

Pateiksiu pavyzdėlį, iliustruojantį šias mintis.

Atsakydamas į studentų klausimą, kodėl vienos ir tos pačios funkcijos $x(t)$ skirtingo ilgio fragmentų spektrai gali būti skirtingi, aš (paskaitose ir šioje mokymo priemonėje) remiuose Furjė eilučių savybėmis, deklaruotomis Furjė eilutės apibrėžime arba logiškai išplaukiančiomis iš jo. Viena tokių savybių – savybė, kad į bet kurios funkcijos $x(t)$ fragmento, turinčio ilgį $(b-a)$, Furjė eilutės sudėtį gali

įeiti tik tokios elementarios harmonikos, kurių periodams $T_1, T_2 = \frac{1}{2}T_1, T_3 = \frac{1}{3}T_1, \dots, T_k = \frac{1}{k}T_1, \dots$ intervalo ilgis $(b-a)$ yra sveikaskaitinis kartotinis, nes $T_1 = b-a$. Taip yra todėl, kad Furjė eilutės pagrindinės harmonikos ciklinis dažnis ω_1 yra lygus $\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{b-a}$, o visų kitų harmonikų cikliniai dažniai

yra $\omega_k = k\omega_1$, $k=1, 2, \dots$, t. y. sveiką skaičių kartų didesniu už ω_1 .

Tačiau, jei studentai paklaustų, kodėl Furjė eilutė turi tokią, o ne kokią nors kitokią savybę, tai, remdamasis tik matematika, galėčiau atsakyti tik taip: „Ši savybė išplaukia iš Furjė eilutės apibrėžimo. Jei pakeistume šią savybę, tai gautume kitokią „matematinę konstrukciją“, kuri jau nebūtų Furjė eilutė“.

Bet, prisimindamas teiginį, jog gyvybingos (t. y. galinčios turėti plačią taikymo sritį) „matematinės konstrukcijos“ yra ne tik matematinės abstrakcijos, o ir tam tikros realybės apibendrinti matematiniai modeliai, aš lengvai rasčiau fizikinį paaiškinimą, kodėl Furjė eilutė turi būtent tokią, o ne kokią nors kitokią savybę.

Man pakaktų tik priminti 1.9.1.4 skyrelyje nagrinėtų stovinčiųjų garso bangų susidarymo vamzdeliuose reiškinį ir tame skyrelyje pateiktą 100-jį paveikslėlį, parodantį, kad vamzdelyje, kurio abu galai uždari, gali susidaryti tik tokios stovinčios bangos, kurių ilgiams λ vamzdelio ilgis ℓ yra sveikaskaitinis kartotinis. Šis reiškinys lengvai paaiškinamas, prisiminus stovinčiųjų bangų susidarymo „mechanizmą“, aprašytą tame pačiame 1.9.1.4 skyrelyje. O pats tas reiškinys paaiškina daug kitų dalykų: kodėl vienu salių akustika yra gera, o kitų – bloga, kodėl birbynės tonai ir okertonai priklauso ir nuo birbynės ilgio, ir nuo to, kuriose vietose padarytos angelės bei kurios jų paliktos neužspaustos, kodėl ilgos stygos skamba vienaip, o trumpos – kitaip ir t. t. ir t. t.

Visų tokių reiškinų matematiniam aprašymui ir matematinei analizei puikiai tinka Furjė eilutės ir Furjė integralai, nes **Furjė eilutės ir Furjė integralus galima laikyti tų reiškinų matematiniais modeliais, o pačius tuos reiškinius – Furjė eilučių ir Furjė integralų fizikiniais modeliais.**

Ir tokie atitikimai būdingi ne tik Furjė eilutėms ir čia paminėtiems reiškiniams. Jie, pavyzdžiui, yra gana dažnas reiškinys, kuris pastebimas analizuojant matematikos vaidmenį teorinėje fizikoje bei teorinės fizikos vaidmenį matematikos raidoje. Kvantinėje fizikoje ir reliatyvistinėje mechanikoje sunku net atskirti, kur čia vien tik fizika, o kur – vien tik matematika.

Sparčiai augančios kompiuterinės technikos ir informacinių technologijų galimybės dar labiau padidina matematinio modeliavimo ir matematinių eksperimentų vaidmenį pačiuose įvairiausiuose moksluose. Matematika ir matematinė sistematika jau artimoje ateityje taps universaliu instrumentu, tinkančiu ir reikalingu pačioms įvairiausioms žmonių veiklos sritims.

Apie tokio šių mokslų universalumo priežastis jau buvo kalbėta 1.6.14. skyriuje. Čia tas pokalbis tik pratęsiamas ir papildomas, nes jis labai aktualus sistematikos kursui. Būtina, kad šios mintys taptų asmeniniais studentų įsitikinimais.

Pateiksiu dar vieną pavyzdėlį, šiek tiek susijusį su vibracija, o todėl ir su spektrais, t. y. su šiame skyrelyje nagrinėjama tema, bei su bendrasisteminiais dėsningumais, kuriuos išreiškdamas ir kuriais naudodamasi matematika tampa ne tik loginiu žaidimu ir proto gimnastika, bet ir mokslu apie realų pasaulį ir jo dėsnius.

1905 m. rusų matematikas ir aerodinamikas S. Čiaplyginas gynė mokslų daktaro disertaciją, kurioje buvo nagrinėjamos dujų srovės ir pateikti jų judėjimo matematinio modeliavimo bei matematinės analizės rezultatai.

Matematiniais metodais analizuodamas įvairias dujų sroves, S. Čiaplyginas išnagrinėjo ir tokių jų judėjimo atvejį, kuriame tų judėjimų greičiai galėjo viršyti garso sklaidimo dujose greitį. Kadangi dujose garso greitis yra garso bangos, pernešančios slėgio dujose pasikeitimus, atsiradusius dėl bet kurio išorinio ar vidinio poveikio, sklaidimo greitis, tai 1905 m. neįmanoma buvo net įsivaizduoti, kaip gali dujose atsirasti srovė, judanti greičiau už ją sukėlusį poveikį. Todėl vienas iš disertacijos gynime dalyvavusių oponentų net šiek tiek papriekaištavo disertantui, kam jis gaišęs laiką nagrinėjimui to, ko būti negali.

Bet praėjus keliems dešimtmečiams, profesoriui S. Čiaplyginui dar tebesant gyvam, prasidėjo reaktyvinių viršgarsinių skrydžių bandymai ir buvo susidurta su flaterio – savaime atsirandančios ir greitai, kartais net katastrofiškai greitai, didėjančios lėktuvo sparnų ir uodegos plokštumų vibracijos – reiškiniu. Tuomet paaiškėjo, kad S. Čiaplygino matematiškai nagrinėtas ir 1905 m. jo disertacijoje aprašytas dujų judėjimas viršgarsiniu greičiu – ne tik abstrakti matematinė teorija, bet ir realaus reiškinio matematinis modelis.

Matematikos dėsniai – susiformavo ir formuojasi ne tuščioje vietoje, ne iš nieko, o yra tikrovėje egzistuojančių bei joje logiškai galimų dėsningumų apibendrinimas, pakeltas į tokį aukštą abstrakcijos lygį, kad matematiniai dėsniai galioja visiems objektams ir procesams nepriklausomai nuo jų substrato, egzistavimo srities ir prigimties. Matematika yra tokia universali todėl, kad nagrinėja ne tiek pačius objektus ir procesus, kiek santykius, egzistuojančius bei galinčius egzistuoti tarp jų ir juose, aprašo juos savo kalba. Matematika yra mokslas, priklausantis mokslų „antrajam matavimui“ ir yra gimininga sistemotyrai. Apie tai jau irgi buvo rašyta šios mokymo priemonės 1.6.4.14. skyrelyje, ir čia tas svarbias mintis tik dar kartą pakartojau ir patvirtinu.

Tikiuosi, kad čia pateiktas atsakymo į studentų klausimą, kodėl Furjė eilutės priklauso ne tik nuo funkcijų, kurias jos aproksimuoja, bet ir nuo tų funkcijų aproksimuojamų intervalų ilgio, papildymas pagilino skaitytojo žinias ne tik apie Furjė eilutes, bet ir apie matematiką bei sistemotyra, apie sisteminio mąstymo specifiką, kad jo požiūris į šiuos dalykus šiek tiek praturtėjo: pasidarė šiek tiek platesnis ir gilesnis, kad skaitytojas dabar ne tik nemažai žino apie Furjė eilutes, bet ir supranta tai, ką žino, ir sugebės tomis žiniomis kūrybiškai naudotis.

Dabar belieka pateikti žadėtuosius Furjė eilučių sudarymo periodinėms neharmoninėms ir neperiodinėms funkcijoms pavyzdžius, padaryti kai kurias išvadas, išplaukiančias iš tų pavyzdžių analizės ir jau bus galima pereiti prie Furjė integralo, Furjė transformacijų ir spektrinio tankio sąvokų įvedimo.

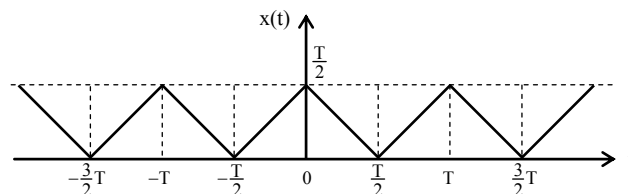
Jau buvo rašyta, kad periodinių harmoninių ir periodinių neharmoninių funkcijų spektrai skiriasi: kai funkcijų fragmentų, aproksimuojamų Furjė eilutėmis, ilgiai $(b-a)$ yra tų funkcijų periodų kartotiniai ir Furjė eilutės sutampa su aproksimuojamomis funkcijomis visoje tų funkcijų apibrėžimo srityje, harmoninių funkcijų spektrai turi baigtinį nenulinių harmonikų skaičių, o neharmoninių periodinių funkcijų spektrai susideda iš be galo didelio skaičiaus nenulinių spektro linijų. Harmoninius funkcijų spektrus mes jau nagrinėjome.

Sudarysime neharmoninės periodinės funkcijos

$$x(t) = \begin{cases} \frac{T}{2} + \left(t - 2m \cdot \frac{T}{2}\right), & \text{kai } t \in \left[\frac{T}{2}(2m-1); \frac{T}{2} \cdot 2m\right], \\ \frac{T}{2} - \left(t - 2m \cdot \frac{T}{2}\right), & \text{kai } t \in \left[\frac{T}{2} \cdot 2m; \frac{T}{2}(2m+1)\right], \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \end{cases}$$

vieno periodo T (o kartu ir visos tos funkcijos) Furjė eilutę.

Šios funkcijos grafikas parodytas 325 pav.



325 pav.

Pasirinkime intervalą (a, b) , pasirinkdami taškus a ir b taip, kad $a = -\frac{T}{2}$, $b = \frac{T}{2}$, o intervalo (a, b) ilgis $(b-a)$ būtų lygus funkcijos $x(t)$ periodui T .

$$\text{Pasirinktą funkcijos } x(t) \text{ fragmentą aprašo lygybės: } x(t) = \begin{cases} \frac{T}{2} + t, & \text{kai } t \in \left[-\frac{T}{2}; 0\right], \\ \frac{T}{2} - t, & \text{kai } t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]. \end{cases}$$

Apskaičiuosime šio fragmento Furjė eilutės koeficientus.

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(\frac{T}{2} + t\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2} - t\right) dt \right] = \frac{1}{2T} \left[\left(Tt + t^2\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left(Tt - t^2\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2T} \left[-\left(-\frac{T^2}{2} + \frac{T^2}{4}\right) + \left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{4}\right) \right] = \frac{T}{4}.$$

Gautas rezultatas patvirtina anksčiau išsakytą teiginį, jog c_0 yra lygus funkcijos $x(t)$ vidurkiui pasirinktame intervale (a, b) , t. y. aukštinei stačiakampio, kuris, turėdamas tą patį pagrindą, kaip ir trikampis brėžinyje, turėtų tą patį plotą, kaip ir tas trikampis.

$$\text{Kai } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \text{ tai } c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{T}{T(-ik2\pi)} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(\frac{T}{2} + t\right) de^{-ik\frac{2\pi}{T}t} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2} - t\right) de^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \right] = \frac{-1}{2ik\pi} \left[\left(\frac{T}{2} + t\right) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{T}{2ik\pi} e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left(\frac{T}{2} - t\right) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{T}{-2ik\pi} e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2ik\pi} \left[\left(\frac{T}{2} - 0\right) + \frac{T}{2ik\pi} (1 - e^{ik\pi}) + \left(0 - \frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2ik\pi} (e^{-ik\pi} - 1) \right] = \frac{T}{2k^2\pi^2} \left[1 - \frac{e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}{2} \right] =$$

$$= \frac{T}{2k^2\pi^2} (1 - \cos k\pi) = \frac{T}{2k^2\pi^2} [1 - (-1)^k].$$

Kai $k = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$, tai $1 - (-1)^k = 2$, o kai $k = 2m$, tai $[1 - (-1)^k] = 0$. Todėl $c_{2m} = 0$, o

$$c_{2m-1} = \frac{T}{(2m-1)^2\pi^2}. \text{ Kadangi } (2m-1)^2 = (1-2m)^2, \text{ tai } c_{-(2m-1)} = c_{1-2m} = c_{2m-1} = \frac{T}{(2m-1)^2\pi^2}.$$

Pasinaudodami formule $a_n = c_k + c_{-k}$, gauname, jog $a_{2m} = 0$, o $a_{2m-1} = \frac{2T}{(2m-1)^2\pi^2}$, o pasinaudodami formule $b_k = \frac{1}{i}(c_{-k} - c_k)$, gauname, jog $b_k = 0$.

Todėl periodinės neharmoninės funkcijos $x(t)$ intervalo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ Furjė eilutė yra

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} (e^{i(2m-1)\frac{2\pi}{T}t} + e^{-i(2m-1)\frac{2\pi}{T}t}) =$$

$$= T \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi\frac{2m-1}{T}t\right)}{(2m-1)^2} \right]. \text{ Kadangi } (b-a) = T, \text{ tai } f(t) = x(t) \text{ ne tik intervale } \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), \text{ bet ir visoms}$$

argumento $t \in (-\infty, +\infty)$ reikšmėms.

Galima paaiškinti, kodėl šios neharmoninės periodinės funkcijos Furjė eilutė turi be galo daug nenulinių koeficientų, o tos funkcijos spektras – be galo daug nenulinių spektro linijų. Juk suma

$\frac{2T}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi \frac{2m-1}{T} t\right)}{(2m-1)^2}$ turi tiksliai atvaizduoti laužtės $x(t)$ nuokrypius nuo vidurkio $\frac{T}{4}$ kiekviename

taške t , o tai, sumuojant kosinusoides, galima padaryti tik turint be galo daug kosinusoidžių, tarp kurių yra be galo daug kosinusoidžių, turinčių be galo mažas amplitudes ir be galo mažus periodus. Dar daugiau kosinusoidžių prireiktų, jei intervalo (a, b) ilgis $(b-a)$ nebūtų funkcijos $x(t)$ periodo kartotinis.

Skaitytojui rekomenduojau patikrinti, ar pasikeistų Furjė eilutė ir funkcijos $x(t)$ spektras tuo atveju, jei intervalo (a, b) ilgį $b-a=T$ padvigubintumėme ir padarytumėme lygų $2T$. Juk tuomet pagrindinis Furjė eilutės dažnis $\omega_1 = \frac{2\pi}{b-a}$ turėtų tapti dvigubai mažesnis ir „atstumai“ tarp galimų

gretimų spektro linijų dažnių ω_{k+1} ir ω_k turėtų dvigubai sumažėti, nes tuomet ω_{k+1} ir $\omega_k - \omega_{k+1} = -(k+1)\omega_1 - k\omega_1 = -\omega_1 = \frac{2\pi}{b-a} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$, o ne $\frac{2\pi}{T}$ kaip dabar. Būtų naudinga, kad skaitytojas pabandytų paaiškinti gautą rezultatą ir tokiu būdu patikrintų save, ar tikrai pakankamai gerai suprato nagrinėjamą temą ir sugeba net be skaičiavimų teisingai prognozuoti matematinių eksperimentų rezultatus.

O aš čia, pasinaudodamas ką tik atlikto matematinio eksperimento rezultatais, parodžiusiais, kaip atrodo periodinio neharmoninio proceso spektras, paaiškinsiu vieną įdomų reiškinį, su kuriuo kartais susiduriame ne tik akustikoje bei radiotechnikoje, bet ir ekonomikoje.

Akustikoje sudėtingų garsų sudėties nustatymui dažnai naudojamosi akustiniais rezonatoriais, t. y. skirtingų tūrių indais, pagamintais iš plono kvarcinio stiklo ir turinčiais tam tikrus nuosavų virpesių dažnius. Kai akustinį rezonatorių pasiekia garso bangos, turinčios tokį pat dažnį, tas rezonatorius pats pradeda virpėti ir „įsisiūbavęs“ gali palaikyti ir sustiprinti ateinančią ir rezonatorių veikiantį to dažnio garsą, panašiai, kaip smuiko korpusas rezonuoja sustiprina smuiko stygų virpesių sukeltus garsus. Stebėdami, kurie rezonatoriai pradeda rezonuoti veikiami sudėtingo garso, mes galime atlikti to garso spektrinę analizę ir nustatyti, iš kokių harmonikų susideda šis garsas. Vaizdžiai tariant, didelis įvairių rezonatorių rinkinys gali atlikti vaidmenį, panašų į tą vaidmenį, kurį atliekame mes, matematiškai sudarydami Furjė eilutes.

Tarkime, jog mes turime akustinį rezonatorių, kurio nuosavų virpesių ciklinis dažnis yra ω . Galima įsitikinti, jog jis rezonuoja į stygos harmoninius virpesius, turinčius ciklinį dažnį, lygų ar apytiksliai lygų cikliniam dažniui ω ir nerezonuoja į kitų stygų harmoninius svyravimus, turinčius ciklinius dažnius, nesutampantį su dažniu ω , pavyzdžiui, dažnius $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{4}$ ir t. t.

Tačiau, kai šį rezonatorių pasiekia garso bangos, sukeltos neharmoninio periodinio proceso, kurio periodas yra du, tris ar keturis kartus didesnis už rezonatoriaus nuosavų svyravimų periodą, tai rezonatorius, tų bangų veikiamas, pradeda rezonuoti ir mes išgirstame iš rezonatoriaus sklindantį garsą, kurio dažnis yra lygus rezonatoriaus nuosavų svyravimui dažniui.

Šį reiškinį, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo keistokai, paaiškina mūsų šiame skyrelyje atliktų matematinių eksperimentų rezultatai.

Jų metu mes įsitikinome, jog harmoninių svyravimų spektrus sudaro tik patys tie svyravimai. Kitaip tariant, harmoniniai svyravimai „svyravimų pasaulyje“ yra cheminių elementų analogas cheminių junginių pasaulyje: jie gali įeiti į sudėtingų svyravimų sudėtį, bet patys į kitus svyravimus jau nebesiskaido.

Rezonatorius susidūręs su harmoniniais virpesiais, kurių dažniai nesutampa su jo nuosavų svyravimų dažniais gali pradėti virpėti priverstiniais svyravimais, bet tie svyravimai nestiprės ir, jei nebus pakankamų išorinių jėgų, tuoj pat užges. Rezonatorius „neįsisiūbuos“ ir rezonanso nebus.

Visai kitaip paveiks rezonatorių periodiniai neharmoniniai svyravimai, kurių periodas yra sveiką skaičių kartų didesnis už rezonatoriaus nuosavų svyravimų periodą. Juk, kaip jau esame nustatę matematinio eksperimento metu, neharmoninių periodinių svyravimų spektrą sudaro ne tik pagrindinio dažnio ω_1 harmonika, bet ir harmonikos turinčios 2, 3, 4 ir t. t. kartus didesnius ciklinius dažnius $\omega_k = k\omega_1$. Tarp tų harmonikų gali atsirasti (ir atsiranda, kai neharmoninių svyravimų periodas yra sveiką skaičių kartų ilgesnis už rezonatoriaus nuosavų svyravimų periodą) tokia harmonika, kurios dažnis yra lygus rezonatoriaus nuosavų svyravimų dažniui. Ta harmonika ir „įsisiūbuoja“ rezonatoriaus nuosavus svyravimus, sukeldama rezonansą.

Su panašiu reiškiniu mes galima susidurti ir radiotechnikoje, kai ieškodami tolimos silpnos radijo stoties trumpųjų radijo bangų diapazone, kartu su tos stoties signalais kartais išgirstame ir kitą radijo stotį, kurios bangos yra kelis kartus ilgesnės už mūsų ieškomos radijo stoties bangų ilgį.

Rezonanso reiškinius galime stebėti ne tik technikoje bei gamtoje, bet ir ekonomikoje bei demografijoje. **Todėl spektrų teoriją ir spektrinės analizės metodus galime laikyti**

bendrasisteminiu sudėtingų reiškinių analizės instrumentu, kuriuo naudotis privalėtų mokėti ne tik fizikai bei chemikai, bet ir visi studijuojantys matematinę sistemotyrą.

Mąstydami sistemškai ir visur ieškodami bendrasisteminų dėsningumų ir analogijų, mes net ir labai tolimose nuo matematikos ir fizikos srityse rasime reiškinių, primenančių čia ką tik išnagrinėtą (ir pradžioje pasirodžiusį net keistoku) akustinio rezonatoriaus „elgesį“.

Psichologai, pavyzdžiui, jau seniai pastebėjo, o propagandos ir reklamos specialistai taip pat gerai žino, jog tiesmukiška propaganda ir reklama gali reikšmingai paveikti palyginti nedidelę žmonių dalį, rasdama atgarsį jų protuose ir veiksmuose, ir todėl, norint, kad propaganda ar reklama paveiktų didesnę žmonių skaičių, reikia tą propagandą bei reklamą daryti žymiai „platesnėmis“, net savotiškai „užmaskuotomis“.

Patyrę auklėtojai žino, kad vien tik nuogu ir sausu moralizavimu ne tik nepasieksi norimo efekto, bet gali net pabloginti auklėjamojo elgesį: priverstiniai išoriniai poveikiai gali iššaukti „imtuve“ rezonansą tik tada, kai „imtuvas“ tuose išoriniuose poveikiuose suranda „harmonikas“, kurių „dažniai“ sutampa su „imtuvo“ nuosavais „dažniais“. O juk ir pastarieji neatsiranda „tuščioje vietoje“.

Kad žmogus išgirstų tai, kas jam sakoma, nepakanka to, kad tame, kas sakoma, būtų ką išgirsti. Reikia dar ir to, jog tai būtų pasakyta taip, kad pas žmogų atsirastu noras klausyti, girdėti ir suprasti, o supratęs – veikti.

Išsiaiškinę periodinių funkcijų Furjė eilučių ypatumus, pereisime prie neperiodinių funkcijų, sudarydami funkcijos $x(t)=e^{-|t|}$ fragmento Furjė eilutę.

Ši funkcija yra lyginė, nes $x(-t)=x(t)$. Atsižvelgdamas į šią šios funkcijos savybę, pasirinksiu intervalą $(-a, +a)$, simetrišką taško $t=0$ atžvilgiu. Tuomet Furjė eilutės koeficientai c_k bus realūs skaičiai ir galios lygybė $c_{-k}=c_k$.

