

1.15. SISTEMINIAI IR OPTIMIZACINIAI MODELIAI. OPTIMIZACINIŲ MODELIŲ SISTEMINĖ ANALIZĖ

1.15.1. Sisteminiai modeliai

Sisteminių modelių klasę sudaro **objektų bei sistemų išoriniai ir sistemų vidiniai modeliai**. (žiūr. 1.4. ir 1.10. skyrius).

Išorinius ir vidinius sisteminius modelius, atsižvelgiant į jų apibrėžtumo lygį, galima suskirstyti į vienareikšmiškai apibrėžtus, vadinamus **determinuotais** (arba **deterministiniais**), modeliais, apibrėžtus tik tikimybiškai, vadinamus **stochastiniais** modeliais, ir dar labiau neapibrėžtus nei stochastiniai modeliai. Pastarieji šios mokymo priemonės 1.2. skyriuje buvo sąlyginai pavadinti **neapibrėžtiniais** modeliais.

Didžioji dalis šioje mokymo priemonėje iki šiol nagrinėtų sisteminių modelių buvo determinuoti modeliai, nors jau esame susidūrę ir su stochastiniais modeliais. Šiai sisteminių modelių klasei priklauso 1.4.12. skyrelyje aprašytieji stochastiniai automatai ir didelė dalis 1.14. skyriuje nagrinėtų modelių. Neapibrėžtinius modelius nagrinėsime šios mokymo priemonės 1.16. skyriuje (žiūr. 1.16.2. poskyrio skyrelius). Sudėtingų sistemų vidinių modelių elementų modeliai neretai priklauso įvairioms modelių klasėms: vieni jų gali būti determinuoti, kiti – stochastiniai, dar kiti – neapibrėžtiniai.

Atsižvelgiant į tai, kad pasaulį galima nagrinėti dviem aspektais (žiūr. 1.1. skyriaus pradžią), sisteminius modelius galima suskirstyti į **objektinius ir funkcinius**, o pastaruosius – į **analizinius ir algoritminius**. Kaip jau buvo rašyta 1.13.2. skyrelyje, algoritminiai sisteminiai modeliai, imituojantys modeliuojamų sistemų vidinį ar/ir išorinį funkcionavimą, vadinami **imitaciniais** modeliais. Imitacinių modelių pavyzdžiai buvo pateikti 1.13.2. ir 1.13.3. skyriuose, taip pat eilėje 1.14. skyriaus skyrelių. Gana daug analizinių sisteminių išorinių modelių buvo pateikta 1.4. skyriaus skyreliuose, bei 1.14. skyriuje, o analiziniai sisteminiai vidiniai modeliai buvo nagrinėjami 1.10., 1.11. ir 1.12. skyriuose. Modeliuojant sudėtingų sistemų funkcionavimą, dažniausiai taikomi vidiniai imitaciniai modeliai, tačiau atskiros tų modelių dalys gali būti priskirtos ir prie analizinių modelių. Sudarant sudėtingų sistemų modelius, tenka taikyti ir objektinį, ir funkcinį požiūrius ir tų požiūrių sintezę.

Sisteminiai modeliai, kaip jau buvo minėta 1.4.13. skyrelyje, taip pat gali būti skirstomi į **deskriptinius** ir **normatyvinius**. Tame skyrelyje buvo pateikti ir deskriptinių, ir normatyvinių modelių pavyzdžiai.

Dabar pratėsime tokių modelių nagrinėjimą ir išsiaiškinsime jų ryšį su **optimizaciniais modeliais**, jų vaidmenį sprendinių priėmimo procesuose. Po to pereisime prie pagrindinės šio – 1.15. – skyriaus temos – **optimizacinių modelių ir optimizavimo metodų bei optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizės**.

1.15.1.1. Deskriptiniai modeliai

Kaip jau buvo minėta, **deskriptiniu (deskriptyviniu) modeliu** vadinamas modelis, kurio paskirtis – aprašyti (atvaizduoti) realią sistemą ir joje vykstančius procesus taip, kad tas atvaizdavimas pakankamai tiksliai atitiktų tikrovę. Deskriptinių informacinių modelių pavyzdžiais gali būti tie modeliai, kurie sudaromi valdymo sistemose **apskaitos fazėje** ir vaizduoja esamą padėtį. Pagrindinės gero deskriptinio modelio savybės – jo **objektyvumas** (vaizduojama tai, kas yra, nors tai gali ir

nesutapti su tuo, ko norima, kas privalėtų būti) ir **tikslumas** (deskripcinis modelis privalo būti **pakankamai adekvatus** tai sistemai, kurią jis vaizduoja).

Matematinis deskripcinis modelis – tai ne tik realios sistemos „fotografija“, ne tik tai, iš ko galima gauti „dokumentinį filmą“, vaizduojantį sistemos funkcionavimą – sistemos funkcionavimo išorines ar/ir vidines trajektorijas, bet kartu ir tokia matematinė „konstrukcija“, kuri, atspindėdama sistemos elementus ir ryšius bei priklausomybes tarp sistemos elementų ir joje vykstančių įvykių bei procesų, leidžia **modeliuoti ne tik realiai vykstančius procesus, bet ir tokius procesus bei įvykius, kurie galėjo arba galėtų įvykti realioje sistemoje, susiklosčius atitinkamoms sąlygoms**, dominančioms kokių nors aspektu eksperimentuojantį su deskriptiniu matematiniu modeliu asmenį.

Todėl **pakankamai detalaus ir pakankamai tikslaus deskripcinio matematinio modelio pažintinė vertė gali būti žymiai didesnė negu nagrinėjamos sistemos „fotografijos“ (faktogramos) bei tos sistemos funkcionavimo „dokumentinio filmo“**. Ši pakankamai gera deskripcinio matematinio modelio savybė paaiškinama tuo, kad matematinis deskripcinis modelis yra gaunamas, apibendrinant eilę tokių „fotografijų“ ir „dokumentinių filmų“, t. y. po to, kai stebimoje sistemoje pavyksta išvelgti priežastinius ryšius bei dėšningumus, leidžiančius matematiškai išreikšti priklausomybes tarp sistemos būsenų $\bar{z}$, įėjimų $\bar{x}$, išėjimų $\bar{y}$ vektorių koordinačių ir laiko t , kai pavyksta išsiaiškinti, kodėl nagrinėjamoji sistema turi būtent tokią, o ne kitokią sudėtį, būtent tokią, o ne kitokią struktūrą, kodėl ji funkcionuoja būtent taip, o ne kitaip.

Deskriptiniai matematiniai sistemų ir jose vykstančių procesų modeliai gali būti **analiziniai** (išreiškiami klasikinės **matematikos formulių kalba**) ir **imitaciniai** (išreiškiami **algoritmų**, imituojančių sistemoje vykstančius įvykius bei procesus, kalba). Kai, sudarant vidinį sistemos modelį, tenka naudotis ne tik analiziniais, bet ir imitaciniais sistemoje vykstančių procesų modeliais, tai **toks vidinis sistemos modelis taip pat laikomas imitaciniu**.

Dauguma vidinių sudėtingų sistemų deskriptinių modelių priklauso imitacinių modelių klasei, nes ne visas tokiose sistemose veikiančias priklausomybes pavyksta išreikšti analiziškai, ir sistemos modeliavime tenka naudotis sistemos bei jos dalių funkcionavimą imituojančiais algoritmais, nors atskiros tų algoritmų dalys, kaip jau buvo minėta, gali būti aprašytos ir analizinėmis matematinėmis formulėmis.

1.15.1.2. Normatyviniai modeliai

Normatyviniu (preskripciniu) modeliu vadinamas sisteminis modelis tokio objekto ar sistemos bei juose ir jose vykstančių procesų, kokie jie privalėtų būti normatyvinio modelio autoriaus nuomone. Normatyviniai modeliai sudaromi **planavimo fazėje**, o taip pat tobulinant veikiančias sistemas ir kuriant (projektuojant) naujas. Kuriamų ir tobulinamų sistemų normatyviniai modeliai, išreikšti kokiomis nors jų pavaizdavimo standartinėmis priemonėmis ir skirti realizavimui, vadinami **projektais**, o tokių modelių kūrimas – **projektavimu**. Apie projektus ir projektavimą jau buvo kalbėta 1.4.13. skyrelyje ir dar plačiau bus kalbama šios mokymo priemonės antrosios dalies skyreliuose, todėl čia kol kas apsiribosiu tik pastaba, jog išorinio normatyvinio modelio kūrimas, vadinamas **išoriniu projektavimu**, o vidinio – **vidiniu projektavimu**, rekomenduodamas skaitytojui išstudijuoti šių eilučių autoriaus paruoštą metodinę priemonę [16], skirtą statistikos departamento darbuotojams, kurioje aprašyta **sisteminė sudėtingų sistemų projektavimo metodologija, loginiai**

ir chronologiniai projektavimo etapai bei fazės, automatizuota organizacinių sistemų projektavimo sistema CASE. Toje metodinėje priemonėje skaitytojas galės susipažinti su tuo, kaip normatyvinio projektavimo ir deskriptinio modeliavimo metodai bei jų sintezė taikomi sudėtingų informacinių sistemų projektavime ir tobulinime.

1.15.1.3. Sisteminiai situaciniai, normatyviniai ir motyvaciniai modeliai

Kartais (pavyzdžiui, nagrinėjant, kaip valdymo sistemose pareigūnai priima valdymo sprendimus) **normatyvinio modelio sąvoka vartojama kartu su situacinio ir motyvacinio modelių sąvokomis ir tuomet normatyvinio modelio sąvoka susiaurinama ir specializuojama.**

Situaciniu modeliu vadinamas deskriptinis modelis, vaizduojantis tą situaciją („probleminę situaciją“), kurią SPA („sprendimus priimantis asmuo“) analizuoja ir į kurią privalo atsižvelgti, ieškodamas sprendinio, tenkinančio **normatyvinį modelį**, vaizduojantį reikalavimus, išplaukiančius iš SPA pareigų (iš jo **pareigybės modelio**), o taip pat pagal galimybes maksimaliai tenkinančio asmeninius SPA interesus (tikslus, norus, pageidavimus, polinkius). Modelis, vaizduojantis SPA asmeninius interesus bei jo asmeninius tikslus, vadinamas **motyvaciniu modeliu**, nes jis atspindi motyvus, kuriais vadovaujasi SPA, priimdamas sprendimą tų apribojimų ir galimybių sąlygomis, kurias atspindi situacinis ir normatyvinis (šiuo atveju – **pareigybinis**) modeliai.

Situacinis modelis vaizduoja objektyviai egzistuojančią SPA aplinką, jos objektyvius dėsningumus ir tuos faktus, su kuriais SPA privalo skaitytis, priimdamas tą ar kitą problemos sprendimo variantą; motyvacinis modelis vaizduoja subjektyvų „vidinį SPA pasaulį“, SPA asmeninius tikslus, o normatyvinis modelis šiuo atveju – SPA pareigybę, juridinį SPA statusą, SPA pareigas ir teises. **Turėdamas omenyje visus tris modelius – situacinį, normatyvinį ir motyvacinį – SPA ieško tinkamiausio jam probleminės situacijos sprendinio ir priima jį.** Tai – sudėtingas ir atsakingas procesas, nes neretai tie modeliai būna nesuderinti ir prieštarauja vienas kitam, dėl ko problema pradeda atrodyti neišsprendžiama, o tais atvejais, kai, imantis specialių priemonių ir keičiant esamą situaciją bei modifikuojant kurį nors ar net visus tris minėtus modelius, juos pavyksta suderinti, iš tų modelių gana dažnai išplaukia jau ne vienas, o keli ar keliolika galimų nagrinėjamos problemos sprendimų ir tada **tenka spręsti geriausio sprendinio išrinkimo problemą.**

Iš to, kas čia buvo anksčiau pasakyta, išplaukia, jog, **vartojant normatyvinio modelio sąvoką kontekste su motyvacinio modelio sąvoka, pirmoji šiek tiek susiaurėja ir specializuojasi, nebesutampa su normatyvinio modelio, kaip kuriamos bei tobulinamos sistemos projekto, būsimų veiksmų plano, sąvoka.** Šiuo atveju normatyvinis modelis tampa pareigybės modeliu (žiūr. 1.4.13.2., kuriame pateiktas **pareigybės paso** – normatyvinio pareigybės modelio – pavyzdys).

Toliau šioje mokymo priemonėje mes naudosime **normatyvinio modelio sąvoką platesniąja prasme, projekto bei plano prasme**, kuri, galima sakyti, **jungia savyje ir normatyvinio modelio siauresniąja prasme, pareigybės modelio prasme, ir motyvacinio modelio sąvokas.**

Apie situacinius, motyvacinius, ir normatyvinius (pareigybinius) modelius bei apie problemas, kurios iškyla, kai tarp šių modelių atsiranda nesuderinamumas ar net akivaizdūs prieštaravimai, taip pat, kai pareigūnui atsiranda galimybė piktnaudžiauti savo tarnybine padėtimi, plačiau bus kalbama ir jais operuojama ne tik 1.16-jame šios mokymo priemonės skyriuje, bet ir specialiaame „Loginių procedūrų formalizavimo ir automatizavimo“ kurse bei tam kursui skirtoje šių eilučių autoriaus paruoštoje

mokymo priemonėje. Papildomos informacijos apie šiuos modelius skaitytojas taip pat gali rasti literatūroje, nagrinėjančioje sprendimų priėmimo problemas bei procesus (pavyzdžiui, [52, 131, 209, 210, 211]).

Normatyviniai modeliai (taip pat kaip ir deskriptiniai) gali būti **informaciniai-matematiniai** ir **informaciniai-nematematiniai**, o matematiniai normatyviniai modeliai gali būti **analiziniai ir imitaciniai**.

Kurdami kokios nors sistemos normatyvinį modelį (modelį-projektą, normatyvinį modelį plačiąja prasme), jo autoriai privalo tiksliai suvokti ir išreikšti savo (ar modelio užsakovo) **tikslus bei pageidavimus** ir atsižvelgti į egzistuojančias projektuotojų veiklą reglamentuojančias **normas** (juridines, etines, estetines, technines ir t. t.) bei savo (ir užsakovo) **galimybes** (fizinės, finansinės ir t. t.). Net ir tais atvejais, kai pavyksta (o pavyksta ne visada) visa tai suderinti ir paversti būsimą **projekto technine užduotimi**, gana dažnai susiduriama su jau minėtuju projektinių sprendimų dagiavariantiškumu ir tuomet iškyla **optimizavimo problema: kaip, neišeinant už egzistuojančių normų ir galimybių ribų, taip pasirinkti sau tikslus ir jų siekiant taip panaudoti esamus resursus, kad būtų gautas geriausias (iš visų galimų) rezultatas**. Jei situacija, kurioje tenka spręsti šią problemą, sudėtinga bei sunkiai apžvelgiama, tai į pagalbą sveikam protui ir intuicijai, kurių vienu tokiomis atvejais jau nebepakanka, tikslinga pasitelkti matematikos aparatą bei kompiuterinę techniką ir kurti tos **situacijos matematinį optimizacinį modelį** bei **optimalaus sprendinio paieškos algoritmą**, nagrinėti ir vertinti galimų sprendinių savybes: jų **efektyvumą**, jų **jautrumą aplinkos pokyčiams**, jų **stabilumo zonas**.

1.15.2. Optimizaciniai modeliai. Optimizavimo algoritmai. Optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizė

1.15.2.1. Pagrindinės sąvokos

Optimizaciniai modeliai skiriasi nuo mūsų iki šiol nagrinėtų sisteminių deskriptinių modelių: **sisteminiai deskriptiniai modeliai vaizduoja objektus ir iš jų sudarytas sistemas, atspindėdami tuos dėsningumus, kurie tuose objektuose ir sistemose pasireiškia, o optimizaciniai modeliai vaizduoja sprendžiančių problemą subjektų tikslus ir tuos tų subjektų galimybių apribojimus, su kuriais tenka skaitytis, tų tikslų siekiant**. Optimizacinių modelių sudarymui naudojama pagrindinė metodologija yra **teleologinė metodologija**, o sisteminių – **terminalinė metodologija**. Apie tas jau ne kartą minėtas metodologijas ir jų principus bus detalai kalbama antroje šios mokymo priemonės dalyje, o čia apsiribosiu tik priminiu, kad terminalinė metodologija remiasi egzistuojančiais objektyviais dėsniais, iš kurių išplaukia aktyviųjų elementų ir jų sudarytų sistemų – organizacijų – veiklos galimybės ir apribojimai, o teleologinė metodologija remiasi aktyviųjų elementų ir organizacijų tikslais. Nagrinėjant pasyviųjų elementų ir iš jų sudarytų sistemų funkcionavimą, pakanka terminalinės metodologijos, tačiau norint suprasti, kaip elgiasi ar elgsis aktyvūs elementai bei kaip funkcionuoja ar funkcionuos organizacijos, terminalinę metodologiją būtina papildyti teleologine metodologija.

Įvesime keletą sąvokų, kurios reikalingos optimizacinio modelio sudėties ir optimizavimo problemos sprendimo algoritmo aprašymui.

1. Problemine sistema (problemine situacija) S vadinsime tą sistemą (tą sistemoje S susidariusią situaciją), kurioje iškyla sprendina problema (pavyzdžiui, sistemos S tobulinimo problema). Problemėnė situacija susidaro tada, kada atsiranda

naujos galimybės ar sistemoje S pastebimi trūkumai, kurių pašalinimas pagerintų sistemos S funkcionavimą.

2. **Sprendžiančiąja sistema R** vadinsime tą sistemą, kurią mes sudarome problemos sprendimui, t. y. tą sistemą, kuri turi taip paveikti sistemą S bei jos aplinką, kad sprendžiamoji problema taptų išspręsta. Sistemos R tikslas – **ne tik problemos sprendimų radimas, bet ir jų realizavimas praktikoje**. Todėl sistemą R turi sudaryti ne tik matematikai, personaliniai kompiuteriai bei ESM su aptarnaujančiu personalu ir kiti moksliniai bei techniniai darbuotojai, bet ir sistemos S veikloje dalyvaujantieji bei tai veiklai vadovaujantieji subjektai. Tai reiškia, kad sistema R – kompleksinė sistema, į kurios sudėtį gali įeiti įvairių sričių specialistai ir įvairios techninės priemonės, ESM programų paketai ir t. t. Sistemos R pavyzdžiu galėtų būti sistema, sudaroma operacijų tyrimo problemoms spręsti (žiūr. [128], kur galima rasti ne tik sistemų S ir R, bet ir **probleminės situacijos bei jos sprendimo stadijų aprašymus**).

3. Sistemos S **funkcionavimo efektyvumo rodikliais** vadinsime tokias sistemos S kiekybines charakteristikas, kurios tiesioginiu ar netiesioginiu būdu atspindi sistemos S tikslus bei jos veiklos efektyvumą siekiant tų tikslų. **Efektyvumo rodiklių pavyzdžiai:** bendras įmonės pelnas; jos rentabilumas; išlaidos, kurias tenka padaryti, siekiant užsibrėžtų tikslų; kapitalo investavimo rentabilumo koeficientas; projektuojamos mašinos naudingo veikimo koeficientas; staklių prastovų laikas, vykdant gamybinius procesus: benzino kiekis, kurį suvartoja tos ar kitos markės automobilio variklis 100 km. kelio ir pan.

4. **Optimizuojamu efektyvumo rodikliu (trumpiau, optimalumo rodikliu)** vadinsime tą sistemos S funkcionavimo efektyvumo rodiklį, kurį mes, sprenddami optimizavimo problemą, pasirenkame kaip pagrindinį ir stengiamės didinti (ar mažinti), kad jis pasiektų optimalią savo reikšmę, nustatoma, pasirenkant **optimizavimo kriterijų** (pavyzdžiui, bendro įmonės pelno bei jos rentabilumo maksimumą, išlaidų minimumą, kapitalo investavimo bei projektuojamos mašinos naudingo veikimo koeficientų maksimumus, prastovų laiko minimumą ir pan.). **Optimalumo kriterijaus ir optimalumo rodiklio sąvokos yra gana artimos, tačiau nesutampa:** optimalumo rodiklis, tai tas efektyvumo rodiklis, kurį mes optimizuojame (maksimizuojame, minimizuojame, normalizuojame), o optimalumo kriterijus, tai tas optimalumo rodiklio reikšmės požymis, kuris parodo, kada besikeičianti optimalumo rodiklio reikšmė tampa optimalia, tai sąlyga, kurią ta reikšmė turi tenkinti, tai taisyklė, kuria vadovaudamiesi mes sprendžiame apie sprendinio optimalumą ar neoptimalumą.

Gana dažnai optimalumo rodikliai sudaromi ne išsirenkant kurį nors vieną iš elementarių efektyvumo rodiklių sąrašo, o **konstruojant iš elementarių efektyvumo rodiklių kompleksinį**, į kurį elementarūs efektyvumo rodikliai gali įeiti su tam tikrais svoriais. **Daugiakriterijiniuose optimizavimo uždaviniuose** jų sprendiniai parenkami vadovaujantis jau ne vienu optimalumo rodikliu ir tą rodiklį atitinkančiu vienu optimalumo kriterijumi, o keliais optimalumo rodikliais, sudarančiais sprendinio efektyvumą charakterizuojantį vektorių. Šiame skyriuje mes nagrinėsime tik vienkriterijinio optimizavimo uždavinius. Apie daugiakriterijinį optimizavimą bus kalbama 1.16. skyriaus 1.16.2.6. skyrelyje.

5. **Valdomaisiais kintamaisiais** $\bar{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ vadinsime tokius sistemos S būseną, įėjimus bei išėjimus, jos sudėtį ir struktūrą charakterizuojančius kintamuosius x_j , nuo kurių priklauso optimalumo rodiklio reikšmė ir kurių reikšmės sistemoje S ir jos aplinkoje gali valdyti (t. y., keisti norimą linkmę) **sistemos S subjektai** (pavyzdžiui, sistemos S vadovai ar savininkai) bei kiti tos sistemos darbuotojai. **Valdomaisiais kintamaisiais gali būti valdomų sistemos S įėjimų vektoriaus** $\bar{X}$ (žiūr. 1.2. skyrelį) **koordinatės, sistemos S sudėtis** (jos

elementų skaičius, tų elementų deskriptinių makromodelių valdomos charakteristikos), **sistemos S struktūra** (sistemos elementų tarpusavio ryšiai ir jų ryšiai su sistemos S aplinka, elementų normatyvinių makromodelių valdomos charakteristikos).

6. **Nevaldomais parametrais** $\vec{\omega}=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_p, ..., \omega_r)$ vadinsime **tokius išorinius ir vidinius sistemos S bei jos aplinkos parametrus** ω_p , **nuo kurių priklauso optimalumo rodiklio reikšmė, tačiau kurių reikšmių sistemos S ir R, sprendžiamą nagrinėjamą optimizavimo problemą, valdyti negali.** Nevaldomųjų parametrų reikšmės optimizavimo problemos sprendimo metu gali likti pastovios, tačiau gali ir keistis nepriklausomai nuo sistemų S ir R, netgi gali būti nežinomos (ar nepilnai žinomos) toms sistemoms. Nevaldomieji kintamieji skiriasi nuo valdomųjų kintamųjų tuo, kad valdomųjų kintamųjų reikšmės gali būti **planuojamos**, o nevaldomųjų – tik **prognozuojamos bei matuojamos**. Sistemos R darbuotojai, sprenddami optimizavimo uždavinį, neturėtų apsiriboti tik optimalaus sprendinio, atitinkančio esamas ar prognozuojamas nevaldomųjų kintamųjų reikšmes, radimu, bet privalėtų nagrinėti ir klausimą, kaip keistųsi problemos optimalus sprendinys, keičiantis nevaldomųjų kintamųjų vektoriaus $\vec{\omega}$ koordinatėms. Tokį nagrinėjamą vadinsime **optimalaus sprendinio stabilumo ir jo jautrumo nevaldomųjų parametrų pokyčiams analize**.

7. **Sprendžiamos problemos tikslo funkcija** vadinsime **optimalumo rodiklio priklausomybės nuo sistemos S valdomųjų kintamųjų ir nevaldomųjų parametrų matematinę išraišką** $y=F(\vec{x},\vec{\omega})$, kur y – optimalumo rodiklis, $\vec{x}$ – valdomųjų kintamųjų vektorius, sudarytas iš koordinačių, vaizduojančių valdomuosius kintamuosius, $\vec{\omega}$ – nevaldomųjų parametrų (kintamųjų ir konstantų) vektorius, sudarytas iš koordinačių, vaizduojančių nevaldomus kintamuosius ir konstantas, F – matematinė y priklausomybės nuo $\vec{x}$ ir $\vec{\omega}$ išraiška.

8. **Optimizavimo uždavinio apribojimais** vadinsime tas sąlygas, kurias turi tenkinti valdomųjų kintamųjų $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m)$ reikšmės, t. y., **tuos predikatus (lygybes bei nelygybes)**, kurie matematiškai aprašo valdomųjų kintamųjų x_j vektoriaus $\vec{x}$ kitimo erdvės dalį, atitinkančią leistinas, sprendžiant duotąją optimizavimo problemą, vektoriaus $\vec{x}$ koordinačių x_j reikšmes. Minėtąją vektoriaus $\vec{x}$ leistino kitimo erdvės dalį vadinsime **leistinų sprendimų sritimi (LSS)**, o kiekvieną vektoriaus $\vec{x}$ reikšmę, tenkinančią apribojimus, t. y. priklausančią LSS, vadinsime **leistinu problemos sprendiniu (LPS)**.

Optimizavimo uždavinio **apribojimai atsiranda dėl kokių nors resursų bei galimybių stokos**: ne visuomet mes, sprendžiamieji problemą, galime panaudoti, kiek norėtume, laiko, lėšų, įrengimų, žaliavų ir kitų resursų, ne viską mes žinome, suprantame, mokame, galime, ne viskas yra leistina įstatymais, riboja mus ir moralės normos, įpročiai, tradicijos ir t. t.

