o su formulėmis, galiojančiomis už to keturkampio ribų.

Pavyzdžiui, jei atkarpoje [P'N'] pasirinktume tašką ($b_{11}=2$, $b_{21}=\frac{7}{3}$), tai, naudodamiesi formulėmis $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$ ir $x_2=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$, gautume tašką C^* atkarpoje PN, turintį koordinates $x_1=4$, $x_2=3\frac{2}{3}$, kuriame tikslo funkcijos $P=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2$ reikšmė būtų lygi $31\frac{2}{3}$. Tokią pačią tikslo funkcijos reikšmę gautume ir visuose kituose atkarpos B^*C^* (žiūr. 339 pav.) taškuose, kartu ir

tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ susikirtimo su tiese $x_2 = 5$ taške B^* , turinčiame koordinates $x_1 = 0$, $x_2 = 5$:
 $P = (39 - 5b_{11} - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = \left(39 - 10 - \frac{77}{3}\right) \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 31\frac{2}{3}$. Kadangi atkarpos B^*C^* taškuose išlaidos
 $B = (61 - p_1)x_1 + 36x_2 = 228 + (22 - 7b_{11} + 11b_{21})x_1 = 228 + \frac{101}{3}x_1$ didėja, didėjant x_1 , tai mažiausios išlaidos ir

didžiausias kapitalo investavimo efektyvumas bus taške B^* : $E = \frac{P}{B} = \frac{31\frac{2}{3}}{228 + \frac{101}{3} \cdot 2} = \frac{95}{886} \approx 0,1072$.

Taške C^* būtume gavę $E = \frac{31\frac{2}{3}}{228 + \frac{101}{3} \cdot 4} = \frac{95}{1084} \approx 0,0876$. Todėl tikslinga optimaliu sprendiniu

pasirinkti tašką B^* , kurio koordinatės randamos, naudojantis ne optimumo taškų nustatymų keturkampio $P'N'M'R'$ vidinėje srityje formulėmis $x_1^{(C^*)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2^{(C^*)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, o formulėmis

$x_1^{(B^*)} = \frac{4}{b_{11}}$, $x_2^{(B^*)} = 5$, leidžiančiomis nustatyti optimumo taškų koordinatinių reikšmes už šio

keturkampio $P'N'M'R'$ ribų, kai $\left(0 < p_1 < \frac{b_{11}}{3}\right) \wedge (b_{11} > 0,5b_{21})$.

Analogiškai gauname, kad tuo atveju, kai b_{11} ir b_{21} reikšmės yra atkarpos $[R'M']$ taškų koordinatinių reikšmės, tenkinančios sąlygas $b_{11} = 7,8 - 3,2b_{21}$ (t. y. $p_1 = 5b_{21}$) ir $\frac{167}{93} \leq b_{21} \leq \frac{78}{37}$, tai tuo atveju optimumo taškais tikslingiau pasirinkti ne atkarpos $[RM]$ taškus C^* su koordinatės $x_1 = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, o tiesių $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo su tiese $x_1 = 6$ taškus D^* , turinčius koordinatinių reikšmes $x_1 = 6$, $x_2 = 13 - 6b_{21}$, t. y. apskaičiuojamas, naudojantis formulėmis, galiojančiomis ne keturkampio $NMPR$ viduje, o jo išorėje, nes esant vienodam pelnui $P = 65$ visuose atkarpos $[RM]$ taškuose C^* ir visuose antrosios tiesės $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ atkarpų C^*D^* taškuose, minimalios išlaidos ir didžiausias kapitalo investavimo efektyvumas gaunamas taškuose D^* .

Norėję atkreipti skaitytojo dėmesį į skirtumą, egzistuojantį tarp keturkampio $N'M'R'P'$, gauto nagrinėjant parametrų b_{11} , b_{21} kitimo poveikį optimalių sprendinių, ir keturkampio $O'A'H'E'$ (žiūr. 335 pav.), gauto, nagrinėjant parametrų b_1 , b_2 kitimo poveikį: keturkampis $O'A'H'E'$ – tai **jautrumo koeficientų** $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}$ **stabilumo zona**, o keturkampyje $N'M'R'P'$ šie **jautrumo**

koeficientai jau nebeišlieka pastovūs. Keturkampio $N'M'R'P'$ vidinė sritis – **optimalaus sprendinio koordinatinių** $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ **ir jų jautrumo koeficientų apskaičiavimo formulių stabilumo (tiksliau,**

izomorfiškumo) zona. Keturkampyje $O'A'H'E'$ nesikeičia ne tik jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$,

$\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}$ apskaičiavimo formulės, bet ir jų reikšmės $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = -0,25$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5$,

$\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} = 0,75$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = -0,5$, o keturkampyje $N'M'R'P'$ jautrumo koeficientų $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}$,

$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}$ apskaičiavimo formulės nesikeičia, nes nesikeičia formulės $x_1^{(opt)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$,

$x_2^{(opt)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, tačiau pačios jautrumo koeficientų reikšmės, keičiantis parametrų b_{11} , b_{21}

reikšmėms, keičiasi: tolydziai – keturkampio $N'M'R'P'$ vidinėje srityje, šuoliu – pereinant per šio keturkampio kraštines.

Kitas vertas dėmesio momentas – tai **skirtumas tarp vienodo pelno tiesių** $p_1x_1 + p_2x_2 = P = \text{const.}$, kurios gaunamos, kai lyginamieji pelnai p_1 ir p_2 išlieka pastovūs, ir vienodo pelno tiesių

$39x_1+31x_2-238=P=\text{const.}$, kurios gaunamos kaip tiesės, jungiančios tokius tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taškus C^* , kuriuose pelnas $P=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2$ yra vienodas. Judant pirmojo tipo vienodo pelno tiesėmis, keičiasi tik koordinatės x_1 ir x_2 , o parametrai b_{11} ir b_{21} išlieka pastovūs, o judant antrojo tipo tiesėmis, keičiasi ne tik x_1 ir x_2 , bet ir b_{11} ir b_{21} , tačiau **keičiasi taip, kad penkiamatės erdvės taškai $(x_1, x_2, b_{11}, b_{21}, P)$ išlieka priklausantys vienodo pelno pseudopaviršiui $(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=P=\text{const.}$** ir be to dar tenkina lygtis $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$ (arba, kas yra tas pats, lygybes $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$).

Kirsdami atitinkamomis plokštumomis bei pseudoplokštumomis penkiamatėje erdvėje išsidėsčiusių vienodo pelno pseudopaviršių $(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=P=\text{const.}$ šeimą, gautume tuose pseudopaviršiuose ir pirmojo ir antrojo tipo vienodo pelno tieses. Pavyzdžiui, fiksuodami kintamųjų b_{11} ir b_{21} reikšmes, t.y. kirsdami vienodo pelno pseudopaviršius penkiamatės erdvės pseudoplokštumomis $b_{11}=\text{const.}$, $b_{21}=\text{const.}$, gautume pirmojo tipo vienodo pelno tieses $p_1x_1+5x_2=P=\text{const.}$ Išsirinkdami vienodo pelno pseudopaviršiuose $(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=P=\text{const.}$ tokius taškus, kurių koordinatės x_1, x_2, b_{11}, b_{21} tenkina sąryšius $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ (t.y. priklauso dar ir pseudopaviršiams $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$), gautume antrojo tipo vienodo pelno tieses, kurių projekcijos į plokštumą (x_1, x_2) būtų aprašomos lygtimis $39x_1+31x_2-238=P=\text{const.}$, o projekcijos į plokštumą (b_{11}, b_{21}) – lygtimis $(165-P)b_{11}+(125+3P)b_{21}=780$, kur $P=\text{const.}$

Iš to, kas čia pasakyta, išplaukia, jog pirmojo tipo vienodo pelno tiesių lygtys gaunamos, įstatant į vienodo pelno pseudopaviršiaus lygtį $(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=P=\text{const.}$ fiksuotas b_{11} ir b_{21} reikšmes. Pavyzdžiui, kai $b_{11}=2$, $b_{21}=2$, tai gauname $7x_1+5x_2=P=\text{const.}$

Antrojo tipo vienodo pelno tiesių lygtys gaunamos, pakeičiant vienodo pelno pseudopaviršiuje kintamuosius b_{11} ir b_{21} jų išraiškėmis $b_{11}=\frac{19-3x_2}{3x_1}$, $b_{21}=\frac{13-x_2}{x_1}$, arba kintamuosius x_1 ir x_2 jų

išraiškėmis $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$.

Plokštumoje (x_1, x_2) pirmojo tipo vienodo pelno tiesės $p_1x_1+p_2x_2=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=P=\text{const.}$, gaunamos, kai b_{11} ir b_{21} reikšmės yra fiksuotos, daugumoje atvejų nesutampa su antrojo tipo vienodo pelno tiesėmis $39x_1+31x_2-238=P=\text{const.}$, gaunamomis iš tų pačių lygybių $(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=P=\text{const.}$, kai $b_{11}=\frac{19-3x_2}{3x_1}$, $b_{21}=\frac{13-x_2}{x_1}$, t.y., kai b_{11} ir b_{21} gali priklausyti nuo x_1 ir x_2 .

Pavyzdžiui, antrojo tipo vienodo pelno tiesė RM, kurią aprašo lygtis $39x_1+31x_2=303$, jungia tokius tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taškus C^* , kuriuose pelnas $(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=65$. Per tuos taškus C^* pravažės pirmojo tipo vienodo pelno tiesės su fiksuotomis parametru b_{11} ir b_{21} reikšmėmis, lygiomis atkarpos R'M' taškų C^* koordinatėms b_{11} ir b_{21} reikšmėms, sutampa su tiesėmis $b_{21}x_1+x_2=13$, kertančiomis antrojo tipo vienodo pelno tieses $39x_1+31x_2-238=P=\text{const.}$ (jų tarpe ir tiesė RM $39x_1+31x_2=303$). Keičiant b_{21} , tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, besisukdama aplink tašką $(x_1=0, x_2=13)$, kerta antrojo tipo pelno tiesę RM taškuose C^* ir tokiu būdu sudaro visą šeimą pirmojo tipo vienodo pelno tiesių, kurios skiriasi fiksuotomis (kiekvienai tų tiesių) parametru b_{11} ir b_{21} reikšmėmis, sutampančiomis su atitinkamo taško C^* koordinatėmis, tačiau kiekvienoje iš šių tiesių, keičiantis x_1 ir x_2 , pelnas P išlieka pastovus ir lygus 65, t.y. toks pat, kaip ir bet kuriame atkarpos R'M' taške C^* bei atitinkančiame atkarpos RM taške C^* .

Analogiškai gauname, kad ir kita mūsų jau nagrinėtoji antrojo tipo vienodo pelno tiesė PN, kurią aprašo lygtis $39x_1+31x_2=\frac{809}{3}=269\frac{2}{3}$, taip pat nesutampa su jos taškais C^* kertančiomis pirmojo tipo vienodo pelno tiesėmis, sutampančiomis su tiesėmis $b_{11}x_1+3x_2=19$.

Keturkampyje NMRP galima praveisti kiek norima daug antrojo tipo vienodo pelno tiesių $39x_1+31x_2-238=P=\text{const.}$, kurios, būdamos lygiagretės tiesėms RM ir PN, visos, išskyrus vieną, nesutaps su jų taškais kertančiomis pirmojo tipo vienodo pelno tiesėmis, nes pirmojo tipo vienodo pelno tiesių lyginamųjų pelnų p_1 ir p_2 santykis $\frac{p_1}{p_2}=\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5}$ nesutaps su antrojo tipo vienodo pelno

tiesių koeficientų santykiu $\frac{39}{31}$.

Tačiau vienoje iš antrojo tipo vienodo pelno tiesių taškų C^{**} koordinatės b_{11} , b_{21} bus tokios, kad $\frac{p_1}{p_2} = \frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5}$ bus lygus $\frac{39}{31}$ ir tuomet pirmojo tipo vienodo pelno tiesės

nebekirs antrojo tipo vienodo pelno tiesės $39x_1 + 31x_2 = \frac{3689}{13} = 283\frac{10}{13}$, o sutaps su ja.

Nesunku įsitikinti, kad taip tikrai ir bus. Iš lygybės $\frac{p_1}{p_2} = \frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5} = \frac{39}{31}$ išplaukia, jog $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{26 \cdot 39}{31} = \text{const.}$, o tai reiškia, jog pirmojo tipo vienodo pelno tiesių $p_1x_1 + 5x_2 = P = \text{const.}$

koeficientas $p_1 = 39 - 5b_{11} - 11b_{21}$, keičiantis b_{11} ir b_{21} , nesikeis ir visą laiką išliks pastovus ir lygus $\frac{39 \cdot 5}{31}$.

Todėl šiuo atveju **pirmojo tipo vienodo pelno tiesės bus lygiagrečios antrojo tipo vienodo pelno tiesėms** $39x_1 + 31x_2 - 238 = P = \text{const.}$ Iš lygybės $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{26 \cdot 39}{31}$, pakeitę b_{11} ir b_{21} į $\frac{19 - 3x_2}{3x_1}$ ir

$\frac{13 - x_2}{x_1}$, gauname $39x_1 + 31x_2 = \frac{3689}{13} = 283\frac{10}{13}$, t. y. atvejį $p_1 = \frac{39 \cdot 5}{31}$ atitinkančią antrojo tipo vienodo

pelno tiesę, sutampančią su pirmojo tipo vienodo pelno tiesėmis $p_1x_1 + 5x_2 = \frac{39 \cdot 5}{31}x_1 + 5x_2 =$

$$= \frac{5}{31}(39x_1 + 31x_2) = \frac{5}{31} \cdot \frac{3689}{13} = \frac{595}{13} = 45\frac{10}{13}.$$

Tiesė $39x_1 + 31x_2 = 283\frac{10}{13}$ dėl anksčiau išdėstytų priežasčių galima judėti dvejopai: 1) kaip pirmojo tipo vienodo pelno tiesė $\frac{39 \cdot 5}{31}x_1 + 5x_2 = 45\frac{10}{13} = \text{const.}$, t. y. keičiant tik kintamųjų x_1 , x_2

reikšmes ir nekeičiant parametrų b_{11} , b_{21} reikšmių, paimtų bet kuriame tiesės $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{26 \cdot 39}{31}$

taške; 2) kaip antrojo tipo vienodo pelno tiesė $39x_1 + 31x_2 = 283\frac{10}{13}$, t. y. keičiant ir x_1 , x_2 ir b_{11} , b_{21}

taip, kad būtų tenkinamos lygybės $(39 - 5b_{11} - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = 45\frac{10}{13}$, $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$.