Apskaičiuosiu koeficiento $c_0 = \frac{a_0}{2}$ reikšmę, pasinaudodamas tuo, kad $x(t) = \begin{cases} e^t, & \text{kai } t \leq 0, \\ e^{-t}, & \text{kai } t \geq 0. \end{cases}$

$$\text{Gauname, jog } c_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a x(t) dt = \frac{1}{2a} \left[\int_{-a}^0 e^t dt + \int_0^a e^{-t} dt \right] = \frac{1}{2a} [(1 - e^{-a}) - (e^{-a} - 1)] = \frac{1}{a} (1 - e^{-a}).$$

$$\begin{aligned} \text{Kai } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \text{ tai } c_k &= \frac{1}{2a} \left[\int_{-a}^0 e^t e^{-ik\frac{2\pi}{a}t} dt + \int_0^a e^{-t} e^{-ik\frac{\pi}{a}t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2a} \left[\frac{a}{-ik\pi + a} (1 - e^{-\left(\frac{ik\pi}{a} - 1\right)(-a)}) + \frac{a}{-ik\pi - a} (e^{-\left(\frac{ik\pi}{a} + 1\right)a} - 1) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a - ik\pi} (1 - e^{ik\pi - a}) - \frac{1}{a + ik\pi} (e^{-ik\pi - a} - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{2(a^2 + k^2\pi^2)} [(a + ik\pi)(1 - e^{ik\pi} e^{-a}) - (a - ik\pi)(e^{-ik\pi} e^{-a} - 1)] = \frac{1}{2(a^2 + k^2\pi^2)} [2a - ae^{-a}(e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}) + \\ &+ ik\pi e^{-a}(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi})] = \frac{1}{2(a^2 + k^2\pi^2)} [2a - 2ae^{-a}\cos k\pi + 2k\pi e^{-a}\sin k\pi] = \frac{a}{a^2 + k^2\pi^2} [1 - e^{-a}(-1)^k]. \end{aligned}$$

Naudojantis šia formule, šį kartą buvo galima apskaičiuoti ir koeficiento c_0 reikšmę, nes kai $k=0$, tai $\frac{a}{a^2 + 0 \cdot \pi^2} [1 - e^{-a}(-1)^0] = \frac{1}{a} (1 - e^{-a}) = c_0$, todėl formulę $c_k = \frac{a}{a^2 + k^2\pi^2} [1 - e^{-a}(-1)^k]$ galima taikyti visoms indeksų $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ reikšmėms.

Gavome, jog funkcijos $x(t)=e^{-|t|}$ fragmento $(-a, +a)$ Furjė eilutė yra

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{a}t} = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2\pi^2} [1 - e^{-a}(-1)^k] e^{ik\frac{\pi}{a}t}.$$

Kadangi šiuo atveju $c_{-k}=c_k$, tai $b_k=0$, o $a_k=c_k+c_{-k}=2c_k=\frac{a}{a^2 + k^2\pi^2} [1 - e^{-a}(-1)^k]$. Todėl trigonometrinėje formoje ši Furjė eilutė atrodo taip:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{a}t = \frac{1}{a} (1 - e^{-a}) + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2\pi^2} [1 - e^{-a}(-1)^k] \cos k\frac{\pi}{a}t.$$

Neperiodinių funkcijų fragmentų Furjė eilutės, turėdamos be galo daug nenulinių dėmenų, šiuo atžvilgiu yra panašios į periodinių neharmoninių funkcijų Furjė eilutes.

Tačiau periodinių ir neperiodinių funkcijų Furjė eilutės turi ir esminį skirtumą: **periodinės funkcijos $x(t)$ atveju visada galima rasti tokį jos argumento t kitimo intervalą, kurio Furjė eilutė būtų sukaupusi visą informaciją, reikalingą tos periodinės funkcijos $x(t)$ bei jos išvestinių reikšmių nustatymui kiekviename jos apibrėžimo srities taške**, t. y. visada galima rasti tokį intervalą $a < t < b$, kuriame Furjė eilutė $f(t)$, sutapdama su funkcija $x(t)$, bus tokia, jog lygybė $f(t) = x(t)$ galios ne tik tame intervale, bet ir kiekviename taške t už to intervalo ribų ir todėl **funkciją $f(t)$ bus galima vadinti ne tik funkcijos $x(t)$ fragmento (a, b) , bet ir tiesiog funkcijos $x(t)$ Furjė eilute; tuo tarpu neperiodinės funkcijos $x(t)$ atveju tokio baigtinio intervalo rasti neįmanoma**, nes, norint turėti visą informaciją apie neperiodinę funkciją $x(t)$ kiekviename taške, reikėtų turėti funkcijos $x(t)$ Furjė eilutę visam intervalui $(-\infty, +\infty)$, o toks intervalas jau nebebūtų baigtinis.

Panagrinėsime, kaip keisis neperiodinės funkcijos $x(t) = e^{-|t|}$ fragmento $(-a, +a)$ Furjė eilutė $f(t)$ ir to fragmento spektras, kai, didėjant a , intervalas $(-a, +a)$ artės prie intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Kai a artės prie $+\infty$, tai Furjė eilutės $f(t)$ pagrindinis ciklinis dažnis $\omega_1 = \frac{2\pi}{2a}$ artės prie 0. Kartu artės prie 0 ir „atstumai“ $\Delta\omega$ tarp gretimų spektro linijų, nes $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = (k+1)\omega_1 - k\omega_1 = \omega_1 = \frac{\pi}{a}$.

Ribiniu atveju atskiros diskretaus spektro linijos, artėdamos viena prie kitos, turėtų susiliesti, nes atstumai tarp jų taptų lygūs 0. Taptų lygūs 0 ir spektro linijas vaizduojančių atkarpų dydžiai $|c_k|$, nes, esant bet kuriai numerio k

$$\begin{aligned} \text{reikšmei } \lim_{a \rightarrow \infty} c_k &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{a^2 + k^2 \pi^2} \left[1 - e^{-a} (-1)^k \right] = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{\omega_1}}{\left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^2 + k^2 \pi^2} \left[1 - e^{-\frac{\pi}{\omega_1}} (-1)^k \right] = \\ &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\omega_1}{\pi (1 + k^2 \omega_1^2)} \left[1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\omega_1}}} (-1)^k \right] = 0. \end{aligned}$$

Funkcijos $x(t)e^{-|t|}$ fragmentų $(-a, +a)$ diskretus spektras, kai intervalas $(-a, +a)$, didėjant a , taptų intervalu $(-\infty, +\infty)$, **virstų tolydžiu spektru**.

Tokį spektrą vaizduoti atskiromis atkarpomis, turinčiomis ilgus $|c_k|$, atitinkančius diskretų spektrą sudarančių elementarių harmonikų amplitudes, būtų jau neįmanoma dėl dviejų priežasčių: 1) atstumai tarp spektro linijų taptų lygūs 0 ir spektro linijos susiliėtų; 2) spektro linijų ilgiai $|c_k|$ taptų lygūs 0 ir nieko nebevaizduotų.

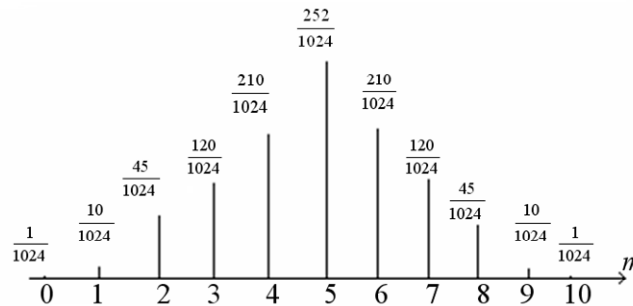
Vadinasi, toks funkcijos $f(t)$, kuri tuomet visuose taškuose $t \in (-\infty, +\infty)$ taptų lygi $x(t)$, spektro vaizdavimo būdas taptų nebetinkamas. Reikėtų ieškoti kokio nors kito tokių funkcijų ir jų spektrų vaizdavimo būdo.

Ši situacija yra analogiška situacijai, su kuria susiduriama tikimybių teorijoje, kai pereinama nuo diskrečių tikimybių skirstinių aprašymo ir grafinio vaizdavimo prie tolydžių tikimybių skirstinių aprašymo ir grafinio vaizdavimo.

Kai atsitiktinio dydžio X skirstinys yra diskretus, tai tikimybės $P\{X=x_i\}$, reiškiančias tikimybes, kad atsitiktinis dydis X įgis reikšmę x_i , galima vaizduoti vertikalėmis atkarpomis, išdėstytomis abscisų ašies x taškuose $x=x_i$ ir turinčiomis ilgus $P\{X=x_i\}$. Tokių atkarpų skaičius gali būti baigtinis, kaip, pavyzdžiui, vaizduojant binominį skirstinį $P\left\{X = \frac{m}{n}, p\right\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ (žiūr. 326

pav., kuriame pavaizduotos binominio skirstinio tikimybės, kai $n=10$; $m=0, 1, 2, \dots, n$; $p=0,5$), bet gali būti ir begalinis, kaip, pavyzdžiui, vaizduojant geometrinio $P\{X=m, p\}=(1-p)^{m-1}p$, $m=1, 2, 3, \dots$ ar

Puasono $P\{X=k, \lambda\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ skirstinių tikimybes.



326 pav.

Kai tikimybiniis skirstinys yra tolydus, kaip, pavyzdžiui, normalusis ar eksponentinis skirstiniai, tai skirstinio tikimybių vaizdavimo būdas atkarpomis jau nebetinka, nes: 1) nebelieka tarpų tarp atkarpų, kadangi atsitiktinis dydis X gali įgyti bet kurias (racionalias ir iracionalias) reikšmes x , 2) „taškinės“ tikimybės $P\{X=x\}$ tampa lygios 0 ir galima apskaičiuoti tik „intervalines“ tikimybes $P\{x_1 < X < x_2\}$, $P\{x_1 \leq X \leq x_2\}$, $P\{X < x\}$.

Todėl tikimybių teorijoje įsivedama speciali „taškinė“ tolydaus tikimybiniio skirstinio charakteristika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x\}}{2\Delta x} = f(x)$, vadinama **tikimybiniio skirstinio tankiu** taške x .

Tikimybiniio tankio integralas $\int_{-\infty}^x f(z) dz = F(x)$ vadinamas **integraline tikimybiniio skirstinio**

funkcija. Ji, būdama lygi tikimybei $P\{X < x\}$, išreiškia tos tikimybės priklausomybę nuo intervalo $(-\infty, x)$ ilgio, kurį charakterizuoja kintamasis x .

Integralinės funkcijos $F(x)$ išvestinė $\frac{dF(x)}{dx}$ yra lygi tikimybiniam tankiui, nes $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(z) dz = \int_{-\infty}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} f(z) \right) dz + f(x) \frac{dx}{dx} - f(-\infty) \frac{d(-\infty)}{dx} = 0 + f(x) - 0 = f(x)$.

Panašiai elgiamasi ir pereinant nuo diskrečių spektrų aprašymo ir vaizdavimo prie tolydžių spektrų aprašymo ir vaizdavimo.

Kai, didėjant a , baigtinis intervalas $(-a, +a)$ pereina į intervalą $(-\infty, +\infty)$, tai **Furjė eilutės elementarių harmonikų diskrečiai kintantis ciklinis dažnis ω** , galintis turėti reikšmes $\omega_k = k\omega_1 = k \frac{\pi}{a}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) **tampa tolydžiai kintančiu intervale $(-\infty < \omega < +\infty)$ cikliniu dažniu ω** , nes diskretaus dažnio reikšmių pokytis $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = (k+1)\omega_1 - k\omega_1 = \omega_1 = \frac{\pi}{a}$, neribotai didėjant a , tampa lygus 0.

Pasinaudodami lygybe $\Delta\omega = \frac{\pi}{a}$, išreikšime a per $\Delta\omega$. Gausime, jog $a = \frac{\pi}{\Delta\omega}$, ir

pažiūrėsime, kuo tampa Furjė eilutė $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik \frac{\pi}{a} t} =$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^a x(t) e^{-ik \frac{\pi}{a} t} dt \right) e^{ik \frac{\pi}{a} t}$, kai $\Delta\omega = \omega_1 \rightarrow 0$ ir diskretus kintamasis $\omega = \omega_k = k\omega_1 = k \frac{\pi}{a}$

tampa tolydžiu kintamuoju $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Pakeitę $\omega_k = k\omega_1 = k \frac{\pi}{a}$ į ω ir daugiklį $\frac{1}{2a}$ į $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$, gauname, jog Furjė eilutė tampa integraline suma $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta\omega e^{ik\Delta\omega t} \left(\int_{-a}^a x(t) e^{-i\omega t} dt \right)$, kuri, kai $a \rightarrow \infty$ ir $\Delta\omega = \frac{\pi}{a} \rightarrow 0$, artėja prie ribos $\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\Delta\omega t} \Delta\omega \left(\int_{-a}^a x(t) e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right)$, vadinamos **Furjė integralu**.

Furjė integralo $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$ sudėtyje esantį integralą $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$, kurio reikšmė priklauso nuo tolydžiai kintančio ciklinio dažnio ω funkcija, $F(\omega)$, vadina **funkcijos $x(t)$ Furjė transformacija** arba tiesiog – **Furjė transformacija**.

Kadangi $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ yra riba, prie kurios artėja santykis $\frac{c_k}{\omega_1} = \frac{\frac{1}{2a} \int_{-a}^a x(t) e^{-ik\frac{\pi}{a}t} dt}{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a x(t) e^{-ik\frac{\pi}{a}t} dt$, kai a artėja prie begalybės ir todėl $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{\pi}{a}$

artėja prie 0, o diskretus dydis $\omega_k = k \frac{\pi}{a}$ tampa tolydžiu dydžiu ω , tai **funkcijos $x(t)$ Furjė transformacija vaizduoja tą ribą prie kurios artėja funkcijos $x(t)$ spektro linijų ilgių $|c_k|$ santykis su tarpų tarp tų linijų dydžiu $\Delta\omega = \omega_1$, kai intervalas $(-a, +a)$ artėja prie intervalo $(-\infty, +\infty)$, o $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{\pi}{a}$ artėja prie 0.**

Natūralu, kad funkcija $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ buvo pavadinta **spektrinio tankio funkcija** arba tiesiog – **spektriniu tankiu**.

Įsivedus žymenį $F(\omega)$, Furjė integralą $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$ galima užrašyti trumpiau: $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$.

Kadangi intervalui $(-a; +a)$ tapus intervalu $(-\infty; +\infty)$ ir Furjė eilutei tapus Furjė integralu, funkcija $f(t)$ tampa lygi funkcijai $x(t)$, tai iš lygybės $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ gauname lygybę $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$.

Ši lygybė vadinama **atvirkštine Furjė transformacija**.

Apibendrinami gautus rezultatus, galime suformuluoti tokį teiginį: **tiesioginė Furjė transformacija leidžia rasti absoliučiai integruojamos funkcijos $x(t)$ spektrinį tankį $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$, o atvirkštinė Furjė transformacija**

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ leidžia, žinant funkcijos $x(t)$ spektrinį tankį $F(\omega)$, rasti pačią funkciją $x(t)$.

Rasime mūsų nagrinėtos funkcijos $x(t) = e^{-|t|}$ spektrinį tankį $F(\omega)$ ir patikrinsime, ar tikrai spektrinis tankis $F(\omega)$ yra santykio $\frac{c_k}{\Delta\omega} = \frac{c_k}{\omega_1} = \frac{c_k a}{\pi}$ riba $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{c_k a}{\pi}$.

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^t \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-i\omega + 1} (1 - 0) + \frac{1}{-i\omega - 1} (0 - 1) \right] = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}.$$

Nesunku įsitikinti, jog ir šiuo konkrečiu atveju galioja lygybė $\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{c_k}{\omega_1} = F(\omega)$. Įrodysime tai.

$$\text{Jau anksčiau mes buvome radę, jog } c_k = \frac{a}{a^2 + k^2 \pi^2} [1 - e^{-a} (-1)^k] = \frac{\omega_1}{\pi(1 + k^2 \omega_1^2)} [1 - e^{-\frac{\pi}{\omega_1}} (-1)^k].$$

$$\text{Todėl } \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{c_k}{\omega_1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\pi(1 + k^2 \omega_1^2)} [1 - e^{-\frac{\pi}{\omega_1}} (-1)^k] = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}, \text{ nes } \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} e^{-\frac{\pi}{\omega_1}} = 0, \text{ o kai } \Delta\omega = \omega_1$$

artėja prie 0, tai diskretus kintamasis $\omega_k = k\omega_1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ vis labiau artėja prie tolydaus kintamojo ir, kai ω_1 tampa lygus 0, kintamasis ω_k tampa tolydžiu kintamuoju ω , kintančiu nuo $-\infty$ iki $+\infty$. Kaip matome, $\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{c_k}{\omega_1} = F(\omega)$.

Spektrinio tankio $F(\omega)$ sąvoką ir jo apskaičiavimo formulę galima taikyti ne tik tolydiems, bet ir diskretiems procesų $x(t)$ spektrams.

Rasime mūsų jau nagrinėtos periodinės harmoninės funkcijos $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t = \cos \omega t$, turinčios baigtinį spektrą, susidedantį iš dviejų spektrinių linijų, spektrinį tankį $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{2\pi}{T} t \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \frac{2\pi}{T})t} dt + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \frac{2\pi}{T})t} dt.$$

Gautų netiesioginių integralų reikšmių apskaičiavimui pasinaudosime formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$, kurios išvedimą skaitytojas gali rasti matematikos vadovėliuose. Čia aš tos formulės

neišvedinėsiu, o apsiribosiu tik tos svarbios mums formulės išvedimo idėjos, pasiskolintos iš knygos [187], paaiškinimu. Būtų gerai, jei skaitytojas rastų noro ir laiko susipažinti su šiuo nestandartiškai parašytu taikomosios matematikos vadovėliu, kuriame jis rastų nemažai naudingų žinių ir įdomių samprotavimų.

$$\text{Kadangi } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-i\omega t} dt, \text{ tai, pažymėję integralą } \int_{-N}^N e^{-i\omega t} dt \text{ žymeniu } I_N(\omega),$$

panagrinėsime, kaip keičiasi ši argumento ω funkcija, kai integralo su rėžiais $(-N; N)$ reikšmė, didėjant N , artėja prie integralo su rėžiais $(-\infty; +\infty)$ reikšmės.

$$I_N(\omega) = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega N} - e^{i\omega N}) = \frac{2}{\omega} \sin N\omega. \text{ Kadangi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ tai } I_N(0) = 2N. \text{ Funkcija } I_N(\omega) \text{ yra}$$

lyginė, nes $I_N(-\omega) = I_N(\omega)$, todėl pakanka išnagrinėti tą funkciją intervale $(0 < \omega < +\infty)$.

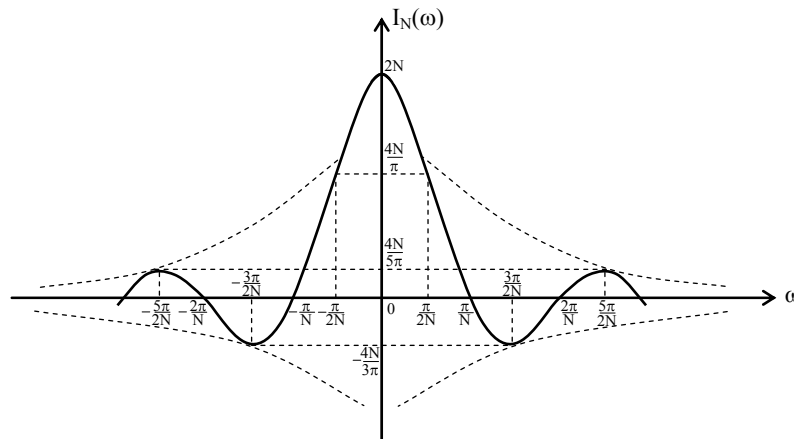
Taškuose $\omega = \frac{k\pi}{N}$, $k=1, 2, 3, \dots$ funkcija $\sin N\omega$ yra lygi 0, todėl tuose taškuose ir funkcija $I_N(\omega)$ lygi 0.

Taškuose $\omega = \frac{(4k+1)\pi}{2N}$, $k=0, 1, 2, \dots$, funkcija $\sin N\omega$ yra lygi 1. Todėl tuose taškuose integralas $I_N(\omega)$ yra lygus $\frac{2}{\omega} = \frac{4N}{(4k+1)\pi}$.

Taškuose $\omega = \frac{(4k+3)\pi}{2N}$ funkcija $\sin N\omega$ yra lygi (-1) . Todėl tuose taškuose integralas $I_N(\omega)$ yra lygus $\left(\frac{2}{\omega}\right) = -\frac{4N}{(4k+3)\pi}$.

Esant pastoviai N reikšmei, funkcijos $I_N(\omega)$ svyravimų amplitudė $\frac{2}{\omega}$, didėjant ω , hiperboliškai mažėja.

Funkcijos $I_N(\omega)$ grafiką vaizduoja 327 pav. Tai – mažėjančios amplitudės „bangelių paketas“.



327 pav.

Didėjant N , atstumai tarp „bangelių“ mažėja, artėdami prie 0, plonėja ir centrinis pikas, o jo aukštis, būdamas lygus $2N$ intensyviai didėja.

Jau minėtoje knygoje [187] įrodoma, kad $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. Daugiklis 2π prieš delta funkciją

$\delta(\omega)$ atsiranda todėl, kad integralas $\int_{-\infty}^{+\infty} I_N(\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin N\omega}{\omega} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N \sin N\omega}{N\omega} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 2\pi$, o

integralas $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega$, kaip tai išplaukia iš funkcijos $\delta(\omega)$ apibrėžimo, turi būti lygus 1.

Knygoje [187] skaitytojas ras ištisą skyrelį, skirtą delta funkcijai, jos savybėms ir jos taikymams, čia panaudotos formulės $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ bei formulės $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ išvedimą ir daug kitų naudingų dalykų.

Dabar, turėdami formulę $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$, galima pratęsti funkcijos $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$ spektrinio

tankio $F(\omega)$ apskaičiavimą. Įstatydami į formulę $F(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \frac{2\pi}{T})t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \frac{2\pi}{T})t} dt \right]$ vietoj

netiesioginių integralų jų reikšmes $2\pi\delta(\omega - \frac{2\pi}{T})$ ir $2\pi\delta(\omega + \frac{2\pi}{T})$, gauname, jog funkcijos $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$

spektrinis tankis $\frac{1}{2}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \frac{2\pi}{T})$.

Tai reiškia, jog visuose funkcijos $F(\omega)$ apibrėžimo taškuose $\omega \in (-\infty, +\infty)$, išskyrus taškus $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ir $\omega = -\frac{2\pi}{T}$, spektrinis tankis $F(\omega)$ yra lygus 0, o minėtuose dviejuose taškuose

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ir $\omega = -\frac{2\pi}{T}$ jis yra vaizduojamas impulsais $\frac{1}{2}\delta(\omega)$, gaunamais įstačius į formulę $F(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \frac{2\pi}{T})$ ciklinio dažnio ω reikšmes $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ir $\omega = -\frac{2\pi}{T}$.

Spektrinio tankio $F(\omega)$ integralai visuose intervaluose, į kuriuos nepatenka nė vienas iš taškų $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ir $\omega = -\frac{2\pi}{T}$, taip pat yra lygūs 0, o taškų $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ir $\omega = -\frac{2\pi}{T}$ aplinkoje tie integralai yra lygūs

funkcijos $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$ Furjė eilutės $\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$ koeficientų reikšmėms. Tuo nesunku įsitikinti,

$$\text{apskaičiavus integralus } \int_{\frac{2\pi}{T}-\varepsilon}^{\frac{2\pi}{T}+\varepsilon} F(\omega) d\omega = \int_{\frac{2\pi}{T}-\varepsilon}^{\frac{2\pi}{T}+\varepsilon} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{T}-\varepsilon}^{\frac{2\pi}{T}+\varepsilon} \left[\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}; \quad \int_{\frac{2\pi}{T}-\varepsilon}^{\frac{2\pi}{T}+\varepsilon} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}; \quad \int_{-\infty}^{-\frac{2\pi}{T}-\varepsilon} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2}(0+0) = 0; \quad \int_{\frac{2\pi}{T}-\varepsilon}^{\frac{2\pi}{T}+\varepsilon} F(\omega) d\omega = 0; \quad \int_{\frac{2\pi}{T}+\varepsilon}^{+\infty} F(\omega) d\omega = 0.$$

$$\text{Atlikę atvirkštinę Furjė transformaciją } \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) \right] e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} (e^{i\frac{2\pi}{T}t} + e^{-i\frac{2\pi}{T}t}) = \cos \frac{2\pi}{T}t, \text{ gauname, jog } \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = x(t), \text{ ką ir turėjome gauti.}$$

$$\text{Iš jau išnagrinėtų dviejų spektrinio tankio } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

apskaičiavimo pavyzdžių galima padaryti išvadą: **kai funkcijos $x(t)$ spektras yra tolydus, tai tos funkcijos spektrinis tankis $F(\omega)$ yra tolydi ciklinio dažnio funkcija, o kai funkcijos $x(t)$ spektras yra diskretus, tai funkcijos spektrinis tankis yra delta funkcijų suma. Ta suma turi baigtinį dėmenų skaičių, kai funkcijos $x(t)$ spektras turi baigtinį nenulinių spektro linijų skaičių (t. y., kai funkcija $x(t)$ yra harmoninė funkcija ar harmoninių funkcijų algebrinė suma, turinti baigtinį dėmenų skaičių), ir begalinį dėmenų skaičių, kai funkcijos $x(t)$ spektras turi begalinį skaičių nenulinių spektro linijų (t. y., kai funkcija $x(t)$ yra periodinė neharmoninė funkcija).**

Rekomenduočiau skaitytojui surasti mūsų jau nagrinėtos periodinės neharmoninės funkcijos

$$x(t) = \begin{cases} \frac{T}{2} + (t - \frac{T}{2}2m), & t \in [\frac{T}{2}(2m-1); \frac{T}{2}2m] \\ \frac{T}{2} - (t - \frac{T}{2}2m), & t \in [\frac{T}{2}2m; \frac{T}{2}(2m+1)] \end{cases} \text{ spektrinį tankį } F(\omega). \text{ Tai padėtų skaitytojui priprasti prie}$$

spektrinio tankio apskaičiavimo specifikos, kai funkcijų spektrai gali būti tolydūs, diskretūs bei mišrūs, ir **įsitikinti, kad spektrinis tankis ir Furjė transformacijos – gana universali tolydžių ir diskrečių funkcijų matematinio aprašymo ir jų „elgesio“ matematinės analizės priemonė.**

Šiame mokymo priemonės skyrelyje aš gana detalai aptarinėjau funkcijų ir procesų spektro ir spektrinio tankio sąvokas bei nagrinėjau nemažai pavyzdžių, iliustruojančių tas sąvokas bei spektrų charakteristikų apskaičiavimo algoritmus, ir tai dariau dėl dviejų priežasčių.