9. **Optimaliu problemos sprendiniu (OPS)** $\vec{x}^{(opt)}=(x_1^{(opt)}, x_2^{(opt)}, ..., x_j^{(opt)}, ..., x_m^{(opt)})$, atitinkančiu žinomas ar spėjamas (prognozuojamas) nevaldomųjų parametrų $\vec{\omega}^*=(\omega_1^*, \omega_2^*, ..., \omega_p^*, ..., \omega_r^*)$ reikšmes, vadinsime tokį LPS $\vec{x}^{(opt)}$, kuris optimizuoja tikslo funkcijos $y=F(\vec{x},\vec{\omega}) \rightarrow \underset{\vec{x}}{opt}$ reikšmę, t. y., tokias valdomųjų kintamųjų vektoriaus $\vec{x}$ koordinačių reikšmes $x_1^{(opt)}, x_2^{(opt)}, ..., x_j^{(opt)}, ..., x_m^{(opt)}$, kurios tenkina apribojimus ir kartu su nevaldomųjų parametrų reikšmėmis $\omega_1^*, \omega_2^*, ..., \omega_p^*, ..., \omega_r^*$ suteikia tikslo funkcijai reikšmę $y^{(opt)}=F(\vec{x}^{(opt)}, \vec{\omega}^*)$, tenkinančią optimalumo kriterijaus reikalavimus. Pavyzdžiui, jei optimalumo kriterijus reikalauja, kad optimalumo rodiklis pasiektų

maksimumą, tai optimaliu problemos sprendiniu $\bar{x}^{(opt)}$ vadinsime tokį LPS, kuris, esant sąlygoms $\bar{\omega} = \bar{\omega}^*$, tenkina reikalavimą $\forall \bar{x} \in \text{LSS} \left[F(\bar{x}^{(opt)}, \bar{\omega}^*) \geq F(\bar{x}, \bar{\omega}^*) \right] = 1$, kur $\bar{x} \in \text{LSS}$ – bet koks leistinas problemos sprendinys (LPS). Neretai, sprendžiant sistemos S funkcionavimo optimizavimo problemą, nepakanka rasti sprendinį $\bar{x}$, optimalų tik viename konkrečiame nevaldomųjų kintamųjų galimo kitimo erdvės taške $\bar{\omega}^*$, bet reikia surasti tokią **vektorinę funkciją $\bar{x}^*(\bar{\omega})$, kuri vaizduotų optimalius sprendinius $\bar{x}^{(opt)}(\bar{\omega})$ taškuose $\bar{\omega}$, priklausančiuose taško $\bar{\omega}^*$ aplinkai, ar net kiekviename nevaldomųjų kintamųjų galimo kitimo erdvės taške $\bar{\omega}$, t. y. vaizduotų, kaip reikėtų keisti valdomųjų kintamųjų vektorių $\bar{x}$, keičiantis nevaldomųjų kintamųjų vektoriui $\bar{\omega}$, kad tikslo funkcijos $F(\bar{x}, \bar{\omega})$ reikšmė kiekvienu atveju būtų (išliktų) optimali.**

10. **Sudaryti optimizacinį modelį** reiškia:

1) atitinkamai pasirinkus optimalumo rodiklį bei optimalumo kriterijų ir nustačius, nuo kokių valdomų bei nevaldomų kintamųjų ir kaip gali priklausyti optimalumo rodiklio reikšmė, **sudaryti optimizacinio modelio tikslo funkciją;**

2) nustačius, kokiose ribose gali būti keičiamos valdomųjų kintamųjų reikšmės bei kaip galėtų keistis nevaldomųjų kintamųjų reikšmės, **matematiškai išreikšti tuos apribojimus, kuriuos privalo tenkinti optimizacinio modelio kintamieji** ir, išsprendus tuos apribojimus vaizduojančią lygybių bei nelygybių sistemą, **nustatyti leistinų sprendinių sritį (LSS).**

11. **„Išspręsti sistemos (situacijos) S optimizavimo matematinį uždavinį“** – reiškia, pasirinkus ar sudarius atitinkamus algoritmus, rasti **optimalią leistiną vektorių $\bar{x}$ reikšmę $\bar{x}^{(opt)}$ ir ištirti to sprendinio jautrumą optimizacinio modelio nevaldomųjų kintamųjų pokyčiams**, t. y. nustatyti optimalias valdomųjų kintamųjų x_j reikšmes $x_j^{(opt)}$ bei jų **stabilumo zonas** nevaldomųjų modelio kintamųjų pokyčių atžvilgiu. Gana **dažnai optimaliu uždavinio sprendiniu laikomos ne tik optimalios valdomųjų kintamųjų reikšmės $x_j^{(opt)}$, bet dar ir optimali tikslo funkcijos reikšmė $y^{(opt)} = F(\bar{x}^{(opt)}, \bar{\omega}^*)$** , todėl į sąvokos „išspręsti matematinį optimizavimo uždavinį“ turinį gali įeiti ne tik vektorių $\bar{x}^{(opt)} = \text{opt}(\bar{x} / \bar{x} \in \text{LSS})$ koordinačių reikšmių $x_j^{(opt)}$ ir jų jautrumo nevaldomųjų kintamųjų pokyčiams nustatymas, bet ir skaliaro $y^{(opt)} = F(\bar{x}^{(opt)}, \bar{\omega}^*) = \underset{\bar{x} \in \text{LSS}}{\text{opt}} [F(\bar{x}, \bar{\omega}^*)]$ reikšmės ir jos jautrumo apskaičiavimas. Neretai optimizavimo uždavinio sprendimas suprantamas dar plačiau: ne tik kaip optimalios vektorių $\bar{x}$ reikšmės taške $\bar{\omega} = \bar{\omega}^*$, bet ir kaip optimalios funkcijos $\bar{x}^{(opt)}(\bar{\omega})$ paieška.

12. Sąvoka **„išspręsti sistemos S optimizavimo problemą“**, kitaip tariant, **„optimizuoti sistemą S“** reiškia:

1) „išspręsti matematinį optimizavimo uždavinį“,

2) „pasiekti, kad realioje sistemoje S atitinkami valdomieji kintamieji x_j ir tikslo funkcija $y = F(\bar{x}, \bar{\omega}^*)$ įgytų optimalias (ar pakankamai artimas joms) reikšmes“.

Neretai surasto optimalaus sprendinio realizavimui skiriamas nepakankamas dėmesys, ir priimti geri sprendiniai taip ir lieka nerealizuoti. Ši klaida yra analogiška tai klaidai, kurią dažnai daro parlamentariai, neskirdami pakankamai dėmesio priimtų įstatymų įgyvendinimui. Neretai priimtų įstatymų išaiškinimui tiems žmonėms, kuriems teks tuos įstatymus vykdyti, neskiriama reikiamo dėmesio, o po to aimanuojama, kad žmonės tų įstatymų nevykdo. O juk tam, kad įstatymas būtų

vykdomas, būtina, kad žmonės jį žinotų ir suprastų jo reikalingumą. **Sprendinio realizavimas – ne mažiau svarbi problemos sprendimo dalis kaip sprendinio radimas, todėl sprendinio realizavimui būtina skirti net daugiau pastangų negu sprendinio radimui.**

13. Kartais (pavyzdžiui, knygoje [18]) optimizavimo uždavinys suprantamas šiek tiek siauriau: **optimizavimo uždaviniu vadinama OPS paieška tik tuo atveju, kai tikslo funkcijos y reikšmė nepriklauso nuo nevaldomų parametrų $\vec{\omega}$ kitimo arba kai tų parametrų reikšmės $\vec{\omega} = \vec{\omega}^*$ optimizavimo uždavinio sprendimo metu yra žinomos ir gali būti laikomos apibrėžtomis.** Tais atvejais, kai nevaldomų parametrų $\vec{\omega}$ reikšmės, nuo kurių priklauso tikslo funkcijos reikšmė, gali keistis ir nėra mums tiksliai žinomos, tokį modelio valdomųjų kintamųjų reikšmių nustatymo uždavinį knygos [18] autoriai vadina ne optimizavimo, o **patenkinamo sprendinio paieškos uždaviniu.** Patenkinamu sprendiniu knygoje [18] vadinamas toks leistinas sprendinys $\vec{x} \in LSS$, kuris tenkina **patenkinamumo kriterijaus** reikalavimą. Pavyzdžiui, kai tikslo funkcija $y = F(\vec{x}, \vec{\omega})$ minimizuojama, o nevaldomųjų parametrų vektoriaus $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p, \dots, \omega_r)$ koordinačių reikšmės gali keistis nepriklausomai nuo sistemų S ir R , neišeidamos už r -matės erdvės tam tikros dalies, kurią vadinsime **galimo kitimo sritimi (GKS)**, ribų, tai patenkinamas sprendinys $\vec{x}^{(pat)}$ turi tenkinti reikalavimą $\forall \vec{x} \in LSS, \forall \vec{\omega} \in GKS \left[F(\vec{x}^{(pat)}, \vec{\omega}) \leq F(\vec{x}, \vec{\omega}^*) \right] = 1$, kur $\vec{\omega}^*$ – nevaldomųjų parametrų vektoriaus $\vec{\omega}$ koordinačių prognozuojamųjų reikšmių bet kuris vektorius, priklausantis GKS.

14. Dažnai **patenkinamo sprendinio paieškos uždavinys** formuluojamas kaip paieška tokio sprendinio, kuris nebūtinai būtų optimalus kiekvienu konkrečiu atveju, charakterizuojamu konkrečia nepilnai apibrėžto (pavyzdžiui, stochastinio) vektoriaus $\vec{\omega}$ reikšme, bet būtų **optimalus vidutiniškai**, t. y., kad optimalumo kriterijaus reikalavimą tenkintų **tikslo funkcijos $y = F(\vec{x}, \vec{\omega})$ matematinis vidurkis** $M_{\vec{\omega} \in GKS} [F(\vec{x}^{(pat)}, \vec{\omega})] = F(\vec{x}^{(pat)}, \vec{\omega}^*)$. Kai tikslo funkcija minimizuojama, tai **optimalumo vidutiniškai kriterijų** matematiškai galima užrašyti taip:

$$\forall \vec{x} \in LSS \left\{ M_{\vec{\omega} \in GKS} [F(\vec{x}^{(opt. vid.)}, \vec{\omega})] \leq M_{\vec{\omega} \in GKS} [F(\vec{x}, \vec{\omega})] \right\} = 1.$$

Čia $M_{\vec{\omega} \in GKS}$ yra matematinio vidurkio („matematinės vilties“) apskaičiavimo operatorius, apskaičiuojantis optimizavimo uždavinio tikslo funkcijos $F(\vec{x}, \vec{\omega})$ reikšmių taškuose $(\vec{x}, \vec{\omega})$ vidurkį, kai vektoriaus $\vec{x}$ koordinatės turi kokias nors fiksuotas reikšmes, pretenduojančias vadintis vektoriaus $\vec{x}^{(pat)}$ reikšmėmis, o vektorius $\vec{\omega}$ įgyja visas galimas reikšmes, priklausančias GKS.

Tokie optimizavimo uždaviniai priklauso **stochastinio optimizavimo uždavinių klasei** ir neretai vadinami **stochastinio programavimo uždaviniais**.

15. Kai optimizuojama sistemos S , kurios modelis laikui bėgant kinta, **funkcionavimo trajektorija**, tai iškyla ne tik **statinio (t. y. momentinio)**, bet ir **dinaminio optimizavimo** uždavinys, kuris sprendžiamas **dinaminio programavimo** metodais (pavyzdžiui, naudojantis **Belmano algoritmu**, su kuriuo susipažinsime operacijų tyrimo kurse). Dinaminio programavimo algoritmai leidžia surasti tokią dinaminės sistemos funkcionavimo trajektoriją, kuri, galbūt, nebūdama būtinai **optimali lokaliai** (t. y., kiekviename atskirame sistemos funkcionavimo takte, kiekviename trajektorijos fragmente), būtų **optimali globaliai** (t. y., pilnoje trajektorijoje, arba pilnoje, t. y. laikomoje užbaigta, tos trajektorijos atkarpoje, atitinkančioje visą mus dominančią sistemos funkcionavimo kalendoriaus atkarpą T nuo dabartinio momento t_0 iki užsibrėžto globalaus tikslo pasiekimo momento t_{pb}).

16. Įsivedę aukščiau išvardintas **optimizavimo problemą ir jos sprendimo procesą bei patį sprendinį charakterizuojančias sąvokas**, mes dabar jau galime tiksliau ir detaliau suformuluoti optimizavimo uždavinio matematinio modelio apibrėžimą bei išvardinti optimizacinio modelio sudarymo etapus.

Optimizavimo uždavinio matematinį modelį sudaro to uždavinio tikslo funkcija ir valdomųjų kintamųjų apribojimai – lygybių ir nelygybių sistema, apibrėžianti LSS.

Optimizacinio modelio sudarymo procesas sąlyginai gali būti skaidomas į tokius etapus:

1) **probleminės situacijos sisteminė analizė**, t. y., iškilusių problemų ir jų sprendimo galimų būdų išsiaiškinimas bei galimų pasekmių prognozavimas ir apriorinis vertinimas;

2) **problemų sprendimo optimalumo rodiklio ir optimalumo kriterijaus pasirinkimas ar sukonstravimas** iš kelių efektyvumo rodiklių;

3) **faktorių, nuo kurių reikšmingai priklauso ar gali priklausyti optimalumo rodiklio reikšmė, nustatymas** ir tų faktorių sąrašo sudarymas;

4) **išsiaiškinimas, kurie iš tų faktorių galėtų būti laikomi optimizacinio modelio valdomaisiais kintamaisiais**, nustatant, koku būdu SPA ar jo įgalioti kiti R sistemos subjektai galėtų paveikti minėtuosius faktorius ir tokiu būdu **reguluoti optimizacinio modelio valdomųjų kintamųjų reikšmes**;

5) **išsiaiškinimas, kaip būtų galima išmatuoti bei prognozuoti** likusių trečiajame etape sudaryto sąrašo faktorių – **nevaldomųjų optimizacinio modelio kintamųjų – poveikį optimalumo rodiklio reikšmei**;

6) **optimizacinio modelio hipotetinės tikslo funkcijos sudarymas, jos patikrinimas ir tobulinimas**, naudojantis turima bei specialiai renkama informacija;

7) **apribojimų, kuriuos privalėtų tenkinti valdomieji tikslo funkcijos argumentai, išsiaiškinimas**, jų matematinis aprašymas atitinkamomis nelygybėmis bei lygybėmis;

8) **optimizacinio modelio kalibravimas ir identifikavimas**, t. y., nevaldomųjų to modelio parametrų (tikslo funkcijos bei apribojimų koeficientų bei laipsnių rodiklių) prognostinių reikšmių nustatymas ir suderinimas;

9) **sudaryto optimizacinio modelio verifikavimas**, t. y., modelio adekvatumo probleminei situacijai galutinis patikrinimas.

17. **Optimizacinio modelio sudarymas yra tik pirmoji optimizavimo uždavinio sprendimo dalis**, nes, sudarius optimizacinį modelį, reikia dar **surasti ar sukonstruoti optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmą**, parodantį, **kaip apskaičiuoti optimalias valdomųjų kintamųjų reikšmes**, t. y., tokias vektoriaus $\bar{x}$ koordinačių reikšmes, kurios, priklausydamos LSS, optimizuotų tikslo funkcijos reikšmę.

Optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo radimas ar sukonstravimas yra **antroji optimizavimo uždavinio sprendimo dalis**.

18. **Trečioji optimizavimo uždavinio sprendimo dalis yra optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo programinis ir kompiuterinis realizavimas**, t. y., konkretaus optimizavimo uždavinio konkretaus sprendinio apskaičiavimas, naudojantis optimizaciniu modeliu, optimizavimo algoritmo programa ir tą programą vykdančiui kompiuteriui.

Kai sprendžiamas tipinis optimizavimo uždavinys, tai antroji ir trečioji optimizavimo uždavinio sprendimo dalys yra sujungiamos, nes tokiu atveju optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo ieškoti ir sudarinėti to algoritmo kompiuterinę programą jau nebereikia: galima pasinaudoti jau egzistuojančiais

tipiniais algoritmais ir tipinėmis programomis ir, turint optimizavimo uždavinio matematinį modelį, iškart pasinaudoti kompiuteriu ir surasti optimizavimo uždavinio sprendinį.

19. Surastas optimizavimo uždavinio matematinis sprendinys praktinę problemą sprendžiančiai sistemai R ir sprendimą priimančiam asmeniui (SPA) dažniausiai yra dar tik **orientacinė priemonė**, nes tik gana retais atvejais konkreti reali situacija, kurioje SPA turi priimti valdymo sprendimus ir pradėti juos realizuoti, tuo metu, kai kompiuteris pateikia optimizavimo uždavinio matematinį sprendinį, būna pakankamai adekvati tam optimizaciniam modeliui, kuriuo buvo naudojamas, sprendžiant matematinį optimizavimo uždavinį kompiuteriu.

Todėl SPA dažniausiai nepakanka tik optimumo taško koordinačių reikšmių ir tikslo funkcijos reikšmės tame taške žinojimo. Jam labai svarbu žinoti dar ir tai, ar surastas optimalus sprendinys yra pakankamai stabilus, kad būtų tikslinga jį diegti praktikoje, t. y. juo vadovautis, keičiant valdomųjų kintamųjų reikšmes, o jei jo stabilumas nėra pakankamas, SPA svarbu žinoti dar ir tai, **koks optimalaus sprendinio jautrumas**, t. y., **kaip keičiasi optimumo taško koordinačių reikšmės ir tikslo funkcijos optimali reikšmė, keičiantis optimizacinio modelio parametrų reikšmėms**.

Todėl, sprendžiant praktinį optimizavimo uždavinį – operacijų tyrimo uždavinį, reikalingas dar ir ketvirtasis to uždavinio sprendimo etapas – optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizė.

Tik naudodamasis tokios analizės rezultatais, SPA tampa pajėgus priiminėti pakankamai gerus valdymo sprendimus, sudarant valdomųjų kintamųjų reikšmių keitimo planą, optimaliai atitinkantį realią probleminę situaciją, ir realizuojant tą planą praktikoje. Tai leidžia išvengti dabar dažnai pasitaikančio akibrokšto, kada matematinio optimizavimo uždavinio sprendinys, bandant jį realizuoti praktikoje, pasirodo esąs jau ne tik nebe optimalus, bet ir net blogesnis už tą sprendinį, kurį būtume priėmę, vadovaudamiesi tik sveiku protu ir intuicija, netaikydami jokių matematinių metodų ir kompiuterinės technikos.

Šis – ketvirtasis – optimizavimo uždavinių sprendimo etapas dabar dar gana dažnai yra iš viso neatliekamas arba atliekamas nepakankamai kokybiškai, ir tai yra viena pagrindinių priežasčių, dėl kurių matematinių optimizavimo metodų taikymas ekonomikoje gana dažnai neduoda to efekto, kurį galėtų ir privalėtų duoti. Apie kitas galimas matematinių optimizavimo metodų taikymo nepakankamo efektyvumo priežastis galima sužinoti šių eilučių autoriaus knygelėje [128].

Reikia pažymėti, kad optimizavimo uždavinių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizei šiuo metu dar neskiriama pakankamai dėmesio ir optimizavimo metodams bei jų taikymams skirtoje literatūroje. Todėl šiame mokymo priemonės skyriuje tokiai analizei skiriama gana daug puslapių. Juose pateikta gana daug tokios analizės pavyzdžių, iliustruojančių šios analizės grafinių ir analizinių metodų taikymą. Rimtas tų pavyzdžių išnagrinėjimas ir bandymai savarankiškai pakartoti mokymo priemonėje atliktus skaičiavimus tikrai galėtų padėti skaitytojui įsigyti naudingų žinių ir įgūdžių, geriau suvokti optimalių sprendinių jautrumo ir stabilumo analizės metodų esmę.

20. Atlikus surasto optimalaus sprendinio jautrumo ir stabilumo analizę, galima, naudojantis tos analizės rezultatais bei tos analizės metu įgytu gilesniu probleminės situacijos supratimu, **pakankamai racionaliai ir pakankamai patikimai suplanuoti optimalaus sprendinio realizavimo praktikoje procesą ir po to, vadovaujantis tuo planu bei realios situacijos ir optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų žinojimu, praveisti tą sudėtingą ir nuo daugelio aplinkybių**

priklausantį procesą taip, kad būtų gautas toks efektas, kuris būtų pakankamai artimas efektui, apskaičiuotam sprendžiant optimizavimo uždavinį.

Sudėtingų procesų valdymas, leidžiantis pasiekti, kad geri sprendimai ir geri projektai neliktų tik „popieriuje“, o būtų įgyvendinti ir duotų planotąją naudą, yra ne tik sudėtingas mokslas, bet ir sudėtingas menas. Su to mokslo ir meno pagrindais skaitytojas galės susipažinti antroje šios mokymo priemonės dalyje, taip pat šių eilučių autoriaus skaitomame specialiaame kurse „Valdymas ir vadyba“. Kol šios mokymo priemonės antrosios dalies ir speckurso „Valdymas ir vadyba“ mokymo priemonės tekstai dar neįvesti į šių eilučių autoriaus tinklalapį internete ir neatspausdinti, skaitytojams rekomenduočiau pasinaudoti šių eilučių autoriaus paruoštomis ir atspausdintomis metodinėmis priemonėmis [16, 15]. Jų tekstus taip pat galima rasti ir internete adresu <http://www.mif.vu.lt/~sukys>.

21. Optimizacinis modelis, kaip jau minėjome, nesutampa su probleminės sistemos S sisteminiu modeliu, nors ir turi ryšių su juo.

Šie ryšiai iš vienos pusės, pasireiškia tuo, kad optimizavimo uždavinys sprendžia problemą, iškilusią sistemoje S ir reikalaujančią tos sistemos tobulinimo, naujo – tobulesnio – tos sistemos normatyvinio modelio sukūrimo. Šiuo aspektu žiūrint, **optimizavimo uždavinys ir optimizacinis modelis yra normatyvinio sisteminio modelio (išorinio ar vidinio) kūrimo instrumentai.**

Iš kitos pusės, sprendžiančioji sistema R, sprendama optimizavimo uždavinį matematinėmis priemonėmis, gali naudotis (ir dažniausiai naudojasi) sistemos S informaciniais ir matematiniais modeliais (žiūr. 1 pav. šios mokymo priemonės „Ivade“) ir tik ypatingais atvejais eksperimentuoja su pačia sistema S, o ne su jos sisteminiiais modeliais. Šiuo aspektu žiūrint, **sisteminiai modeliai yra optimizavimo uždavinio sprendimo pagalbiniai instrumentai.** Tai reiškia, kad sistemos S **sisteminiai modeliai gali tapti sistemos R dalimi, jos elementais**, o iš to išplaukia, kad **sisteminių modelių sudarymas ir panaudojimas gali tapti optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmo dalimi.** Dar daugiau: **negalima sudaryti sistemos S optimizavimo uždavinio modelio, neatsižvelgus į jos deskriptinį sisteminį modelį**, nes, pavyzdžiui, valdomųjų kintamųjų koordinačių x_j apribojimai negali būti surasti kitaip, kaip nagrinėjant realią sistemą S ir jos aplinką, t. y., sudarant tos sistemos ir jos elementų deskriptinius (vidinį ir išorinius) modelius. Sistemos ir jos elementų deskriptiniai modeliai gali būti naudingi ir sudarant tikslo funkciją, t. y. nustatant optimizuojamojo rodiklio y priklausomybę nuo valdomųjų kintamųjų ir kitų sistemos S ir jos aplinkos parametrų.

22. Privalu atkreipti skaitytojo dėmesį ir į santykius tarp sistemų S ir R bei į tų santykių dialektiką tuo atveju, kai sistema S yra sudėtinga organizacija.

Iš vienos pusės, sistema R, sprendama sistemoje S iškilusią problemą (ypač, diegdama surastą problemos sprendinį, o neretai ir ieškodama to sprendinio) negali išsiversti be sistemos S aktyviųjų elementų pagalbos. Kartais sistemai R, sprendžiant sistemoje S iškilusią problemą, tenka net eksperimentuoti su sistema S. O tai reiškia, kad **sistema S gali įeiti į sistemą R kaip jos dalis.**

Iš kitos pusės, jei mes sudarome sistemą R kaip pastoviai veikiantį organizacijos S tobulinimo instrumentą (mechanizmą) ir įjungiamo jį į organizacijos S sudėtį, tai mes **padarome sistemą R sistemos S dalimi.**

Sprendžiant praktinius sudėtingos organizacijos S tobulinimo uždavinius (pavyzdžiui, AVS projektavimo ir diegimo uždavinius), sistemos S ir R dažnai tampa taip tampriai susijusiomis ir persipynusiomis, kad kartais sunku net atskirti, kuriai iš šių sistemų priklauso tas ar kitas elementas. Pavyzdžiui, **organizacijos vadovavimo aparatas – tai sistemos S dalis. Tačiau šis aparatas turi užtikrinti ne tik stabilų**

sistemos S funkcionavimą, bet ir jos tikslingą evoliuciją, privalo tobulinti sistemą S, ją optimizuoti, ir todėl šis aparatas, priklausydamas sistemai S, priklauso ir sistemai R.*

1.15.2.2. Situaciniai, normatyviniai (pareigybiniai), motyvaciniai ir optimizaciniai modeliai

Galima rasti tam tikrą ryšį ne tik tarp sistemų S ir R, bet ir tarp optimizacinio modelio bei anksčiau jau minėtų motyvacinio, situacinio ir normatyvinio (pareigybinio) modelių sąvokų.