Tiesė $39x_1 + 31x_2 = 283\frac{10}{13}$ yra ypatinga antrojo tipo vienodo pelno tiesė todėl, kad priklauso tiesių $5b_{11} + 11b_{21} = \text{const.}$ šeimai, kuriai būdinga tai, jog, keičiantis b_{11} ir b_{21} , nesikeičia nei lyginamojo pelno $p_1 = 39 - 5b_{11} - 11b_{21}$, nei pirmojo gaminio savikainos $s_1 = 22 + 5b_{11} + 11b_{21}$ reikšmė.

Tiesių $5b_{11} + 11b_{21} = \text{const.}$ šeimoje galimas ne tik mūsų čia išnagrinėtas atvejis, kada **sutampa pirmojo ir antrojo tipo vienodo pelno tiesės**, t. y. kada $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{1014}{31}$ ir $p_1 = 39 - \frac{1014}{31} = \frac{195}{31} =$

$\frac{39 \cdot 5}{31}$, bet ir gana daug įvairių kitų įdomių atvejų. Vienas iš jų – **pirmojo tipo vienodo pelno tiesių**

sutapimas su pirmojo tipo vienodo išlaidų tiesėmis. Taip atsitinka, kai parametrai b_{11} ir b_{21} tenkina lygybę $\frac{p_1}{p_2} = \frac{s_1}{s_2}$, t. y. lygybę $\frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5} = \frac{22 + 5b_{21} + 11b_{21}}{36}$, iš kurios išplaukia lygybė

$$5b_{11} + 11b_{21} = \frac{1294}{41} = 31\frac{23}{41}.$$

Tuomet bet kuriame tiesės $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{1294}{41}$ taške pirmojo pelno tiesė $p_1x_1 + p_2x_2 = (39 - 5b_{11} - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = \left(39 - \frac{1294}{41}\right)x_1 + 5x_2 = \frac{305}{41}x_1 + 5x_2 = 5\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = \text{const.}$ sutaps su vienodų išlaidų

tiese $\left(22 + \frac{1294}{41}\right)x_1 + 36x_2 = 36\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = \text{const.}$ **Tuo pačiu metu ši tiesė bus ir vienodo**

efektyvumo tiese, kurioje kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{P}{B} = \frac{5\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right)}{36\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right)} = \frac{5}{36} = \text{const.}$

Ši tiesė taip pat bus ir vienodų pajamų tiese, nes $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const.}$ yra $61x_1 + 41x_2 = 41\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = \text{const.}$

Tiesė $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{1294}{41}$ kerta keturkampį R'P'N'M', kirsdama atkarpą R'P' taške $b_{11} = \frac{1294}{1107} = 1\frac{187}{1107}$, $b_{21} = \frac{2588}{1107} = 2\frac{374}{1107}$, o atkarpą N'M' – taške $b_{11} = \frac{3568}{1599} = 2\frac{370}{1599}$, $b_{21} = \frac{2966}{1599} = 1\frac{1367}{1599}$.

Kai tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ koeficientai b_{11} ir b_{21} tenkina lygtį $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{1294}{41}$, tai tų tiesių susikirtimo taškai C^* priklauso tiesei $647x_1 + 533x_2 = 4879$. Ši tiesė kerta keturkampį RPNM, kirsdama atkarpą PR taške, turinčiame koordinatės $x_1 = 3\frac{273}{647}$, $x_2 = 5$, ir atkarpą MN – taške turinčiame koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = 1\frac{464}{533}$. Keturkampio RPNM viduje tiesės $647x_1 + 533x_2 = 4879$ taškų koordinatės x_1^* , x_2^* , kai tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ koeficientai b_{11} ir b_{21} tenkins lygybes $b_{11} = \frac{19 - x_2^*}{x_1^*}$,

$b_{21} = \frac{13 - x_2^*}{x_1^*}$, bus optimalaus sprendinio koordinatėmis $x_1^{(\text{opt})} = x_1^{(C^*)} = x_1^*$, $x_2^{(\text{opt})} = x_2^{(C^*)} = x_2^*$, o per

tuos taškus pravestos tiesės $\frac{61}{41}x_1 + x_2 = \text{const.}$ tuomet bus kartu ir vienodo pelno tiesėmis $\frac{305}{41}x_1 + 5x_2 = 5\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = \text{const}$ ir vienodų išlaidų tiesėms $\frac{2196}{41}x_1 + 36x_2 = 36\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = \text{const.}$

Tuo pačiu metu jos bus ir vienodo efektyvumo tiesėmis $E = \frac{5}{36} \approx 13,89\% = \text{const.}$

Tiesė $647x_1 + 533x_2 = 4879$ kirs keturkampio RPNM viduje ir kai kurias antrojo tipo vienodo pelno tieses $39x_1 + 31x_2 = \text{const.}$ (būtent tas tieses, kurios tenkina sąlygą $288\frac{295}{647} < 39x_1 + 31x_2 < 291\frac{526}{533}$), o su kai kuriomis kitomis kirsis už šio keturkampio ribų (pavyzdžiui, su ypatingąja antrojo tipo vienodo pelno tiese $39x_1 + 31x_2 = 283\frac{10}{13}$ tiesė $647x_1 + 533x_2 = 4879$ kirsis taške $x_1 = 0$, $x_2 = 9\frac{2}{13}$).

Tiesėje $5b_{11} + 11b_{21} = \frac{1294}{41}$ **egzistuoja du ypatingi taškai**: 1) taškas V', turintis koordinatės $b_{11} = \frac{183}{41}$, $b_{21} = \frac{379}{451}$ ir 2) taškas W', turintis koordinatės $b_{11} = \frac{623}{205}$, $b_{21} = \frac{61}{41}$, t. y. **egzistuoja dvi ypatingos parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmių poros**.

Pirmajame taške sutampa: 1) pirmojo tipo vienodo pelno tiesė $P = 5\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = 31\frac{2}{3} = \text{const}$; 2) pirmojo tipo vienodų išlaidų tiesė $B = 36\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = 228 = \text{const}$; 3) vienodų pajamų tiesė

$61x_1+41x_2=259 \frac{2}{3}=\text{const}$; 4) kapitalo investavimo vienodo efektyvumo tiesė $E=\frac{P}{B}=\frac{5}{36}=\text{const}$; 5) tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$.

Šis taškas – tiesių $5b_{11}+11b_{21}=\frac{1294}{41}$ ir $39-5b_{11}-11b_{21}=\frac{5}{3}b_{11}$ susikirtimo taškas V' (žiūr. 344 pav., kuriame šis taškas skiria zoną $1.B \cup 3.B$ nuo zonos $1.2.\tilde{F}$), nes, sprendami lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5b_{11}+11b_{21}=\frac{1294}{41} \\ 39-5b_{11}-11b_{21}=\frac{5}{3}b_{11} \end{cases}, \text{ kaip tik ir gauname: } b_{11}=\frac{183}{41}, \quad b_{21}=\frac{379}{451}. \text{ Tiesės } b_{11}x_1+3x_2=19,$$

$b_{21}x_1+x_2=13$, turėdamos šias parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmes, kertasi tokiam taške V , kuriame kertasi mūsų jau nagrinėtoji tiesė $647x_1+533x_2=4879$ su antrojo tipo vienodo pelno tiese PN , kurią aprašo lygtis $39x_1+31x_2=\frac{803}{3}$.

Antrajame taške, kuris taip pat pavaizduotas 344 pav., sutampa: 1) pirmojo tipo vienodo pelno tiesė $P=\frac{305}{41}x_1+5x_2=5\left(\frac{61}{41}+x_2\right)=5 \cdot 13=65=\text{const}$; 2) pirmojo tipo vienodų išlaidų tiesė $B=36\left(\frac{61}{41}+x_1\right)=468=\text{const}$; 3) vienodo efektyvumo tiesė $E=\frac{5}{36}=\text{const}$; 4) vienodų pajamų tiesė

$61x_1+41x_2=41 \cdot 13=533$; 5) tiesė $b_{11}x_1+x_2=13$. Tuo pačiu metu taškas W' – tiesių $5b_{11}+11b_{21}=\frac{1294}{41}$ ir

$39-5b_{11}-11b_{21}=5b_{21}$ susikirtimo taškas. Tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$, turėdamos parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmes, sutampančias su taško W' koordinatėmis, kertasi tokiam taške W , kuris yra antrojo tipo vienodo pelno tiesės RM , kurią aprašo lygtis $39x_1+31x_2=303$, ir jau minėtosios tiesės $647x_1+533x_2=4879$ susikirtimo taškas.

Dar vienas įdomus atvejis tiesių $5b_{11}+11b_{21}=\text{const}$ šeimoje – tai atvejis, kada viena iš šios šeimos tiesių sutampa su antrojo tipo vienodo pelno tiese. Toks sutapimas galimas tada, kada $\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5}=\frac{39}{31}$, iš kur išplaukia lygybė $5b_{11}+11b_{21}=\frac{39 \cdot 26}{31}=32 \frac{22}{31}$. Transformuodami

plokštumos (b_{11}, b_{21}) tiesę $5b_{11}+11b_{21}=\frac{1014}{31}$ į plokštumą (x_1, x_2) , naudodamiesi formulėmis

$$b_{11}=\frac{19-3x_2}{x_1}, \quad b_{21}=\frac{13-x_2}{x_1}, \text{ gauname antrojo tipo vienodo pelno tiesę } 39x_1+31x_2=283 \frac{10}{13}, \text{ kurią jau}$$

esame nagrinėję kaip ypatingą antrojo tipo vienodo pelno tiesę, sutampančią su pirmojo tipo vienodo pelno tiesėmis.

Kitų įdomesnių atvejų tiesių $5b_{11}+11b_{21}=\text{const}$ nagrinėjimą palieku pačiam skaitytojui.

Pavyzdžiui, palieku jam savarankiškai paieškoti atsakymo į klausimą, ar gali sutapti antrojo tipo vienodo pelno tiesės su pirmojo tipo vienodų išlaidų tiesėmis, o taip pat į klausimą, ar gali sutapti antrojo tipo vienodo pelno tiesės su antrojo tipo vienodų išlaidų tiesėmis, jungiančiomis tokius tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taškus C^* , kuriuose išlaidos $B=(22+5b_{11}+11b_{21})x_1+36x_2$ išlieka vienodos. Atsakymai į šiuos klausimus padės skaitytojui geriau suvokti tai, kas jungia ir kas skiria pirmojo ir antrojo tipo vienodo pelno ir vienodų išlaidų tieses, o taip pat tai, kaip parametrų b_{11} ir b_{21} pokyčiai transformuojasi į optimalaus sprendinio koordinatę $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ bei tikslo funkcijos optimalios reikšmės $P^{(opt)}$ ir ją atitinkančių išlaidų B pokyčius.

Įdomu būtų išsiaiškinti, kodėl, kai $5b_{11}+11b_{21}=\frac{1294}{41}$, visuose LSS taškuose kapitalo

investavimo efektyvumas yra vienodas ir lygus $\frac{5}{36}$, ir tuomet visos tiesės, kertančios LSS, yra kapitalo investavimo vienodo efektyvumo tiesės, o kai kurios iš jų – ir pirmojo bei antrojo tipo vienodo pelno tiesės. Ar gali būti kitų kapitalo investavimo vienodo efektyvumo tiesių, kurių taškuose E nebūtų lygus $\frac{5}{36}$?

Baigę optimalaus sprendinio ir jo jautrumo koeficientų priklausomybės nuo parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo analizę keturkampyje $PRMN$ ir jo kraštinėse t.y. tą parametrų b_{11} , b_{21} kitimo poveikio

optimaliam sprendiniui atvejį, kai pelno $P=(139-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2$ maksimumas pasiekiamas tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taškuose C^* bei tų tiesių atkarpose B^*C^* ar C^*D^* , ribojančiose LSS, pažymėsime, jog **šis atvejis sudaro tik vieną iš daugelio galimų parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo atvejų.**

Visus tuos atvejus, priklausomai nuo to, kokios tiesės riboja LSS, o taip pat nuo santykio $\frac{p_1}{p_2} = \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5}$, charakterizuojančio pirmojo tipo vienodo pelno tiesių kryptį, reikšmės, galima suklasifikuoti taip, kad gautume **antrojo tipo sistemą, padedančią sistemiškai apžvelgti visus atvejus ir sistematizuoti optimalaus sprendinio ir jo jautrumo koeficientų priklausomybės nuo parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmių bei jų kitimo analizę.**

Pradžioje **sistematizuosime žymėjimus**, kuriais jau ne kartą naudojomės.

Tiesių $x_1=0$ ir $x_2=5$, ribojančių LSS susikirtimo tašką žymėsime raide A, o to taško koordinatės $x_1^{(A)}$, $x_2^{(A)}$.