Pirmoji priežastis jau buvo paminėta anksčiau: nemaža dalis studentų šias sąvokas nepakankamai gerai supranta, o kai kurie – iš viso jų nesuvokia ir todėl nesugeba kūrybiškai naudotis praktikoje nei tomis sąvokomis, nei tas sąvokas charakterizuojančiomis formulėmis. Didžioji dalis studentų geriausiu atveju sugeba tomis formulėmis bei atitinkamomis kompiuterinėmis programomis naudotis tik „receptiškai“, tačiau nesugeba jomis pasinaudoti kūrybiškai, kai susiduria su nestandartinėmis situacijomis.

Ir dėl to kalti ne tik studentai, bet ir mes, dėstytojai, bei tie vadovėliai, iš kurių studentams tenka mokytis. Noras užpildyti kai kurias mūsų paskaitų ir vadovėlių spragas – **antroji padidinto dėmesio šiai temai mokymo priemonėje priežastis.**

Apie tai, kad, **įvedant naujas sudėtingas sąvokas, nepakanka vien tik formalių apibrėžimų pateikimo**, jau buvo kalbėta. Dabar aš norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį dar į kitus du įvairių vadovėlių trūkumus, atsiradusius dėl sistemiškumo stokos ir sukeliančius studijuojantiems bereikalingus papildomus sunkumus.

Pirmasis trūkumas – nusistovėjusios žymėjimų sistemos nebuvimas. Pavyzdžiui spektrinis tankis vienose knygose žymimas $F(\omega)$, kitose – $S(\omega)$, trečiose – $X(s)$, ketvirtose – dar kitaip. Aš čia pavartoju žymenį $F(\omega)$ ne tik todėl, kad matematikoje funkcijos gana dažnai žymimos simboliu f ($f(x)$, $f(t)$, $f(z)$ ir t. t.), o jų integralai – simboliu F , bet ir todėl, kad spektrinio tankio sąvoka labai susipynusi su Furjė integralo ir Furjė transformacijų sąvokomis. Juk Laplaso transformacijos žymėjimui gana dažnai vartojamas operatorius L ($L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$), o Hevisaido – operatorius H ($H[x(t)] = p \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$).

Todėl ir integralą $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$, mano nuomone, reikėtų žymėti F . Ir toks žymėjimas turėtų tapti standartinis, visiems privalomas ir visų vienodai suprantamas.

Daugelyje situacijų įvairovė yra pageidautinas dalykas, tačiau žymėjimų sistemoje vieno ir to paties denotato žymėjimų įvairovė ne tik nėra naudinga, bet sukuria papildomus nepatogumus. Dabar, deja, žymėjimų vienodumo ir vienareikšmiškumo nuostatos dar ne visada laikomasi: skirtingose srityse gana dažnai tas pačias sąvokas žymi skirtingai.

Laikau tai blogybe, nors ir ne pačia didžiausia, nes literatūroje, skirtoje spektrams ir spektrinei analizei, pasitaiko ir didesnių blogybių, atsirandančių dėl sistemiškumo stokos. Tokios blogybės pavyzdys – **antrasis trūkumas**, dėl kurio man, įvedant spektrinio tankio sąvoką ir išvedant jo apskaičiavimo formulę, teko (ir dabar tenka) rašyti apie dalykus, kurie, atrodo, turėtų būti savaime suprantami. Šio – antrojo – trūkumo esmė: **spektrinių tankių skirtingi autoriai kartais apibrėžia skirtingomis formulėmis, kurios skiriasi ne tik savo forma ir vartojamais žymėjimais, bet ir savo esme, nes apibrėžia, nors ir proporcingus, bet skirtingus denotatus, skirtingus dydžius.**

Man atrodo natūralu, kad kokios nors funkcijos $x(t)$ spektrinis tankis būtų apibrėžiamas formule, išplaukiančia iš tos funkcijos spektrą formuojančių harmonikų amplitudės charakterizuojančių

$$\text{Furjė eilutės koeficientų } c_k \text{ reikšmių apskaičiavimo formulės } c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t)e^{-ik\omega_1 t} dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a x(t)e^{-ik\omega_1 t} dt = \\ = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-ik\omega_1 t} dt, \text{ kuri įvairiuose matematikos vadovėliuose, ačiū Dievui, reiškia tą patį, nors žymenys}$$

kartais būna ir skirtingi. Tai rodo, jog visi matematikai spektro sąvoką traktuoja vienodai. Taip ir turėtų būti, todėl čia kol kas viskas tvarkoje.

Man atrodo natūralu apibrėžti spektro tankį taške $\omega_k = k\omega_1$ kaip ribą, prie kurios artėja koeficiento c_k reikšmės ir intervalo $\left(\omega_k - \frac{\omega_1}{2}, \omega_k + \frac{\omega_1}{2}\right) = \left(\omega_1(k - \frac{1}{2}), \omega_1(k + \frac{1}{2})\right)$ ilgio $\omega_1(k + \frac{1}{2}) - \omega_1(k - \frac{1}{2}) = \omega_1$, reiškiančio atstumą tarp gretimų spektro linijų, santykis $\frac{c_k}{\omega_1} = \frac{c_k T}{2\pi}$, kai svyravimų periodas T artėja prie begalybės, o atstumai tarp gretimų spektro linijų, būdami lygūs $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, artėja

prie 0. **Ta riba lygi $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$ ir ją reikėtų laikyti spektrinio tankio $F(\omega)$ apskaičiavimo formule.** Tačiau spektrinis tankis taip apibrėžiamas ne visuose matematikos vadovėliuose ir žinyuose.

Yra nemažai vadovėlių, kuriuose spektrinis tankis apibrėžiamas formule $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$, o taip pat

vadovėlių, kuriuose spektrinis tankis apskaičiuojamas, naudojantis formule $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$. Čia pateiktos

trys formulės skiriasi pastoviais daugikliais, todėl skaičiavimų rezultatai, kuriuos gauname naudodamiesi šiomis formulėmis, yra proporcingi, tačiau vis dėlto skirtingi.

Man atrodo, kad matematikoje tokio nevienareikšmiškumo ir tokios laisvės vadinti „ką noriu ir kaip noriu“ neturėtų būti. Juk matematika – tai visų matematikų bendra kalba, kurią visi matematikai turėtų vartoti taip, jog kiekviena frazė visur būtų suprantama vienodai. Matematika – nors ir abstraktus mokslas, tačiau turėtų skirtis nuo „abstraktaus meno“, kurį kiekvienas individas gali interpretuoti taip, kaip jam patinka, pavyzdžiui, laikydamas ant popieriaus lapo padėtą tašką arba jo nebuvimą „genialumo viršūne“, kuri galbūt nieko nepasako, bet gali būti įsivaizduojama kaip pasakanti labai daug.

Aš suprantu ir galiu net paaiškinti, iš kur ir kaip atsirado kitos dvi mano čia pateiktos spektro tankio „apibrėžimo“ formulės, ir, manau, jog tas paaiškinimas būtų naudingas skaitytojui, renkantis vieną iš trijų kandidatų.

Furjė integralas $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt \right) d\omega$ yra dviejų Furjė transformacijų – tiesioginės

ir atvirkštinės – kompozicija. Tos transformacijos gana panašios savo forma: abi jos – integralai, turintys tuos pačius rėžius, abiejuose yra kompleksiniai eksponentiniai daugikliai, besiskiriantys tik eksponentų laipsnių rodiklių ženklais (daugiklis, turintis neigiamą laipsnio rodiklį, dauginą funkciją $x(t)$, daugiklis, turintis teigiamą laipsnio rodiklį, dauginą funkciją $F(\omega)$, kuri gaunama integruojant ką tik minėtąją pirmąją sandaugą), ir jei kokiam nors matematikui – teoretikui, tarkim, visiškai nerūpi gaunamų matematinių formulių interpretacijos, o rūpi tik abstraktus gaunamų formulių „matematinis grožis“, pasireiškiantis simetrijos tobulumu, tai, savaime suprantama, jog jam kils idėja siekti dar didesnio simetriškumo, apibrėžiant Furjė transformacijas šiek tiek kitaip negu jos buvo apibrėžtos formulėmis

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt \quad \text{ir} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{it\omega} d\omega.$$

Juk galima pasiekti dar tobesnę simetriją, pasiūlius tiesiogine Furjė transformacija laikyti formulę $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$, o atvirkštine – formulę $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{it\omega} d\omega$. Nuo

tokio pakeitimo Furjė integralo formulė išliks ta pati, nes $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt \right) e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt \right) d\omega$, ir tas integralas išliks tiesioginės ir atvirkštinės Furjė transformacijų kompozicija.

Taip apibrėžiant tiesioginę ir atvirkštinę Furjė transformacijas, simetrijos tarp tų transformacijų tikrai padaugėja, todėl daugelyje matematikos vadovėlių tos transformacijos taip ir apibrėžiamos.

Aš sutinku su tuo, jog taip apibrėžti Furjė transformacijas tikrai galima, tačiau nenorėčiau sutikti su tuo, kad taip apibrėžta funkcija $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$ būtų vadinama funkcijos $x(t)$ spektriniu tankiu. Priėmus čia ką tik paminėtus tiesioginės ir atvirkštinės Furjė transformacijų apibrėžimus ir palikus formulei $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$ žymėjimą $F(\omega)$, funkcijos $x(t)$ spektriniam tankiui

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$ reikėtų pasirinkti kitoki žymėjimą, pavyzdžiui, $S_x(\omega)$. Nors, žinoma, galima ir tiesioginę Furjė transformaciją, ir funkcijos $x(t)$ spektrinį tankį išreikšti viena formule $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$, paliekant atvirkštinei Furjė transformacijai formulę $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{it\omega} d\omega$.

Simetrijos mažiau, bet prasmės daugiau. Kas svarbiau – ar formulių simetriškumas, ar jų interpretuojamumas – reikėtų apsispręsti ir priimti vienareikšmišką sprendimą.

Pastebėjęs, kad trečiojo tipo Furjė transformacijų formulės $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$ ir $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{it\omega} d\omega$ dažniausiai pasitaiko knygose tų autorių, kurie specializavosi kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos srityje, manau, kad šios formulės atsirado, kaip Laplaso transformacijų $L[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ ir $L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$ analogai. Žinoma, tai tik hipotezė, tačiau jokių kitų argumentų, paaiškinančių, iš kur ir kodėl atsirado tokios Furjė transformacijų ir spektrinio tankio apibrėžimo formulė $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$, nerandu.

Nemanau, kad vienos ir tos pačios sąvokos apibrėžimas šiek tiek skirtingas reikšmes turinčiomis formulėmis yra sveikintinas reiškinys, padedantis matematikams bei sistemotyrimams efektyviau dirbti ir palengvinantis studentams jų studijas. Kaip tik atvirkščiai: nemažai studentų, studijuodami skirtingų autorių darbus, susidūrę su tą pačią sąvoką išreiškiančiomis skirtingomis formulėmis ir nežinodami tų skirtumų priežasčių, tiesiog, susipainioja, bandydami suprasti, iš kur, ir kaip atsirado tie skirtumai. O jei kai kurie žingeidesni studentai paskaito dar ir fizikų darbus, tai susiduria su dar vienu (ir vėl reiškiančiu jau kitą sąvoką) spektrinio tankio apibrėžimu: **fizikų darbuose**

spektrinis tankis gana dažnai apibrėžimas kaip funkcijos $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-it\omega} dt$ modulio

kvadratas.

Toks apibrėžimas, nagrinėjant energijos pasiskirstymą atėjusio sudėtingo akustinio ar elektromagnetinio signalo spektre, turi prasmę, tačiau aš manau, kad jį derėtų vadinti ne spektrinio tankio (be papildomo epiteto) apibrėžimu, nes toks pavadinimas jau atiduotas kitai sąvokai, o **energijos pasiskirstymo spektre tankio** ar bent jau **energijos pasiskirstymo spektrinio tankio** apibrėžimu.

Pradėję skaityti ekonomistų ir demografų darbus, rastume dar daugiau spektrinio tankio apibrėžimų, šiek tiek besiskiriančių nuo mūsų čia ką tik pateikto apibrėžimo. Ir tai yra labai negerai. Sisteminis požiūris į mokslų sistemą reikalauja sąvokos apibrėžimų ir žymėjimų suvienodinimo. Apie tai jau buvo rašyta 1.9.1.3. skyrelyje, nagrinėjant taip vadinamąją „chemijos nomenklatūrą“, tačiau mokslinės terminijos tikslinimo ir standartizavimo problema aktuali ne tik chemijoje, bet ir kituose moksluose. Šios problemos aktualumas ypač išaugo paskutiniaisiais metais, suaktyvėjus skirtingų sričių specialistų bendravimui bei bendradarbiavimui, ir, suprantama, netolimoje ateityje dar labiau padidės ir paaštrės. Neišsprendus šios problemos, neįmanoma kurti efektyviai veikiančias „kolektyvinio proto sistemas“, o tokios sistemos, kaip bus parodyta 1.16. skyriuje, greitai laiku taps būtinu sudėtingų problemų visose srityse spendimo instrumentu.

Tačiau dabar net ir mokslo žmonių tarpe nemažai tokių, kurie nemato nieko bloga tame, kad įvairiose srityse įvairūs autoriai šiek tiek skirtingai supranta ir šiek tiek skirtingai apibrėžia tas pačias sąvokas. Humanitariniuose moksluose tai įprastas reiškinys. „Kas čia bloga tame, kad spektrinio tankio formulės skiriasi pastoviais daugikliais“, – samprotauja toks žmogus. „Juk taip apibrėžti spektriniai tankiai skiriasi tik masteliu, tik pasirinkto matavimo vieneto dydžiu. Anglosaksiškose šalyse žmonės savo buityje iki šiol vis dar naudoja senąją („angliškąją“) matavimo vienetų sistema, vis dar nenorėdami galutinai pripažinti metrinės sistemos, kai kuriems anglosaksams turinčios psichologiškai neigiamą „prancūzišką“ atspalvį, pranašumo. Ir dangus dėl to negriūva.“ Ir taip mąstantys žmonės – irgi savotiškai teisūs. Daugeliui žmonių tokį požiūrį galima laikyti normaliu ir leistinu. Tačiau toks mąstymo siaurumas neturėtų būti leistinas tiems, nuo kurių priklauso mokslo ir visuomenės raida, nes tokie „vadovai“ nesugeba vesti nei mokslo, nei visuomenės progreso link. Jie tampa net savotiškais stichiškai besivystančio progreso stabdžiais, atlikdami šį vaidmenį nesąmoningai, o kartais – ir sąmoningai, suteikdami jam giliamintiškai skambantį „išmintingo konservatizmo“ vardą. Sutinku, su tuo, kad išmintingas konservatizmas kartais būna naudingas, o kartais – net būtinas (kaip išmintingo atsargumo sinonimas, apsaugantis nuo griovimo to, kas sukurta, nepakeičiant niekuo geresniu to, kas griunama), bet nesutinku su „išmintingo konservatizmo“ sąvokos naudojimu vaidmenyje skydo, pridengiančio nenorą „eikvoti“ savo asmeninį laiką ir jėgas tam, kas būtų naudinga daugeliui kitų žmonių, bet negali tuoj pat duoti būtent man – „vadovui“ – pakankamai didelės asmeninės naudos ar net galėtų pakenkti mano bei mano „grupės draugų“ asmeniniams interesams.

Sistemiškai mąstantis žmogus negali nemąstyti apie tai, kas galėtų bei turėtų būti, ir privalo dėti pastangas, siekdamas, kad didėtų pageidautinos ateities atėjimo tikimybė bei mažėtų nepageidautinos

ateities tikimybė, tačiau jis taip pat privalo suprasti, jog realiame gyvenime daug kas nepriklauso nuo mūsų norų bei valios ir todėl vyksta ne visada ir ne visai taip, kaip norėtusi. Tokiais atvejais jam tenka priimti kaip neišvengiamybę net ir tai, kam jis negalėtų pritarti, tačiau bent jau kol kas pakeisti negali.

Todėl ir aš, nagrinėdamas šiame skyrelyje ekonometrinius modelius bei laiko eilučių teoriją ir suprasdamas, kad studentams teks naudotis ta ekonometrine literatūra, kokia dabar yra, privalau supažindinti savo studentus ir kitus šios mokymo priemonės skaitytojus su šioje srityje dabar vartojama terminologija bei joje taikomomis formulėmis, žinoma, stengdamasis ten, kur reikia ir įmanoma, permesti „tiltukus“ tarp to, kaip yra, ir to, kaip turėtų būti, ir vildamasis, kad tokios mano pastabos palengvins studentams bei kitiems šios mokymo priemonės skaitytojams įvairių autorių knygų studijavimą ir padės jiems nesusipainioti tarp vieną ir tą pačią sąvoką apibrėžiančių skirtingų apibrėžimų ir tuos apibrėžimus išreiškiančių formulių, kartais skirtingų ne tik savo forma, bet ir savo prasme.

Pavyzdžiui, ekonometrikoje stacionarijos laiko eilutės $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots$ autokoreliacinės funkcijos $r_x(k) = \frac{E[(x(t) - E[x(t)]) \cdot (x(t+k) - E[x(t+k)])]}{\sqrt{E[(x(t) - E[x(t)])^2] \cdot E[(x(t+k) - E[x(t+k)])^2]}} =$

$$= \frac{E[x(t) \cdot x(t+k)] - E[x(t)] \cdot E[x(t+k)]}{\sqrt{E[(x(t) - E[x(t)])^2] \cdot E[(x(t+k) - E[x(t+k)])^2]}} \quad \text{spektriniu tankiu, žymimu } \rho(\omega),$$

vadinamas ne integralas $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$, kur $r_x(\tau)$ yra minėtosios laiko eilutės

autokoreliacinė funkcija, o integralinė suma $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{ik\omega}$.

Šia formule naudojamosi ir mūsų jau ne kartą minėtoje knygoje [182].

Suprantama, kodėl, nagrinėjant realias laiko eilutes, aprašančias ekonominius reiškinius bei procesus, integralą tapo tikslinga pakeisti integraline suma: juk laiko eilutės sudaromos atliekant stebėjimus ir matavimus ne kiekvieną laiko momentą, t. y. ne tolydžiai, o diskrečiai išdėstytais laiko momentais $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$.

Suprantama ir tai, kodėl ekonometrinuose skaičiavimuose atsisakome tokių nebūdingų ekonomikai daugiklių kaip $\frac{1}{2\pi}$, tuo labiau, kad, kaip jau matėme, ir

matematikoje kai kurie matematikai kartais tokio daugiklio nevartoja, palikdami jį atvirkštinei Furjė transformacijai. Juk nuo to daugiklio buvimo ar nebuvimo keičiasi tik matavimų vienetų mastelis, o pati formulė, žiūrint į ją kaip į nagrinėjimo reiškinio modelį, iš esmės išlieka ta pati: galima naudotis įvairaus mastelio žemėlapiais ir daryti teisingus sprendimus, kai žinai to konkretaus žemėlapio mastelį.

Dabar belieka paaiškinti, kodėl „ekonometrinėje“ spektrinio tankio formulėje kompleksinio daugiklio laipsnio rodiklį buvo galima pateikti su pliuso (o ne tik su minuso) ženklu, t. y. kodėl stacionarios laiko eilutės autokoreliacijos funkcijos spektrinio

tankio formulė gali būti ne tik $\rho(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{-ik\omega}$, bet ir $\rho(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{ik\omega}$.

Įrodysiu šių formulių ekvivalentumą stacionaraus proceso $x(t)$ autokoreliacijos funkcijai.

Iš laiko eilutės $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots$ stacionarumo apibrėžimo išplaukia, jog jos autokoreliacinė funkcija yra lyginė, o jos spektras yra simetriškas taško $k=0$ atžvilgiu, t. y. galioja lygybė $r_x(-k)=r_x(k)$.

Įvedę naują kintamąjį $m=-k$, gauname, jog

$$\rho_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{-ik\omega} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_x(-m) e^{im\omega} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_x(m) e^{im\omega}.$$

Kadangi sumos $\sum_{m=-n}^{-n} r_x(m)e^{im\omega}$ reikšmė nepriklauso nuo dėmenų sumavimo tvarkos, tai galioja lygybė $\sum_{m=-n}^{-n} r_x(m)e^{im\omega} = \sum_{m=-n}^{+n} r_x(m)e^{im\omega}$, iš kurios, pereidami prie ribos $n \rightarrow \infty$, gauname, jog $\sum_{m=-\infty}^{-\infty} r_x(m)e^{im\omega} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_x(m)e^{im\omega}$.

Todėl tuo atveju, kai $r_x(-k)=r_x(k)$, formulės $\rho_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k)e^{-ik\omega}$ ir $\rho_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k)e^{ik\omega}$ yra ekvivalenčios, ką ir reikėjo įrodyti.

Kadangi $r(0)=1$ ir stacionariose laiko eilutėse $r(-k)=r(k)$, o taip pat todėl, kad $\sin(-k\omega)=-\sin k\omega$ ir $\cos(-k\omega)=\cos k\omega$, tai gauname, jog $\rho(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{-1} r(k)[\cos(k\omega) + i\sin(k\omega)] + r(0)[\cos 0 + i\sin 0] + \sum_{k=1}^{\infty} r(k)[\cos(k\omega) + i\sin(k\omega)] = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r(k)\cos(k\omega)$.

Tai reiškia, jog stacionarių laiko eilutės **autokoreliacijos funkcijos spektrinis tankis $\rho(\omega)$ yra periodinė ir simetrinė argumento ω funkcija**. Jos periodas $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Kadangi funkcijos $\rho(\omega)$ grafikas, kurį dažnai vadina tiesiog **spektru**, yra simetriškas ne tik tiesės $\omega=0$, bet ir tiesės $\omega=\pi$ atžvilgiu, nes $\cos(\pi-k\omega)=\cos(\pi+k\omega)$, tai, analizuojant funkciją $\rho(\omega)$, galima apsiriboti ω reikšmėmis iš segmento $[0, \pi]$, o taip pat išvesti argumentą $\hat{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$, kurio reikšmė keisis nuo 0 iki $\frac{1}{2}$.

Formulę $\rho(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) \cdot e^{ik\omega} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r(k)\cos(k\omega)$ galima interpretuoti kaip **spektrinio tankio $\rho(\omega)$ išraišką per autokoreliacinę funkciją $r(k)$** , t. y. kaip autokoreliacinės funkcijos Furjė transformaciją.

Galima gauti ir formulę, išreiškančią koreliacinę funkciją $r(k)$ per spektrinį tankį $\rho(\omega)$. Išvesime tokią atvirkštinę priklausomybę, t. y. atliksime atvirkštinę Furjė transformaciją.