Jei SPA nori optimizuoti savo veiklą ir tuo tikslu sudaro tos veiklos optimizavimo uždavinio matematinį modelį, tai to **optimizacinio modelio tikslo funkciją** $y = F(\bar{x}, \bar{\omega})$ galima traktuoti kaip to SPA motyvacinio modelio **pagrindinę sudėtinę dalį**, išreiškiančią tą tikslą, kurį SPA nagrinėjamoje probleminėje situacijoje laiko svarbiausiu, ir jo priklausomybę nuo tų faktorių, kurie tam SPA šiuo metu yra pavaldūs, bei nuo tų jam nepavaldžių faktorių, į kuriuos jis privalo atsižvelgti.

Su SPA veiklos optimizavimo modeliu surištas ne tik motyvacinis, bet ir to SPA **normatyvinis (pareigybinis) modelis, o taip pat ir probleminės situacijos situacinis modelis**, nes iš pastarųjų modelių kaip tik ir išplaukia, kokie faktoriai yra pavaldūs tam SPA ir kokiose ribose jis juos gali keisti bei tai, į kokius jam nepavaldžius faktorius SPA privalo atsižvelgti.

Tai taip pat reiškia, jog, **žinant SPA motyvacinį ir normatyvinį modelius bei nagrinėjamos probleminės situacijos deskriptinį modelį, galima sudaryti to SPA veiklos optimizacinį modelį**: nustatyti optimalumo rodiklį ir kriterijų, nuspręsti, kokie faktoriai yra pavaldūs SPA ir gali būti laikomi optimizacinio modelio valdomaisiais kintamaisiais, nustatyti į kokius jam nepavaldžius faktorius SPA privalo atsižvelgti, rasti optimalumo rodiklio priklausomybę nuo valdomųjų bei nevaldomų kintamųjų ir sudaryti optimizavimo tikslo funkciją, nustatyti leistino tam SPA jo valdomų kintamųjų reikšmių keitimo ribas ir aprašyti jas predikatų (lygybių ir nelygybių) sistema – apribojimais.

Sprendama optimizavimo uždavinį, sprendžiančioji sistema R gali naudotis ne tik optimizaciniu modeliu, bet ir deskriptiniu probleminės situacijos modeliu, o, išsprendus tą uždavinį, jo sprendimo rezultatus panaudoti nagrinėjamos sistemos S normatyvinio (sisteminio) modelio bei pačios sistemos S tobulinimui.

Tai reiškia, jog **optimizaciniai ir sisteminiai modeliai, skirdamiesi savo sudėtimi ir tuo, ką tie modeliai vaizduoja, gana dažnai naudojami kartu kaip sprendžiančiosios sistemos R (tame tarpe ir atskiro SPA) matematiniai įrankiai**, kadangi tie įrankiai tarp savęs gana tampa susiję ir vienas kitą papildo. **Sisteminiai ir optimizaciniai modeliai, priklausydami matematinių modelių klasei, sudaro pirmąją sistemos R matematinės įrangos dalį.** Antrąją šios įrangos dalį sudaro operavimo su tais modeliais algoritmai, tame tarpe ir optimalaus sprendimo paieškos bei to sprendinio stabilumo ir jautrumo analizės algoritmai. Su optimizaciniais modeliais optimalaus sprendinio paieškos metodais ir algoritmais, o taip pat su optimalaus sprendinio stabilumo ir jautrumo analizės metodais gana detalai susipažinsime šių eilučių autoriaus skaitomo speckurso dalyje, skirtoje **operacijų tyrimui (OT)**, bei specialioje autoriaus ruošiamoje OT kurso mokymo priemonėje. Čia

* Apie sistemų R ir S sąveikavimą bus kalbama ir šio – 1.15. – skyriaus pabaigoje – 1.15.3. poskyryje. Detaliau apie sistemas S ir R galima pasiskaityti šių eilučių autoriaus parengtoje metodinėje priemonėje [16].

(sistemotyros kursui skirtoje mokymo priemonėje) apsiribosiu tik tuo, kas jau buvo pasakyta 1.15.2.1. ir šiame skyreliuose, bei konkrečiais pavyzdžiais, prie kurių ir pereisiu. Nagrinėdamas konkrečius pavyzdžius, ne tik pailustruosiu, kaip sudaromi optimizaciniai modeliai bei sprendžiami optimizavimo uždaviniai, bet ir, kaip jau minėjau, **skirsiu labai daug dėmesio optimalių sprendinių stabilumo bei jautrumo analizei**, tuo pačiu iliustruodamas, kaip vykdoma **sudėtingų situacijų ir sistemų sisteminė analizė**. Dar viena labai svarbi problemų sprendimo proceso dalis – **priimtų sprendinių realizavimas** – bus nagrinėjama šių eilučių autoriaus skaitomame speckurse „Vadyba ir valdymo sistemos“ bei tam kursui skirtoje mokymo priemonėje.

1.15.2.3. Optimizacinių modelių sudarymo, optimalaus sprendinio paieškos ir jo stabilumo bei jautrumo analizės pavyzdžiai

1.15.2.3.1 Paprasto optimizacinio modelio sudarymo pavyzdys

Tarkime, jog SPA yra nedidelės firmos, planuojančios gaminti m rūšių gaminius, vadovas ir kad $m=2$. Tarkime, kad tų gaminių, kurių rūšis žymėsime numeriais j , gamybai reikia n rūšių medžiagų, kurias žymėsime numeriais $i=1, 2, \dots, n$.

Tarkime, kad $n=4$. Realiose firmose skaičiai m ir n gali būti žymiai didesni, tačiau tai neturi principinės reikšmės, o tik didina skaičiavimų sudėtingumą ir apimtį (ko mes šioje mokymo priemonėje norėtume išvengti, o todėl ir pasirenkame tokias mažas m ir n reikšmes).

Pažymėsime medžiagų vieneto kainas vektoriaus $\vec{a}=(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$ koordinatėmis, o tų medžiagų išteklį (atsargas) firmoje – vektoriaus $\vec{b}=(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)$ koordinatėmis. Medžiagos i sunaudojimo technologinę normą vieno gaminio, priklausančio rūšiai j , pagaminimui pažymėsime b_{ij} , o vieno pagaminto gaminio j kainą rinkoje – skaičiumi c_j .

Tarkime, kad $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4)=(5;11;1;4)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4)=(19;13;15;18)$, gaminių kainų vektorius $\vec{c}=(c_1, c_2)=(61;41)$, o medžiagų panaudojimo technologinių normų matrica yra $\|b_{ij}\|$:

$$\|b_{ij}\| = \begin{pmatrix} i \backslash j & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad firmos išlaidų dalies darbo užmokesčiui, įrengimų eksploatacijai bei amortizacijai, transportui, administracinės sistemos išlaikymui ir t. t. gaminio j vieneto gamybai vektorius yra $\vec{d}=(d_1, d_2)=(10;7)$, kas žinoma, šiek tiek supaprastintai ir tik apytiksliai atvaizduoja realią situaciją, nes tikrovėje dydžiai d_j nėra konstantos, o gali priklausyti nuo gaminamų gaminių j kiekių x_j : didėjant x_j , dydžiai d_j privalėtų šiek tiek mažėti, nes turėtų mažėti lyginamosios (apskaičiuotos viename gaminių j vienetui) firmos valdymo bei gamybos aptarnavimo (apšvietimo, apšildymo, valymo ir pan.) ir kitos **netiesioginės išlaidos**, kurios kartu su jau minėtomis **tiesioginėmis išlaidomis** ir sudaro dydžius d_j .

Tarkime, kad SPA turi nuspręsti, kiek kurio tipo gaminių būtų galima ir būtų tikslinga pagaminti.

Jei pagrindiniu firmos veiklos efektyvumo rodikliu SPA pasirinktų bendrą firmos pelną P , tai optimalumo kriterijum būtų to pelno maksimumas.* Valdomaisiais kintamaisiais būtų planuojamieji pagaminti gaminių j vienetų kiekiai x_j . Suradę gaminių vienetų savikainas $s_j = d_j + \sum_{i=1}^n b_{ij}a_i$ bei lyginamuosius pelnus $p_j = c_j - s_j$, galime sudaryti optimizavimo tikslo funkciją $P = F(\vec{x}, \vec{\omega}) =$

* Rekomenduoju skaitytojui pabandyti sudaryti tikslo funkcijos reikšmės apskaičiavimo formulę tuo atveju, kai optimalumo rodikliu pasirenkamas kitas įmonės veiklos efektyvumo rodiklis (pavyzdžiui, gamybos rentabilumo rodiklis) ir išspręsti tokį optimizavimo uždavinį. Kuo ir kodėl skirsis šių dviejų optimizavimo uždavinių sprendiniai?

$$= \sum_{j=1}^m p_j x_j = \sum_{j=1}^m \left[c_j - d_j - \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} \right] x_j \rightarrow \max_{x_j}, \text{ išreiškiančią SPA tikslą ir optimalumo rodiklio}$$

priklausomybę nuo valdomųjų kintamųjų bei kitų uždavinio parametrų, kuriuos mes, ieškodami optimalaus sprendinio, laikysime nevaldomais ir pastoviais.

Žinoma, keičiantis aplinkybėms, kai kurie iš tų parametrų gali pradėti keistis, o kai kurie iš jų net gali tapti valdomais (pavyzdžiui, SPA gali pradėti keisti atsargas b_i , pirkdamas bei parduodamas medžiagas i), tačiau pradžioje, sprenddami šį optimizavimo uždavinį, mes laikysime visus dydžius, išskyrus x_j ir P , nekintamais.

Vėliau, analizuodami surasto optimalaus sprendinio $\vec{x}^{(opt)}$ stabilumą ir jautrumą, mes nagrinėsime optimalaus sprendinio priklausomybę nuo optimizacinio modelio parametrų ir tuomet mes tuos parametrus keisime.

Valdomųjų kintamųjų leistino kitimo apribojimus rasime, atsižvelgdami į tai, kad pagamintų gaminių kiekiai x_j negali būti neigiami, ir į tai, kad tuos kiekius iš viršaus riboja turimi medžiagų i ištekliai b_i , kuriuos SPA staigiai pakeisti negali. Gausime apribojimus:

$$1) x_j \geq 0, \text{ kur } j=1, 2, \dots, m, \text{ ir } 2) \sum_{j=1}^m b_{ij} x_j \leq b_i, \text{ kur } i=1, 2, \dots, n.$$

Konkretizuodami šį modelį (įstatydami konkrečias modelio parametrų reikšmes), gausime:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0; \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 19; \\ 2x_1 + x_2 &\leq 13; \\ 3x_2 &\leq 15; \\ 3x_1 &\leq 18; \\ P = 7x_1 + 5x_2 &\rightarrow \max_{x_1, x_2}. \end{aligned}$$

Sudarytasis **optimizacinis modelis yra tiesinis**, nes tikslo funkcija $P = F(\vec{x}, \vec{\omega})$ – tiesinė funkcija, o apribojimai – tiesinės nelygybės.

Jei būtume atsižvelgę į tai, kad dydžiai d_j nėra konstantos, o priklauso nuo x_j , t. y., kad $d_j = \varphi_j(\vec{x})$, tai būtume galėję gauti **netiesinį optimizacinį modelį**, nes tikslo funkcija $P = F(\vec{x}, \vec{\omega})$ galėtų

tapti netiesine funkcija $P = \sum_{j=1}^m \left[c_j - \varphi_j(\vec{x}) - \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} \right] x_j$. Tais atvejais, kai $\varphi_j(\vec{x}) = \varphi_j(x_j) = \frac{D_j}{x_j}$, kur

$D_j = \text{const}$ – netiesioginės išlaidos, susijusios su j -sios rūšies gaminių gamyba, gautume, kad funkcija

$$\sum_{j=1}^m \left[c_j - \varphi_j(\vec{x}) - \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} \right] x_j = \sum_{j=1}^m \left\{ \left[c_j - \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} \right] x_j - D_j \right\} \text{ vėl būtų tiesinė. Tai rodo, jog gana dažnai}$$

net ir sudėtingesnių uždavinių optimizaciniai modeliai gali būti suvesti į artutinius tiesinius modelius.

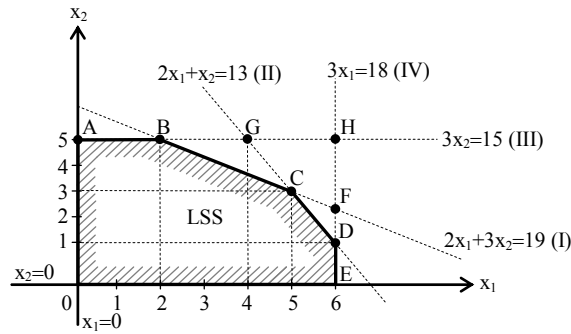
1.15.2.3.2. Paprasto optimizavimo uždavinio sprendimo pavyzdys

Turėdami optimizacinį modelį, galime surasti optimalų sprendinį $\vec{x}^{(opt)} = (x_1^{(opt)}, x_2^{(opt)}, \dots, x_j^{(opt)}, \dots, x_m^{(opt)})$ ir optimalią tikslo funkcijos reikšmę $P^{(opt)} = F^{(opt)}(\vec{x}^{(opt)}, \vec{\omega}) = \sum_{j=1}^m \left[c_j - d_j - \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} \right] x_j^{(opt)}$.

Kadangi mūsų sudarytas optimizacinis modelis yra tiesinis, tai optimalų sprendinį galima surasti, naudojantis **tiesinio programavimo metodais***, pavyzdžiui, naudojantis **simplekso algoritmu**. Tačiau, kadangi šiuo konkrečiu atveju valdomųjų kintamųjų yra tik du, tai **ši uždavinį galima išspręsti ir grafiškai**, ką mes ir padarysime, nes grafinis optimizavimo uždavinio sprendimo būdas dėl savo vaizdumo bus mums naudingas, nagrinėjant optimalaus sprendinio stabilumą ir jautrumą bei įvedant stabilumo zonų ir jautrumo koeficientų sąvokas.

* Istorškai taip susiklostė, kad tiesinio optimizavimo metodams ir algoritmams bei jų taikymams prigijo „tiesinio programavimo“ pavadinimas, kurio nederėtų painioti su sąvoka „programavimas“, reiškiančia programų kompiuteriui kūrimą, nes šios sąvokos turi skirtingus turinius ir skirtingas apimtis.

Pavaizduosime grafiškai leistinių sprendinių sritį, kurią sutrumpintai žymėsime LSS (žiūr. 333 pav.).

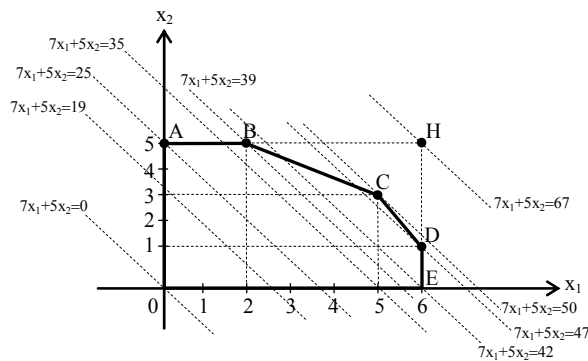


333 pav.

Visi LSS taškai (jų koordinatės x_1 ir x_2) tenkina visus optimizacinio modelio apribojimus ir yra leistinių (realizuojamų) gamybos planų grafiniai modeliai, o taip pat gali būti gamybos būsenų modeliais. Pavyzdžiui, taškas O su koordinatėmis $x_1=0$ ir $x_2=0$ priklauso LSS ir vaizduoja pradinę gamybos būseną, kai dar nieko nebuvo pagaminta ir jokie resursai dar nebuvo panaudoti. Aišku, kad tuomet ir pelno dar nebuvo: $P=7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$. Analogiškai gauname, kad taškas E su koordinatėmis $x_1=6$, $x_2=0$ vaizduoja būseną, kada pagaminti 6 pirmojo tipo gaminiai ir nė vieno antrojo tipo gaminio. Tuomet gautas pelnas $P=7 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 42$. Taškas D vaizduoja būseną, kada $x_1=6$, $x_2=1$ ir $P=7 \cdot 6 + 5 \cdot 1 = 47$ ir t. t.

Tikslo funkcija $P = \sum_{j=1}^2 \left[c_j - d_j - \sum_{i=1}^4 b_{ij} a_i \right] x_j = \sum_{j=1}^2 p_j x_j = 7x_1 + 5x_2$ grafiškai vaizduojama

tiesėmis $7x_1 + 5x_2 = P = \text{const}$. Šių tiesių taškams būdinga, kad juose funkcijos P (bendro įmonės pelno) reikšmė yra viena ir ta pati kiekvienai tiesei, charakterizuojamai koku nors dydžiu $P^* = \text{const}$. Pavyzdžiui, kaip parodyta 334 pav., kiekviename tiesės $P = 7x_1 + 5x_2 = P^* = 35$ atkarpos, priklausančios LSS, taške pelnas yra lygus 35.



334 pav.

Todėl tiesę $7x_1 + 5x_2 = P$ galima vadinti **vienodo pelno tiese (arba izoprofitu)** nuo žodžio „profit“, reiškiančio pelną), panašiai kaip izotermomis vadinamos vienodos temperatūros kreivės, izobaromis – vienodo slėgio kreivės. Optimizaciniuose modeliuose, kuriuose tikslo funkcija yra netiesinė, izoprofitės bus kažkokios kreivės.

Didinant pelną, vienodo pelno tiesę $7x_1 + 5x_2 = P$ slinks į viršų ir į dešinę, nes jos koeficientai 7 ir 5 yra teigiami ir, didinant x_1 ir x_2 , funkcijos P reikšmė didėja. Kadangi koeficientai 7 ir 5 – pastovūs dydžiai, tai vienodo pelno tiesė, slinkdama pasiliks lygiagreti pati sau. Besislinkdama tiesė $7x_1 + 5x_2 = P$ pasieks tašką C (žiūr. 333, 334 pav.), ir tai bus paskutinis LSS taškas, tiesei $7x_1 + 5x_2 = P$ slenkant į dešinę ir į viršų. Jame tikslo funkcijos $P = 7x_1 + 5x_2$ reikšmė P bus pati didžiausia, lyginant ją su tikslo funkcijos reikšme visuose kituose LSS taškuose. Reiškia, taško C koordinatės $x_1=5$ ir $x_2=3$ yra optimalaus sprendinio $\bar{x}^{(opt)}$ koordinatės. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 7x_1^{(opt)} + 5x_2^{(opt)} = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$.

Kadangi optimumo taškas C yra apribojimų pirmosios (I) ir antrosios (II) tiesių $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir $2x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškas (žiūr. 333 pav.), tai, pagaminus optimalų gaminių skaičių $x_1^{(opt)} = 5$ ir $x_2^{(opt)} = 3$, pirmosios ir antrosios medžiagų ištekliai $b_1 = 19$ ir $b_2 = 13$ bus pilnai suvartoti ir tų medžiagų likučiai bus lygūs 0.

Trečiosios ir ketvirtosios medžiagų ištekliai (žiūr. tieses III ir IV 333 pav.) nebus pilnai sunaudoti, ir trečiosios medžiagos likutis bus lygus $b_3 - b_{3,1}x_1^{(opt)} - b_{3,2}x_2^{(opt)} = 15 - 0 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 6$, o ketvirtosios –

lygus $b_4 - b_{4,1}x_1^{(opt)} - b_{4,2}x_2^{(opt)} = 18 - 3 \cdot 5 - 0 \cdot 3 = 3$. Tai reiškia, jog trečiosios ir ketvirtosios medžiagų ištekliai galima sumažinti (pavyzdžiui, parduodant tas medžiagas) ir, jei parduodami kiekiai neviršys 6 ir 3 vienetų atitinkamai, nei optimalus sprendinys $\bar{x}^{(opt)} = (5; 3)$, nei tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 50$ nepasikeis.

Keičiantis gi ištekliais b_1 ir b_2 , keisis pirmosios ir antrosios tiesių susikirtimo taško C padėtis ir todėl keisis optimalus sprendinys. Gali keistis (ir dažniausiai keisis) ir optimali tikslo funkcijos reikšmė. Pavyzdžiui, padidinus b_1 iki 27 ir b_2 iki 17, optimumo tašku taptų taškas H. Pelnas P taptų lygus 67 ir visų medžiagų atsargos būtų sunaudotos. Jei dydžių b_1 ir/ar b_2 pokyčiai Δb_1 ir Δb_2 bus pakankamai dideli, tai gali atsitikti taip, kad optimumo tašku taps jau kitų tiesių (o ne tiesių I ir II) susikirtimo taškas.

Optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos reikšmės stabilumo ir jautrumo klausimai yra gana aktualūs, naudojantis optimizaciniais modeliais praktikoje, todėl jiems paskirsime specialų 1.15.2.3.3. skyrelį.

Tiesiniai optimizavimo uždaviniai kartais gali turėti ne vieną, o be galo daug optimalių sprendinių. Taip atsitinka tada, kai „vienodo pelno tiesė“ yra lygiagreti kokiai nors daugiakampio, ribojančio LSS, kraštinei. Tuomet visi tos kraštinės taškai tampa optimumo taškais. Kai apribojimai yra tokie, jog LSS neturi nė vieno taško, tai optimizavimo uždavinys negali turėti nė vieno leistino sprendinio. Toks pavyzdys bus išnagrinėtas 1.15.2.6. skyrelyje.

1.15.2.3.3. Optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės stabilumo ir jautrumo grafinės analizės pavyzdys

Kaip jau buvome pastebėję, keičiantis nagrinėjamo optimizacinio modelio parametrui b_3 ir b_4 , jei tik $b_3 \geq 9$ ir $b_4 \geq 15$, optimalus sprendinys nesikeičia. Todėl parametrų b_3 ir b_4 kitimo sritys $9 \leq b_3 < +\infty$ ir $15 \leq b_4 < +\infty$ gali būti pavadintos **optimalaus sprendinio stabilumo zonomis**. Šios zonos yra ir **tikslo funkcijos optimalios reikšmės stabilumo zonomis**, nes jose nesikeičia ir tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 7x_1^{(opt)} + 5x_2^{(opt)} = 50$.

Optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos reikšmės stabilumo zonos gali ir nesutapti. Pavyzdžiui, jei šiek tiek pasikeistų pirmojo gaminio kaina, tapdama lygi $61 + \Delta c_1$, nesikeičiant kitiems nagrinėjamo optimizacinio modelio parametrui, tai pasikeistų vienodo pelno tiesės kampas su absčių ašimi, nes nauja vienodo pelno tiesė taptų tiesė $(7 + \Delta c_1)x_1 + 5x_2 = P^*$. Tačiau jei $-\frac{11}{3} < \Delta c_1 < 3$, tai optimalus sprendinys nepasikeistų, likdamas $x_1^{(opt)} = 5$, $x_2^{(opt)} = 3$. Reiškia, intervalas $57\frac{1}{3} < c_1 < 64$ yra

optimalaus sprendinio $\bar{x}^{(opt)} = (5, 3)$ stabilumo zona parametro c_1 kitimo atžvilgiu.

Keičiantis c_1 , šioje zonoje, nors $x^{(opt)}$ ir nesikeis, tikslo funkcija nebus stabili, nes ji keisis su greičiu $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial c_1} = \lim_{\Delta c_1 \rightarrow 0} \frac{[(7 + \Delta c_1)x_1^{(opt)} + 5x_2^{(opt)}] - [7x_1^{(opt)} + 5x_2^{(opt)}]}{\Delta c_1} = x_1^{(opt)} = 5$. Šį kitimo greitį vadinsime

tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumu (jautrumo koeficientu) parametro c_1 kitimo atžvilgiu. Jei tikslo funkcija yra tiesinė funkcija $P = \sum_{j=1}^m p_j x_j$, tai tikslo funkcijos optimalios reikšmės

jautrumas parametro c_1 kitimo atžvilgiu $\frac{\Delta_{c_1} P^{(opt)}}{\Delta c_1} = \frac{\Delta_{p_1} P^{(opt)}}{\Delta p_1} = \frac{[(p_1 + \Delta p_1)x_1^{(opt)} + p_2 x_2^{(opt)}] - [p_1 x_1^{(opt)} + p_2 x_2^{(opt)}]}{\Delta p_1} = x_1^{(opt)}$ yra **pastovus dydis optimalaus sprendinio stabilumo zonoje**, kitaip

ariant, **optimalaus sprendinio stabilumo zona bus ir tiesinės tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo stabilumo zona.**

Kai parametras c_1 besikeisdamas taps lygus $57\frac{1}{3}$, tai optimaliu sprendiniu taps ne tik taško C koordinatės (5,3), bet ir atkarpos BC (žiūr. 334 pav.) kiekvieno taško koordinatė pora. Kiekviename tokiaame atkarpos BC taške tikslo funkcijos reikšmė P išliks pastovi ir lygi $31\frac{2}{3}$.

Analogiškai gausime, kad esant $c_1 = 64$, optimaliu sprendiniu galės būti atkarpos CD taškų koordinatės x_1 ir x_2 , tame tarpe ir taško C koordinatės (5,3). Todėl optimalaus sprendinio $x_1^{(opt)} = 5$,

$x_2^{(opt)}=3$ stabilumo zona galime laikyti ne tik intervalą $57\frac{1}{3} < c_1 < 64$, bet ir atkarpą $57\frac{1}{3} \leq c_1 \leq 64$,

atsimindami, kad tos atkarpos galuose optimizavimo uždavinys gali turėti ne tik šį, bet ir eilę kitų sprendinių, o tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumo koeficientų reikšmės tampa neapibrėžtos, nes, kai, pavyzdžiui; $c_1=57\frac{1}{3}$, tai optimalus sprendinys – bet kuris atkarpos BC taškas ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}$ gali keistis nuo 5 iki 2, nesikeičiant pačiai $P^{(opt)}$ reikšmei, o kai $c_1=64$ tai optimalus sprendinys – bet kuris atkarpos CD taškas ir $\frac{\partial P}{\partial c_1}$ gali keistis nuo 5 iki 6, nesikeičiant $P^{(opt)}$ reikšmei.