Tiesių $x_2=5$ ir $b_{11}x_1+3x_2=19$ susikirtimo tašką, kuris juda tiese $x_2=5$, kintant b_{11} , žymėsime B^* , o jo koordinatės $x_1^{(B^*)}$ ir $x_2^{(B^*)}$. Taško B^* koordinatės $x_2^{(B^*)}$ reikšmė nesikeis ir bus lygi 5, o $x_1^{(B^*)}$ keisis ir bus lygi $x_1^{(B^*)} = \frac{4}{b_{11}}$.

Tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo tašką žymėsime C^* . Jo koordinatės $x_1^{(C^*)} = \frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2^{(C^*)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$.

Tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $x_1=6$ susikirtimo tašką žymėsime F^* . Jo koordinatės: $x_1^{(F^*)} = 6$, $x_2^{(F^*)} = \frac{19-6b_{11}}{3}$.

Tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $x_2=0$ susikirtimo tašką žymėsime $\tilde{F}^*$. Jo koordinatės: $x_2^{(\tilde{F}^*)} = 0$, $x_1^{(\tilde{F}^*)} = \frac{19}{b_{11}}$.

Tiesių $b_{21}x_1+x_2=13$ ir $x_2=5$ susikirtimo tašką žymėsime G^* . Jo koordinatės: $x_2^{(G^*)} = 5$, $x_1^{(G^*)} = \frac{8}{b_{21}}$.

Tiesių $b_{21}x_1+x_2=13$ ir $x_1=6$ susikirtimo tašką žymėsime D^* . Jo koordinatės: $x_1^{(D^*)} = 6$, $x_2^{(D^*)} = 13 - 6b_{21}$.

Tiesių $b_{21}x_1+x_2=13$ ir $x_2=0$ susikirtimo tašką žymėsime $\tilde{D}^*$. Jo koordinatės: $x_2^{(\tilde{D}^*)} = 0$, $x_1^{(\tilde{D}^*)} = \frac{13}{b_{21}}$.

Tiesių $x_1=6$ ir $x_2=5$ susikirtimo tašką žymėsime H, o tiesių $x_1=6$ ir $x_2=0$ susikirtimo tašką – raide E.

Kai kuriais atvejais naudosimės ir žymėjimais N, M, P, R bei tuos plokštumos (x_1, x_2) taškus atitinkančių plokštumos (b_{11}, b_{21}) taškų N' , M' , P' , R' žymėjimais.

Kaip jau buvo apskaičiuota, $x_1^{(N)}=6$, $x_2^{(N)}=\frac{107}{99}=1\frac{8}{99}$; $x_1^{(M)}=6$, $x_2^{(M)}=\frac{69}{31}=2\frac{7}{31}$;
 $x_1^{(P)}=\frac{344}{117}=2\frac{110}{117}$, $x_2^{(P)}=5$; $x_1^{(R)}=\frac{148}{39}=3\frac{31}{39}$, $x_2^{(R)}=5$; $b_{11}^{(N')}=\frac{241}{93}=2\frac{55}{93}$, $b_{21}^{(N')}=\frac{551}{279}=1\frac{272}{279}$;
 $b_{11}^{(M')}=\frac{191}{93}=2\frac{5}{93}$, $b_{21}^{(M')}=\frac{167}{93}=1\frac{74}{93}$; $b_{11}^{(P')}=\frac{117}{86}=1\frac{31}{86}$, $b_{21}^{(P')}=\frac{117}{43}=2\frac{31}{43}$; $b_{11}^{(R')}=\frac{39}{37}=1\frac{2}{37}$,
 $b_{21}^{(R')}=\frac{78}{37}=2\frac{4}{37}$.

Situaciją, kai LSS neriboja nė viena iš tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$, t. y., kai LSS riboja tik tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $x_1=6$ ir $x_2=0$, žymėsime numeriu 0.

Situaciją, kai į ribojančių LSS tiesių sąrašą patenka tik pirmoji iš tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$, o antroji nepatenka, žymėsime numeriu 1. Šią situaciją skaidysime dar į dvi:

- 1) situaciją 1.1, kurioje LSS riboja tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $b_{11}x_1+3x_2=19$, $x_1=6$, $x_2=0$, ir
- 2) situaciją 1.2, kurioje LSS riboja tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $b_{11}x_1+3x_2=19$, $x_2=0$.

Situaciją, kai į LSS ribojančių tiesių sąrašą pirmoji tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$ nepatenka, o patenka tik antroji tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, žymėsime numeriu 2. Šią situaciją taip pat skaidysime dar į dvi:

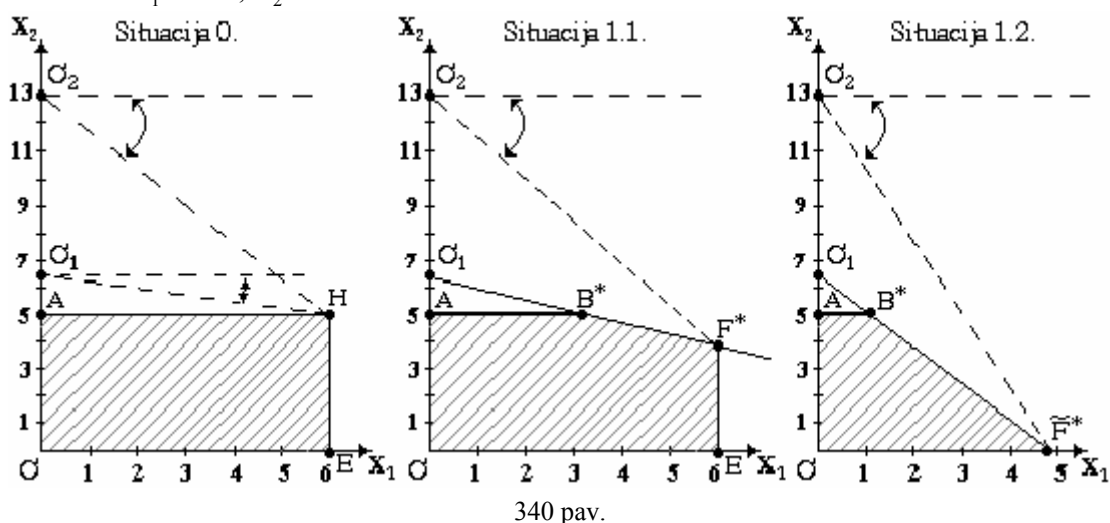
- 1) situaciją 2.1, kurioje LSS riboja tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $b_{21}x_1+x_2=13$, $x_1=6$, $x_2=0$, ir
- 2) situaciją 2.2, kurioje LSS riboja tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $b_{21}x_1+x_2=13$, $x_2=0$.

Situaciją, kai LSS riboja abi tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$, žymėsime numeriu 3. Šią situaciją irgi skaidysime dar į dvi:

- 1) situaciją 3.1, kurioje LSS riboja tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $x_2=0$, ir
- 2) situaciją 3.2, kurioje LSS riboja tiesės $x_1=0$, $x_2=5$, $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$, $x_2=0$.

Visos šios situacijos pavaizduotos 340, 341 ir 342 pav., kur taškas O koordinatinių (x_1, x_2) pradžia, taškas O_1 – tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ nejudantis taškas (sukimosi centras), turintis koordinates $x_1^{(O_1)} = 0$, $x_2^{(O_1)} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$, taškas O_2 – tiesės $b_{21}x_1+x_2=13$ nejudantis taškas (sukimosi centras), turintis

koordinates $x_1^{(O_2)} = 0$, $x_2^{(O_2)} = 13$.

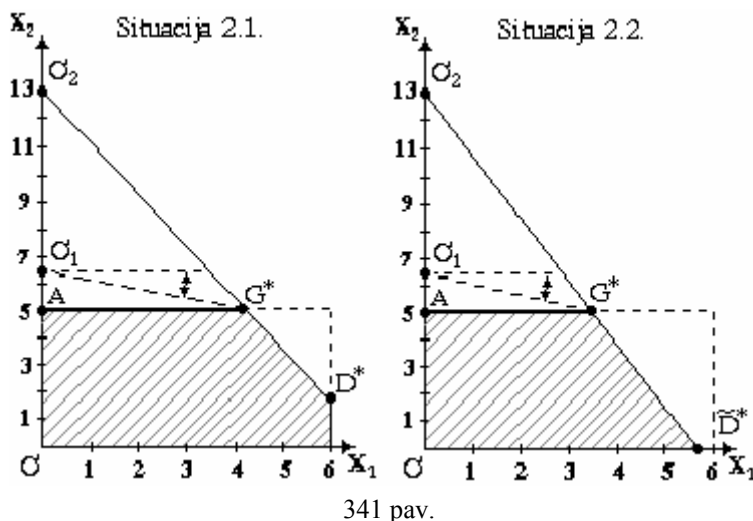


Situaciją, kai lyginamasis pelnas $p_1 < 0$, t. y., kai $39 - 5b_{11} - 11b_{21} < 0$, žymėsime A.

Situaciją, kai $\frac{p_1}{p_2} = \frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5}$ tenkina nelygybes $0 < \frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5} < \frac{b_{11}}{3}$, žymėsime B.

Šioje situacijoje pirmojo tipo vienodo pelno tiesės yra „gulstesnės“ („horizontalesnės“) negu tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$.

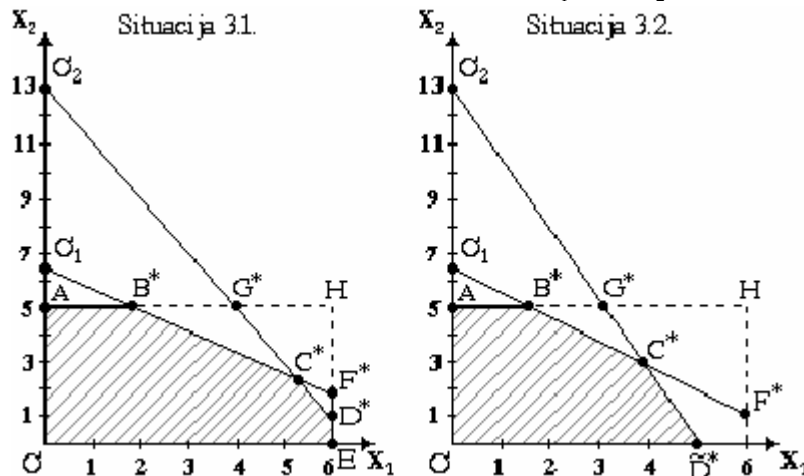
Situaciją, kai $\frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5} > \frac{b_{11}}{3}$, žymėsime F. Šioje situacijoje pirmojo tipo vienodo pelno tiesės yra „statesnės“ („vertikalesnės“) už tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$.



Situacija, kai $0 < \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5} < b_{21}$, žymėsime G. Šioje situacijoje vienodo pelno tiesės bus „gulstesnės“ už tiesės $b_{21}x_1+x_2=13$.

Situacija, kai $\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5} > b_{21}$, žymėsime D. Šioje situacijoje vienodo pelno tiesės yra „statesnės“ už tiesės $b_{21}x_1+x_2=13$.

Situacija, kai $\frac{b_{11}}{3} < \frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5} < b_{21}$, žymėsime C. Šioje situacijoje pirmojo tipo vienodo pelno tiesės, būdamos „statesnės“ už tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir „gulstesnės“ už tiesės $b_{21}x_1+x_2=13$, jungs tų tiesių susikirtimo taškus C^* , kuriuose pelnas $P=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1^{(C^*)}+5x_2^{(C^*)}$ bus vienodas.



342 pav.

Situacija, kai $39-5b_{11}-11b_{21}=0$, žymėsime AB (o taip pat ir AG). Joje vienodo pelno tiesės bus horizontalios.

Situacija, kai $39-5b_{11}-11b_{21}=\frac{5}{3}b_{11}$, žymėsime BC (o taip pat ir BF ir $\tilde{B}\tilde{F}$). Joje vienodo pelno tiesės bus lygiagrečios tiesėms $b_{11}x_1+3x_2=19$.

Situacija, kai $39-5b_{11}-11b_{21}=b_{21}$, žymėsime CD (o taip pat $\tilde{C}\tilde{D}$, GD ir $\tilde{G}\tilde{D}$). Joje vienodo pelno tiesės bus lygiagrečios tiesėms $b_{11}x_1+x_2=13$.

Kombinuodami situacijas, pažymėtas numeriais, su situacijomis, pažymėtomis raidėmis, mes galime gauti daug įvairių situacijų, charakterizuojamų **vienareikšmiškai apibrėžtomis** optimalaus sprendinio koordinatėms $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$, optimalios tikslo funkcijos reikšmės $P^{(opt)}$, išlaidų B ir kapitalo investavimo efektyvumo rodiklio E **apskaičiavimo formulėmis**, vaizduojančiomis, kaip priklauso (ar nepriklauso) dydžiai $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$, $P^{(opt)}$, B ir E nuo parametrų b_{11} ir b_{21} . Žinodami tas priklausomybes,

nesunkiai galime apskaičiuoti tų dydžių jautrumo koeficientus $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}$,

$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}}$ ir t. t.

Nagrinėdami tokias situacijas (kombinuotas ir nekombinuotas) bei matematiškai aprašydami jų susidarymo sąlygas, galime gauti **jautrumo, stabilumo bei formulių izomorfiškumo zonų** ribas.

Pereisime prie situacijų nagrinėjimo.