Formulę $\rho(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) \cdot e^{ik\omega} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r(k)\cos(k\omega)$ galima užrašyti ir formoje $\rho(\omega) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\cos(m\omega)$. Padauginę abi šios lygybės puses iš $\cos(k\omega)$, kur k – bet koks nelygus 0 sveikas skaičius, ir integruodami abi lygybės $\rho(\omega)\cos(k\omega)=\cos(k\omega) + 2\sum_{m=1}^{\infty} r(m)\cos(m\omega) \cdot \cos(k\omega)$ puses gausime $\int_0^{\pi} \rho(\omega)\cos(k\omega)d\omega = \int_0^{\pi} \cos(k\omega)d\omega + 2\sum_{m=1}^{\infty} r(m) \int_0^{\pi} \cos(m\omega) \cdot \cos(k\omega)d\omega$.

Kadangi $\int_0^{\pi} \cos(k\omega) d\omega = 0$ visoms sveikoms $k \neq 0$ reikšmėms, o

$$\int_0^{\pi} \cos(m\omega) \cos(k\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(m+k)\omega + \cos(m-k)\omega] d\omega = \begin{cases} 0, & \text{kai } m \neq k, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{kai } m = k, \end{cases} \quad \text{tai gauname,}$$

jog $\int_0^{\pi} \rho(\omega) \cos(k\omega) d\omega = 0 + 2r(k) \frac{\pi}{2}$, iš kur išplaukia formulė $r(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \rho(\omega) \cos(k\omega) d\omega$,

išreiškianti **autokoreliacinės funkcijos $r(k)$ priklausomybę nuo spektrinio tankio $\rho(\omega)$** . Analogiškai galima išvesti ir formulę $r(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\omega) \cos(k\omega) d\omega$. Šią

priklausomybę galima išreikšti ir formoje $r(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\omega) e^{-ik\omega} d\omega$.

Skaitytojas, prisimenantis šiame skyrelyje išsakytas pastabas apie daugiklio $\frac{1}{2\pi}$ vartojimą Furjė transformacijose, galėtų atkreipti dėmesį į tai, jog nerašydami šio daugiklio tiesioginėje Furjė transformacijoje ir autokoreliacinės funkcijos $r(k)$ spektrinio tankio apibrėžime (ką būtų buvę tikslinga daryti), mes tą daugiklį šiuo atveju gavome vis tiek, bet jau atvirkštinėje Furjė transformacijoje.

Laiko eilutės $x(t)$ spektrinio tankio $\rho(\omega)$ apskaičiavimas ir jo grafinis atvaizdavimas (t. y. laiko eilutės spektro $\rho(\omega)$ sudarymas) laiko eilučių analizėje užima gana svarbią vietą, nes leidžia surasti to proceso, kurį aprašo nagrinėjamoji laiko eilutė, sudėtyje esančius harmoninius bei kitus periodinius svyravimus ir tokiu būdu „pagauti“ nagrinėjamo proceso sudėtyje esančius sezoninius svyravimus bei konjunktūrinius ciklus. Tai būna aktualu, kai sudėtingame procese reikia išskirti jo stochastinę ir nestochastines sudėtines dalis.

Apskaičiuodami funkcijos $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$ spektrinį tankį, esame nustatę, jog tuo atveju, kai proceso, kurį aprašo laiko eilutė $x(t)$, sudėtyje yra harmoninių svyravimų, turinčių dažnį ω^* (t. y. periodą $T = \frac{2\pi}{\omega^*}$), tokio proceso spektrinio tankio $\rho(\omega)$ grafike atsiranda pikai, parodantys, kad proceso $x(t)$ sudėtyje yra harmoninių svyravimų, turinčių ciklinį dažnį ω^* (žiūr. 327 „c“ pav.). Tai reiškia, kad, **nagrinėdami laiko eilutės spektrą $\rho(\omega)$, pagal tame spektre esančių pikų skaičių ir vietą mes galime nustatyti kiek ir kokių harmonikų įeina į proceso $x(t)$ sudėtį.**

Kai kokia nors sistema yra periodiškai veikiamą ir tų poveikių ciklinis dažnis ω^* , tai sistemoje vykstančio proceso $x(t)$ spektro sudėtyje gali atsirasti ne tik harmonika, turinti ciklinį dažnį ω^* , bet ir harmonikos su dažniais $\frac{\omega^*}{2}, \frac{\omega^*}{3}, \dots, \frac{\omega^*}{k}, \dots$. Kitaip tariant, **proceso $x(t)$ sudėtyje esantys periodiniai svyravimai, turintys periodą $T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$, gali iššaukti žemesnio dažnio periodinius svyravimus, turinčius periodus $2T^*, 3T^*, \dots, 4T^*, \dots$, kartotinius periodui T^* . Tokius svyravimus, turinčius periodus $2T^*, 3T^*, \dots$, vadina svyravimų, turinčių periodą T^* , „aidu“.**

Svyravimų „aidu“ reiškinys – bendrasisteminis reiškinys, nes svyravimų „aidu“ galima aptikti pačios įvairiausios prigimties sistemose vykstančių procesų

spektruose (žiūr., pavyzdžiui, 328 „c“ pav.). Kitas svyravimų ir jų „aido“ atsiradimo pavyzdys – demografiniai gimstamumo svyravimai, kurie po to pasireiškia besikartojančiais į mokyklas ateinančių pirmokėlių skaičiaus, o dar vėliau – ir sudaromų santuokų bei naujose šeimose gimstančių vaikų skaičiaus svyravimais.

Antrojo pasaulinio karo metu labai daug vyrų buvo mobilizuoti ir dalyvavo karo veiksmuose. Frontų užnugariuose daugumoje šeimų buvo likusios tik moterys – mobilizuotų vyrų motinos, seserys ir žmonos – bei jų vaikai ir seneliai. Natūralu, kad karo metais gimstamumas mažėjo ir paskutiniiais karo metais jis buvo labai mažas.

Taip pat natūralu, kad, karui pasibaigus ir labai dideliui skaičiui vyrų po demobilizacijos sugrįžus į savo šeimas bei kuriantis dideliui skaičiui naujų šeimų, jau kitais metais gimstamumas staigiai ūgtelėjo. Dar po septynerių metų tai atsiliepė mokinukų, atėjusių į pirmąją klasę, skaičiaus šuoliui ir to skaičiaus augimui, kuris tęsėsi dar keletą metų.

Praėjus porai dešimtmečių nuo Antrojo pasaulinio karo pabaigos ką tik minėtasis gimstamumo šuolis atsiliepė santuokų skaičiaus šuoliui ir po jo sekusiu nauju gimstamumo šuoliu, kuris savo eile po šešerių-septynerių metų pasireiškė ir nauju pirmokėlių skaičiaus šuoliu.

Ši demografinė banga, praėjus apytikriai ketvirčiui amžiaus, dar kartą pasikartojo, nors, žinoma, ji jau nebebuvo tokia ryški, nes „pikas“ buvo jau žemesnis ir platesnis.

Demografinis Antrojo pasaulinio karo „aidas“ jaučiamas iki šiol, nors jo „bangos“ vis silpnėja ir plėtėja bei po truputį vis labiau vėluoja, nes dabar didžioji dalis šeimų susikuria ir susilaukia palikuonių ne tik mažesnio jų skaičiaus, bet ir vėliau.

Svyravimų „aido“ atsiradimo mechanizmą nesunku suvokti, prisiminus bendrąją svyravimų sistemose atsiradimo mechanizmą, apie kurią šioje mokymo priemonėje jau ne kartą buvo kalbėta.*

Stacionarijos laiko eilutės $\tilde{x}(t) = \varepsilon(t)$, gaunamos, eliminavus iš laiko eilutės $x(t)$ tendą $f_{tr}(t)$, sezoninius svyravimus $\varphi(t)$ ir konjunktūrinius ciklinius procesus $\psi(t)$, pavyzdžiu galėtų būti laiko eilutė $\varepsilon(t) = \alpha\varepsilon(t-1) + \delta(t)$. Tokia eilutė galėtų būti gaunama, stebint Markovo proceso būsenos koki nors požymį ir laiko momentais $t=0, 1, 2, \dots$ matuojant ir registruojant to požymio kiekybinę charakteristiką $\varepsilon(t)$.

Markovo procesu, kaip jau buvo rašyta šios mokymo priemonės 1.3. ir 1.4. skyriuose, vadinamas toks atsitiktinis procesas, kurio **visos tikimybinės charakteristikos artimiausioje ateityje priklauso nuo to proceso būsenos dabar ir nepriklauso nuo to proceso priešistorijos**, t. y. nuo to, kaip analizuojamoji sistema pateko į tą būseną, kurioje ji yra dabar.

Laiko eilutėje $\varepsilon(t) = \alpha\varepsilon(t-1) + \delta(t)$ **atsitiktinis dydis $\varepsilon(t)$ yra nagrinėjamos stacionarios stochastinės sistemos būsenos nagrinėjamojo požymio kiekybinės charakteristikos naujoji reikšmė, gaunama momentu t , $\varepsilon(t-1)$ – tos pačios charakteristikos reikšmė prieš tai buvusiu momentu $t-1$, α – pastovus koeficientas, tenkinantis nelygybę $-1 < \alpha < 1$ (vėliau įsitikinsime, jog $\alpha = r(1)$, t. y., jog α – porinės koreliacijos koeficientas tarp dviejų gretimų laiko eilutės $\varepsilon(t)$ elementų reikšmių), $\delta(t)$ – **atsitiktinio proceso**, vadinamo „**baltuoju triukšmu**“, elementas. Jis žymimas delta funkcijos žymeniu $\delta(t)$ todėl, kad „baltąjį triukšmą“ galima gauti generuojant atsitiktinio dydžio ir atsitiktinio ženklų nepriklausomus impulsus, atsirandančius atsitiktiniais momentais. „Baltasis triukšmas“ – tai toks atsitiktinis procesas $X(t) =$**

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau_k)$, kurio elementai $\delta(t - \tau_k)$ tenkina sąlygas: 1) $E[\delta(t)] = 0$; 2) $\text{cov}(\delta(t - k_1),$

$\delta(t - k_2)) = E[\delta(t - k_1) \cdot \delta(t - k_2)] = \begin{cases} 0, & \text{kai } k_1 \neq k_2, \\ \sigma_0^2, & \text{kai } k_1 = k_2, \end{cases}$ kur k_1 ir k_2 – bet kokie skaičiai,

* Papildomų žinių apie tą mechanizmą skaitytojas gali rasti jau minėtoje knygoje [187], ypač XIV skyriaus §5 (596÷600 puslapiuose).

reiškiantys vėlinimo (uždelsimo) dydžius τ_{k_1} ir τ_{k_2} , o dydis σ_0^2 – „baltojo triukšmo“ dispersija, kuri yra pastovus dydis, nepriklausantis nuo t ; 3) τ_k – atsitiktiniai momentai, pasiskirstę laike pagal Puasono dėsnį.

Apskaičiuosime Markovo procesą vaizduojančios laiko eilutės $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$ statistines charakteristikas ir įrodysime, kad ši laiko eilutė yra stacionari.

Pakartotinai naudodamiesi formule $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$, gauname $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)=\alpha[\alpha\varepsilon(t-2)+\delta(t-1)]+\delta(t)=\alpha^2\varepsilon(t-2)+\alpha\delta(t-1)+\delta(t)=\alpha^2[\alpha\varepsilon(t-3)+\delta(t-2)]+\alpha\delta(t-1)+\delta(t)=\alpha^3\varepsilon(t-3)+\alpha^2\delta(t-2)+\alpha\delta(t-1)+\delta(t)=\dots=\alpha^{k+1}\varepsilon(t-k-1)+\alpha^k\delta(t-k)+\alpha^{k-1}\delta(t-k+1)+\dots+\alpha\delta(t-1)+\delta(t)=\dots$

Kadangi $|\alpha|<1$, tai $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \varepsilon(t-n)=0$, todėl **$\varepsilon(t)$ galima išreikšti per „baltąjį triukšmą“:**

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \delta(t-i), \quad \varepsilon(t) \approx \sum_{i=0}^n \alpha^i \delta(t-i), \text{ kur } n - \text{pakankamai didelis sveikasis teigiamas skaičius.}$$

Kadangi $E[\delta(t-i)]=0$ esant bet kurioms t ir i reikšmėms, tai $E[\varepsilon(t)]=0$, o tai reiškia, kad laiko eilutės $\varepsilon(t)$ matematinis vidurkis yra pastovus dydis, lygus 0.

Šios laiko eilutės autokovariacinė funkcija $\gamma(k)=\text{cov}(\varepsilon(t), \varepsilon(t-k))=E[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-k)] =$
 $= E \left[\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \delta(t-i) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \delta(t-k-i) \right] = E \{ [\delta(t) + \alpha\delta(t-1) + \alpha^2\delta(t-2) + \dots + \alpha^{k-1}\delta(t-k+1) + \alpha^k\delta(t-k) +$
 $+ \alpha^{k+1}\delta(t-k-1) + \alpha^{k+2}\delta(t-k-2) + \dots] \cdot [\delta(t-k) + \alpha\delta(t-k-1) + \alpha^2\delta(t-k-2) + \alpha^3\delta(t-k-3) + \dots] \} =$
 $= 0+0+\dots+0+\alpha^k E[\delta^2(t-k)] + 0+0+\dots+0+\alpha^{k+2} E[\delta^2(t-k-1)] + 0+\dots+0+\alpha^{k+4} E[\delta^2(t-k-2)] + \dots =$
 $= \alpha^k \sigma_0^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2} \alpha^k$, nes, kaip jau buvo minėta, $E[\delta(t-k_1), \delta(t-k_2)]$ yra lygus 0, kai $k_1 \neq k_2$,
 ir lygus σ_0^2 , kai $k_1=k_2$, o $|\alpha|<1$.

Laiko eilutės dispersiją σ_ε^2 rasime iš lygybės $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0)$. Todėl $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2} \alpha^0 = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2}$.

Kadangi $\gamma(k) = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2} \alpha^k$, tai autokovariacinę funkciją $\gamma(k)$ galima išreikšti per eilutės $\varepsilon(t)$ dispersiją

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2}. \text{ Gauname, jog } \gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \alpha^k.$$

Kadangi gavome, kad Markovo proceso laiko eilutės $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$ matematinis vidurkis $E[\varepsilon(t)]$, jos dispersija σ_ε^2 ir kovariacija $\gamma(k)$ nepriklauso nuo t , tai iš to ir išplaukia, jog **Markovo procesą aprašanti laiko eilutė $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$ yra stacionari.**

Apskaičiuosime Markovo proceso laiko eilutės $\varepsilon(t)$ autokoreliacinę funkciją

$$r(k) = \frac{E[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-k)]}{\sqrt{E[(\varepsilon(t) - E[\varepsilon(t)])^2] E[(\varepsilon(t-k) - E[\varepsilon(t-k)])^2]}}.$$

Kadangi $E[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-k)] = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \alpha^k$, $E[\varepsilon(t)] = E[\varepsilon(t-k)] = 0$ ir $E[\varepsilon^2(t)] = E[\varepsilon^2(t-k)] = \gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2$, tai gauname, jog $r(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot \alpha^k}{\sigma_\varepsilon \cdot \sigma_\varepsilon} = \alpha^k$, t. y. eilutės $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$ autokoreliacinė funkcija yra

eksponentiškai mažėjanti funkcija, nes $|\alpha|<1$. Kai $k=1$, tai $r(1)=\alpha$. Šia lygybe galima pasinaudoti identifikuojant eilutės $\varepsilon(t)$ matematinį modelį $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$, t. y. empiriniu būdu nustatant koeficiento α statistinį įvertį: $\hat{\alpha} = \hat{r}(1)$.

Įstatę į formulę $\rho(\omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \cos k\omega$ formules $r(k)=\alpha^k$ ir $\cos k\omega = \frac{e^{ik\omega} + e^{-ik\omega}}{2}$ bei

prisimindami, kad $|\alpha|<1$, ir geometrinės progresijos sumos formulę, **galime rasti Markovo procesą aprašančios laiko eilutės $\varepsilon(t)$ spektrinį tankį $\rho(\omega)$** , ką padaryti palieku pačiam skaitytojui, įsitikinant,

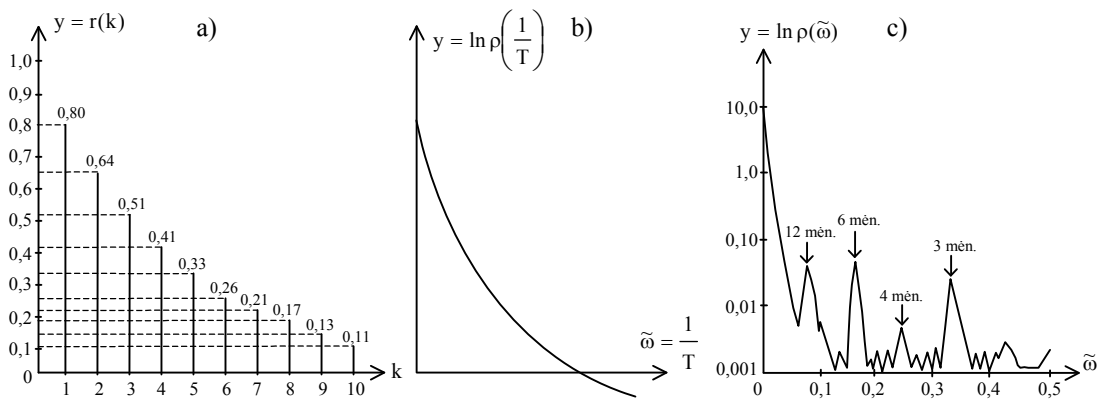
$$\text{kad } \rho(\omega) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}.$$

Palieku jam taip pat savarankiškai įsitikinti, kad 328 „a“ ir „b“ pav. pateikti grafikai vaizduoja eilutės $\varepsilon(t)=0,8 \cdot \varepsilon(t-1)+\delta(t)$ koreliacinę funkciją $r(k)$ ir jos spektrinio tankio logaritmą $\ln \rho(\tilde{\omega})$, kur $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$.

328 „b“ pav. grafike koordinatinių ašys specialiai paliktos negraduotos (t. y. nenurodyti jų masteliai), kad skaitytojas, apskaičiavęs laiko eilutės $\varepsilon(t)=0,8 \cdot \varepsilon(t-1)+\delta(t)$ spektrinį tankį $\rho(\omega)$ ir suradęs to tankio reikšmių logaritmus $\ln \rho(\tilde{\omega})$, kur $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$, pats savarankiškai nustatytų grafiko $y = \ln \rho(\tilde{\omega})$ taškų koordinatinių reikšmes $(\tilde{\omega}_i, \ln \rho(\tilde{\omega}_i))$.

Tame pačiame 328 pav. pateiktas ir kitą atsitiktinį procesą charakterizuojančios funkcijos $\ln \rho(\tilde{\omega})$ grafikas (žiūr. jau minėtąjį 328 „c“ pav.), kuris buvo gautas, analizuojant JAV bankų krilingą (kasmėnesinius tarpbankinius atsiskaitymus, užskaitant išsiskolinimus bei kitus išsipareigojimus, nevartojant atsiskaitymams grynųjų pinigų) už laikotarpį nuo 1875 m. iki 1958 m. (žiūr. Granger C. W. J. The effect of varying monthlength in the analysis of economic time-series. L'Industria, 1 (1963), 3, Milano).

Prieš sudarant šį grafiką, iš laiko eilutės $x(t)$, vaizduojančios atsitiktinį kasmėnesinių tarpbankinių atsiskaitymų užskaitymais procesą, buvo eliminuotas eksponentinis trendas, paliekant visas kitas proceso $x(t)$ sudėtinės dalis. Kaip matyti iš 328 „c“ pav., funkcijos $y = \ln \rho(\tilde{\omega}) = \ln \rho\left(\frac{1}{T}\right)$ grafikui būdingi „svyravimų ciklo“ pikai, atitinkantys periodus, kartotinius periodui $T^*=1$ mėn. (pikai, atitinkantys 1 mėn. ir 2 mėn., grafike nepavaizduoti).



328 pav.

Tikiuosi, kad čia pateiktos pradinės žinios apie procesų spektrus ir jų analizę, atliekamą naudojantis informacija, sukaupia tuos procesus aprašančiose laiko eilutėse, bus naudingos šios mokymo priemonės skaitytojams, nes padės sąmoningiau ir kūrybiškiau naudotis spektrinės analizės metodais.

Šios žinios palengvins ir išsamesnės bei sudėtingesnės literatūros, skirtos spektrų analizei (pavyzdžiui, [188, 189, 190] ir pan.), skaitymą tais atvejais, kai prireiks papildomų žinių.

O tokių žinių tikrai gali prireikti, ypač tiriant sudėtingus procesus, vykstančius netiesinėse dinaminėse sistemose, kuomet keičiasi ne tik tose sistemose vykstančių svyravimų fazės ir amplitudės, bet gali keistis ir tų svyravimų dažniai. Tokiais atvejais čia nagrinėtų spektrinės analizės metodų jau nebepakanka, nes visi nagrinėtieji metodai buvo skirti nekintančio laike spektro analizei. Juk spektrinio tankio funkcija

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

rodo tik proceso $x(t)$ spektro tankio $F(\omega)$ priklausomybę nuo

tame procese pasireiškiančių svyravimų ciklinių dažnių ω ir negali suteikti informacijos apie tai, kada ir kaip įvyko ar vyksta svyravimų dažnių pokyčiai.

Tokią informaciją galėtų suteikti **slenkančių Furjė „lango“ metodo taikymas**, t. y. daugkartinis „lango“ rėmais aprėžtų Furjė transformacijų $\frac{1}{2\pi} \int_{t_0-s}^{t_0+s} x(t) e^{-i\omega t} dt$

atlikimas, stumiant „lango“ centrą – tašką $t=t_0$ laiko t ašimi bei keičiant „lango“ plotį $2s$, ir gautų rezultatų $F(\omega, t_0, s)$ palyginimas.

Stumiant „lango“ centrą $t=t_0$ nedideliais žingsniais Δt ir lyginant gaunamus spektrus, galima „pagauti“ momentus, kada proceso spektre atsirado pokyčiai, ir nustatyti, kaip spektras pasikeitė: kokie dažniai išnyko, kokie – atsirado, kurių dažnių amplitudės padidėjo, o kurių – sumažėjo ir t. t.

Tačiau toks metodas nėra patogus ne tik todėl, kad reikalauja daug kompiuterinio laiko bei didelio skaičiaus spektrų peržiūros ir palyginimo, bet ir todėl, kad labai sudėtinga lyginti keturmačius vektorius (ω, t_0, s, F) , nes tiesioginis vizualinis spektro kitimo dinamikos stebėjimas tampa nebeįmanomas. Slenkančių Furjė „lango“ metodas turi dar ir kitų trūkumų. Vienas iš jų išplaukia iš tos aplinkybės, kad tuo atveju, kai „lango“ plotis yra baigtinis, harmonikų, esančių proceso $x(t)$ sudėtyje, spektrinis tankis vaizduojamas jau nebe impulsais, o „bangelių paketais“ (žiūr. 327 pav.), dėl ko, siekiant didesnio tikslumo, nustatant svyravimų ciklinio dažnio pokyčio momentą, sumažėja paties dažnio ω nustatymo tikslumas (ir atvirkščiai: siekiant padidinti dažnio ω nustatymo tikslumą, sumažėja momento t nustatymo tikslumas).

Tobulinant slenkančio Furjė „lango“ metodą, buvo sugalvotas **veivletinės spektrų analizės metodas**. Taikant šį metodą, kintamieji ω ir s surišami funkciškai priklausomybe ir tokiu būdu iš keturmatės erdvės (ω, t_0, s, F) pereiname į trimatę erdvę (s, t_0, W) , kurioje veivletinės transformacijos rezultatas $W(s, t_0)$ vaizduojamas dvimačiu paviršiumi trimatėje erdvėje. Jo projekcijas jau galima nagrinėti ir vizualiai. Pati **veivletinė transformacija $W(s, t_0)$ skiriasi nuo Furjė transformacijos**

$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ tuo, kad daugiklis $e^{-i\omega t}$ pakeičiamas veivletu – funkcija

$\Psi\left(\frac{t-t_0}{s}\right)$, atliekančia Furjė „lango“ stūmimo bei jo pločio keitimo operacijas ir

funkcijos $x(t)$ skaidymą į veivletus, panašiai, kaip, sudarant funkcijos $x(t)$ Furjė eilutę, ši funkcija yra skaidoma į trigonometrines funkcijas. Terminas „veivletinė analizė“ yra kilęs iš angliško žodžio „wavelet“, reiškiančio „bangelė“.