Optimalaus sprendinio stabilumo zona $c_1 \in \left[57\frac{1}{3}; 64\right]$ nėra vienintelė. Pavyzdžiui, kai $54 < c_1 < 57\frac{1}{3}$, tai optimaliu sprendiniu bus taško B koordinatės $x_1=2$, $x_2=5$, o tos atkarpos galuose, kur $c_1=54$ arba $c_1=57\frac{1}{3}$, – atkarpų AB ir BC taškų koordinatės x_1 ir x_2 . Tikslo funkcijos jautrumo koeficientas $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}$ parametrų c_1 ir p_1 kitimo atžvilgiu atkarpoje $54 < c_1 < 57\frac{1}{3}$ yra $\frac{\Delta_{c_1} P^{(opt)}}{\Delta c_1} = \frac{\Delta_{p_1} P^{(opt)}}{\Delta p_1} = x_1^{(opt)} = 2$. Kai $c_1=57\frac{1}{3}-0$, tai jautrumo koeficientas $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}$ yra 2, o kai $c_1=57\frac{1}{3}+0$, tai šis koeficientas yra 5, o pačiame taške $c_1=57\frac{1}{3}$ – bet kuris dydis tarp 2 ir 5, (nes, judant atkarpa BC nuo taško B iki taško C, kaina $c_1=57\frac{1}{3}$ nesikeis, o optimali x_1 reikšmė ir jautrumo koeficientas $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}$ monotoniškai didės nuo 2 iki 5), pelnui $P^{(opt)}$ išliekant pastoviu dydžiu, lygiu $31\frac{2}{3}$.

Analogiškai gausime, kad, kai $c_1=54+0$, tai $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}=2$, kai $c_1=54-0$, tai $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}=0$, o kai $c_1=54$, tai $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}$ keisis nuo 0 iki 2, pačiai $P^{(opt)}$ reikšmei išliekant pastoviai ir lygiai 25.

Trečioji optimalaus sprendinio stabilumo zona parametro c_1 kitimo atžvilgiu yra $64 \leq c_1 \leq +\infty$. Joje $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=1$, o $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_1} = \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1} = x_1^{(opt)}=6$. Kai $c_1=64$, tai optimalus sprendinys – bet kuris atkarpos CD taškas, todėl $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1} = x_1^{(opt)}$ gali keistis nuo 5 iki 6, o tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}$ išlieka lygi 65. Kai $c_1 > 64$ ir artėja prie $+\infty$, tai optimalumo taškas yra taškas D. Todėl $x_1^{(opt)}=6$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_1}=6$.

Ketvirtąją optimalaus sprendinio parametro c_1 kitimo atžvilgiu stabilumo zoną $0 \leq c_1 \leq 54$, kurioje optimalus sprendinys būtų taško A koordinatės $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=5$, specialiai nagrinėti jau nėra prasmės, nes, esant pirmojo gaminio realizavimo kainai $c_1 < 54$, to gaminio gamyba yra nuostolinga ir belieka gaminti tik antrojo tipo gaminius, t. y. $x_2=5$, $x_1=0$.

Analogiškai rasime, kad nesikeičiant visiems kitiems optimizacinio modelio parametrams, o keičiantis tik c_2 ribose $39,5 < c_2 < 46,5$, optimalus sprendinys išliks stabilus ir lygus $x_1^{(opt)}=5$, $x_2^{(opt)}=3$.

Išliks stabilus ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2} = \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_2} = x_2^{(opt)}=3$.

Kai $c_2=39,5$, tai vienodo pelno teisė tampa lygiagrečiai tiesei $2x_1+x_2=13$ ir optimaliu sprendiniu galės būti bet kurio atkarpos CD taško koordinatė pora. Todėl $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2}$ gali keistis nuo 3 iki 1, o $P^{(opt)}$ išliks pastovus dydis, lygus 45,5.

Kai $c_2=46,5$, tai vienodo pelno tiesė tampa lygiagrečiai tiesei $2x_1+3x_2=19$ ir optimaliu sprendiniu gali būti atkarpos BC bet kurio taško koordinatčių pora. Todėl $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2}$ galės keistis nuo 3 iki 5, o $P^{(opt)}$ išlieka pastovus dydis, lygus 66,5.

Kai $36 < c_2 < 39,5$, tai optimalus sprendinys vėl bus stabilus ir lygus taško D koordinatėms $x_1=6$, $x_2=1$. Šiame intervale tikslo funkcijos optimali reikšmė taip pat nebus stabili, tačiau jos kitimo jautrumas bus stabilus ir lygus $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2} = \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_2} = x_2^{(opt)} = 1$, t. y. didėjant c_2 nuo 36 iki 39,5, optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}$ didės nuo 42 iki 45,5, su pastoviu greičiu, lygiu 1.

Kai $c_2=36$, tai $p_2=0$ ir vienodo pelno tiesė tampa lygiagrečiai tiesei $3x_1=18$. Optimaliu sprendiniu tuomet gali būti atkarpos DE bet kurio taško koordinatčių pora, todėl $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2} = x_2^{(opt)}$ gali keistis nuo 1 iki 0, o $P^{(opt)}$ išlieka pastoviu dydžiu, lygiu 42.

Nagrinėti atvejį, kai $c_2 < 36$, jau nebėra prasmės, nes tuomet antrojo tipo gaminių gamyba tampa nuostolinga ir optimalus sprendinys – gaminti maksimalų pirmojo tipo gaminių skaičių, negaminant antrojo tipo gaminių, kitaip tariant, optimaliu sprendiniu bus taško E koordinatės $x_1=6$, $x_2=0$.

Kai $46,5 < c_2 < +\infty$, tai optimalus sprendinys vėl bus stabilus ir lygus taško B koordinatėms $x_1=2$, $x_2=5$. Stabilus šiame intervale bus ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2} = \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_2} = x_2^{(opt)} = 5$. Kai $c_2=46,5$, tai, kaip jau buvome gavę anksčiau, jautrumo koeficientas, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial c_2}$ galės keistis nuo 3 iki 5, išliekant pastoviai $P^{(opt)}$ reikšmei.

Galima nagrinėti optimalaus sprendinio stabilumą ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumą ne tik gaminių kainų c_1 ir c_2 , bet ir lyginamųjų pelnų $p_1=c_1-s_1=c_1-d_1-\sum_{i=1}^3 a_i b_{ij}$ ir $p_2=c_2-s_2=c_2-d_2-\sum_{i=1}^3 a_i b_{i2}$ kitimo atžvilgiu.

Kadangi gaminių savikainos yra $s_1=54$, $s_2=36$, o $p_j=c_j-s_j$, tai iš optimalaus sprendinio stabilumo intervalų parametro c_1 kitimo atžvilgiu $\left(54 \leq c_1 \leq 57\frac{1}{3}\right)$, $\left(57\frac{1}{3} \leq c_1 \leq 64\right)$, $(64 \leq c_1 < +\infty)$ gauname optimalaus sprendinio stabilumo intervalus lyginamojo pelno p_1 kitimo atžvilgiu $(0 \leq p_1 \leq 3\frac{1}{3})$, $(3\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 10)$, $(10 \leq p_1 < +\infty)$, o iš intervalų $(36 \leq c_2 \leq 39,5)$, $(39,5 \leq c_2 \leq 46,5)$, $(46,5 \leq c_2 < +\infty)$ – intervalus $(0 \leq p_2 \leq 3,5)$, $(3,5 \leq p_2 \leq 10,5)$, $(10,5 \leq p_2 < +\infty)$ su optimaliais sprendiniais: 1) taškų D, C ir B koordinatėmis $(6;1)$, $(5;3)$ ir $(2;5)$ stabilumo intervalų viduje ir 2) atkarpų ED, DC, CB ir BA taškų koordinatėmis stabilumo intervalų parametrų c_1 ir p_1 bei c_2 ir p_2 kitimo atžvilgiu ribiniuose taškuose. Tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas p_1 ir p_2 kitimo atžvilgiu šiuose intervaluose yra toks pat, kaip ir parametrų c_1 ir c_2 kitimo atžvilgiu:

$$\frac{\Delta_{p_1} P^{(opt)}}{\Delta p_1} = \frac{\Delta_{c_1} P^{(opt)}}{\Delta c_1} = x_1^{(opt)}, \quad \frac{\Delta_{p_2} P^{(opt)}}{\Delta p_2} = \frac{\Delta_{c_2} P^{(opt)}}{\Delta c_2} = x_2^{(opt)}$$

optimalaus sprendinio stabilumo (parametrų c_1 bei c_2 kitimo atžvilgiu) intervalų viduje, o taip pat ir tų intervalų ribiniuose taškuose, kuomet $x_1^{(opt)}$ ir $x_2^{(opt)}$ gali būti atkarpų ED, DC, CB ir BA, ribojančių LSS, bet kurių taškų koordinatėmis. Stabilumo intervalų ribiniuose taškuose tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas parametrų c_1 ir c_2 bei parametrų p_1 ir p_2 kitimo atžvilgiu nėra apibrėžtas c_1 ir c_2 atžvilgiu: nesikeičiant c_1 ir c_2 , bet keičiantis $x_1^{(opt)}$ ir $x_2^{(opt)}$, jautrumo koeficientai $\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial c_1} = \frac{\partial F^{(opt)}}{\partial p_1}$ ir

$$\frac{\partial F^{(opt)}}{\partial c_2} = \frac{\partial F^{(opt)}}{\partial p_2} \text{ keičiasi, o } P^{(opt)} \text{ išlieka pastoviu dydžiu.}$$

Kai keičiasi tik pirmojo gaminio gamybos išlaidos d_1 , o visi kiti optimizacinio modelio parametrai nesikeičia, tai gauname, kad $d_1 = c_1 - p_1 - \sum_{i=1}^4 a_i b_{i1} = 61 - p_1 - 44 = 17 - p_1$, o $\Delta d_1 = -\Delta p_1$.

Todėl iš optimalaus sprendinio stabilumo intervalų parametro p_1 kitimo atžvilgiu gauname stabilumo intervalus parametro d_1 kitimo atžvilgiu: 1) $13\frac{2}{3} < d_1 < 17$, kur $\bar{x}^{(opt)} = (2; 5)$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial d_1} = -\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial p_1} = -x_1^{(opt)} = -2$; 2) $7 < d_1 < 13\frac{2}{3}$, kur $\bar{x}^{(opt)} = (5; 3)$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial d_1} = -x_1^{(opt)} = -5$; 3) $0 < d_1 < 7$, kur $\bar{x}^{(opt)} = (6; 1)$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial d_1} = -x_1^{(opt)} = -6$.

Analogiškai gauname optimalaus sprendinio stabilumo intervalus ir tikslo funkcijos jautrumo įverčius parametro d_2 kitimo atžvilgiu:

- 1) $0 < d_2 < 1,5$, kur $\bar{x}^{(opt)} = (2; 5)$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial d_2} = -x_2^{(opt)} = -5$;
- 2) $1,5 < d_2 < 8,5$, kur $\bar{x}^{(opt)} = (5; 3)$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial d_2} = -x_2^{(opt)} = -3$;
- 3) $8,5 < d_2 < 12$, kur $\bar{x}^{(opt)} = (6; 1)$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial d_2} = -x_2^{(opt)} = -1$;

Stabilumo intervalų ribiniuose taškuose optimalūs sprendiniai – atkarpų AB, BC, CD ir DE taškų koordinatės poros, o tikslo funkcijos jautrumas ribiniuose stabilumo intervalų taškuose nėra apibrėžtas: jis keičiasi optimumo taškams judant atkarpomis AB, BC, CD ir DE. Kadangi taip judant optimumo taškams parametrų p_1 ir p_2 reikšmės nesikeičia, **tai ir tikslo funkcijos optimali reikšmė $P^{(opt)} = p_1 x_1^{(opt)} + p_2 x_2^{(opt)}$ išlieka pastovi.**

Galima nagrinėti ne tik pavienių optimizacinio modelio parametrų kitimo poveikį į optimalų sprendinį ir į optimalią tikslo funkcijos reikšmę, kitiems parametrams nesikeičiant, bet ir tokius atvejus, kada vienu metu gali keistis keli modelio parametrai.

Pavyzdžiui, kai dėl kurių nors priežasčių keisis lyginamieji pelnai p_1 ir p_2 , tačiau taip, kad $0 < \frac{p_1}{p_2} < \frac{2}{3}$, tai optimaliu sprendiniu bus taško B koordinatės $x_1=2$, $x_2=5$; kai $\frac{2}{3} < \frac{p_1}{p_2} < 2$, tai

optimalus sprendinys – taško C koordinatės $x_1=5$, $x_2=3$; kai $2 < \frac{p_1}{p_2} < +\infty$, tai optimalus sprendinys –

taško D koordinatės $x_1=6$, $x_2=1$. Šių stabilumo intervalų ribiniuose taškuose optimalus sprendiniai yra atkarpų AB, BC, CD ir DE taškų koordinatės x_1 ir x_2 poros.

Keičiantis dviem parametrams p_1 ir p_2 , optimalaus sprendinio stabilumo intervalų vieno iš šių parametrų kitimo atžvilgiu ilgai ir ribos priklausys nuo kito iš šių parametrų. Pavyzdžiui, optimalus sprendinys $x_1=2$, $x_2=5$ liks stabilus intervale $0 < p_1 < \frac{2}{3}p_2$, kai $0 < p_2 < +\infty$, o taip pat intervale

$\frac{3}{2}p_1 < p_2 < +\infty$, kai $0 < p_1 < +\infty$.

Analogiškai gauname, kad optimalus sprendinys $x_1=5$, $x_2=3$ bus stabilus intervale $\frac{2}{3}p_2 < p_1 < 2p_2$, kai $0 < p_2 < +\infty$, o taip pat intervale $\frac{1}{2}p_1 < p_2 < \frac{3}{2}p_1$, kai $0 < p_1 < +\infty$.

Optimalaus sprendinio $x_1=6$, $x_2=1$ stabilumo intervalai: $2p_2 < p_1 < +\infty$, kai $0 < p_2 < +\infty$, ir $0 < p_2 < \frac{1}{2}p_1$, kai $0 < p_1 < +\infty$.

Jei $p_1=0$, kai $0 < p_2 < +\infty$, tai optimalus sprendinys – atkarpos BA taškų koordinatės; jei $p_1 = \frac{2}{3}p_2$, kai $0 < p_2 < +\infty$, tai optimalus sprendinys – atkarpos BC taškų koordinatės; jei $p_1=2p_2$, kai $0 < p_2 < +\infty$, tai optimalus sprendinys – atkarpos CD taškų koordinatės; jei $p_2=0$, kai $0 < p_1 < +\infty$, tai optimalus sprendinys – atkarpos DE taškų koordinatės.

Tikslo funkcijos optimalios reikšmės $P^{(opt)} = p_1 x_1^{(opt)} + p_2 x_2^{(opt)}$ pokytis, keičiantis p_1 ir p_2 optimalaus sprendinio stabilumo intervaluose, lygus $\Delta_{p_1, p_2} P^{(opt)} = [(p_1 + \Delta p_1) x_1^{(opt)} + (p_2 + \Delta p_2) x_2^{(opt)}] - (p_1 x_1^{(opt)} + p_2 x_2^{(opt)}) = x_1^{(opt)} \cdot \Delta p_1 + x_2^{(opt)} \cdot \Delta p_2$.

Keičiantis gaminių pardavimo kainoms c_1 ir c_2 ir nesikeičiant kitiems optimizacinio modelio parametrams, iš ką tik gautų rezultatų ir iš lygybių $p_1 = c_1 - 54$ ir $p_2 = c_2 - 36$ gausime tokias optimalaus sprendinio stabilumo zonas: 1) optimalus sprendinys $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ liks stabilus intervale

$54 < c_1 < \frac{2}{3} c_2 + 30$, kai $c_2 \in (36; +\infty)$, o taip pat intervale $\frac{2}{3} c_1 - 45 < c_2 < +\infty$, kai $c_1 \in (54; +\infty)$;

2) optimalus sprendinys $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ liks stabilus intervale $\frac{2}{3} c_2 + 30 < c_1 < 2c_2 - 18$, kai $c_2 \in (36; +\infty)$, o

taip pat intervale $\frac{1}{2} c_1 + 9 < c_2 < \frac{3}{2} c_1 - 45$, kai $c_1 \in (54; +\infty)$; 3) optimalus sprendinys $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ liks

stabilus intervale $2c_2 - 18 < c_1 < +\infty$, kai $c_2 \in (36; +\infty)$, o taip pat intervale $36 < c_2 < \frac{1}{2} c_1 + 9$, kai

$c_1 \in (54; +\infty)$.

Tikslo funkcijos optimalios reikšmės $P^{(opt)} = p_1 x_1^{(opt)} + p_2 x_2^{(opt)}$ pokytis, keičiantis p_1 ir p_2 optimalaus sprendinio stabilumo intervaluose, lygus $\Delta_{c_1, c_2} P^{(opt)} = [(c_1 + \Delta c_1 - 54) x_1^{(opt)} + (c_2 + \Delta c_2 - 36) x_2^{(opt)}] - [(c_1 - 54) x_1^{(opt)} + (c_2 - 36) x_2^{(opt)}] = x_1^{(opt)} \cdot \Delta c_1 + x_2^{(opt)} \cdot \Delta c_2$.

Kai nesikeičiant kitiems pirminiams optimizacinio modelio parametrams, vienu ir tuo pačiu metu keičiasi parametrai d_1 ir d_2 , tai, atsižvelgdami į tai, kad $p_1 = 61 - d_1 - 44 = 17 - d_1$, $\Delta p_1 = -\Delta d_1$, $p_2 = 41 - d_2 - 29 = 12 - d_2$, $\Delta p_2 = -\Delta d_2$, gauname: 1) optimalus sprendinys $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ liks stabilus intervale

$\frac{2}{3} d_2 + 9 < d_1 < 17$, kai $d_2 \in (0; 12)$, o taip pat intervale $0 < d_2 < \frac{3}{2} d_1 - 13,5$, kai d_1 reikšmė

parenkama intervale $(0; 17)$ taip, kad $d_2 > 0$; 2) optimalus sprendinys $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ liks stabilus intervale $2d_2 - 7 < d_1 < 9 + \frac{2}{3} d_2$, kai d_2 reikšmė parenkama intervale $(0; 12)$ taip, kad $d_1 > 0$; šis sprendinys liks

stabilus ir intervale $\frac{3}{2} d_1 - 13,5 < d_2 < \frac{1}{2} d_1 - 3,5$, kai d_1 reikšmė parenkama intervale $(0; 17)$ taip, kad

$d_2 > 0$; 3) optimalus sprendinys $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ liks stabilus intervale $0 < d_1 < 2d_2 - 7$, kai d_2 reikšmė

parenkama intervale $(0; 12)$ taip, kad $d_1 > 0$; šis sprendinys liks stabilus ir intervale $3,5 + 0,5d_1 < d_2 < 12$, kai

$d_1 \in (0; 17)$.

Tikslo funkcijos optimalios reikšmės pokytis, keičiantis d_1 ir d_2 optimalaus sprendinio stabilumo intervaluose, yra lygus $\Delta_{d_1, d_2} P^{(opt)} = \{[17 - (d_1 + \Delta d_1) x_1^{(opt)} + [12 - (d_2 + \Delta d_2)] x_2^{(opt)}\} -$

$-[(17 - d_1) x_1^{(opt)} + (12 - d_2) x_2^{(opt)}] = -(x_1^{(opt)} \cdot \Delta d_1 + x_2^{(opt)} \cdot \Delta d_2)$.

Kai keičiasi pirmosios medžiagos kaina a_1 , nesikeičiant kitiems pirminiams optimizacinio modelio parametrams, tai keičiasi ir vienodo pelno tiesės kampas su abscisių ašimi, nes $\frac{p_1}{p_2} = \frac{17 - 2a_1}{20 - 3a_1}$.

Kadangi praktikoje turi būti tenkinamos sąlygos $a_1 \geq 0$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, tai $0 \leq a_1 < 6\frac{2}{3}$. Kadangi

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{17 - 2a_1}{20 - 3a_1} = 1 + \frac{a_1 - 3}{20 - 3a_1}$, tai santykis $\frac{p_1}{p_2}$, didėjant a_1 nuo 0 iki $6\frac{2}{3}$, monotoniškai didės

(pradžioje su vis didėjančiu greičiu, o vėliau – su mažėjančiu greičiu) nuo $\frac{p_1}{p_2} = \frac{17}{20}$ iki $\frac{p_1}{p_2} = +\infty$.

Kadangi $\frac{17}{20} > \frac{2}{3}$, tai, nekeičiant kitų modelio parametrų, o keičiant tik a_1 , negalima pasiekti būsenos,

kad optimaliu sprendiniu būtų taško B koordinatės $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, o taip pat atkarpos BC taškų, nesutampančių su tašku C, koordinatės. Intervale $0 \leq a_1 < 5,75$ optimalus sprendinys bus stabilus ir lygus

$x_1 = 5$, $x_2 = 3$. Kadangi tikslo funkcijos optimalios reikšmės pokytis, keičiantis a_1 , yra $\Delta_{a_1} P^{(opt)} =$

$= \{[17 - 2(a_1 + \Delta a_1) x_1^{(opt)} + [20 - 3(a_1 + \Delta a_1)] x_2^{(opt)}\} - [(17 - 2a_1) x_1^{(opt)} + (20 - 3a_1) x_2^{(opt)}] = -\Delta a_1 [2x_1^{(opt)} + 3x_2^{(opt)}]$,

tai tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas optimalaus sprendinio $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ stabilumo zonoje

kainos a_1 kitimo atžvilgiu $0 \leq a_1 < 5,75$ yra lygus $\frac{\Delta_{a_1} P^{(opt)}}{\Delta a_1} = -(2x_1^{(opt)} + 3x_2^{(opt)}) = -19$. Kai $a_1 = 5,75$, tai

$\frac{p_1}{p_2} = 2$, ir optimalus sprendinys – atkarpos CD taškų koordinatės. Todėl $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_1}$ galės kisti intervale $[-19; -15]$, tačiau optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}$ išliks pastovi ir lygi 35,75.

Optimalaus sprendinio $x_1=6$, $x_2=1$ stabilumo zona yra $5,75 < a_1 < 6\frac{2}{3}$. Joje $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_1} = -(2 \cdot 6 + 3 \cdot 1) = -15$.

Jei kaina a_1 taptų lygi $6\frac{2}{3}$, tai taškas, vaizduojantis optimalų sprendinį, turėtų pereiti į atkarpą DE.

Analogiškai gausime, kad keičiantis antrosios medžiagos kainai a_2 ir nesikeičiant kitiems optimizacinio modelio parametrams, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{29 - 2a_2}{16 - a_2} = 2 - \frac{3}{16 - a_2}$ ir tas santykis $\frac{p_1}{p_2}$, kainai a_2

didėjant nuo 0 iki 14,5, monotoniškai mažėja nuo $1\frac{13}{16}$ iki 0. Todėl, keičiantis tik kainai a_2 ir nesikeičiant kitiems pirminiems optimizacinio modelio parametrams, negalima pasiekti būsenos, kad optimaliu sprendiniu būtų taško D koordinatės $x_1=6$, $x_2=1$. Optimalaus sprendinio $x_1=5$, $x_2=3$ stabilumo zona yra $0 \leq a_2 < 13,75$, kurioje $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_2} = -(2x_1^{(opt)} + x_2^{(opt)}) = -13$, o optimalus sprendinys $x_1=2$, $x_2=5$

stabilus zonoje $3,75 < a_2 < 14,5$, kurioje $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_2} = -(2x_1^{(opt)} + x_2^{(opt)}) = -9$. Kai $a_2 = 13,75$, tai optimalus sprendinys – atkarpos BC taškų koordinatės, o kai $a_2 = 14,5$ – tai atkarpos AB taškų koordinatės.

Keičiantis tik a_3 , keisis tik p_2 , nes pirmojo gaminio gamybai trečioji medžiaga nevartojama. Iš lygybės $p_2 = 8 - 3a_3$, atsižvelgdami į tai, kad $a_3 \geq 0$, gauname, jog $p_2 \leq 8$, o atsižvelgdami į tai, kad $p_2 \geq 0$, gauname, kad $a_3 \leq 2\frac{2}{3}$.

Iš sąlygos $0 \leq p_2 \leq 8$ išplaukia, jog, keičiantis tik kainai a_3 , būseną, kada $x_1^{(opt)} = 2$, $x_1^{(opt)} = 5$, yra nepasiekama, nes tuomet turėtų būti tenkinama sąlyga $10,5 \leq p_2 < +\infty$, kas nesuderinama su sąlyga $0 \leq p_2 \leq 8$.

Iš optimalaus sprendinio $x_1=5$, $x_2=3$ stabilumo, keičiantis a_3 , intervalo $3,5 < p_2 < 10,5$ gauname to sprendinio stabilumo zoną $0 \leq a_3 < 1,5$ trečiosios medžiagos kainos a_3 kitimo atžvilgiu. Toje zonoje tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_3} = -3x_2^{(opt)}$ kainos a_3 kitimo atžvilgiu yra lygus -9 , t. y.,

kainai a_3 didėjant ir nesikeičiant kitiems modelio parametrams, pelnas mažėja: $\Delta_{a_3} P^{(opt)} = -9 \Delta a_3$.

Iš optimalaus sprendinio $x_1=6$, $x_2=1$ stabilumo intervalo $0 < p_2 < 3,5$ gauname to sprendinio stabilumo zoną $1,5 \leq a_3 < 2\frac{2}{3}$ kainos a_3 kitimo atžvilgiu su tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumu joje $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_3} = -3x_2^{(opt)} = -3$.

Kai $a_3 = 1,5$, tai $p_2 = 8 - 3 \cdot 1,5 = 3,5$, ir optimalūs sprendiniai – atkarpos CD taškų koordinatės, o kai $a_3 = 2\frac{2}{3}$, tai $p_2 = 8 - 3 \cdot 2\frac{2}{3} = 0$, ir optimalūs sprendiniai – atkarpos DE taškų koordinatės.