Situacijoje 0 (žiūr. 340 pav.), kuri gaunama, kai parametrai b_{11} ir b_{21} tenkina sąlygas

$\left(b_{11} \leq \frac{2}{3}\right) \wedge \left(b_{21} \leq \frac{4}{3}\right)$, optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)}=x_1^{(H)}=6$, $x_2^{(opt)}=x_2^{(H)}=5$, $P^{(opt)}=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1^{(opt)}+5x_2^{(opt)}=259-30b_{11}-66b_{21}$, $B=(22+5b_{11}-11b_{21})x_1^{(opt)}+36x_2^{(opt)}=312-30b_{11}+66b_{21}$, $E=\frac{P}{B}=\frac{259-30b_{11}-66b_{21}}{312+30b_{11}+66b_{21}}$. Iš šių formulių nesunku gauti, kad $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}}=-30$,

$$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}} = -66 \text{ ir t. t.}$$

Situacijoje A_1 (ši situacija negali susidaryti situacijoje 0, tačiau gali atsirasti situacijose 1,2,3) nepriklausomai nuo to, kurioje iš situacijų ji susidarė, optimalus sprendinys yra $x_1^{(opt)} = x_1^{(A)} = 0$, $x_2^{(opt)} = x_2^{(A)} = 5$, $P^{(opt)} = 25$, $B = 180$, $E = \frac{25}{180} = \frac{5}{36}$. Parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo zoną, kurioje optimalus sprendinys – taško A koordinatės (todėl mes ir tą zoną, kaip ir jai būdingą situaciją, žymėsime raide A), apibrėžia nelygybė $39 - 5b_{11} - 11b_{21} < 0$ (arba nelygybė $b_{11} > 7,8 - 2,2b_{21}$). Tai zona, kuri yra į dešinę ir į viršų nuo tiesės $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$ (žiūr. 344 pav.).

Kombinuodami situaciją AB, kai $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 0$ ir pirmojo tipo vienodo pelno tiesės tampa horizontaliomis tiesėmis $5x_2 = P = \text{const.}$, su situacijomis 1 ir 3, gauname situacijas 1.AB ir 3.AB, kuriose LSS taškai, maksimizuojantys pelną $P = 5x_2$, išsidėsto atkarpoje AB^* , sutampančioje su vienodo pelno tiese $P = 5x_2 = 25$.

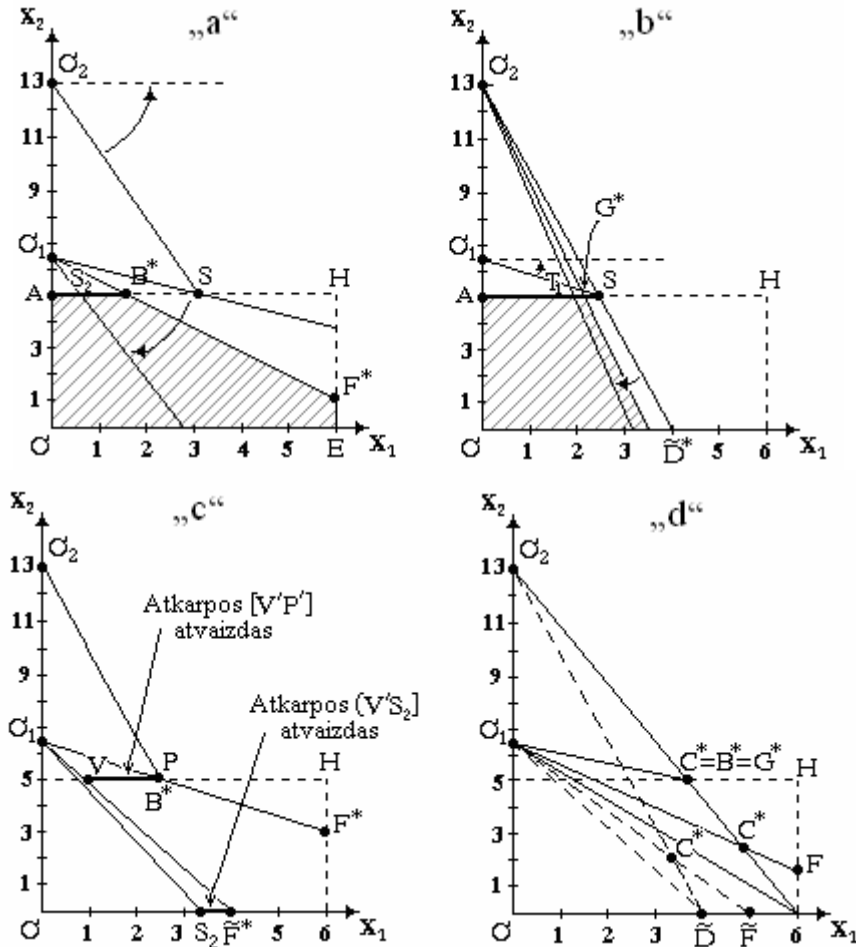
Parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo zoną, atitinkančią situacijų 1.AB ir 3.AB sąjungą $1.AB \cup 3.AB$, apibrėžia šios sąlygos: 1) $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 0$, arba $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$; 2) $x_1^{(B^*)} \leq x_1^{(G^*)}$, t. y. $\frac{4}{b_{11}} \leq \frac{8}{b_{21}}$, arba $b_{21} \leq 2b_{11}$; 3) $b_{11} > \frac{2}{3}$; 4) $b_{21} \geq 0$.

Iš šių sąlygų išplaukia, jog situacijų 1 ir 3 vedantysis keičiamasis parametras b_{11} situacijoje $1.AB \cup 3.AB$ gali keistis ribose $1 \frac{4}{9} \leq b_{11} \leq 7,8$, o parametras b_{21} – ribose $0 \leq b_{21} \leq 2b_{11}$ taip, kad visą laiką būtų tenkinama nelygybė $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$. Tai reiškia, jog parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo zoną šioje situacijoje plokštumoje (b_{11}, b_{21}) vaizduoja tiesės $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$ atkarpa nuo tiesių $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$, $b_{21} = 2b_{11}$ susikirtimo taško S' (žiūr. 344 pav.), turinčio koordinatės $b_{11}^{(S')} = \frac{13}{9} = 1 \frac{4}{9}$, $b_{21}^{(S')} = 2 \frac{8}{9}$, iki tiesės $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$ susikirtimo su tiese $b_{21} = 0$ taško S_2' , turinčio koordinatės $b_{11}^{(S')} = 7,8$, $b_{21}^{(S')} = 0$. Taške S_2' kertasi ne tik tiesės $b_{21} = 0$ ir $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$, bet ir tiesės $R'M'$, jungianti tokius plokštumos (b_{11}, b_{21}) taškus, kuriuose pirmojo tipo vienodo pelno tiesės, einančios per tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškus C^* , yra lygiagrečios tiesėms $b_{21}x_1 + x_2 = 13$, kertančioms tuos taškus C^* .

Keičiantis b_{11} ir b_{21} taip, kad taškas B^* judėtų tiese $b_{11} = 7,8 - 2,2b_{21}$ nuo taško S' iki taško S_2' , tašką B^* vaizduojantis plokštumoje (x_1, x_2) tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $x_2 = 5$ susikirtimo taškas B^* judės tiese $x_2 = 5$ nuo taško S (žiūr. 343^a pav.), kuriame kirsis visos trys tiesės $x_2 = 5$, $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$, kai $b_{11} = \frac{13}{9}$, $b_{21} = \frac{26}{9}$ iki taško S_2 , kuriame kirsis tiesės $x_2 = 5$ ir $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, kai $b_{11} = 7,8$ ir $b_{21} = 0$. Taip keičiantis b_{11} ir b_{21} , tiesė $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ suksis aplink tašką O_1 laikrodžio rodyklės kryptimi, o jos susikirtimo su tiese $x_2 = 5$ taškas B^* slinks taško A link nuo taško S, turinčio koordinatės $x_1^{(S)} = 5$, $x_1^{(S)} = \frac{4}{b_{11}} = \frac{4 \cdot 9}{13} = 2 \frac{10}{13}$, iki taško S_2 , turinčio koordinatės $x_2^{(S_2)} = 5$, $x_1^{(S_2)} = \frac{4}{b_{11}} = \frac{4}{7,8} = \frac{20}{39}$. Tuo pačiu tiesė ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ suksis apie tašką O_2 prieš laikrodžio rodyklę nuo jos susikirtimo su tiesėmis $x_2 = 5$ ir $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ taško S iki horizontaliosios padėties (žiūr. 343^a pav.).

Taip keičiantis b_{11} ir b_{21} ir taip judant taškui B^* , vienodo pelno tiesės išliks horizontalios ir maksimalaus pelno tiese bus tiesė $x_2 = 5$. Jos atkarpos AB^* taškuose pelnas $P^{(opt)} = 5x_2^{(opt)}$ bus vienodas ir lygus 25.

Tačiau išlaidos $B = (22 + 5b_{11} + 11b_{21})x_1 + 36x_2$ atkarpos AB^* taškuose nebus vienodos, nes šiuo atveju $B = (22 + 39)x_1 + 36 \cdot 5 = 61x_1 + 180$ didės, didėjant x_1 . Todėl šiuo atveju, pasiekus maksimalų galimą pelną $P = 25$, galima, keičiant x_1 , siekti dar ir kapitalo investavimo efektyvumo koeficiento $E = \frac{P}{B}$ maksimizavimo. Šiuo atžvilgiu atkarpos AB^* taškai tampa jau nebe lygiaverčiai, ir tiksliausiai iš tos maksimalaus vienodo pelno atkarpos taškų optimalaus sprendinio tašku pasirinkti tašką A, turintį koordinatės $x_1^{(A)} = 0$, $x_2^{(A)} = 5$. Tuomet išlaidos B bus minimalios ir lygios $B^{(min)} = 180$, o E maksimalus ir lygus $E^{(max)} = \frac{25}{180} = \frac{5}{36} = E_2$. Tai reiškia, kad situaciją $1.AB \cup 3.AB$ galima ir tikslia suvesti į jau anksčiau išnagrinėtą situaciją A, papildant nelygybę $39 - 5b_{11} - 11b_{21} < 0$ lygybe $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 0$.



343 pav.

Analogiškai galima parodyti, jog ir situaciją 2.AG, kuriai taip pat būdinga, jog $39-5b_{11}-11b_{21}=0$, galima ir tikslingai suvesti į situaciją A, išplečiant situacijos A apibrėžimą ir parametru b_{11} , b_{21} kitimo zoną A. Tokiai išplėstai zonai priklausys ne tik plokštumos (b_{11} , b_{21}) taškai, esantys į dešinę ir į viršų nuo tiesės $b_{11}=7,8-2,2b_{21}$ (žiūr. 344 pav.), bet ir pati tiesė, tiksliau jos atkarpa $T_1'S_2'$, kur T_1' – tiesės $b_{11}=7,8-2,2b_{21}$ susikirtimo su tiese $b_{11}=0$ taškas. Tašką T_1' , turintį koordinates $b_{11}^{(T_1')}=0$, $b_{21}^{(T_1')} = \frac{39}{11} = 3\frac{6}{11}$, kerta dar ir tiesė $P'N'$, kurią vaizduoja lygtis $b_{11}=5,85-1,65b_{21}$. Atkarpa $T_1'T'$, kur T' sutampa su S' , yra taško G^* judėjimo tiesė $x_2=5$ situacijoje 2.AG atkarpoje TT_1 , keičiantis b_{11} ir b_{21} , atvaizdas, analogiškas anksčiau mūsų gautam taško B^* judėjimo situacijoje 1.AB $\cup$ 3.AB atkarpa SS_2 atvaizdai S/S_2' . Skirtumas tik tas, jog dabar (situacijoje 2.AB) judantį tašką G^* , „generuojanti“ tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, taškui G^* judant nuo taško S iki taško T_1 , sukasi laikrodžio rodyklės kryptimi, o tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$ – prieš laikrodžio rodyklę nuo taško S, kuriame tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$ ir $x_2=5$ kertasi iki horizontalios padėties, kai taškas G^* pasiekia tašką T_1 , kertantį koordinates $x_2^{(T_1)}=5$, $x_1^{(T_1)} = \frac{8}{b_{21}} = \frac{8 \cdot 11}{39} = 2\frac{10}{39}$ (žiūr. 343^b pav.). Situacijoje 2.AG vedantysis kintamasis parametras b_{21} galės keistis diapazone nuo $b_{21}^{(S')} = b_{21}^{(T')} = 2\frac{8}{9}$ iki $b_{21}^{(T')} = 3\frac{6}{11}$, o parametras b_{11} – nuo $b_{11}^{(S')} = 1\frac{4}{9}$ iki $b_{11}^{(T')} = 0$. Taip keičiantis b_{11} ir b_{21} ir išlaikant lygybę $39-5b_{11}-11b_{21}=0$, plokštumos (x_1 , x_2) taškas G^* slinks tiesė $x_2=5$ nuo taško S, kuriame $x_1^{(S)} = 2\frac{10}{13}$, taško A atkarpose AG^* link iki taško T_1 , kuriame $x_1^{(T_1)} = 2\frac{10}{39}$ (žiūr. 343^b pav.). Pelnas $P^{(opt)}$ išliks vienodas ir lygus 65, o išlaidos B bus mažiausios taške A, kurį ir pasirinksiame optimumo tašku.

Srityje A, kurią apibrėžia nelygybės $39-5b_{11}-11b_{21}<0$, $b_{11}\geq 0$, $b_{21}\geq 0$, egzistuoja vienintelis optimalus sprendinys $x_1^{(opt)}=x_1^{(A)}=0$, $x_2^{(opt)}=x_2^{(A)}=5$, o papildytoje srityje A, kuri gaunama, prijungus tiesės $39-5b_{11}-11b_{21}=0$ atkarpą S_2'/T_1' , susidedančią iš atkarpų T_1'/S' ir S'/S_2' , tikslinga tašką A pasirinkti optimaliu sprendiniu.