Nors veivletinė analizė pradėjo formuotis palyginti neseniai (pirmą kartą veivletinė transformacija pasinaudojo J. Morletas 1980 m., analizuodamas seisminių stebėjimų duomenis ir akustinius signalus), tačiau ši spektrinės analizės sritis labai sparčiai vystosi ir dabar jau sukonstruota gana daug įvairių veivletų, o taikant veivletinės analizės metodus jau gauta nemažiau įdomių rezultatų. Skaitytojams, norintiems daugiau sužinoti apie veivletinę analizę ir jos taikymus, rekomenduojame knygą [190], kurioje ne tik išdėstyti tolydžiosios veivletinės analizės pradmenys, bet ir pateiktas gana išsamus literatūros, kuriose nagrinėjami aktualūs veivletinei analizei klausimai, sąrašas. Su diskrečiosios veivletinės analizės pagrindais skaitytojas gali susipažinti knygose [191, 192, 193].

Atliekant realių laiko eilučių (realiųjų statistinių duomenų $\hat{x}(t)$) statistinę analizę, kai tų duomenų nėra daug ir nėra galimybės greitai juos papildyti, ne taip jau paprasta nustatyti, ar nagrinėjamoji laiko eilutė $\hat{x}(t)$ yra stacionari ar ne, ir, jei ji nėra stacionari, – išskirti joje neatsitiktines sudėtines dalis: trendą $f_T(t)$, sezoninius svyravimus $\varphi(t)$, konjunktūrinius ciklus $\psi(t)$.

Jau pačioje statistinės analizės pradžioje iškyla klausimas, ar laiko eilutės $\hat{x}(t)$ vidurkis yra pastovus ar kintamas dydis, ir reikia mokėti surasti atsakymą į šį klausimą, kai statistinių duomenų nėra daug.

Tikrinant hipotezę apie laiko eilutės $\hat{x}(t)$ vidurkio pastovumą (ar nepastovumą) galima naudotis taip vadinamais **serijų metodais** bei **Abė kriterijum**.

Naudojantis serijų metodais, eilutės $\hat{x}(t)$ elementai $\hat{x}(1), \hat{x}(2), \hat{x}(3), \dots, \hat{x}(n)$ išdėstomi chronologine tvarka ir lyginami su eilutės $\hat{x}(t)$ mediana (arba tarpusavyje). To palyginimo rezultatai vaizduojamai „pliusais“ ir „minusais“, o po to nagrinėjamos vienetų ženklų serijos, skaičiuojamas tokių serijų skaičius bei jų ilgis.

Jei nagrinėjamoji laiko eilutė tikrai yra stacionari atsitiktinė eilutė, tai vienetų ženklų serijos neturėtų būti ilgos ir tokių serijų turėtų būti palyginti daug, nes nuokrypių nuo medianos ženklai turėtų keistis dažnai ir atsitiktinai.

Atsižvelgiant į tokių skaičiavimų rezultatus ir į atitinkamus kriterijus, daroma išvada apie nagrinėjamos eilutės $\hat{x}(t)$ vidurkio pastovumo hipotezės teisingumą: ta hipotezė arba atmetama ir tai reiškia, jog eilutė $\hat{x}(t)$ nėra stacionari, arba paliekama ir tai reiškia, jog ta eilutė galėtų būti stacionari, jei pasirodytų, kad ir jos dispersija ir kovariacija taip pat nepriklauso nuo t , ką galima patikrinti tais pačiais serijų metodais.

Naudojantis Abė kriterijumi, surandamas skirtumų tarp gretimų eilutės narių, išdėstytų chronologine tvarka, kvadratų sumos vidurkio įvertis $\hat{q}^2(n)$ ir lyginamas su tos eilutės dispersijos įverčiu $\hat{s}^2(n)$, t. y. surandamas dydžių $\hat{q}^2(n) = \frac{1}{2(n-1)} \times$

$$\times \sum_{t=1}^{n-1} [\hat{x}(t+1) - \hat{x}(t)]^2 \quad \text{ir} \quad \hat{s}^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \left[\hat{x}(t) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{x}(t) \right]^2 \quad \text{santykis} \quad \frac{\hat{q}^2(n)}{\hat{s}^2(n)}.$$

Kai tas santykis nėra didesnis už tam tikrą minimalią to santykio reikšmę (duotajai n reikšmei ir duotajam reikšmingumo lygmeniui α), kurią galima rasti specialioje lentelėje, tai hipotezė apie eilutės $\hat{x}(t)$ vidurkio pastovumą atmetama. Priešingu atveju hipotezė paliekama.

Detaliau apie serijų ir Abė metodus skaitytojas gali sužinoti knygoje [182].

Jei įsitikinama, kad nagrinėjamoji laiko eilutė $\hat{x}(t)$ yra stacionari, tai pasirenkamas vienas iš tipinių stacionarių laiko eilučių modelių, apie kuriuos bus pasakojama 1.14.12.3.2.1. skyrelyje, ir metodais, aprašytais 1.14.12.3.1. skyrelyje, įvertinamos modelio parametrų reikšmės. Po to tuo modeliu jau galima naudotis, sprendžiant taikomuosius (pavyzdžiui, prognozavimo) uždavinius.

Jei įsitikiname, kad laiko eilutė nėra stacionari, tai bandome rasti neatsitiktines tos eilutės sudedamąsias dalis. Tai galima daryti, naudojantis ir analiziniais metodais, ir algoritminiais metodais.

Analiziniais metodais naudojamosi tada, kada mes, analizuodami to proceso, kurį vaizduoja nagrinėjamoji laiko eilutė, funkcionavimo mechanizmus, **galime daugiau ar mažiau tiksliai nustatyti laiko eilutės neatsitiktinės sudėtinės dalies modelio bendrąją formą, t. y. galime daugiau ar mažiau tiksliai išspręsti to modelio specifikuojamą uždavinį** ir mums belieka tik patikrinti savo hipotezę ir, jei ji neatmetama, identifikuoti modelį, naudojantis 1.14.12.3.1. skyrelyje aprašytais identifikavimo metodais, t. y. regresinės analizės metodais.

Algoritminiais metodais naudojamosi tada, kai nėra galimybės pasinaudoti analiziniais metodais. Algoritminių metodų esmę sudaro **laiko eilutės glodinimas, eliminuojant atsitiktines fluktuacijas**. Tuo tikslu naudojamo metodo, vadinamo **slenkančio vidurkio metodu**, esmę sudaro gana paprasta **idėja, išplaukianti iš**

didžiųjų skaičių dėsnio: jei „individualus“ laiko eilutės $x(t)$ nario išsibarstymas savo vidurkio $E[x(t)]$ atžvilgiu turi dispersiją $D(x(t)) = \sigma_x^2$, tai tos eilutės N narių grupės vidurkio $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}(t+i)$ išsibarstymas turės N kartų mažesnę dispersiją.

Todėl, glodinant nestacionarią laiko eilutę $\hat{x}(t)$, turinčią n elementų, tikslinga vietoj to, kad analizuotume kiekvieno elemento individualų elgesį, analizuoti tų elementų grupių vidurkių elgesį. Tuos vidurkius galima apskaičiuoti, pasirenkant koki nors vidurkinimo intervalo ilgį N (pavyzdžiui, $N=2m+1$), kuris būtų žymiai mažesnis už n (nes kitaip nebus galimybės tam intervalui slinkti eilute), apskaičiuojant pirmųjų (nuo eilutės pradžios) N elementų vidurkį, po to slinkti eilute nuo jos pradžios jos pabaigos link, kaskart atmetant po elementą nuo slenkančio intervalo pradžios ir pridėdant naują elementą prie to intervalo pabaigos, apskaičiuojant naują vidurkį ir t. t., kol slenkančio intervalo pabaiga nesutaps su eilutės pabaiga. Tokiu būdu vietoj eilutės $x(t)$ elementų n reikšmių gausime $n-2m$ vidurkių reikšmių kurių išsibarstymas bus žymiai mažesnis. Tiesa, tokiu būdu gautos suglodingos funkcijos $\hat{f}(t)$, aproksimuojančios duotąją laiko eilutę $\hat{x}(t)$, reikšmės, apskaičiuotos slenkančio intervalo vidurkio taškuose $m+1, m+2, \dots, n-m-2, n-m-1, n-m$, neapaprėps intervalų $1 \leq t \leq m$ ir $n-m+1 \leq t \leq n$, tačiau gautąją funkciją $\hat{f}(t)$ galima bus ekstrapoliuoti į dar neapaprėptus laiko eilutės „galus“: į jos pradžią ir pabaigą.

Apskaičiuojant slenkančio intervalo vidurkį t atitinkančias suglodingos funkcijos $\hat{f}(t)$ reikšmes, nebūtina ir netikslinga visus į tą intervalą patenkančius eilutės elementus $x(t-m), x(t-m+1), \dots, x(t-1), x(t), x(t+1), \dots, x(t+m-1), x(t+m)$ imti su vienodais svoriais ω_k . Juos tikslinga imti vienodus ir lygius $\frac{1}{2m+1}$ tik tada, kada mes

įsitikinę, kad eilutės elementų, patekusių į vidurkinimo intervalą, elgesį pakankami tiksliai galima aprašyti tiesine funkcija – pirmojo (ar nulinio) laipsnio daugianariu. Kai laiko eilutės elementų $\hat{x}(t)$, patekusių į vidurkinimo intervalą, elgesys

aproksimuojamas p -jo laipsnio daugianariu $\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^p \theta_i t^i$, kur $p > 1$, tai svorinių

koeficientų reikšmės ω_k jau turi būti nevienodos, kuo nesunku įsitikinti, minimizuojant glodinimo rezultato – funkcijos $\hat{f}(t)$ – ir laiko eilutės narių $\hat{x}(t)$ reikšmių skirtumų

kvadratų sumą $\sum_{k=-m}^m (\hat{f}(t+k) - \hat{x}(t+k))^2$.

Todėl bendruoju atveju slenkančių vidurkių metodu gautos funkcijos $\hat{f}(t)$ reikšmės, aproksimuojančios suglodingą laiko eilutę $x(t)$, apskaičiuojamos, naudojantis formule $\hat{f}(t) = \sum_{k=-m}^m \omega_k \hat{x}(t+k)$, kurioje $t=m+1, m+2, \dots, n-m-1, n-m$, o **svoriniai**

koeficientai ω_k pasirenkami taip, kad jų suma $\sum_{k=-m}^m \omega_k$ būtų lygi 1.

Svorinių koeficientų reikšmės ω_k , būdamos simetriškos centrinio koeficiento ω_0 atžvilgiu, priklauso nuo m bei p ir, kaip jau minėjau, gali būti apskaičiuotos mažiausiųjų kvadratų metodu.

Kaip pavyzdį pateikiu 121-ą lentelę su jau apskaičiuotomis ω_k reikšmėmis kai kurioms m ir p reikšmėms, kai $p > 1$. Rekomenduočiau skaitytojui pačiam apskaičiuoti

ω_k reikšmės ir palyginti gautus rezultatus su 121-oje lentelėje pateiktomis svorinių koeficientų reikšmėmis.

121. lentelė

m	p	ω_k
2	2	$\omega_{-2} = -\frac{3}{35}; \omega_{-1} = \frac{12}{35}; \omega_0 = \frac{17}{35}; \omega_1 = \frac{12}{35}; \omega_2 = -\frac{3}{35};$
2	3	$\omega_{-2} = -\frac{3}{35}; \omega_{-1} = \frac{12}{35}; \omega_0 = \frac{17}{35}; \omega_1 = \frac{12}{35}; \omega_2 = -\frac{3}{35};$
3	2	$\omega_{-3} = -\frac{2}{21}; \omega_{-2} = \frac{3}{21}; \omega_{-1} = \frac{6}{21}; \omega_0 = \frac{7}{21}; \omega_1 = \frac{6}{21}; \omega_2 = \frac{3}{21}; \omega_3 = -\frac{2}{21};$
3	3	$\omega_{-3} = -\frac{2}{21}; \omega_{-2} = \frac{3}{21}; \omega_{-1} = \frac{6}{21}; \omega_0 = \frac{7}{21}; \omega_1 = \frac{6}{21}; \omega_2 = \frac{3}{21}; \omega_3 = -\frac{2}{21};$
3	4	$\omega_{-3} = \frac{5}{231}; \omega_{-2} = -\frac{30}{231}; \omega_{-1} = \frac{75}{231}; \omega_0 = \frac{131}{231}; \omega_1 = \frac{75}{231}; \omega_2 = -\frac{30}{231}; \omega_3 = \frac{5}{231};$
3	5	$\omega_{-3} = \frac{5}{231}; \omega_{-2} = -\frac{30}{231}; \omega_{-1} = \frac{75}{231}; \omega_0 = \frac{131}{231}; \omega_1 = \frac{75}{231}; \omega_2 = -\frac{30}{231}; \omega_3 = \frac{5}{231};$
4	2	$\omega_{-4} = -\frac{21}{231}; \omega_{-3} = \frac{14}{231}; \omega_{-2} = \frac{39}{231}; \omega_{-1} = \frac{54}{231}; \omega_0 = \frac{59}{231}; \omega_1 = \frac{54}{231}; \omega_2 = \frac{39}{231}; \omega_3 = \frac{14}{231}; \omega_4 = -\frac{21}{231};$
4	3	$\omega_{-4} = -\frac{21}{231}; \omega_{-3} = \frac{14}{231}; \omega_{-2} = \frac{39}{231}; \omega_{-1} = \frac{54}{231}; \omega_0 = \frac{59}{231}; \omega_1 = \frac{54}{231}; \omega_2 = \frac{39}{231}; \omega_3 = \frac{14}{231}; \omega_4 = -\frac{21}{231};$
4	4	$\omega_{-4} = \frac{15}{429}; \omega_{-3} = -\frac{55}{429}; \omega_{-2} = \frac{30}{429}; \omega_{-1} = \frac{135}{429}; \omega_0 = \frac{179}{429}; \omega_1 = \frac{135}{429}; \omega_2 = \frac{30}{429}; \omega_3 = -\frac{55}{429}; \omega_4 = \frac{15}{429};$
4	5	$\omega_{-4} = \frac{15}{429}; \omega_{-3} = -\frac{55}{429}; \omega_{-2} = \frac{30}{429}; \omega_{-1} = \frac{135}{429}; \omega_0 = \frac{179}{429}; \omega_1 = \frac{135}{429}; \omega_2 = \frac{30}{429}; \omega_3 = -\frac{55}{429}; \omega_4 = \frac{15}{429}.$

Slenkančio vidurkio metodą, taikomą laiko eilučių glodinimui, galima modifikuoti taip, kad būtų galima atsižvelgti ne tik į informacijos, sukauptos laiko eilutėje, ne būtinai vienodą vertę, bet ir į informacijos vertės mažėjimą, jai senėjant.

Tokio modifikuoto metodo pavyzdžiu gali būti **Brauno metodas**, kartais vadinamas dar ir **eksponencialiai pasverto slenkančio vidurkio metodu**, nes laiko eilutės elementų $\hat{x}(t-k)$ svoriai ω_k , nustatant aproksimuojančios funkcijos $\hat{f}(t)$ reikšmę taške t , laikomi eksponencialiai mažėjančiais, didėjant k . Tuomet identifikuojant aproksimuojančią funkciją $\hat{f}$, t. y. nustatant formulės $\hat{f}(t) = \sum_{k=0}^{t-1} \omega_k \hat{x}(t-k)$ svorinius

koeficientus, minimizuojama funkcija $Q(\hat{f}(t)) = \sum_{k=0}^{t-1} \lambda^k [\hat{x}(t-k) - \hat{f}(t)]^2$, kurioje

parametras $\lambda \in (0; 1)$ charakterizuoja informacijos vertės mažėjimo, tolstant nuo momento t į praeitį, vidutinį intensyvumą. Išsprendę šį minimizavimo uždavinį, gauname, kad $\hat{f}(t) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^t} \sum_{k=0}^{t-1} \lambda^k \hat{x}(t-k)$, kur $t=1, 2, 3, \dots, n$.

Norintiems sužinoti daugiau apie laiko eilučių glodinimą (ir apie Brauno metodą), rekomenduojame jau nekartą minėtą knygą [182].

Egzistuoja gana paprastas būdas, kaip iš laiko eilutės eliminuoti trendą $f_{tr}(t)$, kai tas trendas aproksimuojamas p -jo laipsnio daugianariu, ir kaip nustatyti to daugianario laipsnį p , kurio žinojimas reikalingas, taikant ir analizinius, ir algoritminius laiko eilučių glodinimo metodus.

Šis metodas vadinamas **skirtumų metodu**, nes remiasi eilutės $x(t)$ skirtumų $\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$, $\Delta x(t-1) = x(t-1) - x(t-2)$, $\Delta^2 x(t) = \Delta x(t) - \Delta x(t-1)$, $\Delta^3 x(t) = \Delta^2 x(t) - \Delta^2 x(t-1)$ ir t. t. apskaičiavimu bei ta p -jo laipsnio daugianario $y(t) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots +$

$+ \theta_p t^p$ savybe, kad jo $p+1$ -osios eilės išvestinė $y^{(p+1)}(t)$ yra lygi 0, o todėl ir daugianario $y(t)$ $p+1$ -osios eilės skirtumas $\Delta^{p+1}y(t)$ taip pat turi būti lygus nuliui.

Todėl laiko eilutės $x(t)=f_{tr}(t)+\varepsilon(t)$, kurios trendas $f_{tr}(t)$ aprašomas p -sios eilės daugianariu, $(p+1)$ -sios eilės skirtumas $\Delta^{p+1}x(t)$ jau negalėtų turėti savo sudėtyje to trendo likučių ir, jei laiko eilutėje nebuvo kitų neatsitiktinių sudėtinių dalių, turėtų būti sudarytas tik iš atsitiktinių dydžių.

Pailiustruosiu išsakyta mintį konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog laiko eilutė $x(t)$ aprašoma tokia regresijos lygtimi $x(t)=\theta_0+\theta_1t+\theta_2t^2+\varepsilon(t)$, kurioje antrojo laipsnio daugianaris yra **trendo funkcija** $f_{tr}(t)=\theta_0+\theta_1t+\theta_2t^2$, o $\varepsilon(t)$ – **atsitiktinis regresinis likutis**, kuris yra nekoreliuotas ir turi pastovią dispersiją σ_ε^2 .

Tuomet $\Delta x(t)=x(t)-x(t-1)=[\theta_0+\theta_1t+\theta_2t^2+\varepsilon(t)]-[\theta_0+\theta_1(t-1)+\theta_2(t-1)^2+\varepsilon(t-1)]=\theta_1+\theta_2(2t-1)+\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$; $\Delta x(t-1)=x(t-1)-x(t-2)=[\theta_0+\theta_1(t-1)+\theta_2(t-1)^2+\varepsilon(t-1)]-[\theta_0+\theta_1(t-2)+\theta_2(t-2)^2+\varepsilon(t-2)]=\theta_1+\theta_2(2t-3)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$; $\Delta^2 x(t)=\Delta x(t)-\Delta x(t-1)=2\theta_2+\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$.

Analogiškai gausime, jog $\Delta^2 x(t-1)=2\theta_2+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-3)$, iš kur išplauks, kad $\Delta^3 x(t)=\varepsilon(t)-3\varepsilon(t-1)+3\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)$, t. y., kad $\Delta^3 x(t)$ sudėtyje jau nebebus neatsitiktinių sudedamųjų dalių.

Nesunku įrodyti, jog bendruoju atveju, kai $x(t)=f_{tr}(t)+\varepsilon(t)=\theta_0+\theta_1t+\theta_2t^2+\dots+\theta_pt^p+\varepsilon(t)$, gausime, kad $\Delta^{p+1}x(t)=\varepsilon(t)-C_{p+1}^1\varepsilon(t-1)+C_{p+1}^2\varepsilon(t-2)-\dots+(-1)^{p+1}\varepsilon(t-p-1)=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i C_{p+1}^i \varepsilon(t-i)$.

$$\begin{aligned} \text{Tuomet } E[\Delta^{p+1}x(t)] &= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i C_{p+1}^i E[\varepsilon(t-i)] = 0, \text{ o dispersija } D(\Delta^{p+1}x(t)) = \\ &= E[(\Delta^{p+1}x(t)-0)^2] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i C_{p+1}^i \varepsilon(t-i)\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{p+1}(C_{p+1}^i)^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{p+1}(C_{p+1}^i)^2, \text{ nes, kaip jau buvo} \end{aligned}$$

minėta, priimama hipotezė, kad regresiniai likučiai $\varepsilon(t)$ yra nekoreliuoti ir turi pastovią dispersiją σ_ε^2 .

Suma $\sum_{i=0}^{p+1}(C_{p+1}^i)^2$ yra lygi $C_{2(p+1)}^{p+1}$. Įrodysime tai, apskaičiuodami koeficientą prie z^{p+1} sandaugoje $(1+z)^{p+1} \cdot (1+z)^{p+1}$ ir tai sandaugai lygiame binomo $(1+z)$ laipsnyje $(1+z)^{2(p+1)}$.

Sandaugoje $(1+z)^{p+1} \cdot (1+z)^{p+1} = \left(\sum_{i=0}^{p+1} C_{p+1}^i z^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j z^j\right)$ koeficientą prie z^{p+1} sudarys suma sandaugų koeficientų prie tokių z^i ir prie tokių z^j , kurių laipsniai i ir j tenkina lygybę $i+j=p+1$, t. y. koeficientas prie z^{p+1} bus lygus sumai $C_{p+1}^0 C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^1 C_{p+1}^p + C_{p+1}^2 C_{p+1}^{p-1} + \dots + C_{p+1}^{p+1} C_{p+1}^0 =$
 $= \sum_{i=0}^{p+1} C_{p+1}^i C_{p+1}^{p+1-i} = \sum_{i=0}^{p+1} (C_{p+1}^i)^2$, nes $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Išskleidę binomą $(1+z)^{2(p+1)}$, gausime, kad $(1+z)^{2(p+1)} = \sum_{i=0}^{2(p+1)} C_{2(p+1)}^i z^i$, iš kur išplaukia, jog koeficientas prie z^{p+1} turės būti lygus $C_{2(p+1)}^{p+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Todėl } \sum_{i=0}^{p+1} (C_{p+1}^i)^2 &= C_{2(p+1)}^{p+1} \text{ ir todėl } D(\Delta^{p+1}x(t)) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot C_{2(p+1)}^{p+1}, \text{ iš kur išplaukia, jog} \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \frac{D(\Delta^{p+1}x(t))}{C_{2(p+1)}^{p+1}}. \end{aligned}$$

Dabar jau galime sukonstruoti **trendo $f_{tr}(t)=\theta_0+\theta_1t+\theta_2t^2+\dots+\theta_pt^p$ eliminavimo iš laiko eilutės $x(t)$ ir laipsnio p nustatymo algoritmą**:

1) Pradėdami nuo $k=1$ ir palaipsniui didindami k reikšmę vienetu, apskaičiuojame laiko eilutės $x(t)$ skirtumus $\Delta^k x(t)$, t. y. surandame $\Delta x(t)$, $\Delta^2 x(t)$, $\Delta^3 x(t)$, ..., $\Delta^k x(t)$.

2) Priimdami laikiną hipotezę, kad koks nors $k=k^*$ jau galėtų būti lygus $p+1$, tikriname tą hipotezę, apskaičiuodami visoms k reikšmėms, artimoms tokiai $k=k^*$ reikšmei, dispersijos σ_ε^2 įverčius

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(k) = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (\Delta^k \hat{x}(t))^2}{C_{2k}^k}.$$

Pradžioje, didėjant k , $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(k)$ turi mažėti, nes, didėjant k , skirtumuose $\Delta^k x(t)$ turėtų likti vis mažiau trendo $f_{tr}(t) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots + \theta_p t^p$ „likučių“. Tai reikštų, jog tol, kol $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(k)$ mažėja, tol skirtumų $\Delta^k x(t)$ eilė k dar nepasiekė $p+1$ ir k reikia didinti dar vienu vienetu.