Keičiantis tik a_4 , keisis tik p_1 , nes antrojo gaminio gamyboje ketvirtoji medžiaga nevartojama. Iš lygybės $p_1 = 19 - 3a_4$ gauname, kad $0 \leq a_4 \leq 6\frac{1}{3}$ ir kad, keičiantis a_4 šiose ribose, lyginamasis pelnas p_1 mažės nuo 19 iki 0.

Iš optimalaus sprendinio $x_1=2$, $x_2=5$ stabilumo intervalo $0 < p_1 < 3\frac{1}{3}$ gauname to sprendinio stabilumo zoną $5\frac{2}{9} < a_4 < 6\frac{1}{3}$ kainos a_4 kitimo atžvilgiu. Tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumas kainos a_4 pokyčiams toje zonoje yra $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_4} = -3x_1^{(opt)} = -6$.

Šios zonos ribiniame taške $a_4 = 6\frac{1}{3}$ lyginamasis pelnas $p_1=0$, ir optimaliu sprendiniu tampa bet kurio atkarpos AB taško koordinatė pora x_1 ir x_2 . Kitame šios stabilumo zonos ribiniame taške $a_4 = 5\frac{2}{9}$ lyginamasis pelnas $p_1 = 3\frac{1}{3}$, ir optimaliu sprendiniu tampa atkarpos BC bet kurio taško koordinatės x_1 ir x_2 .

Iš optimalaus sprendinio $x_1=5$, $x_2=3$ stabilumo intervalo $3\frac{1}{3} < p_1 < 10$ gauname to sprendinio stabilumo zoną $3 < a_4 < 5\frac{2}{9}$ kainos a_4 kitimo atžvilgiu su tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumu $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_4} = -15$. Šios zonos ribiniame taške $a_4=3$ lyginamasis pelnas p_1 tampa lygiu 10 ir optimaliu sprendiniu tampa atkarpos CD bet kurio taško koordinatės. Optimali tikslo funkcijos reikšmė tuomet tampa lygi $10x_1+5x_2=65$, o jos jautrumas gali keistis nuo $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_4} = -15$ iki $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_4} = -18$.

Iš optimalaus sprendinio $x_1=6$, $x_2=1$ stabilumo intervalo $10 < p_1 < +\infty$ gauname to sprendinio stabilumo zoną $0 < a_4 < 3$ kainos a_4 kitimo atžvilgiu su tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumu $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial a_4} = -18$. Šios zonos ribiniame taške $a_4=0$ lyginamasis pelnas p_1 tampa lygus 19, ir optimaliu

sprendiniu pasiekia taško D koordinatės $x_1=6$, $x_2=1$, nes $\frac{p_1}{p_2} = \frac{19}{5} = 3,8$ tenkina sąlygą $2 < \frac{p_1}{p_2} < +\infty$.

Optimali tikslo funkcijos reikšmė ribiniame stabilumo zonos taške $a_4=0$ lygi $19 \cdot 6 + 5 \cdot 1 = 119$.

Galima būtų nagrinėti optimalaus sprendinio stabilumą ir tikslo funkcijos jautrumą, keičiantis kainoms a_i ne pavieniui, o poromis ar net iškart visoms keturioms kainoms a_1 , a_2 , a_3 ir a_4 . Palieku tai padaryti pačiam skaitytojui.

Keičiantis parametrams c_j , d_j ir a_i galėjo keistis (ir, dažniausiai, keitėsi) lyginamojo pelno reikšmės p_j , o dėl šios priežasties galėjo keistis ir vienodo pelno tiesės padėtis. Keičiantis šios tiesės padėčiai, galėjo keistis (ir, dažniausiai, keitėsi) optimali tikslo funkcijos reikšmė. Kartais keitėsi ir pats optimalus sprendinys, pereidamas iš vienos savo stabilumo zonos į kitą, tačiau visais atvejais optimizacinio modelio LSS nesikeitė, nes nesikeitė optimizacinio modelio apribojimų parametrai.

Tačiau jei pradėtume keisti parametrus b_i ir b_{ij} , tai LSS jau keisis, o dėl šios priežasties taip pat galės keistis ir optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė.

Pavyzdžiui, jei keistume b_1 , nekeisdami kitų modelio parametrų, tai tiesė $2x_1+3x_2=b_1$ slinktų lygiagrečiai pačiai sau ir jos susikirtimo su tiese $2x_1+x_2=13$ taškas judėtų šia tiese. Kol šis taškas neišeis už atkarpos GD ribų (žiūr. 333 pav.), tol šio taško koordinatės x_1 ir x_2 bus optimaliu sprendiniu, t. y. nors optimalus sprendinys ir keisis, tačiau jo grafiniu modeliu liks pirmosios ir antrosios tiesių ($2x_1+3x_2=b_1$ ir $2x_1+x_2=13$) susikirtimo taškas. Pažymėsime pirmosios ir antrosios medžiagos likučius atitinkamai x_3 ir x_4 . Tuomet $x_3=b_1-2x_1^{(opt)}-3x_2^{(opt)}$, o $x_4=13-2x_1^{(opt)}-x_2^{(opt)}$. Pirmosios ir antrosios tiesių susikirtimo taškui judant atkarpa GD, likučiai x_3 ir x_4 liks stabilūs ir lygūs nuliui. Vėliau, sprenddami šį optimizavimo uždavinį simplekso metodu, mes pamatysime, kad $x_3=0$, $x_4=0$ – optimalaus sprendinio laisvųjų kintamųjų optimalios reikšmės. Todėl atkarpą GD galima pavadinti **optimalaus sprendinio laisvųjų kintamųjų optimalių reikšmių stabilumo zonos parametro b_1 kitimo atžvilgiu grafiniu modeliu**.

Rasime šios stabilumo zonos ribas. Taško D koordinatės mes jau žinome: $x_1^{(D)}=6$, $x_2^{(D)}=1$. Todėl galime rasti ribinę parametro b_1 reikšmę, atitinkančią tą atvejį, kai tiesė $2x_1+3x_2=b_1$ kerta šį tašką: $b_1=2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 15$. Norėdami rasti kitą ribinę parametro b_1 reikšmę, atitinkančią tą atvejį, kai tiesė $2x_1+3x_2=b_1$ kerta tašką G, rasime šio taško, kaip tiesių $2x_1+x_2=13$ ir $3x_2=15$ susikirtimo taško,

koordinates: $x_1^{(G)}=4$, $x_2^{(G)}=5$. Todėl viršutinė parametro b_1 riba minėtoje stabilumo zonoje yra $b_1=2\cdot4+3\cdot5=23$.

Reiškia, jei, nesikeičiant visiems kitiems optimizacinio modelio parametrams, keisis tik parametras b_1 , pasilikdamas ribose $15\leq b_1\leq 23$, tai optimalaus sprendinio modeliu liks tiesių $2x_1+3x_2=b_1$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo taškas, o laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_4 optimalios reikšmės nesikeis ir liks lygios 0. Todėl atkarpa $15\leq b_1\leq 23$ ir vadinama optimalaus sprendinio laisvųjų kintamųjų stabilumo zona parametro b_1 kitimo atžvilgiu.

Rasime, kaip šioje zonoje keičiasi $x_1^{(opt)}$, $x_2^{(opt)}$ ir $P^{(opt)}$. Tarkime, kad $b_1=19+\Delta b_1$ ir $15\leq b_1\leq 23$, t. y., tarkime, kad $-4\leq \Delta b_1\leq 4$. Tuomet naujo optimalaus sprendinio koordinatės $x_1^{(n.opt)}$ ir $x_2^{(n.opt)}$ rasime,

$$\text{išsprendę lygčių sistemą } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19 + \Delta b_1, \\ 2x_1 + x_2 = 13. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Gauname } x_2^{(n.opt)} &= 3 + \frac{\Delta b_1}{2}, \quad x_1^{(n.opt)} = 5 - \frac{\Delta b_1}{4}, \quad \Delta x_1^{(opt)} = x_1^{(n.opt)} - x_1^{(s.opt)} = 5 - \frac{\Delta b_1}{4} - 5 = -\frac{\Delta b_1}{4}, \\ \Delta x_2^{(opt)} &= x_2^{(n.opt)} - x_2^{(s.opt)} = 3 + \frac{\Delta b_1}{2} - 3 = \frac{\Delta b_1}{2}, \quad \Delta P^{(opt)} = P^{(n.opt)} - P^{(s.opt)} = \left[7\left(5 - \frac{\Delta b_1}{4}\right) + 5\left(3 + \frac{\Delta b_1}{2}\right) \right] - \\ & - (7\cdot 5 + 5\cdot 3) = \frac{3}{4} \Delta b_1. \end{aligned}$$

Rasime optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumą parametro b_1 pokyčiams: $\frac{\Delta x_1^{(opt)}}{\Delta b_1} = -\frac{\Delta b_1}{4 \cdot \Delta b_1} = -\frac{1}{4}$; $\frac{\Delta x_2^{(opt)}}{\Delta b_1} = \frac{\Delta b_1}{2 \cdot \Delta b_1} = \frac{1}{2}$; $\frac{\Delta P^{(opt)}}{\Delta b_1} = \frac{3 \cdot \Delta b_1}{4 \cdot \Delta b_1} = \frac{3}{4}$.

Šie jautrumai liks pastovūs, keičiantis b_1 ribose $15 < b_1 < 23$, todėl zoną $15 < b_1 < 23$ galima vadinti **optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės jautrumų parametro b_1 pokyčiams stabilumo zona**.

Kai $b_1=23$, tai $x_1^{(opt)}=4$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=53$, o padidinus pirmosios medžiagos atsargas dar daugiau, nekeičiant kitų modelio parametrų, t. y., pastūmus tiesę $2x_1+3x_2=b_1$ lygiagrečiai sau per tašką G už atkarpos DG ribų (žiūr. 333 pav.), optimaliu sprendiniu liks taško G koordinatės, tačiau tas taškas bus randamas jau kaip trečiosios ir antrosios tiesių $3x_2=15$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo taškas (o ne pirmosios ir antrosios tiesių $2x_1+3x_2=b_1$ ir $2x_1+x_2=13$, kaip buvo anksčiau, kol $15\leq b_1\leq 23$). Todėl, kai $b_1>23$, t. y., kai $19+\Delta b_1>23$, tai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, ir didinti pirmosios medžiagos atsargas b_1 , viršijant $b_1=23$ ir nedidinant kitų atsargų, jau nebėra prasmės.

Kai $b_1=15$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=1$, $P^{(opt)}=47$, o sumažinus pirmosios medžiagos atsargas taip, kad $12 < b_1 < 15$, optimaliu sprendiniu taps jau ne tiesių $2x_1+3x_2=b_1$ ir $2x_1+x_2=13$, o pirmosios ir ketvirtosios tiesių $2x_1+3x_2=b_1$ ir $3x_1=18$ susikirtimo taško koordinatė reikšmės $x_1=6$, $x_2=\frac{b_1}{3}-4$. Optimali tikslo funkcijos reikšmė taps lygi $P^{(opt)}=22+\frac{5}{3}b_1$. Naujoje jautrumų stabilumo zonoje parametro b_1 kitimo

atžvilgiu $12 < b_1 < 15$ jautrumų reikšmės bus tokios: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{5}{3}$.

Kai $b_1=12$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=42$, o kai $b_1<12$, tai optimaliu sprendiniu taps tiesės $2x_1+3x_2=b_1$ susikirtimo taško su abscisių ašimi $x_2=0$ koordinatė reikšmės $x_1=\frac{b_1}{2}$, $x_2=0$. Naujojoje

jautrumų stabilumo zonoje $0 < b_1 < 12$ gauname: $P^{(opt)}=3,5b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = 3,5$.

Sistematizuodami optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės priklausomybės nuo parametro b_1 kitimo nagrinėjimo rezultatus, gauname:

1) kai $b_1=0$, tai $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=0$;

2) kai $0 < b_1 < 12$, tai $x_1^{(opt)}=0,5b_1$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=3,5b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$,

$$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = 3,5;$$

3) kai keisdami b_1 pereiname per tašką $b_1=12$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=42$, o jautrumai keičiasi šuoliu: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo reikšmės 0,5 iki 0, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo reikšmės 0 iki $\frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo reikšmės 3,5 iki $\frac{5}{3}$;

4) kai $12 < b_1 < 15$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=\frac{b_1}{3}-4$, $P^{(opt)}=22+\frac{5}{3}b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=\frac{5}{3}$;

5) kai $b_1=15$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=1$, $P^{(opt)}=47$, o $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$ keičiasi šuoliu nuo 0 iki $-0,25$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo $\frac{1}{3}$ iki 0,5, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo $\frac{5}{3}$ iki 0,75;

6) kai $15 < b_1 < 23$, tai $x_1^{(opt)}=9,75-0,25b_1$, $x_2^{(opt)}=0,5b_1-6,5$, $P^{(opt)}=35,75+0,75b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=-0,25$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0,5$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0,75$;

7) kai $b_1=23$, tai $x_1^{(opt)}=4$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=53$, o $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}$ keičiasi šuoliu nuo $-0,25$ iki 0, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo 0,5 iki 0, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}$ – nuo 0,75 iki 0;

8) kai $b_1 > 23$, tai $x_1^{(opt)}=4$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=53$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}=0$.

Nagrinėdami optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės priklausomybę nuo parametro b_2 kitimo, analogiškai gausime:

1) kai $b_2=0$, tai $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=0$;

2) kai $0 < b_2 < 5$, tai $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=b_2$, $P^{(opt)}=5b_2$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=1$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=5$;

3) kai $b_2=5$, tai $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=25$, o $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}$ keičiasi šuoliu nuo 0 iki 0,5, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}$ – nuo 1 iki 0, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}$ – nuo 5 iki 3,5;

4) kai $5 < b_2 < 9$, tai $x_1^{(opt)}=0,5b_2-2,5$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=3,5b_2+7,5$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0,5$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=3,5$;

5) kai $b_2=9$, tai $x_1^{(opt)}=2$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=39$, o $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}$ keičiasi šuoliu nuo 0,5 iki 0,75, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}$ – nuo 0 iki $-0,5$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}$ – nuo 3,5 iki 2,75;

6) kai $9 < b_2 < 14\frac{1}{3}$, tai $x_1^{(opt)}=0,75b_2-4,75$, $x_2^{(opt)}=9,5-0,5b_2$, $P^{(opt)}=2,75b_2+14,25$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}=0,75$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}=-0,5$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}=2,75$;

7) kai $b_2 = 14\frac{1}{3}$, tai $x_1^{(opt)} = 6$, $x_2^{(opt)} = 2\frac{1}{3}$, $P^{(opt)} = 53\frac{2}{3}$, o $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2}$ keičiasi šuoliu nuo 0,75 iki 0, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2}$ – nuo –0,5 iki 0, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2}$ – nuo 2,75 iki 0;

8) kai $14\frac{1}{3} < b_2 < +\infty$, tai $x_1^{(opt)} = 6$, $x_2^{(opt)} = 2\frac{1}{3}$, $P^{(opt)} = 53\frac{2}{3}$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2} = 0$.

Būtų tikslinga, kad skaitytojas savarankiškai išnagrinėtų optimalaus sprendinio ir tikslo funkcijos optimalios reikšmės priklausomybę nuo parametro b_2 ir palygintų savo nagrinėjimo rezultatus su čia išspausdintais.

Jei pirmosios ir antrosios medžiagų išteklius b_1 ir b_2 didinti kartu, nekeičiant kitų optimizacinio modelio parametrų, tai optimalių gaminių skaičių pradės riboti trečiosios ir ketvirtosios medžiagų išteklių b_3 ir b_4 . Kadangi $3x_2 \leq 15$ ir $3x_1 \leq 18$, tai $0 \leq x_2 \leq 5$ ir $0 \leq x_1 \leq 6$.

Jei pirmosios ir antrosios medžiagos pirkime tik tiek, kad ji visada visa būtų sunaudota (t. y., kad laisvųjų kintamųjų x_3 ir x_4 optimalios reikšmės visada būtų lygios 0 ir optimalus sprendinys liktų jų stabilumo zonoje), tai optimalų sprendinį galėsime rasti kaip lygčių sistemos $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$ sprendinį

$$x_1^{(opt)} = \frac{3b_2 - b_1}{4}, \quad x_2^{(opt)} = \frac{b_1 - b_2}{2}.$$

Kadangi $0 \leq x_1 \leq 6$ ir $0 \leq x_2 \leq 5$, tai gauname, jog $0 \leq 3b_2 - b_1 \leq 24$ ir $0 \leq b_1 - b_2 \leq 10$.

Išsprendę šių nelygybių sistemą, gauname, kad b_2 galėtų keistis diapazone $[0; 17]$, o b_1 tuomet galėtų keistis taip, kad tenkintų nelygybes: $\begin{cases} b_2 \leq b_1 \leq 10 + b_2, \\ 3b_2 - 24 \leq b_1 \leq 3b_2. \end{cases}$

Galime elgtis ir atvirkščiai: laisvai pasirinkti b_1 reikšmę iš diapazono $[0; 27]$, o b_2 rinktis taip,

kad būtų tenkinama nelygybių sistema: $\begin{cases} \frac{b_1}{3} \leq b_2 \leq 8 + \frac{b_1}{3}, \\ b_1 - 10 \leq b_2 \leq b_1. \end{cases}$

Iš nelygybių sistemos $\begin{cases} 0 \leq b_2 \leq 17, \\ b_2 \leq b_1 \leq 10 + b_2, \\ 3b_2 - 24 \leq b_1 \leq 3b_2 \end{cases}$ išplaukia:

- 1) jei $0 \leq b_2 \leq 5$, tai $b_2 \leq b_1 \leq 3b_2$,
- 2) jei $5 \leq b_2 \leq 12$, tai $b_2 \leq b_1 \leq 10 + b_2$,
- 3) jei $12 \leq b_2 \leq 17$, tai $3b_2 - 24 \leq b_1 \leq 3b_2$.

Analogiškai gauname:

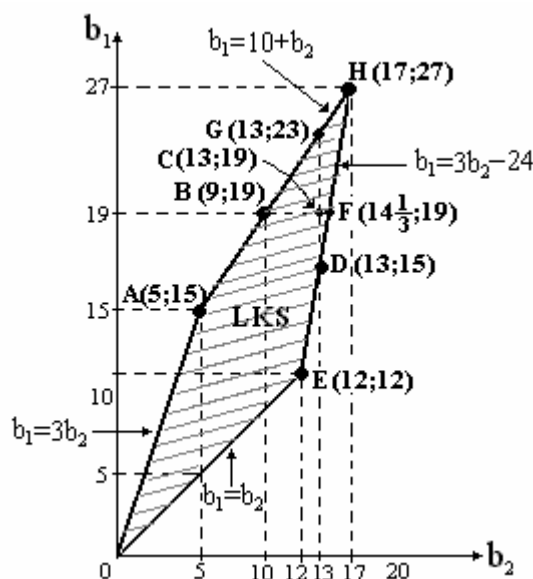
- 1) jei $0 \leq b_1 \leq 12$, tai $\frac{b_1}{3} \leq b_2 \leq b_1$,
- 2) jei $12 \leq b_1 \leq 15$, tai $\frac{b_1}{3} \leq b_2 \leq 8 + \frac{b_1}{3}$,
- 3) jei $15 \leq b_1 \leq 27$, tai $b_1 - 10 \leq b_2 \leq 8 + \frac{b_1}{3}$.

Šias priklausomybes pavaizduosime grafiškai (žiūr. 335 pav.) kur LKS – „leistino parametrų b_1 ir b_2 kitimo sritis“. Čia žodis „leistinas“ reiškia: „kaip ir kiek galima keisti b_1 ir b_2 , kad optimalus sprendinys išliktų tiesių $2x_1 + 3x_2 = b_1$ ir $2x_1 + x_2 = b_2$ susikirtimo taške.“

Fiksuodami vieno iš parametrų (b_1 ir b_2) reikšmę, mes, naudodamiesi 335 pav., galime nustatyti kito parametro kitimo diapazoną, kuriame laisvieji kintamieji ir jautrumai liks stabilūs. Pavyzdžiui, jei pasirinktume, kad $b_2 = 13$ (kaip buvo duota nagrinėjamo uždavinio pradinėse sąlygose), tai gautume, kad

$15 \leq b_1 \leq 23$. O jei pasirinktume, kad $b_1 = 19$, tai gautume, kad $9 \leq b_2 \leq 14\frac{1}{3}$. Tai sutampa su mūsų anksčiau

gautais rezultatais.



335 pav.

Jautrumų parametrų b_1 ir b_2 pokyčiams stabilumo zonoje (kurią ir vaizduoja LKS, 335-jame paveiksle padengta štrichais): $\Delta x_1^{(opt)} = 0,75 \Delta b_2 - 0,25 \Delta b_1$, $\Delta x_2^{(opt)} = 0,5 \Delta b_1 - 0,5 \Delta b_2$, $\Delta P^{(opt)} = 2,75 \Delta b_2 + 0,75 \Delta b_1$, $x_1^{(opt)} = 0,75b_2 - 0,25b_1$, $x_2^{(opt)} = 0,5b_1 - 0,5b_2$, $P^{(opt)} = 2,75b_2 + 0,75b_1$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = -0,25$,

$$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,5, \quad \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = 0,75, \quad \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} = 0,75, \quad \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = -0,5, \quad \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2} = 2,75.$$

Maksimalus pelnas pasiekiamas tada, kada $b_1 = 27$ ir $b_2 = 17$. Tada $x_1^{(opt)} = 6$, $x_2^{(opt)} = 5$, $P^{(opt)} = 67$. Tai 333 pav. vaizduoja taškas H, kuriame kirstųsi visos keturios tiesės $2x_1 + 3x_2 = 27$, $2x_1 + x_2 = 17$, $3x_2 = 15$ ir $3x_1 = 18$, o tai atitinka situaciją, kada visų keturių medžiagų atsargos pilnai sunaudojamos ir jų likučiai $x_3 = 27 - 2x_1 - 3x_2$, $x_4 = 17 - 2x_1 - x_2$, $x_5 = 15 - 3x_2$ ir $x_6 = 18 - 3x_1$ tampa lygūs 0.

Išeidami už 335 pav. pavaizduotos LKS ribų, mes paliekame vieną jautrumų stabilumo zoną ir patenkame į kitą. Pavyzdžiui, jei pasirinktume tašką $b_1 = 14$, $b_2 = 15$, tai patektume į jau anksčiau išnagrinėtą jautrumų stabilumo zoną, kurioje $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = \frac{5}{3}$ ir $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} = 0$,

$$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2} = 0, \quad \text{jei tik } 12 \leq b_1 \leq 17 \text{ ir } b_2 \geq 8 + \frac{b_1}{3}. \quad \text{Šioje zonoje } x_1^{(opt)} = 6, \quad x_2^{(opt)} = \frac{b_1 - 12}{3} \text{ ir } P^{(opt)} = 22 + \frac{5}{3}b_1.$$

Limituojančiais gamybos apimtį ištekliais šioje zonoje būtų jau ne pirmosios ir antrosios medžiagų ištekliai b_1 ir b_2 , bet pirmosios ir ketvirtosios medžiagų ištekliai b_1 ir b_4 . Todėl laisvaisiais kintamaisiais galėtų būti jau ne x_3 ir x_4 , o x_3 ir x_6 .

Jei pasirinktume tašką $b_1 = 19$, $b_2 = 6$, tai patektume į kitą jautrumų stabilumo zoną, kurioje $x_1^{(opt)} = 0,5b_2 - 2,5$, $x_2^{(opt)} = 5$, $P^{(opt)} = 3,5b_2 + 7,5$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1} = 0$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} = 0,5$,

$$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2} = 3,5, \quad \text{jei tik } 5 \leq b_2 \leq 17 \text{ ir } b_1 \geq b_2 + 10.$$

Šioje zonoje limituojančiais gamybos apimtį ištekliais būtų antrosios ir trečiosios medžiagų atsargos b_2 ir b_3 . Todėl laisvaisiais kintamaisiais galėtų būti kintamieji x_4 ir x_5 – antrosios ir penktosios medžiagų likučiai.

Būtų tikslinga, kad skaitytojas pabandytų nustatyti charakteristikas tų jautrumo stabilumo zonų, kurioms priklauso keletas atsitiktinai pasirinktų 335 pav. taškų (pavyzdžiui, taškai su koordinatėmis: $(b_1 = 20, b_2 = 16)$; $(b_1 = 25, b_2 = 10)$; $(b_1 = 16, b_2 = 5)$; $(b_1 = 10, b_2 = 3)$; $(b_1 = 28, b_2 = 18)$ ir pan.). Tai leistų skaitytojui patikrinti, ar jis pakankamai gerai suprato ir įsisavino optimalaus sprendinio analizės metodiką, ir atkreiptų jo dėmesį į tuos momentus, kurių jis, galbūt, nepastebėjo ir neapmąstė. Dar geriau

būtų, jei skaitytojas pabandytų suskirstyti visą pav. 335 plokštumos dalį, kurioje $(b_1 \geq 0) \wedge (b_2 \geq 0)$, į optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonas, panašiai, kaip tai padaryta 344 pav., vaizduojant optimalaus sprendinio priklausomybę nuo parametų b_{11} ir b_{21} kitimo.

Jei keistume tik parametą b_3 , nekeisdami kitų parametų, tai, kaip jau buvo pastebėta anksčiau, intervale $9 < b_3 < +\infty$ optimalus sprendinys $x_1^{(opt)}=5$, $x_2^{(opt)}=3$ liktų stabilus. Nesikeistų ir tikslo funkcijos

optimali reikšmė $P^{(opt)}=50$. Todėl zonoje $9 < b_3 < +\infty$ visi jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3}$ ir

$\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_3}$ būtų lygūs 0.