Toliau zona A vadinsime išplėstą zoną A, apibrėžtą predikatu $[(b_{11}\geq 0)\wedge(b_{21}\geq 0)\wedge(39-5b_{11}-11b_{21}\leq 0)]=1$ ir turinčią savo sudėtyje atkarpą S_2'/T_1' .

Tiesa, kai kuriais atvejais, pavyzdžiui, kai siekiama, kad kistų pagamintas maksimalus produkcijos kiekis arba, kad padidėtų darbuotojų užimtumas bei darbo vietų skaičius,* galima atsisakyti kapitalo investavimo efektyvumo maksimizavimo, neatsisakant maksimalaus pelno kaip optimizavimo kriterijaus.

Tokiais atvejais situaciją AB galima ir tikslinga suvesti į situaciją B, pasirenkant optimumo tašką kitą atkarpos AB^* galą – tašką B^* su koordinatėmis $x_1=\frac{4}{b_{11}}$, $x_2=5$. Pelnas $P^{(opt)}$ išliks toks pats, t. y.

$P^{(opt)}=25$, tačiau padidės išlaidos B tapdamos $B=(22+5b_{11}+11b_{21})x_1+36x_2=61\cdot\frac{4}{b_{11}}+180=180+\frac{244}{b_{11}}$ ir pasiekdamos maksimalią reikšmę, kai $b_{11}=b_{11}^{(min)}=b_{11}^{(S')}=\frac{13}{9}$.

Didėjant išlaidoms B, mažės kapitalo investavimo efektyvumas, nukrisdamas nuo $\frac{5}{36}\approx 13,89\%$, iki $\approx 7,16\%$, tačiau didės pagamintos produkcijos kiekis, nuo $x_1^{(A)}=0$ iki $x_1^{(B^*)}=x_1^{(S')}=2\frac{10}{13}$. Taip pat padidės ir darbuotojų užimtumas.

Siekiant pagamintos produkcijos kiekio ir užimtumo didinimo tikslų, situaciją AG galima panašiu būdu suvesti į situaciją G, pasirenkant optimumo tašką ne tašką A, o tašką G^* su koordinatėmis $x_1^{(G^*)}=\frac{8}{b_{21}}$, $x_2^{(G^*)}=5$.

Tačiau dažniausiai būna tikslinga situacijas 1.AB, 3.AB ir 2.AG prijungti prie situacijos A, pasirenkant maksimalaus pelno ir kapitalo investavimo maksimalaus efektyvumo tašką A, ką mes ir padarėme, priimdami susitarimą, kad zona A laikysime išplėstą zoną A.

Pereisime prie situacijos B nagrinėjimo. Šiai situacijai būdinga, jog $0<\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{5}<\frac{b_{11}}{3}$. Todėl situacijose 1.B ir 3.B optimumo taškais bus tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$

susikirtimo su tiese $x_2=5$ taškai B^* , turintys koordinates $x_1=\frac{4}{b_{11}}$, $x_2=5$. Tuomet optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=(39-5b_{11}-11b_{21})\cdot\frac{4}{b_{11}}+5\cdot 5=5+\frac{4(39-11b_{21})}{b_{11}}$, išlaidos $B=(22+5b_{11}+11b_{21})\cdot\frac{4}{b_{11}}+36\cdot 5=$
 $=200+\frac{4(39-11b_{21})}{b_{11}}$, kapitalo investavimo efektyvumas $E=\frac{156+5b_{11}-44b_{21}}{88+200b_{11}+44b_{21}}$.

Nesunku apskaičiuoti jautrumo parametrų b_{11} , b_{21} pokyčiams koeficientus: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=-\frac{4}{b_{11}^2}$;

$$\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}=0; \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0; \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}=0; \quad \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}}=\frac{44b_{21}-156}{b_{11}^2}, \quad \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}}=-\frac{44}{b_{11}}.$$

Belieka nustatyti parametrų b_{11} , b_{21} kitimo zoną, atitinkančią situaciją $1.B\cup 3.B$.

Šioje zonoje parametrai b_{11} , b_{21} , turi tenkinti sąlygas: 1) $x_1^{(B^*)}\leq x_1^{(G^*)}$, t. y. $\frac{4}{b_{11}}\leq\frac{8}{b_{21}}$, iš kur $b_{21}\leq 2b_{11}$; 2) $39-5b_{11}-11b_{21}>0$, iš kur $b_{11}>5,85-1,65b_{21}$, 5) $b_{21}\geq 0$.

* Darbo jėgos užimtumo ir darbo vietų skaičiaus didinimas gali būti aktualus valstybėse, kurių ekonomika – nereguliuojama ar silpnai reguliuojama rinkos ekonomika, kuriai, kaip jau buvo nustatyta 1.14.12.2.1. skyrelyje, būdinga bedarystė. Optimizuojant atskiros įmonės veiklą, kai gamybos apimtis didinti nėra galimybės ar neapsimoka, **optimizavimo tikslu gali tapti darbo vietų mažinimas**. Tai ypač būdinga kapitalistinės ekonomikos krizėms.

Iš šių sąlygų išplaukia, jog $b_{11} > \frac{117}{86}$, todėl trečiąją sąlygą $b_{11} > \frac{2}{3}$ galima atmesti kaip neinformatyvią, nes $\frac{117}{86} > \frac{2}{3}$. Gauname, jog ieškomąją zoną $1.B \cup 3.B$ sudaro keturkampis $P'S'S_1'S_2'$,

ribojamas tiesėmis: $b_{21}=2b_{11}$; $b_{11}=7,8-2,2b_{21}$; $b_{21}=0$; $b_{11}=5,85-1,65b_{21}$ (žiūr. 344 pav.).

Šio keturkampio viršūnės P' , S' , S_2' buvo jau nekartą minėtos ir aprašytos, o viršūnė S_1' – tai tiesės $P'N'$, aprašomos lygtimi $39-5b_{11}-11b_{21}=\frac{5}{3}b_{11}$ susikirtimo su tiese $b_{21}=0$ taškas. Šio taško koordinatės: $b_{11}^{(S_1')} = 5,85$, $b_{21}^{(S_1')} = 0$. Jei būtų vadovaujamasi vien tik pelno maksimizavimo principu, tai tašką S_1' galėtų atitikti optimalus sprendinys: $x_1^{(S_1')} = \frac{4}{b_{11}} = \frac{20}{117}$, $x_2^{(S_1')} = 5$.

Kadangi situacijoje $1.B \cup 3.B$ plokštumos (b_{11}, b_{21}) taškus transformuojame į optimumo taškus plokštumoje (x_1, x_2) , kurie šio atveju išsidėstę tiesėje $x_2=5$ kaip tos tiesės ir tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ susikirtimo taškai B^* , tai dabar plokštumos (b_{11}, b_{21}) taškų transformacijos į plokštumos (x_1, x_2) taškus B^* formulėmis bus formulės $x_2=5$, $x_1=\frac{4}{b_{11}}$ (o ne formulės $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$, kaip buvo tuo atveju, kai plokštumos (b_{11}, b_{21}) taškus transformavome į tiesių $b_{11}x_1+3b_{21}=19$, $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taškus C^*).

Todėl antrojo tipo vienodo optimalaus pelno tiesė $P'N'$, aprašoma lygtimi $b_{11}=5,85-1,65b_{21}$, dabar transformuosis ne į tiesę $39x_1+31x_2=\frac{809}{3}$, o į tiesę $x_2=5$, kurios atitinkamų taškų koordinatės x_1

reikšmės bus apskaičiuojamos, naudojantis formulėmis $x_1=\frac{4}{b_{11}}$. Į tuos pačius tiesės taškus transformuosis ir visi kiti vidiniai keturkampio $P'S'S_2'S_1'$ taškai, vaizduojantys optimalius sprendinius ir turintys vienodas koordinatas b_{11} (nors ir skirtingas b_{21} reikšmes).

Iš zonos $1.B \cup 3.B$ apibrėžimo išplaukia, jog kraštinė $[S'S_2']$ nepriklauso šiai zonai. Tai ir natūralu, nes mes atkarpą $[S'S_2']$, atitinkančią situaciją AB , jau esame priskyrę zonai A , nors, vadovaudamiesi produkcijos maksimumo kriterijumi, galėjome priskirti ir zonai B , t. y. zonai $1.B \cup 3.B$.

Atkarpos $(P'S')$ ir $(S_1'S_2')$ priklauso zonai $1.B \cup 3.B$, o atkarpos $[P'S_1']$ priklausymo tai ar kitai zonai klausimą dar reikia spręsti, nagrinėjant situacijas BC , BF ir $B\tilde{F}$. Dabar kol kas ta atkarpa dar nepriskiriama zonai $1.B \cup 3.B$, kurią apibrėžia predikatas $[(b_{21} \leq 2b_{11}) \wedge (b_{11} < 7,8-2,2b_{21}) \wedge (b_{21} \geq 0) \wedge (b_{11} > 5,85-1,65b_{21})]=1$.

Panagrinėsime situacijas BC , BF ir $B\tilde{F}$, kurioms būdinga, jog $39-5b_{11}-11b_{21}=\frac{5}{3}b_{11}$, t. y., būdinga, jog jose pirmojo tipo vienodo optimalaus pelno tiesės $P=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=\frac{5}{3}b_{11}x_1+5x_2=\frac{5}{3}(b_{11}x_1+3x_2)=\frac{5}{3} \cdot 19=31\frac{2}{3}=\text{const.}$ yra lygiagrečios tiesėms $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir sutampa su jomis.

Situaciją $1.1.BF \cup 1.2.B\tilde{F} \cup 3.BC$ atitinka plokštumos (b_{11}, b_{21}) tiesė $P'S_1'$, kurią aprašo lygtis $39-5b_{11}-11b_{21}=\frac{5}{3}b_{11}$ (arba, kas yra tas pats, lygtis $b_{11}=5,85-1,65b_{21}$). Tiesė $P'S_1'$ yra antrojo tipo optimalaus vienodo pelno tiesė, nes visuose jos taškuose, o taip pat pirmojo tipo vienodo pelno tiesių B^*C^* , B^*F^* , $B^*\tilde{F}$ (plokštumoje (x_1, x_2)), atitinkančių pastovias parametrų b_{11} , b_{21} reikšmes, sutampančias su tiesės $P'S_1'$ taškų koordinatėmis b_{11} ir b_{21} reikšmėmis, taškuose tikslo funkcijos reikšmė yra pastovi ir lygi $31\frac{2}{3}$.

Kadangi pirmojo tipo vienodo pelno tiesėse, keičiantis x_1 ir x_2 , pelnas $P^{(\text{opt})}$ nesikeičia, o išlaidos B gali keistis, tai galima parinkti tokius pirmojo tipo vienodo pelno tiesių taškus, kuriuose išlaidos B bus mažiausios, o kapitalo investavimo efektyvumas E – didžiausias. Rasime tuos taškus.

Pradžioje apskaičiuosime išlaidas $B=(22+5b_{11}+11b_{21})x_1+36x_2=(22+39-\frac{5}{3}b_{11})x_1+36\frac{19-b_{11}x_1}{3}=12\cdot 19+(61-\frac{41}{3}b_{11})x_1$. Kai $b_{11}=\frac{3\cdot 61}{41}=\frac{19}{41}$ ir $b_{21}=\frac{117-20b_{11}}{33}=\frac{379}{451}$, tai pirmojo tipo vienodo pelno tiesė $\frac{5}{3}(b_{11}x_1+3x_2)=\frac{5}{3}(\frac{183}{41}x_1+3x_2)=31\frac{2}{3}$, sutapdama su tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$, bus ir vienodų išlaidų tiesė. Visuose jos taškuose $B=12\cdot 19=228$, ir efektyvumas $E=\frac{95}{3\cdot 228}\approx 0,1389$. Ši tiesė kerta LSS ribas taškuose $B^{**}(x_1^{(B^{**})}=\frac{164}{183}, x_2^{(B^{**})}=5)$ ir $\tilde{F}^{**}(x_1^{(\tilde{F}^{**})}=4\frac{47}{183}, x_2^{(\tilde{F}^{**})}=0)$ ir LSS ribose nesikerta su tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, t. y. su tiesė $\frac{379}{451}x_1+x_2=13$. Bet kuris atkarpos $B^{**}\tilde{F}^{**}$ taškas šiuo atveju yra ir vienodo maksimalaus pelno $P^{(opt)}=31\frac{2}{3}$, ir vienodų išlaidų $B=228$, ir vienodo maksimalaus efektyvumo $E\approx 0,1389$ taškas. Todėl, pasirinkę optimumo tašką (tarp visais atžvilgiais lygiaverčių atkarpos $B^{**}\tilde{F}^{**}$ taškų) tašką B^{**} , mes galime atkarpos $P'S_1'$ tašką ($b_{11}=\frac{183}{41}; b_{21}=\frac{379}{451}$) priskirti zonai 1.B $\cup$ 3.B, atvaizduodami jį plokštumoje (x_1, x_2) tašku B^{**} , turinčiu koordinates $x_1^{(V)}=\frac{164}{183}, x_2^{(V)}=5$. Toliau apibrėžtumo dėlei tašką B^{**} ir jo atvaizdą žymėsime žymėjimais V ir V'.

Kai $b_{11}<\frac{183}{41}$, t. y. kai $b_{11}\in(\frac{117}{86}; \frac{183}{41})$, tai $61-\frac{41}{3}b_{11}>0$, ir, didėjant x_1 , išlaidos B didėja.