Kai k tampa apytikriai lygus $p+1$ ar didesnis už $p+1$, skirtume $\Delta^k x(t)$ turėtų nebelikti neatsitiktinių sudėtinių dalių. Jo vidurkis turėtų tapti lygus 0, o dispersijos $\sigma_\varepsilon^2(k)$ įvertis $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(k)$ turėtų stabilizuotis, atitinkamai fluktuodamas kokio nors pastovaus lygio atžvilgiu. Pasiekę tokią $k=k^*$ reikšmę, mes galėtume teigti, kad $p=k^*-1$.

Taikant šį trendo $f_{tr}(t)$ eliminavimo metodą realioms laiko eilutėms, reikėtų atsiminti, jog eilutės $x(t)$ sudėtyje gali būti neatsitiktinių dalių, esančių ne tik daugianariais, kurių tokiu būdu eliminuoti gali ir nepavykti. Be to net tuo atveju, kai

atrodytų, jog įvertis $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(k) = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (\Delta^k \hat{x}(t))^2}{C_{2k}^k}$ stabilizuojasi, dar negalima garantuoti,

kad laiko eilutė $x(t)$ iš tikrųjų susideda tik iš daugianario ir atsitiktinio likučio, o galima tik teigti, kad tą laiko eilutę galima aproksimuoti daugianariu ir atsitiktiniu likučiu. Todėl čia aprašytasis trendo eliminavimo metodas nėra universalus ir vienintelis galimas.

Knygoje [182] skaitytojas gali rasti aprašymą metodų, leidžiančių **eliminuoti iš laiko eilutės ne tik trendą vaizduojančius daugianarius, bet ir periodinius procesus**. Taikant šiuos metodus, periodinių svyravimų periodu T nustatymui naudojamos mūsų jau nagrinėtos **spektrinės analizės metodais**, o po to sudaromi specialūs supaprastinantys operatoriai Δ^k ir ∇^k , kurie taikomi **tipiniuose laiko eilučių modeliuose**, apie kuriuos dar kalbėsime 1.16.12.3.2.1. ir 1.16.12.3.2.2. skyreliuose.

Toje knygoje pateikti **keturių tipinių modelių, skirtų laiko eilučių, turinčių savo sudėtyje sezoninių ir ciklinių svyravimų, analizei, aprašymai**.

1.14.12.3.2.1. Stacionarių laiko eilučių matematiniai modeliai ir jų identifikavimas

Stacionarių laiko eilučių $\varepsilon(t)$ matematinių modelių paskirtis – **prognozuoti atsitiktinio laiko eilutės $x(t)$ likučio $\varepsilon(t)$, tenkinančio stacionarios laiko eilutės reikalavimus, būsimas reikšmes $\varepsilon(t+1)$, $\varepsilon(t+2)$ ir t. t., remiantis jo reikšmėmis praėjusiais laiko momentais ir dabartiniu laiko momentu t** . Tokios prognozės laiko eilutėse tampa galimomis todėl, kad laiko eilutėse, aprašančiosiose realius procesus, atsitiktiniai likučiai $\varepsilon(t)$ dažnai yra koreliuoti tarpusavyje ir todėl tų likučių reikšmių, kurias jie turėjo praėjusiais laiko momentais, žinojimas gali duoti naudingos informacijos, reikalingos proceso $\varepsilon(t)$ prognozei.

Stacionarių laiko eilučių $\varepsilon(t)$ modeliai gali priklausyti **autoregresinių modelių tipui**, kuris sutrumpintai žymimas AR, **slenkančio vidurkio modelių tipui**, kuris sutrumpintai žymimas MA, ir **mišriam tipui**, žymimam santrumpa ARMA, reiškiančia, jog tame modelyje naudojamos ir autoregresija, ir slenkančiu vidurkiu.

Autoregresiniai modeliai išreiškia $\varepsilon(t)$ priklausomybę nuo laiko eilutės reikšmių praėjusiais laiko momentais $t-1$, $t-2$, $t-3$, ..., $t-p$, kur p charakterizuoja modelio „atminties“ ilgį ir gali būti bet koks teigiamas sveikasis skaičius.

Tokie modeliai žymimi **AR(p)** ir turi bendrą formulę $\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i) + \delta(t)$, kurioje α_i – pastovūs koeficientai, $\delta(t)$ – atsitiktinis procesas, vadinamas „baltuoju triukšmu“, apie kurį ir apie kurio savybes jau buvo kalbėta 1.14.12.3.2. skyrelio įvadinėje dalyje, $\varepsilon(t-i)$ – laiko eilutės reikšmės praėjusiais laiko momentais $t-i$, o p – parametras, vaizduojantis modelio **AR(p)** „atminties“ ilgį. Parametro p ir koeficientų α_i reikšmės nustatomos modelio identifikavimo metu, bandant pritaikyti tipinį **AR** modelį realiai stacionariai laiko eilutei $\hat{\varepsilon}(t)$.

1.14.12.3.2. skyrelio įvadinėje dalyje mes jau nagrinėjome patį paprasčiausią **AR** tipo modelį – **AR(1) modelį** $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \delta(t)$, aprašantį laiko eilutes, gaunamas stebint kokius nors Markovo procesus ir registruojant tų procesų būsenas charakterizuojančio kokio nors požymio atsitiktines reikšmes. Tame skyrelyje buvo apskaičiuotos beveik visos statistinės to modelio charakteristikos, išskyrus dalinę autokoreliacijos funkciją $r_{\text{dal}}(k)$, kuri, kaip nesunku nustatyti, kai $k \geq 2$, yra lygi 0.

Šiek tiek sudėtingesnis yra **AR(2) modelis**, aprašantis laiko eilutes, kurios gaunamos stebint **Julo procesus**. **AR(2)** modelio bendroji formulė yra $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \delta(t)$.

Padauginę šios formulės abi puses iš $\varepsilon(t-1)$, gauname lygybę $\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-1) = \alpha_1 \varepsilon^2(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) \varepsilon(t-1) + \delta(t) \varepsilon(t-1)$, iš kurios išplaukia lygybė $E[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-1)] = \alpha_1 E[\varepsilon^2(t-1)] + \alpha_2 E[\varepsilon(t-2) \varepsilon(t-1)] + E[\delta(t) \varepsilon(t-1)]$, t. y. lygybė $\gamma(1) = \alpha_1 \gamma(0) + \alpha_2 \gamma(1) + 0$.

Analogiškai, daugindami abi formulės $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \delta(t)$ puses iš $\varepsilon(t-2)$ ir apskaičiuodami matematinius vidurkius, gauname $E[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-2)] = \alpha_1 E[\varepsilon(t-1) \varepsilon(t-2)] + \alpha_2 E[\varepsilon^2(t-2)] + E[\delta(t) \varepsilon(t-2)]$, t. y. formulę $\gamma(2) = \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(0) + 0$.

Žinome, kad $\gamma(0) = \sigma_\varepsilon^2$ yra nelygus 0 teigiamas dydis, nes, jei būtų, kad $\gamma(0) = 0$, tai $\varepsilon(t)$ nebūtų atsitiktinis dydis. Todėl sistemos
$$\begin{cases} \gamma(1) = \alpha_1 \gamma(0) + \alpha_2 \gamma(1), \\ \gamma(2) = \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(0) \end{cases}$$
 lygybių abi puses galima padalinti iš $\gamma(0)$. Atsižvelgdami į tai, kad $\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = r(k)$, gauname lygčių

$$\text{sistemą } \begin{cases} r(1) = \alpha_1 + \alpha_2 r(1), \\ r(2) = \alpha_1 r(1) + \alpha_2. \end{cases}$$

Ši sistema leidžia apskaičiuoti autokoreliacijos koeficientus $r(1)$ ir $r(2)$, kai žinomos koeficientų α_1 ir α_2 reikšmės, t. y. kai jau turime identifikuotą **AR(2)** modelį, o taip pat apskaičiuoti koeficientų α_1 ir α_2 statistinius įverčius $\hat{\alpha}_1$ ir $\hat{\alpha}_2$, kai modelis **AR(2)** yra identifikuojamas, naudojantis turimais statistiniais duomenimis, t. y. realia laiko eilute $\hat{\varepsilon}(t)$.

$$\text{Pirmuoju atveju gauname, jog } r(1) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}, \quad r(2) = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2}.$$

$$\text{Antruoju atveju randame, kad } \alpha_1 = \frac{r(1) \cdot (1 - r(2))}{1 - r^2(1)}, \quad \alpha_2 = \frac{r(2) - r^2(1)}{1 - r^2(1)}, \text{ iš kur,}$$

$$\text{įstatę autokoreliacijos koeficientų } r(1) \text{ ir } r(2) \text{ statistinius įverčius } \hat{r}(1) =$$

$$= \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} [\hat{\varepsilon}(t) \cdot \hat{\varepsilon}(t+1)]}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}(t))^2} \text{ ir } \hat{r}(2) = \frac{\frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^{n-2} [\hat{\varepsilon}(t) \cdot \hat{\varepsilon}(t+2)]}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}(t))^2}, \text{ gauname koeficientų } \alpha_1 \text{ ir } \alpha_2$$

$$\text{statistinius įverčius } \hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{r}(1) \cdot (1 - \hat{r}(2))}{1 - \hat{r}^2(1)}, \hat{\alpha}_2 = \frac{\hat{r}(2) - \hat{r}^2(1)}{1 - \hat{r}^2(1)}.$$

Daugindami abi lygybės $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \delta(t)$ puses iš $\varepsilon(t-k)$ ir apskaičiuodami matematinius vidurkius, gauname lygybę $\gamma(k) = \alpha_1 \gamma(k-1) + \alpha_2 \gamma(k-2) + 0$.

Dalindami iš $\gamma(0)$, gauname **rekurentinę formulę** $\mathbf{r(k)} = \alpha_1 \mathbf{r(k-1)} + \alpha_2 \mathbf{r(k-2)}$, kuria naudodamiesi ir žinodami autokoreliacijos koeficientų r_1 ir r_2 reikšmes $r(1) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}$ ir $r(2) = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2}$, galime apskaičiuoti visas autokoreliacijos funkcijos $r(k)$ reikšmes ir sudaryti jos grafiką.

$$\text{Pavyzdžiui, } r(3) = \alpha_1 r(2) + \alpha_2 r(1) = \alpha_1 \alpha_2 + \frac{\alpha_1^3}{1 - \alpha_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_2} = \alpha_1 \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} (\alpha_1^2 + \alpha_2).$$

Dabar jau galime apskaičiuoti $r(4)$, po to – $r(5)$ ir t. t.

Kad surastume sąryšį tarp $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0)$ ir $\sigma_0^2 = E[\delta^2(t)]$, abi lygybės $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \delta(t)$ puses padauginsime iš $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \delta(t)$ ir apskaičiuosime matematinius vidurkius gautoje lygybėje $\varepsilon^2(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) \varepsilon(t) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) \varepsilon(t) + \delta(t) \times [\alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \delta(t)] = \alpha_1 \varepsilon(t) \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t) \varepsilon(t-2) + \alpha_1 \varepsilon(t-1) \delta(t) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) \delta(t) + \delta^2(t)$.

Gausime, kad $\gamma(0) = \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(2) + 0 + 0 + \sigma_0^2$, nes „baltasis triukšmas“ $\delta(t)$ nėra koreliuotas nei su $\varepsilon(t-1)$, nei su $\varepsilon(t-2)$. Todėl $\sigma_0^2 = \gamma(0)[1 - \alpha_1 r(1) - \alpha_2 r(2)] =$
 $= \sigma_\varepsilon^2 \left[1 - \alpha_1 \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} - \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{1 - \alpha_2} \right] = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2} [(1 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2].$

Naudodamiesi anksčiau aprašytąja dalinės autokoreliacijos funkcijos $r_{\text{dal}}(k)$ apskaičiavimo metodika, galime rasti, kad $r_{\text{dal}}(2) = \alpha_2$, $r_{\text{dal}}(k) = 0$, kai $k = 3, 4, 5, \dots$.

„Baltojo triukšmo“ $\delta(t)$ dispersijos σ_0^2 statistinį įvertį $\hat{\sigma}_0^2$ galime gauti iš formulės $\sigma_0^2 = \gamma(0)[1 - \alpha_1 r(1) - \alpha_2 r(2)]$, pakeisdami toje formulėje teorines $\gamma(0)$, α_1 ,

$r(1)$, α_2 ir $r(2)$ reikšmes jų statistiniais įverčiais $\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\hat{\varepsilon}(t) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}(t) \right]^2$ bei $\hat{r}(1)$, $\hat{r}(2)$, $\hat{\alpha}_1$ ir $\hat{\alpha}_2$, apie kurių apskaičiavimą jau buvo kalbėta.

Šiek tiek sunkiau šiuo atveju apskaičiuoti spektrinį tankį $\rho(\omega)$, nes šiuo atveju $r(k)$ apskaičiavimui tenka naudotis rekurentine formule. Spektrinio tankio $\rho(\omega)$ formulę AR(2) modeliui ir funkcijos $y = \rho(\omega)$ grafiką skaitytojas gali rasti knygoje [182], kurioje jis gali rasti informacijos ir apie AR(p) modelius, kai $p \geq 3$, bei apie tokių modelių charakteristikų apskaičiavimą.

Analizuodamas modelio AR(2) spektrinio tankio $\rho(\tilde{\omega})$ grafiką, sudarytą modeliui $\varepsilon(t) = 0,75 \cdot \varepsilon(t-1) - 0,50 \cdot \varepsilon(t-2) + \delta(t)$, skaitytojas gali pastebėti, kad šiuo atveju $\rho(\tilde{\omega})$ jau nėra monotoniškai mažėjanti funkcija, kaip modeliui $\varepsilon(t) = 0,8 \varepsilon(t-1) + \delta(t)$, o jau turi maksimumą, kai $\tilde{\omega} \approx 0,14 - 0,15$ ir po to monotoniškai mažėja. Tai reiškia, jog stochastinėje sistemoje, kurioje vyksta Julo procesas, aprašomas AR(2) modeliui $\varepsilon(t) = 0,75 \cdot \varepsilon(t-1) - 0,50 \cdot \varepsilon(t-2) + \delta(t)$, veikiant šalutiniams periodiniams poveikiams, jau galėtų atsirasti rezonanso reiškinys. Tai ir suprantama, nes modelio $\varepsilon(t) = 0,75 \cdot \varepsilon(t-1) - 0,50 \cdot \varepsilon(t-2) + \delta(t)$ koeficientų α_1 ir α_2 reikšmės rodo, kad egzistuoja teigiamas ir neigiamas ryšys tarp $\varepsilon(t)$ reikšmių bei $\varepsilon(t-1)$ ir $\varepsilon(t-2)$ reikšmių.

Panašiai, kaip 1.14.12.3.2. skyrelyje AR(1) modelis $\varepsilon(t)=\alpha_1\varepsilon(t-1)+\delta(t)$ buvo transformuotas į formą $\varepsilon(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\delta(t-k)$, taip ir modelis AR(2) $\varepsilon(t)=\alpha_1\varepsilon(t-1)+\alpha_2\varepsilon(t-2)+\delta(t)$ gali būti išreikštas per „baltąjį triukšmą“: $\varepsilon(t)=\delta(t)+\alpha_1[\alpha_1\varepsilon(t-2)+\alpha_2\varepsilon(t-3)+\delta(t-1)]+\alpha_2[\alpha_1\varepsilon(t-3)+\alpha_2\varepsilon(t-4)+\delta(t-2)]=\delta(t)+\alpha_1\delta(t-1)+\alpha_2\delta(t-2)+\alpha_1^2\varepsilon(t-2)+2\alpha_1\alpha_2\varepsilon(t-3)+\alpha_2^2\varepsilon(t-4)=\delta(t)+\alpha_1\delta(t-1)+\alpha_2\delta(t-2)+\alpha_1^2\delta(t-2)+2\alpha_1\alpha_2\delta(t-3)+\alpha_2^2\delta(t-4)+\alpha_1^3\varepsilon(t-3)+3\alpha_1^2\alpha_2\varepsilon(t-4)+3\alpha_1\alpha_2^2\varepsilon(t-5)+\alpha_2^3\varepsilon(t-6)=\dots=$
 $=\sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^kC_k^i\alpha_1^{k-i}\alpha_2^i\delta(t-k-i)+\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\alpha_1^{n+1-i}\alpha_2^i\varepsilon(t-n-1-i)$.

Kai AR(2) modelio koeficientai yra tokie, kad $|\alpha_1|+|\alpha_2|<1$, tai
 $\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\alpha_1^{n+1-i}\alpha_2^i\varepsilon(t-n-1-i)=0$, nes $\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\alpha_1^{n+1-i}\alpha_2^i\varepsilon(t-n-1-i)\leq(|\alpha_1|+|\alpha_2|)^{n+1}\varepsilon$, kur ε – maksimali galima $|\varepsilon(t)|$ reikšmė.

Tokiais atvejais galioja formulė $\varepsilon(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^kC_k^i\alpha_1^{k-i}\alpha_2^i\delta(t-k-i)$, t. y. stacionari laiko eilutė $\varepsilon(t)$ gali būti išreikšta kaip begalinio skaičiaus „baltųjų triukšmų“ suma. Kadangi $E[\delta(t-k-i)]=0$ bet kurioms t, k ir i reikšmėms, tai iš šios formulės išplaukia, jog $E[\varepsilon(t)]=0$.

Apskaičiuosime Julo proceso laiko eilutės dispersiją: $\sigma_\varepsilon^2=E[\varepsilon^2(t)]=\sigma_0^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^k[C_k^i\alpha_1^{k-i}\alpha_2^i]^2$.

Mes jau turime formulę, išreiškiančią σ_0^2 ir σ_ε^2 priklausomybę: $\sigma_0^2=\sigma_\varepsilon^2\frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}\times$
 $\times[(1-\alpha_2)^2-\alpha_1^2]$. Todėl galime išvesti formulę $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^k[C_k^i\alpha_1^{k-i}\alpha_2^i]^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_0^2}=\frac{1-\alpha_2}{(1+\alpha_2)\cdot[(1-\alpha_2)^2-\alpha_1^2]}$,
galiojančią, kai $|\alpha_1|+|\alpha_2|<1$. Pavyzdžiui, kai $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{4}$, tai gauname formulę $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^k(C_k^i)^2}{2^{4k}}=\frac{6}{5}$, o kai

$\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{3}$, tai gauname formulę $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^k(C_k^i)^2}{3^{2k}}=\frac{3}{2}$. Didėjant α_1 ir α_2 , suma $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^k[C_k^i\alpha_1^{k-i}\alpha_2^i]$ didėtų, artėdama prie $+\infty$, kai koeficientai $\alpha_1=\alpha_2$ artėtų prie $\frac{1}{2}$, būdami dar šiek tiek mažesni už 0,5.

Parodę, kad modelį AR(2) galima taikyti stacionarių laiko eilučių tiksliai (kai nagrinėjamoji laiko eilutė buvo gauta, stebint Julo procesą) ar artutiniam atvaizdavimui, o taip pat parodę, kaip apskaičiuojamos modelio AR(2) statistinės charakteristikos bei koeficientų α_1 ir α_2 statistiniai įverčiai, galime iškelti sau ir tokį klausimą: „Ar visada formulė $\varepsilon(t)=\alpha_1\varepsilon(t-1)+\alpha_2\varepsilon(t-2)+\delta(t)$ vaizduoja stacionarią eilutę?“

Panagrinėję formulę $\varepsilon(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^kC_k^i\alpha_1^{k-i}\alpha_2^i\delta(t-k-i)+\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\alpha_1^{n+1-i}\alpha_2^i\varepsilon(t-n-1-i)$,

gausime atsakymą, jog ne visada, nes ne visada $\varepsilon(t)$ dispersija σ_ε^2 bus pastovus baigtinis dydis. Tuo nesunku įsitikinti ir naudojantis formule $\sigma_\varepsilon^2=\frac{(1-\alpha_2)\cdot\sigma_0^2}{(1+\alpha_2)\cdot[(1-\alpha_2)^2-\alpha_1^2]}$: kai $\alpha_1=\alpha_2$ ir artėja prie 0,5, tai σ_0^2 artėja prie ∞ .

Iš rezultatų gautų, nagrinėjant AR(1) ir AR(2) modelius, galima padaryti dvi išvadas: 1) ne visada formulės $\varepsilon(t)=\alpha\varepsilon(t-1)+\delta(t)$ ir $\varepsilon(t)=\alpha_1\varepsilon(t-1)+\alpha_2\varepsilon(t-2)+\delta(t)$ vaizduoja stacionarias laiko eilutes ir todėl galima iškelti klausimą, kokias sąlygas turi tenkinti modelio AR(p) koeficientai $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_p$, kad formulė $\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^p\alpha_i\varepsilon(t-i)+\delta(t)$ vaizduotų stacionarią laiko eilutę; 2) kai AR(1) ir AR(2) modelių koeficientai α, α_1 ir α_2 parinkti taip, kad tie modeliai vaizduoja stacionarias laiko eilutes, tai tas

eilutes galima pavaizduoti kaip „baltųjų triukšmų“ „pasvertas“ sumas, turinčias be galo daug dėmenų:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \delta(t-i)$$
 (pavyzdžiui, AR(1) atveju $\beta_i = \alpha^i$, AR(2) atveju formulė, išreiškianti β_i priklausomybę nuo α_1 ir α_2 yra žymiai sudėtingesnė); kyla klausimas, ar kiekvienas AR(p) modelis, kai jis vaizduoja stacionarią laiko eilutę, gali būti išreikštas formoje $\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \delta(t-i)$.

Atsakymą į pirmąjį klausimą galima gauti, nagrinėjant AR(p) modelio charakteringą lygtį $1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i z^i = 0$: kad AR(p) modelis vaizduotų stacionarią laiko eilutę, būtina ir pakankama, kad visų charakteringosios lygties šaknų reikšmių moduliai būtų didesni už 1.

Pavyzdžiui, AR(1) modelio charakteringoji lygtis yra $1 - \alpha_1 z = 0$, kurią sprendami gauname, jog $z = \frac{1}{\alpha_1}$, iš kur išplaukia būtina ir pakankama AR(1) stacionarumo sąlyga: $|\alpha_1| < 1$. Kadangi AR(1) modelyje $\alpha_1 = r(1)$, tai ši sąlyga sutampa su bendrąja sąlyga, keliamą atsitiktinių laiko eilučių autokoreliacijos koeficientams: $-1 < r(1) < 1$.

AR(2) modelio charakteringoji lygtis yra $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 = 0$. Todėl AR(2) modelio stacionarumo būtiną ir pakankamą sąlyga modelio koeficientams α_1 ir α_2 susiveda į nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \left| \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2\alpha_2} \right| > 1, \\ \left| \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2\alpha_2} \right| > 1. \end{cases}$$

Šią nelygybių sistemą, nagrinėjant galimus atvejus ir įvykdžius keletą

algebrinių pertvarkymų, galima suvesti į žymiai paprastesnių nelygybių sistemą $\begin{cases} |\alpha_1| < 2, \\ |\alpha_1| + \alpha_2 < 1. \end{cases}$.

Naudojantis šia nelygybių sistema, jau visai nesunku patikrinti, ar AR(2) modelis vaizduoja stacionarią ar nestacionarią laiko eilutę, o taip pat parinkti koeficientus α_1 ir α_2 , kad AR(2) modelis būtų stacionarus.

Iš gautos nelygybių sistemos išplaukia, jog AR(2) modelio stacionarumui jau nebepakanka, kad būtų tenkinamos sąlygos $-1 < r(1) < 1$ ir $-1 < r(2) < 1$. Pavyzdžiui, modelio $\varepsilon(t) = 3\varepsilon(t-1) - 3\varepsilon(t-2) + \delta(t)$ koeficientai $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -3$, tenkina sąlygas $-1 < r(1) < 1$, $-1 < r(2) < 1$, nes $r(1) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} = \frac{3}{4}$ ir

$$r(2) = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2} = -3 + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4},$$

tačiau netenkina pirmosios iš sąlygų $\begin{cases} |\alpha_1| < 2, \\ |\alpha_1| + \alpha_2 < 1. \end{cases}$

Galima įrodyti, kad stacionaraus AR(2) modelio autokoreliacijos koeficientai $r(1)$ ir $r(2)$ turi tenkinti ne tik sąlygas $-1 < r(1) < 1$, $-1 < r(2) < 1$, bet dar ir papildomą sąlygą $r(2) > 2r^2(1) - 1$. Šie trys apribojimai autokoreliacijos koeficientams yra būtina ir pakankama AR(2) modelio stacionarumo sąlyga. Ja galima pasinaudoti, sprendžiant, ar duotąją realią laiko eilutę galima aproksimuoti AR(2) modeliu.