Kai $b_3=9$, tai optimalus sprendinys ir tikslo funkcijos optimali reikšmė lieka tokie pat, kaip ir tuomet, kai $b_3 > 9$, tačiau trečiosios medžiagos likutis x_5 tampa lygus 0 ir jautrumas $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3}$ keičiasi

šuo: nuo $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3} = 0$ taške $b_3=9+0$ iki $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3} = -\frac{1}{6}$ taške $b_3=9-0$. Keičiasi šuo ir jautrumas

$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3}$ – nuo 0 iki $\frac{1}{3}$, o taip pat $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_3}$ – nuo 0 iki 0,5.

Kai $9 < b_3 < 3$, tai optimalus sprendinys – tiesių $3x_2=b_3$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo taško koordinatės reikšmės. Todėl sprendinys $x_1^{(opt)}=\frac{39-b_3}{6}$, $x_2^{(opt)}=\frac{b_3}{3}$, $P^{(opt)}=0,5(91+b_3)$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3}=-\frac{1}{6}$,

$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3}=\frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_3}=0,5$.

Kai $b_3=3$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=1$, $P^{(opt)}=47$. Šią situaciją 333 pav. vaizduoja taškas D. Jame jautrumas $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3}$ išlieka toks pat, koks buvo, t. y. $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3}=\frac{1}{3}$, o jautrumai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3}$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_3}$

keičiasi šuo: pirmasis – nuo $-\frac{1}{6}$ iki 0, o antrasis – nuo $\frac{1}{2}$ iki $\frac{5}{3}$.

Kai $0 < b_3 < 3$, tai optimaliu sprendiniu tampa tiesių $3x_2=b_3$ ir $3x_1=18$ susikirtimo taško koordinatės $x_1=6$, $x_2=\frac{b_3}{3}$. Tai reiškia, kad laisvaisiais kintamaisiais tampa trečiosios ir ketvirtosios medžiagų likučiai x_5 ir x_6 , kurių optimalios reikšmės šioje stabilumo zonoje visą laiką lygios 0. Optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)}=42+\frac{5}{3}b_3$. Jautrumai: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_3}=0$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_3}=\frac{1}{3}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_3}=\frac{5}{3}$.

Kai $b_3=0$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=42$.

Keisdami ketvirtosios medžiagos išteklis (atsargas) b_4 ir nekeisdami kitų optimizacinio modelio parametų, gausime:

1) kai $b_4=0$, tai $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=25$;

2) kai $0 < b_4 < 6$, tai optimalus sprendinys – tiesių $3x_2=15$ ir $3x_1=b_4$ susikirtimo taško koordinatės reikšmės $x_1^{(opt)}=\frac{b_4}{3}$, $x_2^{(opt)}=5$, laisvieji kintamieji – trečiosios ir ketvirtosios medžiagų likučiai x_5 ir x_6 ,

kurių optimalios reikšmės šioje jų stabilumo zonoje lygios nuliui; $P^{(opt)}=25+\frac{7}{3}b_4$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_4}=\frac{1}{3}$,

$\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_4}=0$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_4}=\frac{7}{3}$;

3) kai $b_4=6$, tai $x_1^{(opt)}=2$, $x_2^{(opt)}=5$, $P^{(opt)}=39$, jautrumo koeficientas $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_4}=\frac{1}{3}$, o jautrumo

koeficientų $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_4}$ ir $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_4}$ reikšmės keičiasi šuo: pirmasis nuo 0 iki $-\frac{2}{9}$, antrasis nuo $\frac{7}{3}$ iki $\frac{11}{9}$;

4) kai $6 < b_4 < 15$, tai optimalus sprendinys – tiesių $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir $3x_1 = b_4$ susikirtimo taško koordinatų reikšmės $x_1 = \frac{b_4}{3}$, $x_2 = \frac{57 - 2b_4}{9}$, tuomet laisvieji kintamieji – pirmosios ir ketvirtosios medžiagų likučiai x_3 ir x_6 , kurių optimalios reikšmės jų stabilumo zonoje $6 < b_4 < 15$ lygios 0; $P^{(opt)} = \frac{95}{3} + \frac{11}{9}b_4$, $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_4} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_4} = -\frac{2}{9}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_4} = \frac{11}{9}$;

5) kai $b_4 = 15$, tai $x_1^{(opt)} = 5$, $x_2^{(opt)} = 3$, $P^{(opt)} = 50$, o jautrumai keičiasi šuoliu: $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_4}$ – nuo $\frac{1}{3}$ iki 0, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_4}$ – nuo $-\frac{2}{9}$ iki 0, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_4}$ – nuo $\frac{11}{9}$ iki 0;

6) kai $15 < b_4 < +\infty$, tai optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė nesikeičia, o visi jautrumo koeficientai $\frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_4}$, $\frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_4}$, $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_4}$ tampa lygūs 0, nes laisvaisiais kintamaisiais tampa pirmosios ir antrosios medžiagų likučiai x_3 ir x_4 .

Palieku skaitytojui pačiam išnagrinėti, kaip keistųsi optimalus sprendinys ir optimali tikslo funkcijos reikšmė, jei vienu ir tuo pačiu metu būtų keičiamos pirmosios ir trečiosios, pirmosios ir ketvirtosios, antrosios ir trečiosios, antrosios ir ketvirtosios, trečiosios ir ketvirtosios medžiagų atsargos. Nagrinėjimo rezultatus būtų tikslinga atvaizduoti grafiškai, kaip tai buvo padaryta 335 pav. bei 344 pav.

Nesunku įsitikinti, kad, didinant pirmosios, antrosios ir trečiosios medžiagų atsargas b_1, b_2 ir b_3 taip, jog $15 \leq b_3 < +\infty$, $b_1 = 12 + b_3$ ir $b_2 = 12 + \frac{b_3}{3}$, ir nekeičiant $b_4 = 18$, visų keturių medžiagų likučių x_3 , x_4 , x_5 ir x_6 optimalios reikšmės būtų lygios 0. Tuomet $x_1^{(opt)} = 6$, $x_2^{(opt)} = \frac{b_3}{3}$, $P^{(opt)} = 42 + \frac{5}{3}b_3$.

Didinant pirmosios, antrosios ir ketvirtosios medžiagų atsargas b_1 , b_2 ir b_4 taip, kad $18 \leq b_4 < +\infty$, $b_1 = 15 + \frac{2}{3}b_4$, $b_2 = 5 + \frac{2}{3}b_4$, ir nekeičiant $b_3 = 15$, visų keturių medžiagų likučių x_3 , x_4 , x_5 , x_6 optimalios reikšmės taip pat būtų lygios 0. Tuomet $x_1^{(opt)} = \frac{b_4}{3}$, $x_2^{(opt)} = 5$, $P^{(opt)} = 25 + \frac{7}{3}b_4$.

Didinant pirmosios ir trečiosios medžiagų atsargas b_1 ir b_3 , kai $b_1 \geq 15$, $b_3 \geq 3$, ir nedidinant antrosios medžiagos atsargų $b_2 = 13$, didinti ketvirtosios medžiagos atsargas b_4 nėra prasmės. Atvirkščiai, atsargas b_4 galima net mažinti. Pavyzdžiui, kai $3 \leq b_3 \leq 39$ ir $b_2 = 13$, tai tikslinga pasirinkti $b_1 = 13 + \frac{2}{3}b_3$, o $b_4 = \frac{39 - b_3}{2}$. Tuomet optimalios visų keturių medžiagų likučių reikšmės x_3 , x_4 , x_5 ir x_6 bus lygios 0. Tuomet $x_1^{(opt)} = \frac{39 - b_3}{6}$, $x_2^{(opt)} = \frac{b_3}{3}$, $P^{(opt)} = 0,5(91 + b_3)$.

Toliau didinant b_3 nuo 39 iki $+\infty$, tikslinga pasirinkti $b_4 = 0$, o b_1 ir b_2 didinti taip, kad $b_1 = b_3$ ir $b_2 = \frac{b_3}{3}$. Tuomet gautume, jog $x_1^{(opt)} = 0$, $x_2^{(opt)} = \frac{b_3}{3}$, $P^{(opt)} = \frac{5}{3}b_3$.

Analogiškai galima parodyti, kad, nekeičiant b_1 ir didinant b_4 , netikslinga didinti atsargas b_3 . Rekomenduojau skaitytojui išnagrinėti šį atvejį, o taip pat ir visus kitus atvejus, kai vienas iš keturių parametrų b_i , o taip pat ir parametrai p_j ir b_{ij} nekeičiami, o likusieji trys parametrai b_i keičiami.

Jei didintume iškart visus keturis parametrus b_i , tai būtų tikslinga juos didinti taip, kad būtų išlaikomi santykiai: $3b_1 = 3b_3 + 2b_4$, $3b_2 = b_3 + 2b_4$. Tuomet optimalūs visų keturių medžiagų likučiai bus lygūs 0, o $x_1^{(opt)} = \frac{b_4}{3}$, $x_2^{(opt)} = \frac{b_3}{3}$, $P^{(opt)} = \frac{7}{3}b_4 + \frac{5}{3}b_3$.

Visos šios išvados teisingos tik tuo atveju, kai turimi gamybiniai galingumai neriboti, o taip pat neribota gaminių paklausa ir kapitalas, kurį galima skirti medžiagų pirkimui bei gamybos apimtį didinimui. Kai turimas kapitalas yra ribotas, arba yra galimybė jį investuoti į kitas sritis, reikia atsižvelgti į kapitalo investavimo efektyvumą.

Kapitalo investavimo efektyvumą galima vertinti tuo pelnu, kurį atneša kiekvienas investuoto kapitalo vienetas: $E = \frac{P}{B}$; kur E – kapitalo investavimo efektyvumas, B – investuotas kapitalas (bendros išlaidos), P – gautas pelnas.

Pavyzdžiui, mūsų nagrinėjamajame uždavinyje $E = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{s_1 x_1 + s_2 x_2}$, kur x_1 ir x_2 – pirmojo ir antrojo tipo gaminių kiekiai, s_1 ir s_2 – jų vienetų savikainos, $p_1 = c_1 - s_1$ ir $p_2 = c_2 - s_2$ – lyginamieji pelnai, gaunami tuos gaminius realizuojant rinkoje kainomis c_1 ir c_2 .

Kai optimalus gamybos planas $x_1^{(opt)} = 5$, $x_2^{(opt)} = 3$, tai jį atitinka kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{7 \cdot 5 + 5 \cdot 3}{54 \cdot 5 + 36 \cdot 3} = \frac{50}{378} \approx 0,1323$.

Tai reiškia, kad kapitalo investavimo efektyvumas šiuo atveju sudaro apie 13,23%, kas nėra daug, tačiau, jei gaminių gamybos ir realizavimo procesas nėra ilgas, tokia gamyba verstinis gali būti pakankamai pelninga.

Tarkime, jog mūsų nagrinėjamu atveju turimi gamybiniai pajėgumai dar leidžia šiek tiek padidinti gamybos apimtį ir, parduodant nepanaudotus trečiosios ir ketvirtosios medžiagų likučius, galima nusipirkti pirmosios ir antrosios medžiagų, šiek tiek padidinant jų atsargas b_1 ir b_2 . Mums reikia nuspręsti, kurią iš šių medžiagų tikslinga pirkti pirmoje eilėje.

Apskaičiuosime **kapitalo investavimo į medžiagos i atsargų b_i didinimą diferencialinį**

$$\text{efektyvumą}^* E_{\Delta b_i} = \frac{\Delta_{b_i} P^{(opt)}}{\Delta_{b_i} B} = \frac{\frac{\Delta_{b_i} P^{(opt)}}{\Delta_{b_i}} \cdot \Delta b_i}{s_1 \Delta_{b_i} x_1^{(opt)} + s_2 \Delta_{b_i} x_2^{(opt)}} = \frac{\frac{\Delta_{b_i} P^{(opt)}}{\Delta_{b_i}}}{s_1 \frac{\Delta_{b_i} x_1^{(opt)}}{\Delta b_i} + s_2 \frac{\Delta_{b_i} x_2^{(opt)}}{\Delta b_i}} \text{ arba}$$

$$\frac{\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_i}}{s_1 \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_i} + s_2 \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_i}}, \text{ kur } \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_i}, \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_i}, \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_i} - \text{ tikslo funkcijos ir optimalaus sprendinio}$$

koordinatų jautrumai parametro b_i pokyčiams.

$$\text{Apskaičiuosime } E_{\Delta b_1} \text{ ir } E_{\Delta b_2} \text{ tam atvejui, kai } x_1^{(opt)} = 5, x_2^{(opt)} = 3. E_{\Delta b_1} = \frac{0,75}{-0,25 \cdot 54 + 0,5 \cdot 36} = \frac{1}{6} \approx 0,1667, E_{\Delta b_2} = \frac{2,75}{0,75 \cdot 54 - 0,5 \cdot 36} = \frac{11}{90} \approx 0,1227.$$

Iš gautų $E_{\Delta b_i}$ apskaičiavimo rezultatų išplaukia, jog pirmoje eilėje naudingiau pirkti pirmąją medžiagą, nes $E_{\Delta b_1} > E_{\Delta b_2}$ (nors $\frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_2} > \frac{\partial P^{(opt)}}{\partial b_1}$, ir pelnas didėja greičiau, didinant antrosios medžiagos atsargas).

Tokia išvada yra teisinga, kai turimas kapitalas yra ribotas, o gaminių paklausa yra pakankamai didelė ir mes norime turimą kapitalą panaudoti kuo efektyviau. Kai turimas kapitalas yra didelis ir visą jį investuoti dėl paklausos ar gamybinių pajėgumų ribotumo greitu laiku neįmanoma, tai gali būti naudinga pirkti antrąją medžiagą, kad gautume daugiau pelno nors ir išeikvoję daugiau lėšų, kurios šiuo metu vis tiek „pragulėtų“.

Apskaičiuosime naują optimalų gamybos planą, kurį galima būtų sudaryti, parduodant trečiosios bei ketvirtosios medžiagų likučius ir už gautus pinigus perkant papildomą pirmosios medžiagos kiekį. Naujasis optimalus planas turėtų duoti didesnę pelną, nes į gamybą būtų investuotas visas kapitalas $x_1^{(opt)} s_1 + x_2^{(opt)} s_2 + a_3 x_5^{(opt)} + a_4 x_6^{(opt)} = 5 \cdot 54 + 3 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 396$, o ne tik jo dalis $x_1^{(opt)} \cdot s_1 + x_2^{(opt)} \cdot s_2 = 5 \cdot 54 + 3 \cdot 36 = 378$.

Didinant pirmosios medžiagos atsargas, didės išlaidos B , nes reikės pirkti pirmąją medžiagą, mokant už tai sumą $a_1 \Delta b_1 = 5 \Delta b_1$. Tačiau išlaidų B pokytis ΔB_1 ne būtinai bus lygus $5 \Delta b_1$, nes, keičiantis gamybos planui, keisis ne tik sunaudotų medžiagų kiekiai, bet ir gamybinių išlaidų suma. Todėl

* Kapitalo investavimo diferencialinį efektyvumą vadina dar ir **marginaliniu kapitalo investavimo efektyvumu**.

jautrumo koeficientų stabilumo zonoje gausime, jog $\Delta B = \Delta x_1^{(opt)} \cdot s_1 + \Delta x_2^{(opt)} \cdot s_2 = \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} \Delta b_1 \cdot s_1 + \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} \Delta b_1 \cdot s_2 + \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} \Delta b_1 \cdot s_2$. Kai $15 \leq b_1 \leq 23$, t. y., kai $-4 \leq \Delta b_1 \leq 4$, tai $\Delta B = \Delta b_1 (-0,25 \cdot 54 + 5 \cdot 36) = 4,5 \Delta b_1$.

Žinodami nepanaudoto iki šiol kapitalo sumą $a_3 x_5^{(opt)} + a_4 x_6^{(opt)} = 18$, galime rasti pirmosios medžiagos kiekį Δb_1 , kurį galima pirkti ir panaudoti gamyboje: $\Delta b_1 = \frac{\Delta B}{4,5} = \frac{18}{4,5} = 4$. Kadangi šis dydis neviršija 4, tai turimų trečiosios medžiagos atsargų $b_3 = 15$ pilnai pakaks tokiam gamybos didinimui, didinant b_1 , ir tos atsargos bus pilnai sunaudotos, nes naujas jų likutis $x_5^{(n)} = 15 - 3x_2^{(n)} = 15 - 3(x_2^{(s)} + \Delta x_2) = 15 - 3(3 + \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_1} \Delta b_1) = 15 - 3(3 + 0,5 \cdot 4) = 0$.

Kadangi $x_1^{(n)} = x_1^{(s)} + \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_1} \Delta b_1 = 5 - 0,25 \cdot 4 = 4$, o $x_2^{(n)}$, kaip ką tik buvome gavę, lygus 5, tai, prieš

pradedant realizuoti naują gamybos planą $x_1^{(n)} = 4$, $x_2^{(n)} = 5$, bus galima parduoti naujai atsiradusį ketvirtosios medžiagos likutį $x_6^{(n)} = 18 - 3x_1^{(n)} = 6$, gaunant už tai sumą $a_4 \cdot x_6 = 4 \cdot 6 = 24$, kurią po to galima panaudoti pirmosios medžiagos pirkimui ($a_1 \Delta b_1 = 5 \cdot 4 = 20$) ir padidėjusių gamybos išlaidų ($\Delta x_1 d_1 + \Delta x_2 d_2 = -1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 = 4$) padengimui.

Realizavus naują gamybos planą, bendros išlaidos B sudarys sumą $B^{(n)} = \Delta x_1^{(n)} \cdot s_1 + \Delta x_2^{(n)} \cdot s_2 = 4 \cdot 54 + 5 \cdot 36 = 396$, t. y., bus sunaudotas visas turimas kapitalas. Naujas gautas pelnas sudarys sumą $P^{(n)} = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 7 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 53$, todėl kapitalo investavimo efektyvumas taps lygus $E^{(n)} = \frac{53}{396} = 0,13(38)$, t. y. taps didesnis, negu buvo gauta, realizuojant senąjį optimalų planą $x_1^{(opt)} = 5$, $x_2^{(opt)} = 3$, kada buvome gavę $E = \frac{50}{378} \approx 0,1323$.

Reiškia, pereidami prie naujo optimalaus plano, mes turimą kapitalą panaudojame ne tik pilniau, bet ir efektyviau.

Jei būtume pirkę ne pirmąją, o antrąją medžiagą, tai būtume gavę kitą optimalų planą $x_1^{(n)} = x_1^{(s)} + \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} \Delta b_2$, $x_2^{(n)} = x_2^{(s)} + \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} \Delta b_2$. Kai $9 \leq b_2 \leq 14 \frac{1}{3}$, tai $(-4 \leq \Delta b_2 \leq \frac{4}{3})$. Dydį Δb_2 rasime,

pasinaudodami tuo, kad išlaidų prieauglis $\Delta B = s_1 \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} \Delta b_2 + s_2 \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} \Delta b_2 = 54 \cdot 0,75 \cdot \Delta b_2 - 36 \cdot 0,5 \Delta b_2 = 22,5 \Delta b_2$ turėtų būti lygus papildomoms pajamoms $a_3 x_5 + a_4 x_6 = 18$, iš kur gauname, jog $\Delta b_2 = 0,8$. Šis resursų pokytis neišveda iš optimalaus sprendinio jautrumo koeficientų stabilumo zonos, nes $0,8 < \frac{4}{3}$.

Todėl $x_1^{(n)} = x_1^{(s)} + \frac{\partial x_1^{(opt)}}{\partial b_2} \Delta b_2 = 5 + 0,75 \cdot 0,8 = 5,6$, $x_2^{(n)} = x_2^{(s)} + \frac{\partial x_2^{(opt)}}{\partial b_2} \Delta b_2 = 3 - 0,5 \cdot 0,8 = 2,6$ ir pilnos išlaidos $B_1^{(n)} = 54 \cdot 5,6 + 36 \cdot 2,6 = 396$. Nauja pelno suma $P^{(n)} = 7x_1^{(n)} + 5x_2^{(n)} = 7 \cdot 5,6 + 5 \cdot 2,6 = 52,2$.

Prieš pradedant realizuoti šį planą, bus galima parduoti laukiamą trečiosios medžiagos likutį $x_5^{(n)} = 15 - 3x_2^{(n)} = 7,2$ ir naują ketvirtosios medžiagos likutį $x_6^{(n)} = 18 - 3x_1^{(n)} = 1,2$, gaunant už tai sumą $x_5^{(n)} a_3 + x_6^{(n)} a_4 = 7,2 \cdot 1 + 1,2 \cdot 4 = 12$. Ši suma bus reikalinga antrosios medžiagos pirkimui ($a_2 \cdot \Delta b_2 = 11 \cdot 0,8 = 8,8$) ir padidėjusioms gamybinėms išlaidoms ($d_1 \cdot \Delta x_1 + d_2 \cdot \Delta x_2 = 10 \cdot 0,6 - 0,4 \cdot 7 = 3,2$) padengti. Papildomų pajamų ir papildomų išlaidų sumos, kaip ir turėjo būti, yra lygios: $8,8 + 3,2 = 12$.

Kapitalo investavimo efektyvumas šiuo atveju $E^{(n)} = \frac{52,2}{396} \approx 0,1318$ ir yra mažesnis, negu

perkant pirmąją medžiagą, kur buvome gavę $E^{(n)} = 0,13(38)$. Taip ir turėjo būti, nes $E_{\Delta b_2} = \frac{11}{90}$ yra

mažesnis, negu $E_{\Delta b_1} = \frac{1}{6}$.

Kadangi $E_{\Delta b_2} < E^{(s)} \approx 0,1323$, tai šiuo atveju $E^{(n)} < E^{(s)}$. Tai reiškia, kad šiuo atveju pelnas išaugo nuo 50 iki 52,2 ne todėl, kad kapitalas buvo efektyviau investuotas, o todėl, kad buvo investuotas didesnis kapitalas (396 vietoj 378).

Jei įmonė turėtų papildomo kapitalo pirmajai ir antrajai medžiagai pirkti bei gamybos apimčiai didinti, tai trečiosios ir ketvirtosios medžiagos likučių būtų galima neparduoti, o pilnai sunaudoti, padidinus b_1 nuo 19 iki 27 ir b_2 nuo 13 iki 17. Tuomet gautume $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=5$, $x_3^{(opt)}=x_4^{(opt)}=x_5^{(opt)}=x_6^{(opt)}=0$, $P^{(opt)}=67$, $B=6 \cdot 54 + 5 \cdot 36 = 50,4$, $E \approx 0,1329$. Papildomos išlaidos $\Delta B = 50,4 - 396 = 108$ būtų išleistos pirmajai ir antrajai medžiagai pirkti ($a_1 \Delta b_1 + a_2 \Delta b_2 = 5 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 84$) ir gamybai didinti ($\Delta x_1 d_1 + \Delta x_2 d_2 = (6-5) \cdot 10 + (5-3) \cdot 7 = 24$).

Kapitalo investavimo efektyvumas būtų didesnis ne tik už tą, kurį galėtume gauti, pirkdami tik antrąją medžiagą, bet ir už $E^{(s)} \approx 0,1323$, t. y., **lyginant su senuoju optimaliu planu, pelnas padidėtų dėl abiejų priežasčių: ir todėl, jog padidėtų investuoto kapitalo suma ir todėl, kad padidėtų investavimo efektyvumas**. Tačiau kapitalo investavimo efektyvumas vis dėl to būtų mažesnis už tą, kurį galima gauti, perkant tik pirmąją medžiagą.

Reikia pažymėti, kad mūsų gauti dydžiai E ir $E_{\Delta b_1}$ nėra pakankamai tobuli kapitalo investavimo efektyvumo įverčiai, nes jie priklauso nuo optimalaus plano. **Pirminiais kapitalo investavimo efektyvumo įverčiais derėtų laikyti gaminių j lyginamuosius efektyvumus** $E_j = \frac{p_j}{s_j}$,

kurie priklauso tik nuo gaminių savikainos s_j ir kainos c_j : $E_j = \frac{c_j - s_j}{s_j} = \frac{c_j}{s_j} - 1$. Šie įverčiai nesikeičia,

keičiantis gamybos planui.

Mūsų nagrinėjamu atveju $E_1 = \frac{7}{54} \approx 0,1296$, $E_2 = \frac{5}{36} \approx 0,13(8)$, o tai reiškia, jog antrojo tipo gaminių gamyba yra pelningesnė, negu pirmojo.

Nesunku įrodyti, kad E_1 ir E_2 yra kraštutinės E reikšmės, t. y., kad $E_1 \leq E \leq E_2$.

Kadangi $E = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{s_1 x_1 + s_2 x_2} = \frac{7x_1 + 5x_2}{54x_1 + 36x_2}$, tai **vienodo efektyvumo $E = \text{const}$ linijomis** bus tiesės $(7-54E)x_1 + (5-36E)x_2 = 0$, kertančios koordinačių pradžios tašką ($x_1=0$, $x_2=0$).

Kai $E = \frac{7}{54} = E_1$, tai vienodo efektyvumo tiesė sutaps su abscisių ašimi $x_2=0$, o kai $E = \frac{5}{36} = E_2$, tai ji sutaps su ordinačių ašimi $x_1=0$. Keičiantis E nuo E_1 iki E_2 , vienodo efektyvumo tiesė

suksis aplink koordinačių pradžios tašką, kirsdama LSS. Pavyzdžiui, esant $E = \frac{25}{189}$, vienodo efektyvumo tiesė kirs taškus ($x_1=0$, $x_2=0$) ir ($x_1=5$, $x_2=3$). Tai reiškia, kad, judant šia tiese nuo taško ($x_1=0$, $x_2=0$) iki taško ($x_1=5$, $x_2=3$), kapitalo investavimo efektyvumas liks pastovus ir lygus $E = \frac{25}{189}$, o pelnas P keisis nuo 0 iki $7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$, nes didės investuoto kapitalo suma nuo 0 iki 378.