Todėl vienodo pelno tiesėse B^*C^* , B^*F^* , $B^*\tilde{F}^*$ optimumo taškais šiuo atveju tikslinga pasirinkti taškus B^* , nes juose koordinatės x_1 reikšmė yra mažiausia. Dėl šios priežasties tikslinga visą atkarpą $[P', V']$ prijungti prie zonos 1.B $\cup$ 3.B, įskaitant ir tašką P', kuriame $b_{11}=\frac{117}{86}, b_{21}=\frac{117}{43}$. Šis taškas ypatingas

tuo, kad jame kertasi tiesės $b_{21}=2b_{11}, b_{11}=5,85-1,65b_{21}$ ir tiesės $b_{11}x_1+3x_2=\frac{117}{86}x_1+3x_2=19$ atvaizdas –

tiesė $b_{11}=\frac{117}{86}$ ir todėl jame susilieja taškų B^* ir C^* atvaizdžiai. Tai leidžia tašką P' priskirti ir zonai 3.B

ir zonai 3.C. Susitariame, kad ateityje tašką P' laikysime priklausančiu zonai 1.B $\cup$ 3.B (kartu su visa atkarpa $[P' V']$). Transformuodami antrojo tipo vienodo optimalaus pelno tiesės atkarpą $[P' V']$ į plokštumą (x_1, x_2) , gausime optimumo taškų atkarpą $[PV]$ tiesėje $x_2=5$, prasidedančią nuo taško P, turinčio koordinates $x_1^{(P)}=2\frac{110}{117}, x_2^{(P)}=5$, ir besibaigiančią tašku V, turinčiu koordinates $x_1^{(V)}=\frac{164}{183}, x_2^{(V)}=5$.

Kai $b_{11}>\frac{183}{41}$, tai $61-\frac{41}{3}b_{11}<0$, ir, didėjant x_1 , išlaidos B mažėja. Todėl atkarpose $B^*\tilde{F}^*$

optimumo taškais tikslinga pasirinkti taškus $\tilde{F}^*$ (pirmojo tipo vienodo pelno tiesių, sutampančių su tiesėmis $b_{11}x_1+3x_2=19$, susikirtimo su tiesė $x_2=0$ taškus), apskaičiuojant optimalaus taško $\tilde{F}^*$ koordinates, naudojantis formulėmis $x_1^{(opt)}=x_1^{(\tilde{F}^*)}=\frac{19}{b_{11}}, x_2^{(opt)}=x_2^{(\tilde{F}^*)}=0$. Atkarpų $B^*\tilde{F}^*$, kur taškai

$\tilde{F}^*$ – tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $x_1=6$ susikirtimo taškai, atveju, kai $b_{11}>4\frac{19}{41}$, leistinų sprendinių srityje (LSS) būti negali.

Pasirenkant vienodo pelno tiesių atkarpose $B^*\tilde{F}^*$ optimumo taškais taškus $\tilde{F}^*$ situacijoje $B\tilde{F}$, antrojo tipo vienodo pelno tiesės $P'S_1'$ atkarpą ($V'S_1'$) tikslinga priskirti ne zonai 1.B $\cup$ 3.B, o zonai 1.2. $\tilde{F}$, vaizduojant tą atkarpą plokštumoje (x_1, x_2) jau ne tiesės $x_2=5$, o tiesės $x_2=0$ atkarpa, prasidedančia

nuo taško $\tilde{V}$ su koordinate $x_1^{(\tilde{V})} = 4\frac{47}{183}$, kuris šiai atkarpai dar nepriklauso, ir besibaigiančia tašku S_1 , turinčiu koordinates $x_1^{(S_1)} = \frac{19}{5,85} = \frac{380}{117} = 3\frac{29}{117}$, $x_2^{(S_1)} = 0$.

Vadovaudamiesi papildomai kapitalo investavimo maksimizavimo kriterijumi ir todėl pirmojo tipo vienodo pelno tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ atkarpose $B^*\tilde{F}^*$ pasirinkdami optimumo taškais, kai $b_{11} > \frac{183}{41}$, ne taškus B^* , o taškus $\tilde{F}^*$, atkarpos $[P'S_1']$ tašką S_1' , turintį koordinates $b_{11}^{(S_1')} = 5,85$, $b_{21}^{(S_1')} = 0$, vaizduosime plokštumoje (x_1, x_2) ne atitinkamu tašku B^* , turinčiu koordinates $x_1^{(B^*)} = \frac{40}{117}$, $x_2^{(B^*)} = 5$, o atitinkamu tašku $\tilde{F}^*$, turinčiu koordinates $x_1^{(\tilde{F}^*)} = 3\frac{29}{117}$, $x_2^{(\tilde{F}^*)} = 0$. Štai kodėl anksčiau, kalbant apie atkarpos $[P'S_1']$ atvaizdavimą plokštumoje (x_1, x_2) ir apie taško S_1' atvaizdo koordinates $x_1^{(S_1')}$, $x_2^{(S_1')}$, buvo pavartota tariamoji nuosaka („galėtų atitikti“). Tariamosios nuosakos būtų buvę galima nevartoti, jei vadovautumės ne kapitalo investavimo efektyvumo, o pagamintos produkcijos kiekio maksimizavimo kriterijumi. Tačiau, kai mes nusprendėme vadovautis vis dėlto kapitalo investavimo maksimizavimo kriterijumi, tašką S_1' ir visą atkarpą $(V'S_1')$ tenka priskirti zonai 1.2. $\tilde{F}$, o atkarpą $[P'V']$ – zonai 1.B $\cup$ 3.B (žiūr. 343^{sc} ir 344 pav.).

Dabar jau galime apibrėžti papildytą sritį 1.B $\cup$ 3.B, prijungdami prie keturkampio $P'S_2'S_1'V'$ atkarpos $[P'S']$ dalį $[P'V']$.

Nagrinėdami keturkampį $P'S_2'S_1'V'$, matome (žiūr. 344 pav.), kad, kai parametras b_{11} keisis nuo $b_{11}^{(P')} = 1\frac{31}{86}$ iki $b_{11}^{(S')} = 1\frac{4}{9}$, tai parametras b_{21} keisis nuo $\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11}$ iki $2b_{11}$, o kai b_{11} keisis nuo $b_{11}^{(S')} = 1\frac{4}{9}$ iki $b_{11}^{(V')} = 4\frac{19}{41}$, tai b_{21} keisis ribose $\left[\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11}, \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right]$.

Kai b_{11} keisis nuo $b_{11}^{(V')} = 4\frac{19}{41}$ iki $b_{11}^{(S_1')} = 5,85$, tai b_{21} keisis ribose $\left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11}, \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right)$, o kai b_{11} keisis nuo $b_{11}^{(S_1')} = 5,85$ iki $b_{11}^{(S_2')} = 7,8$, b_{21} išliks pastovus dydis lygus 0.

Todėl papildytą sritį 1.B $\cup$ 3.B galima aprašyti predikatu:

$$\left\{ \left[\left(1\frac{31}{86} \leq b_{11} < 1\frac{4}{9} \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \leq b_{21} \leq 2b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(1\frac{4}{9} \leq b_{11} \leq 4\frac{19}{41} \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(4\frac{19}{41} < b_{11} \leq 5,85 \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11} \right) \right] \vee \left[(5,85 < b_{11} < 7,8) \wedge (0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11}) \right] \right\} = 1.$$

Pereisime dabar prie situacijos F, kurioje galioja nelygybė $39 - 5b_{11} - 11b_{21} > \frac{5}{3}b_{11}$, nagrinėjimo.

Galimi atvejai 1.1F ir 1.2. $\tilde{F}$ (žiūr. 340, 341 ir 342 pav.).

Situacijoje 1.1 (žiūr. 340 pav.) parametras b_{11} gali keistis ribose $\frac{2}{3} \leq b_{11} < \frac{19}{6}$, o parametro b_{21} kitimą riboja sąlygos: 1) $b_{21} \geq 0$, 2) $x_2^{(F^*)} \leq x_2^{(D^*)}$, t. y. $\frac{19 - 6b_{11}}{3} \leq 13 - 6b_{21}$, iš kur išplaukia $0 \leq b_{21} \leq \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9}$.

Sujungdami situaciją 1.1 su situacija F, gauname situaciją 1.1.F, kurią apibrėžia predikatas

$$\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} \leq b_{11} \leq \frac{241}{93} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{241}{93} < b_{11} < \frac{19}{6} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11} \right) \right] \right\} = 1.$$

Skaičius $\frac{241}{93}$ – tai taško N' , kuriame kertasi ribinės tiesės $b_{21} = \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9}$ ir $b_{21} = \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$, koordinatė b_{11} . Kaip matyti iš 344 pav., kol b_{11} kinta nuo $\frac{2}{3}$ iki $\frac{241}{93}$ (t. y. iki $b_{11}^{(N')}$), zoną 1.1.F iš viršaus riboja tiesė $b_{21} = \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9}$, todėl b_{21} gali keistis nuo 0 iki $\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9}$. Kai b_{11} keičiasi nuo $\frac{241}{93}$ iki $\frac{19}{6}$, tai sritį 1.1.F iš viršaus riboja tiesė $b_{21} = \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$ (arba, kas yra tas pats, tiesė $b_{11} = 5,85 - 1,65 b_{21}$), todėl b_{21} gali keistis nuo 0 iki $\frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$.

Srityje 1.1.F, kurios ribas jau apibrėžėme predikatu, optimumo taškais bus taškai F^* , turintys koordinates $x_1^{(opt)} = x_1^{(F^*)} = 6$, $x_2^{(opt)} = x_2^{(F^*)} = \frac{19 - 6b_{11}}{3}$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = (39 - 5b_{11} - 11b_{21}) \cdot 6 + 5 \cdot \frac{19 - 6b_{11}}{3} = 265 \frac{2}{3} - 40b_{11} - 66b_{21}$, išlaidos $B = (22 + 5b_{11} + 11b_{21}) \cdot 6 + \frac{19 - 6b_{11}}{3} = 460 - 42b_{11} + 66b_{21}$, o kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{797 - 120b_{11} - 198b_{21}}{1380 - 126b_{11} + 198b_{21}}$.

Optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}} = 0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}} = -2$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}} = -40$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}} = -66$, $\frac{\partial B}{\partial b_{11}} = -42$, $\frac{\partial B}{\partial b_{21}} = 66$.

Situacijoje 1.2 (žiūr. 340 pav.) parametras b_{11} turi būti ne mažesnis už $b_{11}^{(E)} = \frac{19}{6}$, t. y. $b_{11} \geq \frac{19}{6}$, o parametro b_{21} kitimą riboja sąlygos: 1) $b_{21} \geq 0$ ir 2) $x_1^{(\tilde{D}^*)} \geq x_1^{(F^*)}$, t. y. $\frac{13}{b_{21}} \geq \frac{19}{b_{11}}$, iš kur išplaukia predikatas, apibrėžiantis srities 1.2 ribas: $\left(b_{11} \geq \frac{19}{6}\right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{13}{19} b_{11}\right)$.

Sujungę situaciją 1.2 su situacija F, gausime situaciją 1.2. $\tilde{F}$, kurią apibrėžia predikatas $\left(b_{11} \geq \frac{19}{6}\right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}\right)$, nes, kai $b_{11} \geq \frac{19}{6}$, tai $\frac{13}{19} b_{11} > \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$, ir iš dviejų nelygybių $b_{21} \leq \frac{13}{19} b_{11}$, $b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$ sankirtos $\left(b_{21} \leq \frac{13}{19} b_{11}\right) \wedge \left(b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}\right)$ gauname vieną nelygybę $b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$.

Nesunku įsitikinti, kad, kai $b_{11} \geq \frac{19}{6}$, tikrai $\frac{13}{19} b_{11} > \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$: 1) kai $b_{11} = 2 \frac{605}{809}$, tai $\frac{13}{19} b_{11} = \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$; 2) didinant b_{11} , t. y. pasirenkant $b_{11} > 2 \frac{605}{809}$, kairioji lygybės $\frac{13}{19} b_{11} = \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}$ pusė didėja, o dešinioji mažėja; 3) $\frac{19}{6} > 2 \frac{605}{809}$, todėl kairioji lygybės pusė turi būti didesnė už dešiniąją. Tą patį rezultatą būtume gavę, sprenddami nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} b_{11} > \frac{19}{6}, \\ 0 \leq b_{21} \leq \frac{13}{19} b_{11}, \\ 0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11}. \end{cases}$$

Prisiminę, kad prie srities 1.2. $\tilde{F}$, vadovaujantis papildomu kapitalo investavimo efektyvumo maksimizavimo kriterijumi, galima ir tikslinga prijungti atkarpą ($V'S_1$), galutinai gauname tokį srities

1.2. $\tilde{F}$ ir jos ribų apibrėžimą: sričiai 1.2. $\tilde{F}$ priklauso visi tie ir tik tie plokštumos (b_{11}, b_{21}) taškai, kurie tenkina predikatą: $\left\{ \left[\left(\frac{19}{6} \leq b_{11} \leq \frac{183}{41} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{183}{41} < b_{11} \leq 5,85 \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \right\} = 1$.

Situacijoje 1.2. $\tilde{F}$ optimalus sprendinys – tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ susikirtimo su tiese $x_2 = 0$ taško $\tilde{F}^*$ koordinatės: $x_1^{(opt)} = x_1^{(\tilde{F}^*)} = \frac{19}{b_{11}}$, $x_2^{(opt)} = x_2^{(\tilde{F}^*)} = 0$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = (39 - 5b_{11} - 11b_{21}) \frac{19}{b_{11}} + 5 \cdot 0 = \frac{741 - 209b_{21}}{b_{11}} - 95$, išlaidos $B = \frac{(22 + 5b_{11} + 11b_{21}) \cdot 19}{b_{11}} = \frac{418 + 209b_{21}}{b_{11}} + 95$, kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{741 - 95b_{11} - 209b_{21}}{418 + 95b_{11} + 209b_{21}}$, optimalaus sprendinio, tikslo funkcijos ir išlaidų jautrumo b_{11} ir b_{21} pokyčiams koeficientai: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}} = -\frac{19}{(b_{11})^2}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}} = \frac{209b_{21} - 741}{(b_{11})^2}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}} = -\frac{209}{b_{11}}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{11}} = -\frac{418 + 209b_{21}}{(b_{21})^2}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{21}} = \frac{209}{b_{11}}$.