Atsakymas į antrąjį iškeltąjį klausimą yra teigiamas: kiekvieną AR(p) modelį ($p=1, 2, 3, \dots$), kai jis vaizduoja stacionarią laiko eilutę, galima pervesti į formą $\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \delta(t-i) = \delta(t) +$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \delta(t-i),$$

kurios koeficientai β_i tenkina sąlygą $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 < +\infty$.

Tokį pervedimą galima įvykdyti, naudojantis rekurentiniu algoritmu: 1) į formulę $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i)$ vietoj $\varepsilon(t-i)$ įstatomos formulės $\varepsilon(t-i) = \delta(t-i) + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon(t-i-j)$, kur $i=1, 2, \dots$,

p; gauname formulę $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(t-i) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon(t-i-j)$; 2) į gautąją formulę vietoj $\varepsilon(t-i-j)$

j) įstatomos formulės $\delta(t-i-j) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \varepsilon(t-i-j-k)$ ir gaunama formulė $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(t-i) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta(t-i-j) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \varepsilon(t-i-j-k)$; 3) trečiame žingsnyje gauname formulę $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(t-i) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta(t-i-j) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta(t-i-j-k) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{\ell=1}^p \alpha_{\ell} \varepsilon(t-i-j-k-\ell)$; 4) ketvirtajame žingsnyje gauname formulę $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(t-i) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta(t-i-j) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta(t-i-j-k) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{\ell=1}^p \alpha_{\ell} \times \delta(t-i-j-k-\ell) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{\ell=1}^p \alpha_{\ell} \sum_{m=1}^p \alpha_m \varepsilon(t-i-j-k-\ell-m)$.

Tęsdami šį algoritmą, gauname formulę $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(t-i) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta(t-i-j) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta(t-i-j-k) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{\ell=1}^p \alpha_{\ell} \delta(t-i-j-k-\ell) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{\ell=1}^p \alpha_{\ell} \sum_{m=1}^p \alpha_m \delta(t-i-j-k-\ell-m) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{\ell=1}^p \alpha_{\ell} \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{n=1}^p \alpha_n \times \delta(t-i-j-k-\ell-m) + \dots$, kurią galima tęsti iki begalybės. Susumavę tokioje formulėje koeficientus prie $\delta(t-r)$, kur $r=0, 1, 2, \dots$, surasime koeficientus β_r : $\beta_0=1$; $\beta_1=\alpha_1$; $\beta_2=\alpha_2+\alpha_1^2$; $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1+\alpha_1^3$ ir t. t., t. y. sudarysime formulę $\tilde{\varepsilon}(t) = \delta(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r \delta(t-r)$, kuri turės tą patį vidurkį, tą pačią dispersiją ir

kitas statistines charakteristikas kaip ir $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i)$, kai koeficientai α_i parinkti taip, kad

modelis AR(2) yra stacionarus ir $\sum_{r=1}^{\infty} \beta_r^2 < +\infty$, nes tuomet $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i) - \sum_{r=1}^n \beta_r \delta(t-r) \right] = 0$ ir $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i) - \sum_{r=1}^n \beta_r \delta(t-r) \right)^2 \right] = 0$.

Ši išvada galios bet kurioms p reikšmėms, t. y. ir atvejui, kai $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(t-i)$. Todėl galima teigti, jog **bet kurią stacionarią laiko eilutę, atitinkamai parinkę koeficientų α_i reikšmes (kurios, pradedant, pavyzdžiui, nuo kokio nors $i=p+1$, visos gali būti lygios 0), galime pavaizduoti formoje $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(t-i)$, o taip pat, atitinkamai parinkę koeficientus β_r , – ir formoje $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r \delta(t-r)$.**

Kai formoje $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(t-i)$ vietoj begalinės sumos, imame p pirmųjų sumos dėmenų, atitinkamai parinkdami koeficientų $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ reikšmes $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p$ taip, kad formulė $\delta(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\alpha}_i \varepsilon(t-i)$ geriausiai aproksimuotų formulę

$\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(t-i)$ (o taip pat ir formulę $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r \delta(t-r)$), tai **gauname**

AR(p) modelius, o kai formoje $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \delta(t-r)$ imame q pirmųjų begalinės

sumos dėmenų, atitinkamai pasirinkdami koeficientų $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ reikšmes $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots,$

$\hat{\beta}_q$ taip, kad formulė $\delta(t) + \sum_{r=1}^q \hat{\beta}_r \delta(t-r)$ geriausiai aproksimuotų formulę

$\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r \delta(t-r)$ (o tuo pačiu metu – ir ekvivalenčią jai formulę

$\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon(t-i)$), tai gauname taip vadinamus **slenkančio vidurkio modelius**

MA(q), t. y. modelius $\varepsilon(t) = \delta(t) + \sum_{j=1}^q \beta_j \delta(t-j)$, kuriuose raidės M ir A yra pirmosios

angliškų žodžių „Moving“ ir „Average“ raidės.

Reikėtų pažymėti, jog sąvoka „**stacionarios laiko eilutės slenkančio vidurkio modelis MA(q)**“ skiriasi nuo sąvokos „**nestacionarios laiko eilutės x(t) glodinimas slenkančio vidurkio metodu**“ ne tik tuo, kad pirmoji sąvoka taikoma stacionarioms laiko eilutėms, o antroji – nestacionarioms, bet ir tuo, kad slenkančio vidurkio metodo

svorinių koeficientų ω_i suma $\sum_{i=1}^n \omega_i$ visada turi būti lygi 1, o slenkančio vidurkio

modelio koeficientams β_j toks reikalavimas nekeliamas, nes laiko eilutės $\varepsilon(t)$, vaizduojamos MA(q) modeliais, yra stacionarios, esant bet kurioms realioms baigtinėms koeficientų $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ reikšmėms (ko negalima pasakyti apie koeficientų $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ reikšmes stacionariuose AR(p) modeliuose).

Pats paprasčiausias slenkančio vidurkio modelis yra **modelis MA(1) $\varepsilon(t) = \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1)$** .

Rasime šio modelio autokovariacinę funkciją $\gamma(k)$, dispersiją $\gamma(0)$ ir autokoreliacinę funkciją $r(k)$.

$\gamma(0) = E[(\varepsilon(t) - E[\varepsilon(t)])^2] = E[(\delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - 0)^2] = \sigma_0^2 + \theta_1^2 \sigma_0^2$, nes $E[\delta(t) \cdot \delta(t-1)] = \text{cov}(\delta(t), \delta(t-1)) = 0$, o $E[\delta(t) \cdot \delta(t)] = E[\delta(t-1) \cdot \delta(t-1)] = \sigma_0^2$.

$\gamma(1) = E[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t-1)] = E[(\delta(t) - \theta_1 \delta(t-1))(\delta(t-1) - \theta_1 \delta(t-2))] = -\theta_1 \sigma_0^2$.

Nesunku įsitikinti, kad visoms $k \geq 2$ reikšmėms modelio MA(1) autokovariacija $\gamma(k) = 0$, todėl visi šio modelio autokoreliacijos koeficientai $r(k)$, kai $k \geq 2$, taip pat yra

lygūs 0, o $r(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-\theta_1 \sigma_0^2}{(1 + \theta_1^2) \sigma_0^2} = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$.

Formule $r(1) = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$ naudojamosi identifikuojant modelį MA(1), t. y.

nustatant koeficiento θ_1 statistinį įvertį $\hat{\theta}_1$. Šis įvertis surandamas iš lygties

$\hat{r}(1) = -\frac{\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2}$, kurioje $\hat{r}(1)$ – autokoreliacijos koeficiento $r(1)$ statistinis įvertis,

apskaičiuojamas, naudojantis turimais statistiniais duomenimis:

$$\hat{r}(1) = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \left(\hat{\varepsilon}(t) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}(t) \right) \cdot \left(\hat{\varepsilon}(t-1) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}(t) \right)}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\hat{\varepsilon}(t) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}(t) \right)^2}.$$

Modelio MA(1) dalinės autokoreliacijos koeficientai $r_{dal}(k)$, skirtingai nuo autokoreliacijos koeficientų, nėra lygūs 0 ir apskaičiuojami naudojantis formule

$$r_{dal}(k) = -\theta_1^k \frac{1 - \theta_1^2}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}. \text{ Pavyzdžiui, kai } k=2, \text{ gauname } r_{dal}(2) = -\theta_1^2 \frac{1 - \theta_1^2}{1 - \theta_1^6} = -\frac{\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4}.$$

Jei paimtume $k=1$, tai dalinės autokoreliacijos koeficientas $r_{dal}(1)$ taptų autokoreliacijos koeficientu $r(1)$, nes tarp $\varepsilon(t)$ ir $\varepsilon(t \pm 1)$ jau nebėra tarpinių elementų, todėl $r_{dal}(1)$ formulė turėtų sutapti su $r(1)$ formule.

$$\text{Kad taip ir yra iš tikrųjų, nesunku įsitikinti: } r_{dal}(1) = -\theta_1 \frac{1 - \theta_1^2}{1 - \theta_1^4} = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} = r(1).$$

Slenkančio vidurkio **modelio MA(2)** $\varepsilon(t) = \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2)$ dispersija $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0) = E[(\delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2))^2] = \sigma_0^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$, kovariacija $\gamma(1) = E[(\delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2))(\delta(t-1) - \theta_1 \delta(t-2) - \theta_2 \delta(t-3))] = -\theta_1 \sigma_0^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma_0^2 = \sigma_0^2 \theta_1 (\theta_2 - 1)$, kovariacija $\gamma(2) = E[(\delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2))(\delta(t-2) - \theta_1 \delta(t-3) - \theta_2 \delta(t-4))] = -\theta_2 \sigma_0^2$, o visos kitos kovariacijos $\gamma(k)$, kai $k \geq 3$, yra lygios 0.

$$\text{Todėl } r(1) = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad r(2) = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \text{ o kai } r \geq 3, \text{ tai } r(k) = 0.$$

Identifikuojant modelį MA(2), sprendžiama netiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \frac{-\hat{\theta}_1(1 - \hat{\theta}_2)}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2} = \hat{r}(1), \\ \frac{-\hat{\theta}_2}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2} = \hat{r}(2). \end{cases}$$

Norint patikrinti hipotezę, kad analizuojamoji laiko eilutė $\hat{\varepsilon}(t)$ gali būti aproksimuota modeliu MA(2), tikrinama, ar $\hat{r}(1)$ ir $\hat{r}(2)$ tenkina nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \hat{r}(1) + \hat{r}(2) \approx -0,5, \\ \hat{r}(2) - \hat{r}(1) \approx -0,5, \\ \hat{r}^2(1) \approx 4\hat{r}(2)(1 - 2\hat{r}(2)), \end{cases} \quad \text{t. y. tikrinama, ar koeficientų } \theta_1 \text{ ir } \theta_2 \text{ įverčiai } \hat{\theta}_1 \text{ ir } \hat{\theta}_2$$

$$\text{tenkina nelygybes } \begin{cases} |\hat{\theta}_1| < 2, \\ |\hat{\theta}_1| + \hat{\theta}_2 < 1. \end{cases}$$

Atsižvelgdami į autoregresijos ir slenkančių vidurkių modelių dualumą ir sintezuodami AR(p) ir MA(q) modelių sudarymo idėjas, gauname **autoregresinius modelius su likučių slenkančiu vidurkiu, vadinamus ARMA(p, q) modeliais**

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i) + \delta(t) - \sum_{j=1}^q \theta_j \delta(t-j).$$

Paprasčiausias tokio tipo modelis yra modelis ARMA(1, 1) $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1)$.

Apskaičiuojant ARMA(p,q) modelių statistines charakteristikas, tenka atsižvelgti į taip vadinamąją „kryžminę koreliaciją“ tarp procesų $\varepsilon(t-k)$ ir $\delta(t-j)$.

Kovariacija $\text{cov}(\varepsilon(t-k), \delta(t-j))$ yra lygi 0, kai momentai $t-j$ yra vėlesni už momentus $t-k$, nes procesas $\varepsilon(t-k)$ negali priklausyti nuo to „baltojo triukšmo“ $\delta(t-j)$, kuris dar bus ateityje. Todėl, apskaičiuojant $\text{cov}(\varepsilon(t-k), \delta(t-j))$ ir atsižvelgiant į eilutės $\varepsilon(t)$ stacionarumą, svarbu išsiaiškinti skirtumą $(t-j)-(t-k)=k-j$ ir nustatyti jo ženklą. Kai $t-j > t-k$, t. y. kai $k-j > 0$, tai $\text{cov}(\varepsilon(t-k), \delta(t-j)) = \gamma_{\varepsilon\delta}(k-j) = 0$, t. y. $\gamma_{\varepsilon\delta}(1) = \gamma_{\varepsilon\delta}(2) = \gamma_{\varepsilon\delta}(3) = \dots = 0$. „Kryžminė kovariacija“ gali būti nelygi 0 tik tada, kada $k-j \leq 0$.

Apskaičiuosime „kryžminę kovariaciją“ $\gamma_{\varepsilon\delta}(0)$ modelyje ARMA(1,1), tuo tikslu pertvarkydami to modelio formą į lygybę $\varepsilon(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1) = \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1)$ ir padaugindami abi tos lygybės puses iš $\delta(t)$. Gauname lygybę $\varepsilon(t)\delta(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1)\delta(t) = \delta(t)\delta(t) - \theta_1 \delta(t-1)\delta(t)$, iš kurios, pereinant prie kovariacijų, išplaukia lygybė $\gamma_{\varepsilon\delta}(0) - \alpha_1 \gamma_{\varepsilon\delta}(1) = \sigma_0^2 - 0$, t. y. lygybė $\gamma_{\varepsilon\delta}(0) = \sigma_0^2$.

Dabar, daugindami abi lygybės $\varepsilon(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1) = \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1)$ puses iš $\delta(t-1)$ ir apskaičiuodami kovariacijas, gausime: 1) $\varepsilon(t)\delta(t-1) - \alpha_1 \varepsilon(t-1)\delta(t-1) = \delta(t)\delta(t-1) - \theta_1 \delta(t-1)\delta(t-1)$; 2) $\gamma_{\varepsilon\delta}(-1) - \alpha_1 \gamma_{\varepsilon\delta}(0) = 0 - \theta_1 \sigma_0^2$; 3) $\gamma_{\varepsilon\delta}(-1) = \alpha_1 \sigma_0^2 - \theta_1 \sigma_0^2 = (\alpha_1 - \theta_1) \sigma_0^2$.

Apskaičiavę $\gamma_{\varepsilon\delta}(0)$ $\gamma_{\varepsilon\delta}(-1)$, jau galime apskaičiuoti modelį ARMA(1,1) atitinkančią dispersiją bei autokovariacinę ir autokoreliacinę funkcijas.

- 1) $\varepsilon(t)\varepsilon(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1)\varepsilon(t) = \delta(t)\varepsilon(t) - \theta_1 \delta(t-1)\varepsilon(t)$;
- 2) $\gamma(0) - \alpha_1 \gamma(1) = \gamma_{\varepsilon\delta}(0) - \theta_1 \gamma_{\varepsilon\delta}(-1)$;
- 3) $\gamma(0) - \alpha_1 \gamma(1) = \sigma_0^2 - \theta_1 (\alpha_1 - \theta_1) \sigma_0^2$;
- 4) $\varepsilon(t)\varepsilon(t-1) - \alpha_1 \varepsilon(t-1)\varepsilon(t-1) = \delta(t)\varepsilon(t-1) - \theta_1 \delta(t-1)\varepsilon(t-1)$;
- 5) $\gamma(1) - \alpha_1 \gamma(0) = 0 - \theta_1 \gamma_{\varepsilon\delta}(0)$; $\gamma(1) = \alpha_1 \gamma(0) - \theta_1 \sigma_0^2$;
- 6) $\gamma(0) - \alpha_1^2 \gamma(0) + \alpha_1 \theta_1 \sigma_0^2 = \sigma_0^2 - \theta_1 \alpha_1 \sigma_0^2 + \theta_1^2 \sigma_0^2$;
- 7) $\gamma(0) = \frac{1 - 2\alpha_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \alpha_1^2} \sigma_0^2$; $\gamma(1) = \frac{1 - 2\alpha_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \alpha_1^2} \alpha_1 \sigma_0^2 - \theta_1 \sigma_0^2 = \frac{(\alpha_1 - \theta_1)(1 - \alpha_1 \theta_1)}{1 - \alpha_1^2} \sigma_0^2$.

Iš lygybės $\varepsilon(t)\varepsilon(t-k) - \alpha_1 \varepsilon(t-1)\varepsilon(t-k) = \delta(t)\varepsilon(t-k) - \theta_1 \delta(t-1)\varepsilon(t-k)$, kai $k \geq 2$, gauname, jog $\gamma(k) - \alpha_1 \gamma(k-1) = 0 - 0$, t. y. gauname rekurentinę formulę $\gamma(k) = \alpha_1 \gamma(k-1)$, $k=2, 3, 4, \dots$. Iš šios formulės išplaukia, jog, kai $k \geq 2$, tai $\gamma(k) = \frac{(\alpha_1 - \theta_1)(1 - \alpha_1 \theta_1)}{1 - \alpha_1^2} \times$

$$\times \alpha_1^{k-1} \sigma_0^2. \text{ Todėl, kai } k \geq 2, \text{ tai } \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = r(k) = \frac{(\alpha_1 - \theta_1)(1 - \alpha_1 \theta_1)}{(1 - \alpha_1^2)(1 - 2\alpha_1 \theta_1 + \theta_1^2)} \alpha_1^{k-1} \times$$

$$\times \sigma_0^2 \frac{(1 - \alpha_1^2)}{\sigma_0^2} = \frac{(\alpha_1 - \theta_1)(1 - \alpha_1 \theta_1)}{1 - 2\alpha_1 \theta_1 + \theta_1^2} \alpha_1^{k-1}. \text{ Kadangi, kai } k=1, \text{ tai } \alpha_1^{k-1} = 1 \text{ ir } r(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 - \theta_1)(1 - \alpha_1 \theta_1)}{1 - 2\alpha_1 \theta_1 + \theta_1^2}, \text{ todėl bendrąją } r(k) \text{ apskaičiavimo formulę galima taikyti ir}$$

atvejui $k=1$.

Tai reiškia, kad modelio ARMA(1,1), gauto jungiant MA(1) su AR(1), kuriame $|\alpha_1| < 1$, autokoreliacinė funkcija – eksponentiškai mažėjanti funkcija, kuri yra monotoninė, kai $\alpha_1 > 0$, ir svyruojanti, kai $\alpha_1 < 0$.

Tikrinant hipotezes, ar analizuojamas procesas $\varepsilon(t)$ gali būti aproksimuotas modeliu ARMA(1,1), galima naudotis nelygybėmis

$$\begin{cases} |\hat{r}(2)| < |\hat{r}(1)|, \\ \hat{r}(2) > \hat{r}(1)(2\hat{r}(1) + 1), \text{ kai } \hat{r}(1) < 0, \\ \hat{r}(2) > \hat{r}(1)(2\hat{r}(1) - 1), \text{ kai } \hat{r}(1) > 0, \end{cases} \text{ kurios turi būti tenkinamos.}$$

Identifikuojant ARMA(1,1) modelį, pirmajame identifikavimo etape apskaičiuojamas koeficiento α_1 statistinis įvertis $\hat{\alpha}_1$, kuris surandamas, naudojantis formule $r(k) = \alpha_1 r(k-1)$, $k=2, 3, \dots$, iš kurios išplaukia, jog $\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{r}(2)}{\hat{r}(1)}$.

Antrajame identifikavimo etape, surandame koeficiento θ_1 statistinį įvertį $\hat{\theta}_1$, sprenddami kvadratinę lygtį $\frac{1 + \hat{\theta}_1^2}{\hat{\theta}_1} = \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0)(1 + \hat{\alpha}_1^2)}{\hat{\gamma}(1)(1 + \hat{\alpha}_1^2) - \hat{\alpha}_1(\hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(2))}$ ir pasirinkdami θ_1 įverčiu $\hat{\theta}_1$ tą šios lygties šaknį, kuri tenkina nelygybę $|\hat{\theta}_1| < 1$.

Lygtis $\frac{1 + \hat{\theta}_1^2}{\hat{\theta}_1} = \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0)(1 + \hat{\alpha}_1^2)}{\hat{\gamma}(1)(1 + \hat{\alpha}_1^2) - \hat{\alpha}_1(\hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(2))}$ yra gaunama iš lygybių

$$\begin{cases} \varepsilon(t) - \alpha_1\varepsilon(t-1) = \delta(t) - \theta_1\delta(t-1), \\ \varepsilon(t+1) - \alpha_1\varepsilon(t) = \delta(t+1) - \theta_1\delta(t), \end{cases} \text{ iš kurių išplaukia lygybių sistema}$$

$$\begin{cases} [\varepsilon(t) - \alpha_1\varepsilon(t-1)] \cdot [\varepsilon(t) - \alpha_1\varepsilon(t-1)] = [\delta(t) - \theta_1\delta(t-1)] \cdot [\delta(t) - \theta_1\delta(t-1)], \\ [\varepsilon(t) - \alpha_1\varepsilon(t-1)] \cdot [\varepsilon(t+1) - \alpha_1\varepsilon(t)] = [\delta(t) - \theta_1\delta(t-1)] \cdot [\delta(t+1) - \theta_1\delta(t)]. \end{cases}$$

Pereidami prie kovariacijų, gauname sistemą:

$$\begin{cases} \text{cov}(\varepsilon(t), \varepsilon(t)) - 2\text{cov}(\varepsilon(t), \alpha_1\varepsilon(t-1)) + \text{cov}(\alpha_1\varepsilon(t-1), \alpha_1\varepsilon(t-1)) = \text{cov}(\delta(t), \delta(t)) + \\ + \text{cov}(\theta_1\delta(t-1), \theta_1\delta(t-1)) - 2\text{cov}(\delta(t), \theta_1\delta(t-1)), \\ \text{cov}(\varepsilon(t), \varepsilon(t+1)) - \text{cov}(\alpha_1\varepsilon(t-1), \varepsilon(t+1)) - \text{cov}(\varepsilon(t), \alpha_1\varepsilon(t)) + \text{cov}(\alpha_1\varepsilon(t-1), \alpha_1\varepsilon(t)) = \\ = \text{cov}(\delta(t), \delta(t+1)) - \text{cov}(\delta(t), \theta_1\delta(t)) - \text{cov}(\theta_1\delta(t-1), \delta(t+1)) + \text{cov}(\theta_1\delta(t-1), \theta_1\delta(t)), \end{cases}$$

iš kurios, atsižvelgdami, kad $\text{cov}(\delta(t+k), \delta(t+j)) = \begin{cases} 0, & \text{kai } k \neq j, \\ \sigma_0^2, & \text{kai } k = j, \end{cases}$ gauname lygčių

sistemą $\begin{cases} \gamma(0)(1 + \alpha_1^2) - 2\alpha_1\gamma(1) = \sigma_0^2(1 + \theta_1^2), \\ \gamma(1)(1 + \alpha_1^2) - \alpha_1(\gamma(0) + \gamma(2)) = -\theta_1\sigma_0^2. \end{cases}$

Kadangi koeficiento α_1 statistinį įvertį mes jau esame suradę, o kovariacijų $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ ir $\gamma(2)$ statistinius įverčius $\hat{\gamma}(0)$, $\hat{\gamma}(1)$, $\hat{\gamma}(2)$ galime apskaičiuoti, pasinaudodami turimais statistiniais duomenimis (realia laiko eilute $\hat{\varepsilon}(1)$, $\hat{\varepsilon}(2)$, ..., $\hat{\varepsilon}(n)$) ir standartinėmis formulėmis, tai, padalinę pirmąją gautos sistemos lygtį iš antrosios ir įstatę vietoj α_1 , $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ ir $\gamma(2)$ jų statistinius įverčius, mes ir gausime koeficiento θ_1 statistinio įverčio $\hat{\theta}_1$ apskaičiavimui reikalingą lygtį

$$\frac{1 + \hat{\theta}_1^2}{\hat{\theta}_1} = \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0)(1 + \hat{\alpha}_1^2)}{\hat{\gamma}(1)(1 + \hat{\alpha}_1^2) - \hat{\alpha}_1(\hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(2))}, \text{ t. y. lygtį } \hat{\theta}_1^2 - c\hat{\theta}_1 + 1 = 0, \text{ kurioje koeficiento}$$

$$c = \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0)(1 + \hat{\alpha}_1^2)}{\hat{\gamma}(1)(1 + \hat{\alpha}_1^2) - \hat{\alpha}_1(\hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(2))} = \frac{\hat{\gamma}(0) \left[1 + \left(\frac{\hat{r}(2)}{\hat{r}(1)} \right)^2 \right] - 2 \frac{\hat{r}(2)}{\hat{r}(1)} \hat{\gamma}(1)}{\frac{\hat{r}(2)}{\hat{r}(1)} (\hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(2)) - \hat{\gamma}(1) \left[1 + \left(\frac{\hat{r}(2)}{\hat{r}(1)} \right)^2 \right]} =$$

$$= \frac{\hat{\gamma}(0) \left[1 + \left(\frac{\hat{\gamma}(2)}{\hat{\gamma}(1)} \right)^2 \right] - 2 \frac{\hat{\gamma}(2)}{\hat{\gamma}(1)} \hat{\gamma}(1)}{\frac{\hat{\gamma}(2)}{\hat{\gamma}(1)} (\hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(2)) - \hat{\gamma}(1) \left[1 + \left(\frac{\hat{\gamma}(2)}{\hat{\gamma}(1)} \right)^2 \right]} = \frac{\hat{\gamma}(0) (\hat{\gamma}^2(1) + \hat{\gamma}^2(2)) - 2 \hat{\gamma}(2) \hat{\gamma}^2(1)}{\hat{\gamma}(1) [\hat{\gamma}(0) \hat{\gamma}(2) - \hat{\gamma}^2(1)]} \text{ reikšmė gali}$$

būti apskaičiuota naudojantis turimais statistiniais duomenimis.