Didėjant x_2 ir mažėjant x_1 iki 0, efektyvumas E didės nuo E_1 iki E_2 , pasiekdamas maksimumą tada, kada bus gaminami tik antrojo tipo gaminiai. Pavyzdžiui, jei visą mūsų atveju turimo kapitalo sumą, lygią 396, investuotume tik į antrojo tipo gaminių gamybą, parduodami visą ketvirtojo tipo medžiagą ir 2 vienetus antrojo tipo medžiagos bei pirkdami 14 vienetų pirmojo ir 18 vienetų trečiojo tipo medžiagos, tai gautume $x_1^{(opt)}=0$, $x_2^{(opt)}=11$, $x_3^{(opt)}=x_4^{(opt)}=x_5^{(opt)}=x_6^{(opt)}=0$, $B=s_1 x_1 + s_2 x_2 = 396$, $P=p_1 x_1 + p_2 x_2 = 55$, $E = \frac{P}{B} = \frac{55}{396} = \frac{5}{36} = 0,13(8)$.

Lyginant su senuoju optimaliu planu $x_1^{(opt)}=5$, $x_2^{(opt)}=3$, pelnas padidėtų 10% ir tokiam pelno padidimui neprireiktų jokių papildomų išlaidų. Pakaktų tik pilniau ir efektyviau panaudoti turimą kapitalą. Rezultatas būtų geresnis net už tą, kurį mes būtume gavę, papildomai pirkdami 4 vienetus pirmosios medžiagos ir parduodami 6 vienetus ketvirtosios medžiagos, kuomet už tuos pačius 396 kapitalo vienetų būtume gavę pelną $P=53$, t. y. dviem vienetais mažesnį.

Nagrinėdami optimalaus sprendinio priklausomybę nuo pirmojo tipo gaminių kainos c_1 kitimo, nesikeičiant visiems kitiems optimizacinio modelio parametrams, mes buvome gavę, kad, kainai c_1 tapus

lygiai $57\frac{1}{3}$, optimaliu sprendiniu tampa kiekvieno atkarpos BC (žiūr. 334 pav.) taško koordinatės.

Neatidžiam skaitytojui galėjo pasirodyti, kad tokiu atveju visi atkarpos BC taškai vaizduoja visiškai lygiaverčius optimalius sprendinius, nes kiekviename iš šių taškų pelno funkcija turi vieną ir tą pačią maksimalią tokiomis sąlygomis reikšmę $P=31\frac{2}{3}$. Tačiau taip iš tikrųjų nėra, nes

atkarpos BC taškus charakterizuoja skirtingi investuoto kapitalo dydžiai B ir todėl skirtingos kapitalo investavimo efektyvumo reikšmės E. Pavyzdžiui, taške C su koordinatėmis $x_1=5$, $x_2=3$ investuotas kapitalas $B=5\cdot 5+3\cdot 3=378$ ir efektyvumas $E=\frac{95}{1134}\approx 0,0838$. Slenkant atkarpa BC taško B link, investuoto kapitalo dydis B mažėja, o E – didėja, pasiekdamas maksimumą taške B, kur investuoto kapitalo dydis $B=x_1s_1+x_2s_2=2\cdot 5+5\cdot 3=288$ ir efektyvumas $E=\frac{95}{864}\approx 0,10995\approx 0,11$. Todėl pasirenkant

optimalų sprendinį, naudingiau pasirinkti $x_1=2$, $x_2=5$, nes gaunamas tas pats pelnas, investuojant mažiau kapitalo – paliekant nesunaudotus 4 antrosios ir 12 ketvirtosios medžiagos vienetų, o be to sutaupant pačioje gamyboje $5d_1+3d_2-2d_1-5d_2=3d_1-2d_2=16$ vienetų kapitalo.

Analogiškai gauname, kad esant $c_1=64$, kai visuose atkarpos CD taškuose gaunamas vienodas maksimalus pelnas $P=65$, tikslingiausia pasirinkti optimaliu sprendiniu tašką D su koordinatėmis $x_1=6$, $x_2=1$, nes šiame taške gavome mažiausią $B=360$ ir didžiausią $E=\frac{13}{72}\approx 0,1806$.

Dėl tų pačių priežasčių tuo atveju, kai, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, antrojo tipo gaminio kaina tampa $c_2=46,5$, atkarpoje BC naudingiausia pasirinkti tašką B, o kai $c_2=39,5$ – atkarpoje CD pasirinkti tašką D.

Tačiau grįžkime prie pradinių kainų reikšmių $c_1=61$, $c_2=41$. Esant tokioms kainoms ir nesant galimybės keisti kitus modelio parametrus, optimalus sprendinys, kaip jau buvome radę, yra $x_1=5$, $x_2=3$, kurį pasirinkę, gauname $B=378$, $P=50$, $E\approx 0,1323$. Jei galima medžiagas parduoti ir pirkti jų kainomis $a_1=5$, $a_2=11$, $a_3=1$, $a_4=4$ ir jei yra galimybė visus antrojo tipo gaminius realizuoti (parduoti), tai naudingiausia, kaip taip pat jau buvome gavę, pasirinkti planą $x_1=0$, $x_2=11$, $B=396$, $P=55$, $E=0,13(8)$.

Todėl planuojant gamybą laisvosios rinkos sąlygomis, pirmoje eilėje būtų tikslinga išsiaiškinti antrojo tipo gaminių paklausą ir investuoti kapitalą į to tipo gaminių reikalingo kiekio gamybą, o tik likusią kapitalo dalį (jei tokia liktų) – į pirmojo tipo gaminių reikalingo kiekio gamybą. Žinoma, **būtinai reikėtų atsižvelgti į gamybos bei realizacijos procesų trukmę ir vertinti kapitalo investavimo efektyvumą laiko vienetui, pirmoje eilėje pasirenkant tokių gaminių gamybą, į kurią investuotas kapitalo vienetas per laiko vienetą duoda didžiausią pelną.**

Planuojant gamybą, reikia atsižvelgti ir į gaminių kainų galimo kitimo tendencijas, jų dinamiką.

Pavyzdžiui, mūsų nagrinėjamu atveju dėl to, kad antrojo tipo gaminių gamyba, esant vienodoms gamybos ir realizacijos procesų vidutinėms trukmėms, yra pelningesnė, negu pirmojo tipo, daugiau gamintojų stengsis investuoti kapitalą į antrojo tipo gaminių gamybą ir dėl šios priežasties šių gaminių pasiūla gali pradėti viršyti paklausą. Tuomet kai kurie gamintojai, norėdami konkurencijos sąlygomis realizuoti pagamintą produkciją, gali pradėti mažinti antrojo tipo gaminių kainą c_2 , tuo pačiu mažindami lyginamąjį pelną p_2 ir kapitalo investavimo efektyvumą E_2 .

Iš kitos pusės, dėl to, kad pirmojo tipo gaminių gamyba yra mažiau pelninga, negu antrojo, pirmojo tipo gaminių gamyba ir pasiūla gali tapti mažesnė, negu paklausa. Tuomet gamintojai gali pradėti kelti pirmojo gaminio kainą c_1 , didindami lyginamąjį pelną p_1 ir kapitalo investavimo efektyvumą E_1 .

Dėl ką tik aptartų priežasčių laisvosios rinkos sąlygomis ilgainiui turėtų nusistovėti apytikriai vienodi kapitalo investavimo efektyvumai įvairių tipų gaminiams ir paslaugoms. Tačiau realiaame gyvenime dėl nuolat vykstančių pokyčių gamybos technologijoje ir prekyboje, o taip pat dėl besikeičiančių poreikių absoliuti kapitalo investavimo efektyvumo pusiausvyra niekada ilgam nenusistovi, o pasireiškia tik kapitalo investavimo efektyvumo pokyčių, orientuotų į tokią pusiausvyrą, tendencijos.

Atsižvelgiant į šias tendencijas, stengiamasi nuolat tobulinti gamybos technologijas, gerinant gaminių kokybę bei mažinant jų savikainą, ir tokiu būdu maksimaliai išnaudoti atsirandantį kapitalo investavimo efektyvumo padidėjimą iki tol, kol tas efektyvumas suspės niveliuotis.

Visa tai rodo, kad optimalus planavimas nesusiveda tik į paprasto (statinio) ir determinuoto optimizavimo uždavinio optimalaus sprendinio paiešką, o reikalauja žymiai sudėtingesnės analizės. Tai viena iš priežasčių, minimų [15], dėl kurių „klasikiniai“ optimizavimo uždavinių sprendimo metodai nėra praktikoje taikomi taip plačiai, kaip to tikėjosi tų metodų

kūrėjai bei propaguotojai. Atsižvelgiant į tai, aukštosiose mokyklose, dėstant optimizavimo metodus ir operacijų tyrimą, nederėtų apsiriboti vien tik supažindinimu su optimalaus sprendinio paieškos algoritmais. Reikėtų žymiai daugiau dėmesio skirti optimalių sprendinių analizei ir, bendrai, sistemei analizei, kurios daliniu atveju kaip tik ir yra optimalaus sprendinio stabilumo ir jautrumo modelio parametrų pokyčiams analizė.

Pereisime prie optimalaus sprendinio $\bar{x}^{(opt)} = (x_1^{(opt)}, x_2^{(opt)})$ ir tikslo funkcijos $P^{(opt)}$ reikšmės priklausomybės nuo optimizavimo uždavinio technologinių parametrų b_{ij} nagrinėjimo. Ši priklausomybė yra gana sudėtinga, nes nuo parametrų b_{ij} priklauso ir apribojimai, ir tikslo funkcija.

Tarkime, kad, nesikeičiant visiems kitiems modelio parametrams, keičiasi pirmosios medžiagos lyginamosios sąnaudos b_{11} pirmojo tipo gaminio gamybai, pavyzdžiui, mažėja tobulinant gamybos technologiją, arba didėja dėl padidėjusio broko. Keičiantis b_{11} , keisis apribojimų tiesės $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ kampas su ordinačių ašimi: ši tiesė sukiosis aplink tašką $(x_1=0, x_2=\frac{9}{13})$. Tuo pačiu metu keisis ir vienodo pelno tiesės $p_1x_1 + 5x_2 = P$ padėtis plokštumoje, nes, keičiantis b_{11} , keisis p_1 , kadangi $p_1 = c_1 - s_1 = c_1 - d_1 - \sum_{i=1}^4 b_{i1}a_i = 61 - 10 \cdot b_{11} \cdot 5 - 2 \cdot 11 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 4 = 17 - 5b_{11}$.

Kai $\frac{b_{11}}{3} < \frac{17-5b_{11}}{5} < 2$, iš kur išplaukia $1,4 < b_{11} < 2,5$, tai optimalus sprendinys yra tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $2x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taško $C_{b_{11}}$ koordinatė reikšmės $x_1 = \frac{20}{6-b_{11}}$, $x_2 = 13 - \frac{40}{6-b_{11}} = \frac{38-13b_{11}}{6-b_{11}}$, o optimali tikslo funkcijos reikšmė $F = \frac{530-165b_{11}}{6-b_{11}} = 165 - \frac{460}{6-b_{11}}$. Kai b_{11} turės „pradinę“ reikšmę $b_{11}=2$, tai taškas $C_{b_{11}}$ sutaps su tašku C (žiūr. 334 pav.) ir gausime $x_1=5$, $x_2=3$, $P=50$, $B=378$, $E \approx 0,1323$.

Mažėjant b_{11} nuo 2 iki 1,4, optimalus pirmojo tipo gaminių skaičius x_1 mažės nuo 5 iki $4\frac{8}{23}$ ir taškas $C_{b_{11}}$ slinks į kairę, kildamas tiesė $2x_1 + x_2 = 13$ aukštyn. Tuo pačiu didės x_2 nuo 3 iki $4\frac{7}{23}$, o taip pat didės ir optimali tikslo funkcijos reikšmė, pasiekdama taške C^* su koordinatėmis $x_1 = 4\frac{8}{23}$, $x_2 = 4\frac{7}{23}$ maksimalų dydį $P^{(opt)} = 65$. Investuoto kapitalo suma $B = 368 + \frac{40}{6-b_{11}}$, mažėjant b_{11} , mažės iki $376\frac{16}{23}$, o kapitalo investavimo efektyvumas $E = \frac{P}{B} = \frac{530-165b_{11}}{2248-368b_{11}} = \frac{165}{368} + \frac{21985}{46 \cdot (368b_{11} - 2248)} = \frac{165}{368} - \frac{21985}{46(2248-368b_{11})}$ didės dėl abiejų priežasčių – dėl $P^{(opt)}$ didėjimo ir dėl B mažėjimo, – pasiekdama taške C^* maksimalią reikšmę $E \approx 0,1726$.

Mažėjant b_{11} , tiesė $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ suksis aplink tašką $(x_1=0, x_2=\frac{19}{3})$ kryptimi, priešinga laikrodžio rodyklės sukimosi kryptiai, o vienodo pelno tiesė $(17-5b_{11})x_1 + 5x_2 = 165 - \frac{460}{6-b_{11}}$, slinkdama aukštyn ir į kairę, suksis apie judantį tašką $C_{b_{11}}$ laikrodžio rodyklės kryptimi ir, kai parametras taps lygus 1,4, sutaps su tiesė $2x_1 + x_2 = 13$, nes vienodo pelno tiesės lygtimi taps lygtis $10x_1 + 5x_2 = 65$.

Todėl, esant $b_{11}=1,4$, visuose atkarpos C^*D taškuose pelnas $P^{(opt)}$ bus vienodas ir lygus 65, ir, jei orientuotis tik į pelno $P^{(opt)}$ dydį, optimaliu sprendiniu galima imti bet kurio atkarpos C^*D taško koordinatas, pradedant nuo taško C^* su koordinatėmis $x_1 = 4\frac{8}{23}$, $x_2 = 4\frac{7}{23}$ ir baigiant tašku D su koordinatėmis $x_1=6$, $x_2=1$. Tačiau, kadangi, slenkant atkarpa C^*D nuo taško C^* link taško D, išlaidos $B = x_1s_1 + x_2s_2 = x_1(44+5b_{11}) + x_2 \cdot 36 = x_1(44+5 \cdot 1,4) + 36x_2 = 51x_1 + 36x_2 = 51x_1 + 36(13-2x_1) = 468 - 21x_1$ mažės nuo $376\frac{16}{23}$ iki 322, nes didės $x_1^{(opt)}$, tai optimaliu sprendiniu tikslinga pasirinkti taško D koordinatas $x_1=6$,

$x_2=1$. Šiame taške $E=\frac{65}{322}\approx 0,2019$, tačiau liks nepanaudoti 7,6 vienetai pirmosios medžiagos ir 12 vienetų trečiosios medžiagos, kuriuos pardavus ir pirkus ketvirtosios ir antrosios medžiagos, pelną būtų galima dar padidinti.

Jei, nekeičiant kitų modelio parametru, b_{11} dar sumažėtų, tai optimaliu sprendiniu liktų taško D koordinatės $x_1=6$, $x_2=1$, nes, b_{11} mažėjant nuo 1,4 iki 0, vienodo pelno tiesės lygtis keistųsi nuo $10x_1+5x_2=65$ iki $17x_1+5x_2=107$, t. y. vienodo pelno tiesė, sukdama laikrodžio rodyklės kryptimi, dar labiau „statėtų“.

Jei b_{11} didėtų nuo 2 iki 2,55, tai tiesių $2x_1+x_2=13$ ir $b_{11}x_1+3x_2=19$ susikirtimo taškas $C_{b_{11}}$, vaizduojantis optimalų sprendinį, slinktų tiesė $2x_1+x_2=13$ žemyn ir į dešinę, nes $x_1^{(opt)}=\frac{20}{6-b_{11}}$ –

didėtų, o $x_2^{(opt)}=13-\frac{40}{6-b_{11}}$ – mažėtų. Kartu mažėtų ir optimali tikslo funkcijos reikšmė

$$P^{(opt)}=165-\frac{460}{6-b_{11}}.$$

Tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $(17-5b_{11})x_1+5x_2=P=165-\frac{460}{6-b_{11}}$, besisukdamos priešingomis kryptimis, b_{11} pasiekus reikšmę $b_{11}=2,55$, sutaptų. Tuomet tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ atkarpa nuo tiesių $2,55x_1+3x_2=19$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo taške C^{**} su koordinatėmis $x_1=5\frac{55}{69}$, $x_2=1\frac{28}{69}$ iki tiesių $2,55x_1+3x_2=19$ ir $3x_2=15$ susikirtimo taško B^{**} su koordinatėmis $x_1=1\frac{29}{51}$, $x_2=5$, taptų atkarpa, kurios taškuose tikslo funkcijos reikšmė būtų pastovi ir lygi $P=31\frac{2}{3}$. Kadangi, slenkant tiesė $2,55x_1+3x_2=19$ nuo taško C^{**} iki taško B^{**} , išlaidos $B=s_1x_1+s_2x_2=(44+5b_{11})x_1+36x_2=56,75x_1+36(\frac{19}{3}-0,85x_1)=26,15x_1+228$, mažėjant x_1 , mažėtų, tai optimaliu sprendiniu tikslinga būtų pasirinkti taško B^{**} koordinatės $x_1=1\frac{29}{51}$, $x_2=5$. Tuomet gautume jog $B=329\frac{1}{51}$ ir $E\approx 0,0962$.

Jei b_{11} padidėtų dar daugiau, pavyzdžiui $2,55 < b_{11} < 3,4$, tai optimaliu sprendiniu taptų tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $3x_2=15$ susikirtimo taškas su koordinatėmis $x_1=\frac{4}{b_{11}}$, $x_2=5$, kuriame didėjant b_{11} , tikslo funkcijos reikšmė $P=\frac{68}{b_{11}}+5$ mažės nuo $31\frac{2}{3}$ iki 25.

Kai $b_{11}=3,4$, tai pirmojo tipo gaminių gamyba nebeduotų pelno, o tuo atveju, kai $b_{11}>3,4$ – taptų nuostolinga. Tokiu atveju taptų tikslinga atsisakyti pirmojo tipo gaminių gamybos ir gaminti tik antrojo tipo gaminius. Optimaliu planu taptų planas $x_1=0$, $x_2=5$, $P=25$, o pardavus 2 vienetus antrosios ir 18 vienetų ketvirtosios medžiagos, bei nupirkus 14 vienetų pirmosios ir 18 vienetų trečiosios medžiagos, optimaliu planu būtų $x_1=0$, $x_2=11$, $P=55$.

Samprotaudami analogiškai, kaip ir parametro b_{11} keitimo atveju, gausime, kad, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, o parametru b_{12} kintant ribose $2\frac{6}{17} < b_{12} < 3,3$, optimaliu sprendiniu bus

$$x_1=6,5-\frac{3}{b_{12}-1}, x_2=\frac{6}{b_{12}-1}, P=\frac{31b_{12}+107}{2b_{12}-2}, B=\frac{381b_{12}-387}{b_{12}-1}, E=\frac{31b_{12}+107}{762b_{12}-774}.$$

Kai $b_{12}=2\frac{6}{17}$, tai vienodo pelno tiesė $7x_1+\frac{140}{17}x_2=66,5$ sutampa su tiesė $2x_1+b_{12}x_2=19$.

Tuomet visose tų tiesių atkarpos taškuose, pradedant nuo tiesių $2x_1+\frac{40}{17}x_2=19$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo taško, turinčio koordinatės $x_1=4\frac{13}{46}$, $x_2=4\frac{10}{23}$, ir baigiant tiesių $2x_1+\frac{40}{17}x_2=19$ ir $3x_2=15$ susikirtimo tašku, turinčiu koordinatės $x_1=3\frac{21}{34}$, $x_2=5$, tikslo funkcija turi vieną ir tą pačią reikšmę $P=66,5$. Kadangi

tos atkarpos taškuose išlaidos $B=513 - \frac{523}{17}x_2$ mažėja, didėjant x_2 , tai tikslinga pasirinkti optimaliu sprendiniu $x_1=3\frac{21}{34}$, $x_2=5$, kurį charakterizuoja $P^{(opt)}=66,5$, $B=359\frac{3}{17}$, $E=\frac{2261}{18488}\approx 0,1213$.

Mažėjant b_{12} nuo $2\frac{6}{17}$ iki 2,2, kuomet, kai $b_{12}=2,2$, visos trys tiesės $2x_1+b_{12}x_2=19$, $3x_2=15$, $2x_1+x_2=13$ susikerta viename taške su koordinatėmis $x_1=4$, $x_2=5$, optimaliu sprendiniu intervale $2,2 < b_{12} < 2\frac{6}{17}$ bus tiesių $2x_1+b_{12}x_2=19$ ir $3x_2=15$ susikirtimo taško koordinatės $x_1=\frac{19-5b_{12}}{2}$, $x_2=5$, kurį

charakterizuos $P^{(opt)}=\frac{333-85b_{12}}{2}$, $B=618-110b_{12}$, $E=\frac{33-85b_{12}}{1236-220b_{12}}=\frac{17}{44}-\frac{1590}{11(1236-220b_{12})}$. Tai

reiškia, jog mažėjant b_{12} šiame intervale tikslo funkcijos reikšmė didės dėl abiejų priežasčių: dėl lyginamojo pelno p_2 didėjimo ir dėl investuoto kapitalo sumos didėjimo, t. y., dėl turimų resursų pilnesnio panaudojimo.

Kai b_{12} mažės nuo 2,2 iki 0, tai vienodo pelno tiesės lygtis keisis nuo $7x_1+9x_2=P^{(opt)}=73$ iki $7x_1+20x_2=P^{(opt)}=128$, o optimalus sprendinys liks stabilus: $x_1=4$, $x_2=5$, nes tiesė $2x_1+b_{12}x_2=19$, mažėjant b_{12} , besisukdama apie tašką $x_1=9,5$, $x_2=0$ laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi, jau nebekirs tiesės $2x_1+x_2=13$, o tai reiškia, jog pirmosios medžiagos atsargų ne tik pakaks abiejų tipų gaminių gamybai, bet ir liks. Gamybą ribos antrosios ir trečiosios medžiagų atsargos.

Kai $b_{12}=3,3$, tai vienodo pelno tiesės lygtimi taps lygtis $7x_1+3,5x_2=P^{(opt)}=45,5$. Tai reiškia, jog ši tiesė sutaps su tiese $2x_1+x_2=13$, ir visuose jos atkarpos taškuose, pradedant tiesių $2x_1+b_{12}x_2=19$ ir $2x_1+x_2=13$ susikirtimo tašku su koordinatėmis $x_1=5\frac{9}{46}$, $x_2=2\frac{14}{23}$ ir baigiant tašku D su koordinatėmis $x_1=6$, $x_2=1$, tikslo funkcijos reikšmė liks pastovi ir lygi 45,5. Kadangi išlaidos $B=487,5-21x_1$ mažės, didėjant x_1 , tai optimaliu planu tikslinga pasirinkti $x_1=6$, $x_2=1$, $P=45,5$, $B=361,5$, $E\approx 0,1259$.

Didėjant b_{12} vienodo pelno tiesė $7x_1+(20-5b_{12})x_2=P$ suksis laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, o tiesė $2x_1+b_{12}x_2=19$ suksis apie tašką su koordinate $x_1=9,5$, $x_2=0$ kryptimi, priešinga laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, kirsdama tiesę $x_1=6$ taškuose su ordinatėmis $x_2=\frac{7}{b_{12}}$. Kol

vienodo pelno tiesė netaps vertikali ir kol tiesė $2x_1+b_{12}x_2=19$ besisukdama nepasieks taško D, optimaliu sprendiniu liks taško D koordinatės. Kadangi vienodo pelno tiesė tampa vertikali, kai b_{12} pasiekia reikšmę 4, o tiesė $2x_1+b_{12}x_2=19$ pasiekia tašką D, kai b_{12} pasiekia reikšmę 7, tai gauname, kad, b_{12} didėjant nuo 3,3 iki 4, optimaliu sprendiniu bus $x_1=6$, $x_2=1$, o tikslo funkcijos reikšmė $P=62-5b_{12}$ mažės nuo 45,5 iki 42.

Kai $b_{12}=4$, lyginamasis pelnas p_2 tampa lygus 0 ir optimumo tašku tampa tikslinga pasirinkti tašką E su koordinatėmis $x_1=6$, $x_2=0$, nes tuomet, esant $P^{(opt)}=42$, išlaidos B būtų mažiausios. Toliau didinant b_{12} , antrojo tipo gaminių gamyba tampa jau nuostolinga, nes $p_2 < 0$, todėl optimaliu planu bus $x_1=6$, $x_2=0$, nors tol, kol b_{12} neviršijo 7, turimi resursai ir leistų gaminti antrojo tipo gaminių skaičių $x_2=1$. Kai $b_{12} > 7$, tai didėjant b_{12} , net nuostolingų antrojo tipo gaminių skaičius turėtų mažėti, nes pradėtų nebeužtekti pirmojo tipo medžiagos. Tebūtų galima pagaminti tik $x_2=\frac{7}{b_{12}}$ antrojo tipo gaminių,

patiriant nuostolius ir mažinant bendrą pelną $P=7+\frac{140}{b_{12}}$. Todėl, esant tokioms didelėms b_{12} reikšmėms

($b_{12} \geq 4$), tikslinga visai atsisakyti antrojo tipo gaminių gamybos, o, pardavus pirmosios ir trečiosios medžiagų likučius, nusipirkti papildomai antrosios ir ketvirtosios medžiagos ir už gautas lėšas padidinti pirmojo tipo gaminių gamybą iki $x_1=7\frac{1}{3}$ ir pelną P iki $51\frac{1}{3}$.

Samprotaudami panašiai, kaip samprotavome, nagrinėdami tiesės $b_{11}x_1+b_{12}x_2=19$ koeficientų b_{11} ir b_{12} kitimo poveikį optimaliam sprendiniui, galime išnagrinėti tiesės $b_{12}x_1+b_{22}x_2=13$ koeficientų b_{21} ir b_{22} kitimo poveikį.