Pereisime prie situacijų 2.1 ir 2.2 (žiūr. 341 pav.) nagrinėjimo.

Kai $0 < 39 - 5b_{11} - 11b_{21} < 5b_{21}$, t. y. kai turime situaciją G, tai abi situacijas 2.1 ir 2.2 galima sujungti į situaciją 2, kuria jungdami su situacija G, gauname situaciją 2.G.

Situaciją 2 aprašo predikatas $\left[\left(b_{21} \geq \frac{4}{3} \right) \wedge \left(0 \leq b_{11} \leq 0,5b_{21} \right) \right] = 1$. Prijungę sąlygą G, gauname

sritį 2.G, kurią sudaro keturkampis $S'R'T_2'T_1'$ (žiūr. 344 pav.). Šiai sričiai ją ribojanti atkarpa $T_1'S'$ nepriklauso, nes, kaip jau buvome nustatę nagrinėdami situaciją AG, šią atkarpą tikslina prijungti prie srities A. Belineka nustatyti, ar priklauso sričiai G ją ribojanti atkarpa $T_2'R'$, kurią aprašo lygtis $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 5b_{21}$.

Ši atkarpa priklauso situacijai GD, kurioje tikslo funkcija yra $p_1x_1 + p_2x_2 = (39 - 5b_{11} - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = 5b_{21}x_1 + 5x_2 = 5(b_{21}x_1 + x_2) = 5 \cdot 13 = 65 = \text{const.}$, o tai reiškia, jog ši atkarpa priklauso antrojo tipo vienodo pelno tiesei, kuriai būdinga, kad per bet kurią jos tašką pravažiuoja pirmojo tipo vienodo pelno tiesė G^*D^* sutampa su per tą tašką pravažiuojančia tiese $b_{21}x_1 + x_2 = 13$. Visuose tokių pirmojo tipo vienodo pelno tiesių atkarpų G^*D^* taškuose pelnas taip pat lygus 65, todėl situacijoje GD esant duotoms b_{11} ir b_{21} reikšmėms, tenkinančioms lygybę $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 5b_{21}$, bet kuris atitinkamos atkarpos G^*D^* taškas pelno maksimumo atžvilgiu gali būti laikomas optimumo tašku.

Tačiau išlaidos B atkarpų G^*D^* taškuose gali būti nevienodos. Apskaičiuosime jas: $B = (22 + 5b_{11} + 11b_{21})x_1 + 36x_2 = (22 + 39 - 5b_{21})x_1 + 36(13 - b_{21}x_1) = 468 + (61 - 41b_{21})x_1$.

Kai $b_{21} = \frac{61}{41} = 1 \frac{20}{41}$, tai atitinkama atkarpa G^*D^* yra ne tik vienodo pelno, bet ir vienodų išlaidų ir kapitalo investavimo vienodo efektyvumo tiesė. Tačiau atkarpoje $T_2'R'$ taško T_2' koordinatės yra $b_{11}^{(T_2')} = 0$, $b_{21}^{(T_2')} = \frac{39}{16} = 2 \frac{7}{16}$, o taško R' – $b_{11}^{(R')} = \frac{39}{37}$, $b_{21}^{(R')} = \frac{78}{37} = 2 \frac{4}{37}$, ir todėl atkarpoje $T_2'R'$ visų taškų ordinatės b_{21} yra didesnės už $1 \frac{20}{41}$. Iš to išplaukia, jog atkarpoje $T_2'R'$ daugiklis $61 - 41b_{21}$ yra neigiamas ir išlaidos B mažėja, didėjant x_1 , t. y. slenkant nuo taško G^* taško D^* link. Todėl situacijoje 2.GD, vadovaujantis papildomu kapitalo investavimo efektyvumo maksimizavimo kriterijumi, tikslinga atkarpose G^*D^* optimumo taškais pasirinkti taškus D^* ir atkarpą $T_2'R'$ priskirti ne sričiai 2.G, o sričiai

2.D (tiksliau sritims: 1) 2.1.D, kai $b_{21} \in \left[\frac{78}{37}; \frac{13}{6} \right)$, ir 2) 2.2. $\tilde{D}$, kai $b_{21} \in \left[\frac{13}{6}; \frac{39}{16} \right)$.

Iš viso to, kas čia buvo pasakyta apie sritį 2.G, išplaukia, jog šią sritį sudaro keturkampis $T_1'S'R'T_2'$, kuriam priklauso atviros atkarpos $(T_2'T_1')$ bei $(R'S')$ ir nepriklauso uždaros atkarpos $[T_1'S']$ bei

[T₂R']. Šią sritį galima matematiškai aprašyti tokiu predikatu: $\left\{ \left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{39}{37} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{21} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{39}{37} < b_{11} \leq \frac{13}{9} \right) \wedge \left(2b_{11} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{21} \right) \right] \right\} = 1$.

Srityje 2.G optimumo taškai – tiesių $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir $x_2 = 5$ susikirtimo taškai G^* , turintys koordinates $x_1^{(opt)} = \frac{8}{b_{21}}$, $x_2^{(opt)} = 5$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = (39 - 5b_{11} - 11b_{21}) \cdot \frac{8}{b_{21}} + 5 \cdot 5 = \frac{312 - 40b_{11}}{b_{21}} - 63$, išlaidos $B = (22 + 5b_{11} + 11b_{21}) \cdot \frac{8}{b_{21}} + 36 \cdot 5 = \frac{176 + 40b_{11}}{b_{21}} + 268$, kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{312 - 40b_{11} - 63b_{21}}{176 + 40b_{11} + 268b_{21}}$. Optimalaus sprendinio tikslo funkcijos ir išlaidų

jautrumo koeficientai: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}} = 0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}} = -\frac{8}{(b_{21})^2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}} = -\frac{40}{b_{21}}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}} = \frac{40b_{11} - 312}{(b_{21})^2}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{11}} = \frac{40}{b_{21}}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{21}} = -\frac{176 + 40b_{11}}{(b_{21})^2}$.

Pereisime prie situacijos 3 nagrinėjimo. Šią situaciją galima ir tikslinga jungti su situacijomis B, C ir D. Situaciją 3.B mes jau esame išnagrinėję, jungdami ją su situacija 1.B. Situacijų 3.F ir 3.G nagrinėti netikslinga: situacijoje 3 tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ susikirtimo su tiese $x_1 = 6$ taškas F^* atsiduria už LSS ribų ir todėl negali būti optimumo tašku, lygiai taip pat kaip ir tiesės $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo su tiese $x_2 = 5$ taškas G^* . Situacija 3.2. $\tilde{D}$ egzistuoti negali, nes tokioje situacijoje turėtų būti tenkinamos nelygybės: 1) $(39 - 5b_{11} - 11b_{21}) > 5b_{21}$, 2) $b_{21} > \frac{13}{6}$, 3) $b_{11} > \frac{13}{12}$ (žiūr. 343^o pav.), tačiau tos nelygybės yra nesuderinamos, nes $5b_{11} + 16b_{21}$, kai $b_{11} > \frac{13}{12}$ ir $b_{21} > \frac{13}{6}$, yra daugiau už 39.

Todėl belieka išnagrinėti situacijas 3.C ir 3.1.D.

Situaciją 3.C mes jau esame gana detalai išnagrinėję ir aprašę, kai nagrinėjome parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo poveikį optimaliam sprendiniui, esančiam tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taške C^* (žiūr. 336 pav. ir 337 pav.). Šią situaciją, kaip jau buvome anksčiau nustatę, atitinka sritis – keturkampis P'N'M'R', kurio atkarpos (R'P] bei (N'M'] gali priklausyti sričiai 3.C, o atkarpos (P'N'] ir [R'M') – nepriklauso, jei vadovaujamės ne tik pelno maksimumo, bet ir papildomu kapitalo investavimo efektyvumo maksimizavimo kriterijumi.

Optimalūs sprendiniai šioje srityje, kaip jau buvome radę anksčiau, apskaičiuojami, naudojantis formulėmis $x_1^{(opt)} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}$, $x_2^{(opt)} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 65 + \frac{780 - 100b_{11} - 320b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, išlaidos $B = 368 + \frac{440 - 200b_{21}}{3b_{21} - b_{11}}$, kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{195 - 25b_{11} - 80b_{21}}{110 - 92b_{11} + 226b_{21}}$. Jautrumo koeficientai gali būti apskaičiuoti, naudojantis formulėmis:

$\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}} = \frac{20}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}} = -\frac{60}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}} = -\frac{20b_{21}}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}} = \frac{20b_{11}}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}} = \frac{780 - 620b_{21}}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}} = \frac{620b_{11} - 2340}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{11}} = \frac{440 - 200b_{21}}{(3b_{21} - b_{11})^2}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{21}} = \frac{200b_{11} - 1320}{(3b_{21} - b_{11})^2}$.

Situacijoje 3.1.D optimalus sprendinys bus tiesės $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo su tiese $x_1 = 6$ taško D^* koordinatės $x_1^{(opt)} = x_1^{(D^*)} = 6$, $x_2^{(opt)} = x_2^{(D^*)} = 13 - 6b_{21}$, t. y. toks pat, kaip ir srityje 2.1.D, todėl šias sritis galima sujungti į vieną sritį $2.1.D \cup 3.1.D$ (žiūr. 344 pav.), prijungiant prie šios srities visas jos

kraštinės, jų tarpe ir tiesės $T_2'M'$ atkarpą nuo taško su koordinatėmis $b_{11}=\frac{13}{15}$, $b_{21}=\frac{13}{6}$ iki taško M' su

koordinatėmis $b_{11}^{(M')}=\frac{191}{93}$, $b_{21}^{(M')}=\frac{167}{93}$, nes šią atkarpą, kaip jau buvo parodyta anksčiau,

vadovaujantis papildomu kapitalo investavimo efektyvumo maksimizavimo kriterijumi, tikslinga jungti ne prie srities G , o prie srities D .

$$\begin{aligned} \text{Sritį } 2.1.D \cup 3.1.D \text{ galima aprašyti predikatu: } & \left\{ \left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{2}{3} \right) \wedge \left(\frac{4}{3} \leq b_{21} \leq \frac{13}{6} \right) \right] \vee \right. \\ & \vee \left[\left(\frac{2}{3} \leq b_{11} \leq \frac{13}{15} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} \leq \frac{13}{6} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{13}{15} \leq b_{11} \leq \frac{191}{93} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} \leq \frac{39}{16} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5}{16} b_{11} \right) \right] \left. \right\} = 1. \end{aligned}$$

Jungtinėje srityje $2.1.D \cup 3.1.D$, kurią sutrumpintai galima būtų žymėti tiesiog D , kaip jau minėjome, $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=13-6b_{21}$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=299-30b_{21}-96b_{21}$, išlaidos $B=340+30b_{11}-150b_{21}$, kapitalo investavimo efektyvumas $E=\frac{299-30b_{11}-96b_{21}}{340+30b_{11}-150b_{21}}$. Jautrumo

koeficientai parametrų b_{11} ir b_{21} pokyčiams: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}=-6$,

$$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}}=-30, \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}}=-96, \frac{\partial B}{\partial b_{11}}=30, \frac{\partial B}{\partial b_{21}}=-150.$$

Belieka išnagrinėti sritį $2.2.\tilde{D}$, kurioje optimumo taškas – tiesės $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo su tiese $x_2=0$ taškas D^* . Šią sritį sutrumpintai galima žymėti $\tilde{D}$. Jos ribas galima aprašyti predikatu: $\left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{13}{15} \right) \wedge \left(\frac{13}{6} \leq b_{21} \leq \frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} \right) \right] = 1$. Atkarpa $\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{13}{15} \right) \wedge \left(b_{21} = \frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} \right)$ (žiūr. 344 pav.) priskiriama prie srities $\tilde{D}$ todėl, kad taip priskiriant maksimizuojamas kapitalo investavimo efektyvumas.