Jei, nesikeičiant visiems kitiems modelio parametrams, parametras b_{21} keisis ribose $1\frac{13}{16} < b_{21} < 2\frac{1}{3}$, tai optimaliu sprendiniu bus tiesių $2x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taško

koordinatės $x_1 = \frac{20}{3b_{21} - 2}$, $x_2 = 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - 2}$, o tikslo funkcijos optimali reikšmė bus $P^{(opt)} = (19 - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1100}{3b_{12} - 2} - 125 \right)$.

Kai $b_{21} = 1\frac{13}{16}$, tai vienodo pelno tiesė $P = 5 \left(\frac{29}{16} x_1 + x_2 \right) = 5$ sutampa su tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ ir

visuose tos tiesės atkarpos taškuose, pradedant tiesių $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir $\frac{29}{16}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo tašku,

turinčiu koordinatės $x_1 = 5\frac{9}{11}$, $x_2 = 2\frac{5}{11}$, ir baigiant tiesių $\frac{29}{16}x_1 + x_2 = 13$ ir $3x_1 = 18$ susikirtimo tašku,

turinčiu koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = 2,25$, tikslo funkcijos reikšmė bus vienoda ir lygi 65. Optimaliu sprendiniu pasirinkime $x_1 = 6$, $x_2 = 2,25$, nes tame taške išlaidos B – mažiausios.

Kai b_{21} mažėja nuo $1\frac{13}{16}$ iki $1\frac{7}{9}$, tai tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ sukasi aplink tašką $x_1 = 0$, $x_2 = 13$ priešingai laikrodžio rodyklei, kirsdama tiesę $3x_1 = 18$ taškuose, turinčiuose koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = 13 - 6b_{21}$. Tos koordinatės ir yra optimalūs sprendiniai. Juos charakterizuoja tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 239 - 96b_{21}$.

Kai $b_{21} = 1\frac{7}{9}$, tai trys tiesės $b_{21}x_1 + x_2 = 13$, $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir $3x_1 = 18$ susikerta viename ir tame pačiame taške F, turinčiame koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = 2\frac{1}{3}$. Šio taško koordinatės ir tampa optimaliu sprendiniu visoms b_{21} reikšmėms, tenkinančioms sąlygą $1\frac{7}{9} \geq b_{21} \geq 0$. Tikslo funkcijos reikšmė $P = 185\frac{2}{3} - 66b_{21}$ didės, mažėjant b_{21} .

Kai $b_{21} = 2\frac{1}{3}$, tai vienodo pelno tiesė $P = \frac{5}{3}(2x_1 + 3x_2) = \frac{95}{3}$ sutampa su tiesė $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir visuose tos tiesės atkarpos taškuose, pradedant tiesių $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo tašku, turinčiu koordinatės $x_1 = 4$, $x_2 = 3\frac{2}{3}$, ir baigiant tašku B, turinčiu koordinatės $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, tikslo funkcijos reikšmė bus vienoda ir lygi $P = 31\frac{2}{3}$. Optimaliu sprendiniu pasirinkime sprendinį $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, kurį charakterizuoja mažiausios išlaidos B.

Jei parametras b_{21} , pasiekęs reikšmę $b_{21} = 2\frac{1}{3}$, didės ir toliau, tai tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$, besisukdama aplink tašką, turintį koordinatės $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, artės prie taško B, kurio koordinatės $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ bus optimaliu sprendiniu iki tol, kol vienodo pelno tiesė $(29 - 11b_{21})x_1 + 5x_2 = 83 - 22b_{21}$, besisukdama aplink tašką B priešinga kryptimi, netaps tiesė $5x_2 = 25$. Tai atsitiks tada, kai b_{21} pasieks reikšmę $b_{21} = \frac{29}{11} = 2\frac{7}{11}$, t. y., anksčiau negu tiesė $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ pasieks tašką B, nes tai atsitiks, tik tada, kai parametras b_{21} taps lygus 4. Todėl, parametrai b_{21} pasiekus reikšmę $2\frac{7}{11}$ ir toliau didėjant, pirmojo tipo gaminių gamyba taps nuostolinga, o tai reiškia, jog optimaliu planu taps planas $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ (žinoma, jei nieko neparduotume ir nepirktume, nes, jei galima vienas medžiagas parduoti ir kitas pirkti, tai optimaliu planu bus $x_1 = 0$, $x_2 = 11$).

Kai $b_{21} > 4$, tai antrosios medžiagos trūkumas pradės riboti pirmojo tipo gaminių gamybos apimtį, t. y. tą gaminių gaminti taps ne tik nuostolinga, bet dėl antrosios medžiagos stygiaus, jų nebus galima pagaminti daugiau negu $x_2 = \frac{8}{b_{21}}$.

Jei, nesikeičiant kitiems modelio parametrams, keistųsi parametras b_{22} , tai tiesė $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ suktųsi aplink tašką su koordinatėmis $x_1 = 6,5$, $x_2 = 0$ laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, kai parametras b_{22} mažėtų, ir atvirkščiai, kai parametras b_{22} didėtų. Vienodo pelno tiesė $P = 7x_1 + (16 - 11b_{22})x_2$ suktųsi priešinga kryptimi.

Kai $0,5 < b_{22} < 1\frac{3}{29}$, tai optimalus sprendinys – tiesių $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ susikirtimo taško koordinatės $x_1 = 9,5 - \frac{9}{3 - b_{22}}$, $x_2 = \frac{6}{3 - b_{22}}$, o tikslo funkcijos reikšmė $P = 132,5 - \frac{165}{3 - b_{22}}$.

Kai $b_{22} = 0,5$, tai vienodo pelno tiesė $3,5(2x_1 + 3x_2) = 66,5$ sutampa su tiesė $2x_1 + 3x_2 = 19$ ir visuose jos atkarpos taškuose, pradedant susikirtimo su tiesė $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ tašku, turinčiu koordinatės $x_1 = 5,9$, $x_2 = 2,4$, ir baigiant tašku B, turinčiu koordinatės $x_1 = 5,9$, $x_2 = 2,4$, tikslo funkcijos reikšmė vienoda ir lygi 66,5. Optimaliu sprendiniu pasirenkame taško B koordinatės $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, nes tame taške išlaidos B yra mažiausios.

Kai b_{22} mažėja nuo 0,5 iki 0, tai optimalu sprendiniu lieka taško B koordinatės, o keičiasi tik tikslo funkcijos reikšmė $P = 94 - 55b_{22}$, kuri, mažėjant b_{22} ir vienodo pelno tiesei besisukant priešinga laikrodžio rodyklės sukimuisi kryptimi, didėja nuo 66,5 iki 94.

Kai $b_{22} = 1\frac{3}{29}$, tai vienodo pelno tiesė $3,5\left(2x_1 + \frac{32}{29}x_2\right) = 45,5$ sutampa su tiesė $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ ir visuose jos atkarpos taškuose, pradedant susikirtimo su tiesė $2x_1 + 3x_2 = 19$ tašku turinčiu koordinatės $x_1 = 4\frac{83}{110}$, $x_2 = 3\frac{9}{55}$, ir baigiant susikirtimo su tiesė $3x_1 = 18$ tašku, turinčiu koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{29}{32}$, tikslo funkcijos reikšmė yra vienoda ir lygi 45,5. Optimaliu sprendiniu pasirenkame $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{29}{32}$, nes šiame taške išlaidos B yra mažiausios.

Kai b_{22} didėja nuo $1\frac{3}{29}$ iki $1\frac{5}{11}$ (kuomet, b_{22} pasiekus lygį $1\frac{5}{11}$, lyginamasis pelnas p_2 tampa lygus 0 ir antrojo tipo gaminių gamyba tampa nebepeilinga), tai optimalus sprendinys yra tiesių $2x_1 + b_{22}x_2 = 13$ ir $3x_1 = 18$ susikirtimo taško koordinatės reikšmės $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{1}{b_{22}}$, o tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 31 + \frac{16}{b_{22}}$.

Kai $b_{22} > 1\frac{5}{11}$, tai optimalus planas yra $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, kai medžiagų atsargos lieka tos pačios ($b_1 = 19$, $b_2 = 13$, $b_3 = 15$, $b_4 = 18$), arba $x_1 = 7\frac{1}{3}$, $x_2 = 0$, kai medžiagas galima parduoti bei pirkti ir lieka pastovi tik turimo kapitalo suma, kuri, kaip jau anksčiau buvome apskaičiavę, lygi 396.

Nagrinėjame modelyje parametras b_{31} lygus 0. Tai reiškia, jog trečioji medžiaga pirmojo gaminio gamyboje nenaudojama lygiai taip pat, kaip nenaudojama ketvirtoji medžiaga antrojo gaminio gamyboje, nes $b_{42} = 0$. Todėl parametrai b_{31} ir b_{42} kitimo galima nenagrinėti.

Tarkime, jog nesikeičiant visiems kitiems modelio parametrams, keičiasi parametras b_{32} . Tuomet keisis ne tik trečiosios tiesės $b_{32}x_2 = 15$ padėtis, bet ir vienodo pelno tiesės $7x_1 + (8 - b_{32})x_2 = P$ kampas su absčių ašimi. Kai $0 \leq b_{32} < 4,5$, tai optimalus sprendinys liks stabilus, t. y., $x_1^{(opt)} = 5$, $x_2^{(opt)} = 3$, ir keisis tik optimali tikslo funkcijos reikšmė $P^{(opt)} = 59 - 3b_{32}$.

Kai $b_{32} = 4,5$, tai vienodo pelno tiesė $7x_1 + 3,5x_2 = 45,5$, pasisukusi laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi, sutampa su tiesė $2x_1 + x_2 = 13$, ir todėl visuose atkarpos CD (žiūr. 333 pav.) taškuose tikslo funkcijos reikšmė bus vienoda ir lygi 45,5. Optimaliu sprendiniu galima pasirinkti $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, nes taške D išlaidos $B = 487,5 - 21x_1$ bus mažiausios.

Parametrai b_{32} didėjant nuo 4,5 iki 8, optimaliu sprendiniu liks taško D koordinatės $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, o tikslo funkcijos $P = 50 - b_{32}$ reikšmė mažės nuo 45,5 iki 42. Parametrai b_{32} pasiekus reikšmę 8, antrojo tipo gaminio lyginamasis pelnas p_2 tampa lygus nuliui, ir todėl antrojo tipo gaminių gamyba tampa nebepeilinga.

Todėl, kai $b_{32} > 8$ ir medžiagų parduoti bei pirkti negalime, tai optimalus sprendinys yra $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. Kai pastovi lieka tik turimo kapitalo suma, o medžiagas galima parduoti bei pirkti, tai $x_1^{(opt)} = 7\frac{1}{3}$, $x_2^{(opt)} = 0$.

Tarkime, jog, nesikeičiant visiems kitiems modelio parametrams, keičiasi parametras b_{41} . Tuomet keisis ketvirtosios tiesės $b_{41}x_1 = 18$ padėtis ir vienodo pelno tiesės $(19 - 4b_{41})x_1 + 5x_2 = P$ kampas su

abscisių ašimi. Kai $2,25 < b_{41} < 3\frac{11}{12}$, tai optimaliu sprendiniu bus taško C koordinatės $x_1=5$, $x_2=3$ ir keisis tik tikslo funkcijos reikšmė $P=110-20b_{41}$.

Kai $b_{41}=2,25$, tai vienodo pelno tiesė $10x_1+5x_2=65$ sutaps su tiesė $2x_1+x_2=13$, ir todėl visuose atkarpos CD taškuose tikslo funkcijos reikšmė bus vienoda ir lygi 65. Optimaliu sprendiniu galima pasirinkti taško D koordinatės $x_1=6$, $x_2=1$, nes tame taške išlaidos $B=468-21x_1$ bus mažiausios.

Kai $0 \leq b_{41} < 2,25$, tai $x_1^{(opt)}=6$, $x_2^{(opt)}=1$, $P^{(opt)}=119-24b_{41}$.

Kai $b_{41}=3\frac{11}{12}$, tai vienodo pelno tiesė $\frac{10}{3}x_1+5x_2=31\frac{2}{3}$ sutampa su tiesė $2x_1+3x_2=19$, ir todėl visuose atkarpos CB taškuose tikslo funkcijos reikšmė vienoda ir lygi $31\frac{2}{3}$. Optimaliu sprendiniu galima pasirinkti taško B koordinatės $x_1=2$, $x_2=5$, nes tame taške išlaidos $B=228+33\frac{2}{3}x_1$ yra mažiausios.

Kai $3\frac{11}{12} < b_{41} < 4,75$, tai optimalus sprendinys – taško B koordinatės $x_1=2$, $x_2=5$, o tikslo funkcijos reikšmė $P=63-8b_{41}$. Kai parametro b_{41} reikšmė tampa lygi 4,75, tuomet lyginamasis pelnas p_1 tampa lygus 0 ir pirmojo tipo gaminių gamyba tampa nebepeilinga. Todėl, kai $b_{41} > 4,75$, tai optimaliu planu tampa $x_1=0$, $x_2=5$ (kai medžiagų nei parduoti, nei pirkti negalima) arba $x_1=0$, $x_2=11$ (kai medžiagos parduodamos ir perkamos ir išlieka pastovi tik turimo kapitalo ir išlaidų suma $B=396$).

Baigę nagrinėti atvejus, kai medžiagų panaudojimo normos keitėsi pavieniui, visiems kitiems parametrams nesikeičiant, išnagrinėsime atvejį, kai, keičiant pirmojo ir antrojo gaminio technologijas, keičiasi vienu metu normos b_{11} ir b_{21} ir nesikeičia visi kiti parametrai.

Didėjant b_{11} nuo 0 iki $+\infty$, tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$ suksis aplink pastovų tašką ($x_1=0$, $x_2=\frac{19}{3}$) laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi nuo padėties $3x_2=19$, kai $b_{11}=0$, iki padėties $x_1=0$, prie kurios artės, artėjant b_{11} prie $+\infty$. Kai $b_{11}=\frac{2}{3}$, tai tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$ kirs tašką H (žiūr. 333 pav.), turintį koordinatės $x_1=6$, $x_2=5$, o kai $b_{11}=3\frac{1}{6}$, tai ši tiesė kirs tašką E, turintį koordinatės $x_1=6$, $x_2=0$.

Ta pačia kryptimi suksis ir antroji tiesė t. y., tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, didėjant b_{21} , tačiau ji suksis aplink kitą pastovų tašką, turintį koordinatės $x_1=0$, $x_2=13$. Kai norma b_{21} didėdama pasieks reikšmę $b_{21}=\frac{4}{3}$, tai tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$ kirs tašką H, o kai $b_{21}=2\frac{1}{6}$ – tašką E.

Vienodo pelno tiesės $P=p_1x_1+p_2x_2=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=\text{const.}$, keičiantis b_{11} ir b_{21} taip, kad mažėtų $p_1=39-5b_{11}-11b_{21}$, slinkdamos suksis priešinga laikrodžio rodyklės sukimuisi kryptimi nuo padėties $39x_1+5x_2=P=\text{const.}$, kai $b_{11}=0$, $b_{21}=0$, iki horizontalios padėties $5x_2=P=\text{const.}$, kurią vienodo pelno tiesės pasieks tada, kada lyginamasis pelnas $p_1=39-5b_{11}-11b_{21}$ taps lygus 0 ir pirmojo tipo gaminių gamyba taps nebepeilinga. Didėjant b_{11} ir b_{21} , ne tik keisis vienodo pelno tiesių kryptis, bet ir optimali pelno reikšmė $P^{(opt)}$. Pavyzdžiui, jei b_{11} ir b_{21} didės nuo 0 iki $\frac{2}{3}$ ir $\frac{4}{3}$ atitinkamai (t. y., jei tiesės $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$, besisukdamos artės prie taško H), tai optimaliam sprendiniui išliekant pastoviu ir lygiu $x_1=6$, $x_2=5$, tikslo funkcijos optimali reikšmė mažės nuo $39\cdot 6+5\cdot 5=259$ iki $\left(39-5\cdot\frac{2}{3}-11\cdot\frac{4}{3}\right)6+5\cdot 5=151$.

Tuomet, kai, didėjant b_{11} ir b_{21} , lyginamasis pelnas p_1 taps $p_1 \leq 0$, optimalus sprendinys taps lygus $x_1=0$, $x_2=5$, $P^{(opt)}=25$ (jei nebus sąlygų medžiagoms parduoti ir pirkti) arba $x_1=0$, $x_2=11$, $P^{(opt)}=55$ (jei bus sąlygos medžiagas parduoti ir pirkti, pasiliekant turimo kapitalo ir išlaidų $B=396$ ribose).

Pradžioje išnagrinėsime atvejį, kai optimaliu sprendiniu bus tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taško koordinatės $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$.

Kad taip atsitiktų, reikia, kad būtų tenkinamos sąlygos:

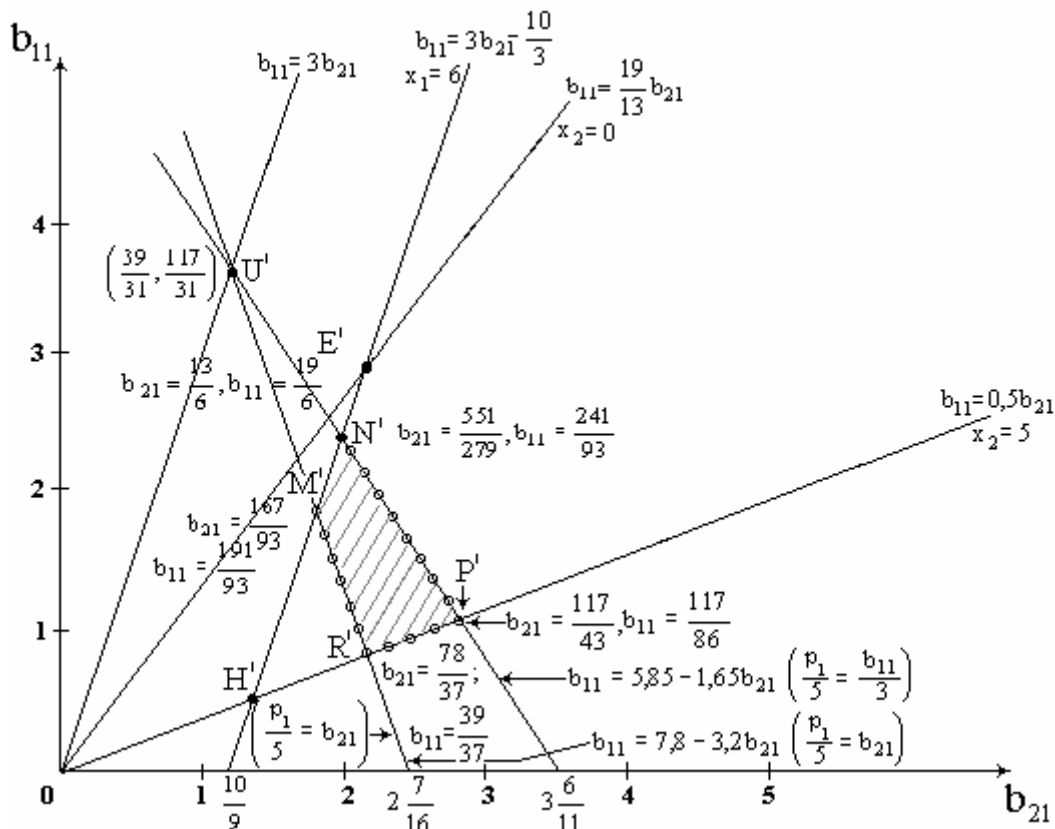
1) minėtųjų tiesių susikirtimo taško koordinatės tenkintų nelygybes $0 \leq \frac{20}{3b_{21} - b_{11}} \leq 6$,
 $0 \leq 13 - \frac{20b_{21}}{3b_{21} - b_{11}} \leq 5$;

2) vienodo pelno tiesės koeficientai p_1 ir p_2 tenkintų nelygybes $\frac{b_{11}}{3} < \frac{p_1}{p_2} < \frac{b_{21}}{1}$, t. y., kad būtų
 tenkinamos nelygybės $\frac{b_{11}}{3} < \frac{39 - 5b_{11} - 11b_{21}}{5} < b_{21}$.

Iš pirmosios sąlygos gauname: $0,5b_{21} \leq b_{11} \leq 3b_{21} - \frac{10}{3}$, o iš antrosios: $7,8 - 3,2b_{21} < b_{11} < 5,85 - 1,65b_{21}$.

Nelygybių sistemos
$$\begin{cases} 0,5b_{21} \leq b_{11} \leq 3b_{21} - \frac{10}{3}, \\ 7,8 - 3,2b_{21} < b_{11} < 5,85 - 1,65b_{21} \end{cases}$$
 sprendinį pavaizduosime grafiškai

(žiūr. 336 pav., kuriame užštrichuotas keturkampis $M'N'P'R'$ vaizduoja optimizacinio modelio parametrų b_{11} ir b_{21} kitimo sritį, atitinkančią atvejį, kai optimalus sprendinys yra apribojimus išreiškiančių tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$ ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškas).



336 pav.

Rasime taškų M' , N' , P' ir R' koordinates, o kartu ir kraštutines parametrų b_{11} ir b_{21} reikšmes nagrinėjamoje srityje.

Taško M' koordinates rasime iš lygčių sistemos
$$\begin{cases} b_{11} = 3b_{21} - \frac{10}{3}, \\ b_{11} = 7,8 - 3,2b_{21}. \end{cases}$$

Gauname, jog $b_{11} = \frac{191}{93} = 2\frac{5}{93}$, $b_{21} = \frac{167}{93} = 1\frac{74}{93}$. Šį tašką 337 pav. atitinka tiesių $b_{11}x_1 + 3x_2 = 19$

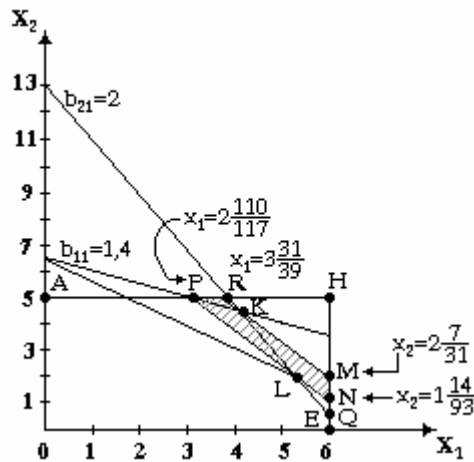
ir $b_{21}x_1 + x_2 = 13$ susikirtimo taškas M , turintis koordinates $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{69}{31} = 2\frac{7}{31}$. Kertanti šį tašką vienodo

pelno tiesė $P=(39-5b_{11}-11b_{21})x_1+5x_2=5\left(\frac{167}{93}x_1+x_2\right)=65$ sutampa su tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, kai $b_{21}=\frac{167}{93}$.

Analogiškai randame, jog taško N' koordinatės $b_{11}=\frac{241}{93}=2\frac{55}{93}$, $b_{21}=\frac{551}{279}=1\frac{272}{279}$. Jį 337 pav. atitinka taškas N, turintis koordinates $x_1=6$, $x_2=\frac{107}{93}=1\frac{14}{93}$. Kertanti šį tašką vienodo pelno tiesė $P=\frac{1205}{279}x_1+5x_2=\frac{5}{3}\left(\frac{241}{93}x_1+3x_2\right)=31\frac{2}{3}$ sutampa su tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$, kai $b_{11}=\frac{241}{93}$.

Taško P' koordinatės: $b_{11}=\frac{117}{86}=1\frac{31}{86}$, $b_{21}=\frac{117}{43}=2\frac{31}{43}$. Jį atitinka optimizavimo uždavinio LSS taškas P (žiūr. 337 pav.), turintis koordinates $x_1=\frac{344}{117}=2\frac{110}{117}$, $x_2=5$. Kertanti šį tašką vienodo pelno tiesė $P=\frac{585}{258}x_1+5x_2=\frac{5}{3}\left(\frac{117}{86}x_1+3x_2\right)=31\frac{2}{3}$ sutampa su tiesė $b_{11}x_1+3x_2=19$, kai $b_{11}=\frac{117}{86}$.

Taško R' koordinatės: $b_{11}=\frac{39}{37}=1\frac{2}{37}$, $b_{21}=\frac{78}{37}=2\frac{4}{37}$. Jį 337 pav. atitinka taškas R, turintis koordinates $x_1=\frac{144}{39}=3\frac{31}{39}$, $x_2=5$. Kertanti šį tašką vienodo pelno tiesė $P=\frac{390}{37}x_1+5x_2=5\left(\frac{78}{37}x_1+x_2\right)=65$ sutampa su tiesė $b_{21}x_1+x_2=13$, kai $b_{21}=\frac{78}{37}$.



337 pav.

Iš 336 pav. ir taškų M', N', P' ir R' koordinatinių apskaičiavimo rezultatų išplaukia, jog, keičiantis parametrams b_{11} ir b_{21} ir nesikeičiant kitiems parametrams, optimaliu sprendiniu bus tiesių $b_{11}x_1+3x_2=19$ ir $b_{21}x_1+x_2=13$ susikirtimo taškas, turintis koordinates $x_1=\frac{20}{3b_{21}-b_{11}}$, $x_2=13-\frac{20b_{21}}{3b_{21}-b_{11}}$, kiekvienoje iš šių sričių:

- 1) $\left(\frac{167}{93} < b_{21} < \frac{551}{279}\right) \wedge \left(7,8 - 3,2b_{21} < b_{11} \leq 3b_{21} - \frac{10}{3}\right),$
- 2) $\left(\frac{551}{279} < b_{21} < \frac{78}{37}\right) \wedge \left(7,8 - 3,2b_{21} < b_{11} < 5,85 - 1,65b_{21}\right),$
- 3) $\left(\frac{78}{37} < b_{21} < \frac{117}{43}\right) \wedge \left(0,5b_{21} \leq b_{11} < 5,85 - 1,65b_{21}\right).$