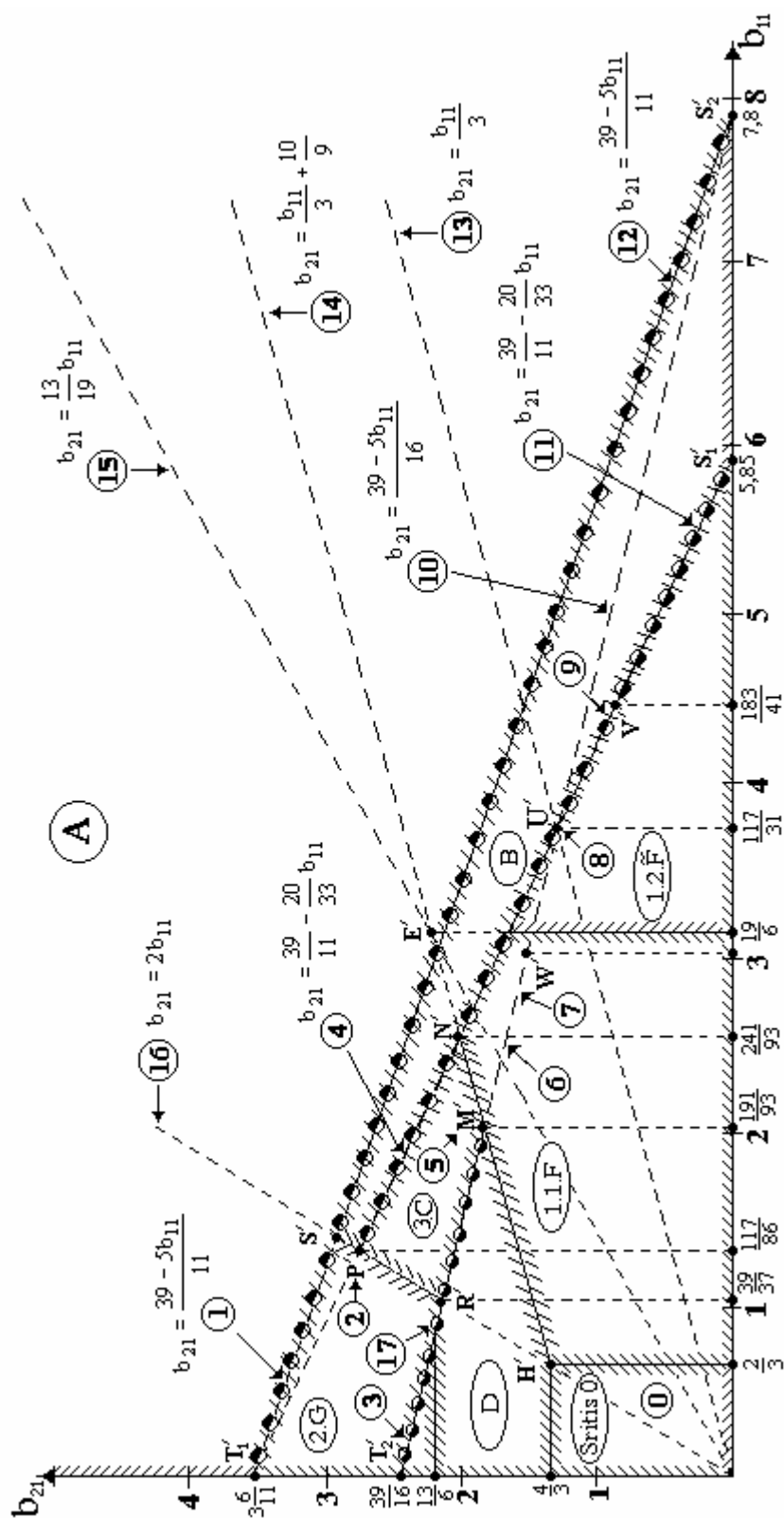
Srityje $\tilde{D}$ optimalus sprendinys $x_1^{(opt)}=x_1^{(\tilde{D})}=\frac{13}{b_{21}}$, $x_2^{(opt)}=x_2^{(\tilde{D})}=0$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=(39-5b_{11}-11b_{21})\frac{13}{b_{21}}+5\cdot 0=\frac{13(39-5b_{11})}{b_{21}}-143$. Išlaidos $B=\frac{(22+5b_{11}+11b_{21})13}{b_{21}}=\frac{13(22+5b_{11})}{b_{21}}+143$. Kapitalo investavimo efektyvumas $E=\frac{39-5b_{11}-11b_{21}}{22+5b_{11}+11b_{21}}=\frac{p_1}{s_1}$, t. y. lygus

pirmojo gaminio lyginamojo pelno ir jo savikainos santykiui (kaip ir srityje 1.2. $\tilde{F}$). Jautrumo b_{11} ir b_{21} pokyčiams koeficientai: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_{21}}=-\frac{13}{(b_{21})^2}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{11}}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_{21}}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{11}}=-\frac{65}{b_{21}}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_{21}}=\frac{13(5b_{11}-39)}{(b_{21})^2}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{11}}=\frac{65}{b_{21}}$, $\frac{\partial B}{\partial b_{21}}=-\frac{13(5b_{11}+22)}{(b_{21})^2}$.

Baigdamas parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo pasekmių analizę, analizės rezultatus pavaizduosiu grafiškai 344 pav., esančiame 336 pav. plėtiniu, kuriame nurodytos aukščiau aprašytų sričių ribos, pačios sritys ir optimalaus sprendinio koordinačių $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ apskaičiavimo formulės. Sričių bendros ribos, kurios priskiriamos vienai iš sričių, o nepriskiriamos kitai, pavaizduotos skrituliukais, pajuodintais iš tos pusės, kuriai sričiai ta riba priskiriama.

Paaiškinsiu kai kuriuos 344 pav. sutrumpintus pažymėjimus, žyminčius tam tikras plokštumas dalis ir tam tikrų tiesių atkarpas bei jų ypatingiausius taškus:

sritis A: jos taškai tenkina nelygybę $39-5b_{11}-11b_{21}\leq 0$ t. y. $b_{21}\geq \frac{39}{11}-\frac{5}{11}b_{11}$, kai $0\leq b_{11}\leq 7,8$, ir nelygybę $b_{21}\geq 0$, kai $b_{11}\geq 7,8$; šioje srityje $x_1^{(opt)}=0$; $x_2^{(opt)}=5$;



344 pav.

sritis 0: jos taškai tenkina predikatą $\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{2}{3}\right) \wedge \left(0 \leq 0 \leq \frac{4}{3}\right) = 1$; šioje srityje $x_1^{(\text{opt})} = 6$;
 $x_2^{(\text{opt})} = 5$, t. y. taško H koordinatės, todėl šią sritį galima žymėti **H**;

sritis B, jungianti savyje sritis 1.B ir 3.B: jos taškai tenkina predikatą

$$\left\{ \left[\left(1 \frac{31}{86} \leq b_{11} < 1 \frac{4}{9} \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \leq b_{21} \leq 2b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(1 \frac{4}{9} \leq b_{11} \leq 4 \frac{19}{41} \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(4 \frac{19}{41} < b_{11} \leq 5,85 \right) \wedge \left(\frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \vee \left[(5,85 < b_{11} < 7,8) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \right\} = 1; \text{ šioje srityje } x_1^{(\text{opt})} = \frac{4}{b_{11}}; x_2^{(\text{opt})} = 5;$$

sritis 1.1.F: jos taškai tenkina predikatą $\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} \leq b_{11} \leq \frac{241}{93} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{241}{93} < b_{11} < \frac{19}{6} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \right\} = 1; \text{ šioje srityje } x_1^{(\text{opt})} = 6; x_2^{(\text{opt})} = \frac{19 - 6b_{11}}{3};$

sritis 1.2.Ž: jos taškai tenkina predikatą $\left\{ \left[\left(\frac{19}{6} \leq b_{11} \leq \frac{183}{41} \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{183}{41} < b_{11} \leq 5,85 \right) \wedge \left(0 \leq b_{21} \leq \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \right\} = 1; \text{ šioje srityje } x_1^{(\text{opt})} = \frac{19}{b_{11}}; x_2^{(\text{opt})} = 0;$

sritis 2.G: jos taškai tenkina predikatą $\left\{ \left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{39}{37} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} < b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{39}{37} < b_{11} \leq \frac{13}{9} \right) \wedge \left(2b_{11} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11} \right) \right] \right\} = 1; \text{ šioje srityje } x_1^{(\text{opt})} = \frac{8}{b_{21}}; x_2^{(\text{opt})} = 5;$

sritis D: jos taškai tenkina predikatą $\left\{ \left[\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{2}{3} \right) \wedge \left(\frac{4}{3} \leq b_{21} \leq \frac{13}{16} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{2}{3} \leq b_{11} \leq \frac{13}{15} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} \leq \frac{13}{16} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{13}{15} \leq b_{11} \leq \frac{191}{93} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} \leq \frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} \right) \right] \right\} = 1; \text{ šioje srityje } x_1^{(\text{opt})} = 6; x_2^{(\text{opt})} = 13 - 6b_{21};$

sritis 2.2.Ž: jos taškai tenkina predikatą $\left(0 \leq b_{11} \leq \frac{13}{15} \right) \wedge \left(\frac{13}{16} \leq b_{21} \leq \frac{39}{16} - \frac{5}{16} b_{11} \right) = 1; \text{ šioje srityje } x_1^{(\text{opt})} = \frac{13}{b_{21}}; x_2^{(\text{opt})} = 0;$

sritis 3.C: jos taškai tenkina predikatą $\left\{ \left[\left(\frac{39}{37} < b_{11} < \frac{117}{86} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{11} b_{11} < b_{21} \leq 2b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(\frac{117}{86} \leq b_{11} \leq \frac{191}{93} \right) \wedge \left(\frac{39}{16} - \frac{5}{11} b_{11} < b_{21} < \frac{39}{16} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \vee \left[\left(2 \frac{5}{93} < b_{11} < 2 \frac{55}{93} \right) \wedge \left(\frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9} \leq b_{21} < \frac{39}{11} - \frac{20}{33} b_{11} \right) \right] \right\} = 1; \text{ šioje srityje optimumo taškai yra tiesių } b_{11}x_1 + 3x_2 = 19 \text{ ir } b_{21}x_1 + x_2 = 13 \text{ susikirtimo taškai, kurių koordinatės } x_1^{(\text{opt})} = \frac{20}{3b_{21} - b_{11}}; x_2^{(\text{opt})} = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}};$

1: pirmojo tipo vienodo pelno tiesių $5x_2 = \text{const.}$ atvaizdas, t. y. tiesė $b_{21} = \frac{39}{11} - \frac{5}{11} b_{11}$, atitinkanti atvejį $p_1 = 0$;

2: taškas P' , kurį galima priskirti bet kuriai iš trijų kaimyninių sričių, nes jame susilieja taškai B^* , C^* ir G^* ; jo koordinatės $b_{11} = 1\frac{31}{86}$, $b_{21} = 2\frac{31}{43}$; šį tašką atitinka taškas P , turintis koordinatas

$$x_1 = \frac{344}{117}, x_2 = 5;$$

3: tiesė $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 5b_{21}$, t. y. tiesė $b_{21} = \frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11}$ – pirmojo tipo vienodo pelno tiesių $(39 - 5b_{11} - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = P = \text{const}$ lygiagretumo tiesėms $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ atvaizdas;

4: pirmojo tipo vienodo pelno tiesių lygiagretumo tiesėms $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ atvaizdas – tiesė $39 - 5b_{11} + 11b_{21} = \frac{5}{3}b_{21}$, t. y. tiesė $b_{21} = \frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11}$;

5: taškas M' – taškų C'' , D'' ir F'' susiliejimo taškas; jo koordinatės $b_{11} = \frac{191}{93} = 2\frac{5}{93}$, $b_{21} = \frac{167}{93} = 1\frac{74}{93}$; šį tašką atitinka taškas M , turintis koordinatas $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{69}{31}$;

6: tiesė $b_{21} = \frac{39}{16} - \frac{5}{16}b_{11}$ – pirmojo tipo vienodo pelno tiesių lygiagretumo tiesėms $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ atvaizdas, sutampantis su 3 ir 10;

7: taškas W' $\left(b_{11} = \frac{623}{205}, b_{21} = \frac{61}{41}\right)$ – ypatingasis taškas, kuriame vienodo pelno tiesė $\frac{305}{41}x_1 + 5x_2 = 65$ sutampa su tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir su vienodų išlaidų tiesė: $36\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = 458$ bei vienodo efektyvumo tiesė, kurios taškuose efektyvumas yra lygus pastoviam dydžiui $E = \frac{5}{36}$;

8: taškas U' , vaizduojantis tašką U , kuriame vienodo pelno tiesė $B^* \tilde{F}^*$ $\left(\frac{195}{31}x_1 + 5x_2 = 31\frac{2}{3}\right)$ yra lygiagreti abiem tiesėms $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$;

9: taškas V' $\left(b_{11} = \frac{183}{41}, b_{21} = \frac{739}{451}\right)$ – ypatingasis taškas, kuriame pirmojo tipo vienodo pelno tiesė $B^* \tilde{F}^*$, $\frac{305}{41}x_1 + 5x_2 = 31\frac{2}{3}$ sutampa ne tik su tiesė $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, bet ir su vienodų išlaidų tiesė $36\left(\frac{61}{41}x_1 + x_2\right) = 228$ bei vienodo efektyvumo tiesė, charakterizuojama efektyvumu $E = \frac{5}{36}$;

10: vienodo pelno tiesių lygiagretumo tiesėms $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ atvaizdas, t. y. tiesė $39 - 5b_{11} - 16b_{21} = 0$, sutampanti su jau minėtomis tiesėmis 3 ir 6;

11: tiesė $b_{21} = \frac{39}{11} - \frac{20}{33}b_{11}$, t. y. tiesė $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = \frac{5}{3}b_{11}$, kuri kartu yra ir pirmojo tipo vienodo pelno tiesių lygiagretumo su tiesėmis $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ atvaizdas, sutampantis su jau minėtąja tiesė 4;

12: tiesė $b_{21} = \frac{39}{11} - \frac{5}{11}b_{11}$, t. y. tiesė $39 - 5b_{11} - 11b_{21} = 0$, kuri yra ir vienodo pelno tiesių $5x_2 = \text{const}$ atvaizdas, sutampantis su jau minėtąja tiesė 1;

13: tiesė $b_{21} = \frac{b_{11}}{3}$ – tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ lygiagretumo (susikirtimo begalybėje) atvaizdas, nes kai $b_{21} = \frac{b_{11}}{3}$, tai tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ tampa lygiagrečios;

14: tiesė $b_{21} = \frac{b_{11}}{3} + \frac{10}{9}$ – trijų tiesių ($b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$, $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir $x_1 = 6$) susikirtimo taškų atvaizdas;