Turėdami koeficientų α_1 ir θ_1 įverčius $\hat{\alpha}_1$ ir $\hat{\theta}_1$, galime sudaryti laiko eilutės modelį ARMA(1;1): $\varepsilon(t) = \hat{\alpha}_1 \varepsilon(t+1) + \delta(t) - \hat{\theta}_1 \delta(t-1)$.

Siekiant supaprastinti ir unifikuoti modelių AP(p), MA(q) ir ARMA(p, q) su didesnėmis p ir q reikšmėmis nagrinėjimą, tikslinga įsivesti **postūmio laike**

operatorius F_+ ir F_- , apibrėžiant juos formulėmis
$$\begin{cases} F_+ \varepsilon(t) = \varepsilon(t+1), \\ F_- \varepsilon(t) = \varepsilon(t-1). \end{cases}$$

Operatoriai F_+ ir F_- yra atvirkštiniai vienas kitam, nes $F_+ F_- \varepsilon(t) = F_+ (F_- \varepsilon(t)) = F_+ \varepsilon(t-1) = \varepsilon(t) = F_- F_+ \varepsilon(t)$. Todėl $F_+ = F_-^{-1}$ ir $F_- = F_+^{-1}$.

Daugkartinių operatorių F_+ ir F_- panaudojimą sutrumpintai žymėsime tų operatorių laipsniais, išsivedami operatorių F_+ ir F_- laipsnio F_+^k ir F_-^k , kur k – bet koks sveikas skaičius, sąvoką: $F_+^k \varepsilon(t) = \varepsilon(t+k)$, $F_-^k \varepsilon(t) = \varepsilon(t-k)$.

Operatorių F_+ ir F_- laipsniams galioja laipsnių daugybos taisyklės $F_+^{k_1} \cdot F_+^{k_2} = F_+^{k_1+k_2}$; $F_+^{k_1} \cdot F_-^{k_2} = F_+^{k_1-k_2} = F_-^{k_2-k_1}$; $F_+^k \cdot F_+^{-k} = F_+^0 = 1$, kur $F_+^0 \varepsilon(t) = 1 \cdot \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$; $F_-^{k_1} \cdot F_-^{k_2} = F_-^{k_1+k_2}$; $F_-^{k_1} \cdot F_+^{k_2} = F_-^{k_1-k_2} = F_+^{k_2-k_1}$; $F_-^k \cdot F_-^{-k} = F_-^0 = 1$, kur $F_-^0 \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$.

Operatoriai F_+ ir F_- yra tiesiniai operatoriai ir iš jų bei konstantų galima konstruoti **sudėtingesnius tiesinius operatorius**, pavyzdžiui, operatorių $1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2 - \alpha_3 F_-^3 - \dots - \alpha_p F_-^p$, kurį sutrumpintai žymėsime **$A_p(F_-, \alpha)$** , arba operatorių $1 - \theta_1 F_- - \theta_2 F_-^2 - \theta_3 F_-^3 - \dots - \theta_q F_-^q$, kurį sutrumpintai žymėsime **$B_q(F_-, \theta)$** .

Paveikę laiko eilutę $\varepsilon(t)$ operatorium $A_p(F_-, \alpha)$, gausime, jog $A_p(F_-, \alpha) \varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1) - \alpha_2 \varepsilon(t-2) - \dots - \alpha_p \varepsilon(t-p)$, todėl AR(p) modelį $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \dots + \alpha_p \varepsilon(t-p) + \delta(t)$, pertvarę jį į formą $\varepsilon(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1) - \alpha_2 \varepsilon(t-2) - \dots - \alpha_p \varepsilon(t-p) = \delta(t)$, operatorinėje formoje galima aprašyti formule **$A_p(F_-, \alpha) \varepsilon(t) = \delta(t)$** .

Analogiškai, naudodamiesi operatoriumi $B_q(F_-, \theta)$, modelį MA(q), aprašomą formule $\varepsilon(t) = \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2) - \dots - \theta_q \delta(t-q)$, operatorinėje formoje galima aprašyti formule **$\varepsilon(t) = B_q(F_-, \theta) \delta(t)$** .

ARMA(p,q) modelį $\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \alpha_2 \varepsilon(t-2) + \dots + \alpha_p \varepsilon(t-p) + \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2) - \dots - \theta_q \delta(t-q)$, pertvarę jį į formą $\varepsilon(t) - \alpha_1 \varepsilon(t-1) - \alpha_2 \varepsilon(t-2) - \dots - \alpha_p \varepsilon(t-p) = \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \theta_2 \delta(t-2) - \dots - \theta_q \delta(t-q)$, operatorinėje formoje galime aprašyti formule **$A_p(F_-, \alpha) \varepsilon(t) = B_q(F_-, \theta) \delta(t)$** .

ARMA(1, 1) modelio operatorinė forma yra $A_1(F_-, \alpha) \varepsilon(t) = B_1(F_-, \theta) \varepsilon(t)$, ARMA(2, 1) modelio operatorinė forma yra $A_2(F_-, \alpha) \varepsilon(t) = B_1(F_-, \theta) \varepsilon(t)$ ir t. t.

Rekomenduoju skaitytojui apskaičiuoti modelių ARMA(2,1), ARMA(1,2) bei ARMA(2,2) statistines charakteristikas ir padaryti iš gautų rezultatų išplaukiančias išvadas.

Modeliai AR(p), MA(q) ir ARMA(p,q) sudaro stacionarių laiko eilučių **paprastų tiesinių modelių** klasę, kurių taikymui, nagrinėjant stacionarias laiko eilutes, yra sudaryti specialūs standartinių programų kompiuteriams paketai, labai palengvinantys ir pagreitinantys stacionarių laiko eilučių analizę.

Tačiau pasirodė, kad realių stacionarių laiko eilučių matematinei analizei šių paprastų modelių ne visada pakanka.

Nagrinėjant vertybinių popierių (pavyzdžiui, akcijų) kainų kitimą, infliacijos ir kitus reiškinius, buvo pastebėta įvairių fenomenų, kurių atsiradimo ir egzistavimo realiose laiko eilutėse anksčiau minėtieji AP, MA ir ARMA tipų modeliai paaiškinti nepajėgė.

Vienas iš tokių fenomenų – prognozės paklaidų (atsitiktinių eilutės likučių) grupavimasis į serijas (klasterius): prognozės paklaidos kai kuriose stacionariose laiko eilutėse gana dažnai grupuodavosi į didelių ir mažų paklaidų serijas, kai tuo tarpu dideliuose laiko intervaluose laiko eilutės dispersija $\sigma_\varepsilon^2 = \gamma(0)$ išlikdavo pastovi, t. y. eilutė $\varepsilon(t)$ išlikdavo stacionari. Buvo net pastebėtas tam tikras asimetriškumas: po akcijų kritimo kuriam laikui kainos išsibirstymas dažniausiai padidėdavo, kai tuo tarpu akcijos kainai pakilus tokio dėsningumo kainos išsibirstyme pastebėta nebuvo. Asimetrijos efekto, kuris buvo pastebėtas dar 1976 m., priežastys, matyt, glūdi žmonių psichologijoje: akcijų kainoms krintant, vieni, galvodami, kad jos ir toliau kris, stengiasi tas akcijas greičiau parduoti, ir dėl šios priežasties akcijų kaina dar labiau krinta, o kiti, galvodami, kad akcijų kaina greitai vėl pradės kilti, stengiasi supirkti atpigusias akcijas, kad vėliau galėtų gauti pelną, ir tokiu būdu stabdo akcijų kainų kritimą ir net gali iššaukti jų padidėjimą. Toks žmonių nuomonių išsibirstymas ir veda prie akcijų kainų išsibirstymo padidėjimo, akcijų kainoms krintant. Akcijų kainoms kylant, žmonių nuomonės žymiai vieningesnės, ir todėl ir tų kainų atsitiktinis išsibirstymas yra mažesnis.

1986 m. Tomsonas pastebėjo, kad atsitiktinių procesų, vykstančių finansų rinkoje, laiko eilutėse pasireiškia ilgalaikės atminties efektas, kuris dabar vadinamas Tomsono efektu. Dar vieną tokių laiko eilučių dėsningumą pastebėjo Markas Mašina. Buvo pastebėta ir kitų reiškinių, kuriuos būtų galima pavadinti **stacionarių laiko eilučių nelineiniškumo (netiesiškumo) reiškiniais**.

Visi panašūs reiškiniai netilpo į AR, MA ir ARMA modelių rėmus ir todėl buvo pabandyta pastaruosius modelius modifikuoti, įvedant tam tikrus tų modelių papildymus.

Įvedus **sąlyginio heteroskedastiškumo sąvoką**, buvo sukurtas autoregresinis sąlyginio heteroskedastiškumo modelis **ARCH(p)** (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity model), kuris vėliau buvo apibendrintas į **GARCH(p, q)** modelį (Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity model).

Su šiais modeliais (o taip pat su modeliais HARCH(p), EGARCH(p, q), FIGARCH(p, q), TGARCH(p, q), LGARCH(p, q) ir t. t.) skaitytojai galės susipažinti, studijuodami specialius laiko eilučių ir finansų matematikos kursus. Sistemotyrininkui, besiruošiančiam tapti dženeralistu, kad jis galėtų suprasti specialistus, analizuojančius stacionarias laiko eilutes, ir susikalbėti su jais, pakaks ir tų žinių, kurios pateiktos šiame šios mokymo priemonės skyrelyje.

1.14.12.3.2.2. Tipiniai nestacionarių laiko eilučių modeliai

1.14.12.3.2. skyrelio pradžioje mes jau nagrinėjome nestacionarias laiko eilutes $x(t)$ ir jų glodinimo metodus. Šiame skyrelyje nagrinėsime **homogenines nestacionarias laiko eilutes $x(t)$** , apibrėžiamas kaip tokias laiko eilutes $x(t)$, kurios, eliminavus iš jų neatsitiktinę laiko eilutės $x(t)$ dalį, tampa stacionariomis (plačiau prasme) laiko eilutėmis $\varepsilon(t)$.

Tarkime, kad nagrinėjamąją nestacionarią laiko eilutę $x(t)$ sudaro $(k-1)$ -jo laipsnio (kur $k \geq 1$) daugianaris $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}$, kurio koeficientai c_i ($i=0, 1,$

2,..., k-1) – kokios nors konstantos ar net atsitiktiniai skaičiai, turintys nepriklausančius nuo laiko vidurkius, ir stacionari laiko eilutė $\varepsilon(t)$, t. y.

$$x(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i + \varepsilon(t).$$

Tokių laiko eilučių matematiniam modeliavimui ir apdorojimui taikomi tipiniai taip vadinamieji **integruoti autoregresiniai slenkančio vidurkio (AutoRegressive Integrated Moving Average) modeliai ARIMA(p, q, k)**.

Šie modeliai eliminuoja iš laiko eilutės $x(t)$ daugianarį $\sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ ir po to sudaro likusios stacionarios laiko eilutės $\varepsilon(t)$ tipinį modelį ARMA(p, q).

Daugianario $f(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ eliminavimui iš eilutės $x(t)=f(t)+\varepsilon(t)$ pasinaudosime operatoriumi Δ , apskaičiuodami skirtumus $\Delta x(t)=x(t)-x(t-1)$, $\Delta^2 x(t)=\Delta x(t)-\Delta x(t-1)$, $\Delta^3 x(t)=\Delta^2 x(t)-\Delta^2 x(t-1)$ ir t. t.

Operatorius Δ gali būti išreikštas per operatorių F_- , t. y. $\Delta=1-F_-$, nes $\Delta x(t)=x(t)-x(t-1)=x(t)-F_-x(t)=(1-F_-)x(t)$, o operatorius $\Delta^2=(1-F_-)^2$, nes $\Delta^2 x(t)=\Delta x(t)-\Delta x(t-1)=(1-F_-)x(t)-(1-F_-)x(t-1)=(1-F_-)(x(t)-x(t-1))=(1-F_-)(1-F_-)x(t)=(1-F_-)^2 x(t)$.

Analogiškai gauname, kad $\Delta^n x(t)=(1-F_-)^n x(t)=\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i F_-^i x(t)$.

1.14.12.3.2. skyrelio pradžioje, įvesdami laiko eilutės $x(t)$ ir stacionarios laiko eilutės sąvokas bei apibūdindami laiko eilučių ekonometrinės analizės tikslus ir metodus, mes jau buvome nustatę, kad $\Delta^{p+1} \sum_{i=0}^p c_i t^i = 0$. Todėl tuo atveju, kai nagrinėjama

laiko eilutė yra $x(t) = \sum_{i=0}^p c_i t^i + \varepsilon(t)$, kur $\varepsilon(t)$ – stacionari laiko eilutė, tai tokios laiko

eilutės $x(t)$ (p+1)-osios eilės skirtumas $\Delta^{p+1} x(t) = \Delta^{p+1} \sum_{i=0}^p c_i t^i + \Delta^{p+1} \varepsilon(t) = \Delta^{p+1} \varepsilon(t)$ yra taip pat stacionari laiko eilutė.

Todėl mūsų dabar nagrinėjamu atveju, kai $x(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i + \varepsilon(t)$, kur $\varepsilon(t)$ –

stacionari laiko eilutė, gauname, jog $\Delta^k x(t) = \Delta^k \varepsilon(t) = (1-F_-)^k \varepsilon(t) = \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i F_-^i \right) \varepsilon(t)$ –

taip pat stacionari laiko eilutė $\varepsilon(t) - C_k^1 \varepsilon(t-1) + C_k^2 \varepsilon(t-2) - C_k^3 \varepsilon(t-3) + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \varepsilon(t-k+1) + (-1)^k \varepsilon(t-k)$, $t=1, 2, \dots, N$, kurios matematiniam modeliavimui galima taikyti ARMA(p,q) tipo modelius $A_p(F_-, \alpha)\varepsilon(t)=B_q(F_-, \theta)\delta(t)$.

ARIMA(p, q, k) modelį $A_p(F_-, \alpha)\Delta^k x(t)=B_q(F_-, \theta)\delta(t)$, atsižvelgdami į tai, kad operatoriai $A_p(F_-, \alpha)$ ir $(1-F_-)^k$ yra tiesiniai ir jų sandauga yra komutatyvi ir asociatyvi (žiūr. 1.9.1.5. skyrelį), galime užrašyti ir formoje **$A_p(F_-, \alpha)(1-F_-)^k x(t)=B_q(F_-, \theta)\delta(t)$** .

Pritaikysime šią formulę atvejui, kai $p=1$, $q=1$, $k=1$. Gausime **ARIMA(1,1,1)** modelį $A_1(F_-, \alpha)(1-F_-)x(t)=B_1(F_-, \theta)\delta(t)$, t. y. modelį $(1-\alpha F_-)(1-F_-)x(t)=(1-\theta F_-)\delta(t)$, kurį galima pertvarkyti į modelį $[1-(1+\alpha)F_-+\alpha F_-^2]x(t)=(1-\theta F_-)\delta(t)$.

Pereidami nuo operatorinės formos į paprastą algebrinę formą, gauname modelį $x(t) - (1 + \alpha)x(t-1) + \alpha x(t-2) = \delta(t) - \theta\delta(t-1)$, kuris dažnai vaizduojamas standartinėje algebrinėje ARIMA(1,1,1) modelio formoje: $x(t) = (1 + \alpha)x(t-1) - \alpha x(t-2) + \delta(t) - \theta\delta(t-1)$.

Analogiškai gausime, kad **ARIMA(0,1,1)** yra modelis $A_0(F_-, \alpha)(1 - F_-)x(t) = B_1(F_-, \theta)\delta(t)$, t. y. modelis $x(t) - x(t-1) = \delta(t) - \theta\delta(t-1)$, arba $x(t) = x(t-1) + \delta(t) - \theta\delta(t-1)$, o **ARIMA(2,0,1)** yra modelis $A_2(F_-, \alpha)(1 - F_-)x(t) = B_0(F_-, \theta)\delta(t)$, t. y. modelis $(1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2)(1 - F_-)x(t) = \delta(t)$, kuri, pervedę iš operatorinės į paprastą algebrinę formą, galime užrašyti taip: $x(t) = (1 + \alpha_1)x(t-1) + (\alpha_2 - \alpha_1)x(t-2) - \alpha_2 x(t-3) + \delta(t)$, t. y. panašiai kaip AR(3) modelį.

Praktinėje laiko eilučių $x(t)$ analizėje be jau minėtųjų ARIMA(1,1,1), ARIMA(0,1,1), ARIMA(2,0,1) modelių dažnai naudojamosi dar ir modeliais ARIMA(0,2,2) ir ARIMA(1,0,1). Retai naudojamosi ARIMA(p,q,k) modeliais, kurių parametrų p , q ar k reikšmės būtų didesnės už 2, nes dauguma nagrinėjamų procesų nėra tokie sudėtingi, kad jų aprašymui prireiktų tokių sudėtingų modelių, o be to ir turimoji statistinė informacija nėra tokia patikima ir tiksli, kad pasiteisintų sudėtingų modelių panaudojimas. Todėl nėra prasmės didinti modelių, o kartu ir jų charakteristikų apskaičiavimo sudėtingumą.

Įsivedus **sumavimo operatorių** S , atvirkštinį **skirtumo operatoriui** $\Delta = 1 - F_-$, t. y. priėmus, kad $(1 - F_-)^{-1} = S$ ir $S^k = (1 - F_-)^{-k}$, iš kur išplaukia, jog $S^k(1 - F_-)^{-k}x(t) = x(t)$ ir $S^k \Delta^k x(t) = x(t)$, ARIMA(p,q,k) modelį $A_p(F_-, \alpha)(1 - F_-)^k x(t) = B_q(F_-, \theta)\delta(t)$, arba (kas yra tas pats) modelį $(1 - F_-)^k A_p(F_-, \alpha)x(t) = B_q(F_-, \theta)\delta(t)$ galima transformuoti į modelį $A_p(F_-, \alpha)x(t) = (1 - F_-)^{-k} B_q(F_-, \theta)\delta(t)$, t. y. į **modelį** $A_p(F_-, \alpha)x(t) = S^k B_q(F_-, \theta)\delta(t)$. Kairioji šio modelio pusė vaizduoja autoregresijos procesą, o dešinioji – sumuojamą („integruojamą“) slenkančio vidurkio procesą. Tai ir paaiškina žodžio „integruotas“ atsiradimą modelio ARIMA pavadinime.

Identifikuojant ARIMA(p,q,k) modelius, visų pirma iškyla parametro k reikšmės nustatymo problema. Apie daugianario $\sum_{i=0}^p c_i t^i$, įeinančio į laiko eilutės

$$x(t) = f_{tr}(t) + \varepsilon(t) = \sum_{i=0}^p c_i t^i + \varepsilon(t) \text{ sudėtį, laipsnio } p \text{ nustatymą jau buvo rašyta 1.14.12.3.2.}$$

skyrelio pradžioje. Čia tik pažymėsiu, jog praktikoje dažnai naudojamosi skirtumų $\Delta \hat{x}(t)$, $\Delta^2 \hat{x}(t)$, $\Delta^3 \hat{x}(t)$, ... autokoreliacinės funkcijos analize. Kai apskaičiuodami $\Delta^\ell \hat{x}(t)$, kur $\ell = 1, 2, \dots$, pasiekiame, kad $\ell = k$, t. y., kai $\Delta^\ell \hat{x}(t)$ savo sudėtyje jau nebeturi neatsitiktinių dalių, dėl kurių buvimo eilučių $\hat{x}(t)$, $\Delta \hat{x}(t)$, $\Delta^2 \hat{x}(t)$, ..., $\Delta^{\ell-1} \hat{x}(t)$ nariai buvo stipriai koreliuoti, autokoreliacinės funkcijos reikšmė staigiai krinta, nes eilutės $\varepsilon(t)$ nariai $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t-1)$, $\varepsilon(t-2)$, ... nėra taip stipriai koreliuoti kaip eilučių $\hat{x}(t)$ bei $\Delta \hat{x}(t)$, $\Delta^2 \hat{x}(t)$, ..., $\Delta^{\ell-1} \hat{x}(t)$ nariai. Suradę tokią eilutę $\Delta^\ell \hat{x}(t)$, kurios autokoreliacinė funkcija yra staigiai mažėjanti funkcija, galime teigti, jog $k = \ell$. Kadangi praktikoje k dažniausiai neviršija 3, tai ši procedūra nereikalauja labai ilgų ir sudėtingų skaičiavimų. Nustačius k ir žinant $\Delta^k \hat{x}(t) = \Delta^k \hat{\varepsilon}(t)$, t. y. turint stacionarią eilutę $\Delta^k \hat{\varepsilon}(t)$, tai eilutei galime taikyti ARMA(p,q) modelį apie kurio identifikavimą jau buvo kalbėta 1.14.12.3.2.1. skyrelyje. Nustačius p ir q reikšmes ir apskaičiavus koeficientų $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ bei $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ statistinius įverčius $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$, modelio ARIMA(p,q,k) identifikavimas yra užbaigiamas.

Žymiai sudėtingiau eliminuoti nestacionarios eilutės $x(t)$ periodinę sudedamąją dalį. Kai yra pagrindo manyti, kad į procesą, kurį stebint buvo gauta eilutė $\hat{x}(t)$, tokia

sudedamoji dalis įeina, tai visų pirma bandoma įvertinti periodinių svyravimų periodą $\hat{T}$. Tuo tikslu bandoma išsiaiškinti nagrinėjamo proceso atsiradimo ir funkcionavimo mechanizmus ir kelti hipotezes apie svyravimų su tam tikru periodu T nagrinėjamame procese egzistavimą bei tikrinti tas hipotezes, analizuojant statistinius duomenis $\hat{x}(t)$, aprašančius nagrinėjamo proceso funkcionavimo trajektoriją $x(t)$, pavyzdžiui, sudarant ir analizuojant tos eilutės autokoreliacinį spektrą. Šios procedūros detalios aprašytos laiko eilučių analizei skirtame įvadiname 1.14.12.3.2. skyrelyje. Nusprendus, kad $x(t)$ sudėtyje yra periodinė sudedamoji dalis, turinti periodą T , jos eliminavimui galima pasinaudoti įvadinio 1.14.12.3.2. skyrelio pabaigoje jau minėtu operatorium $\nabla_T = 1 - F_-^T$.

Pavyzdžiui, kai nestacionari laiko eilutė $x(t)$ turi periodinę sudedamąją dalį ir yra $x(t) = a \sin \frac{2\pi}{T}t + \varepsilon(t)$, tai $\nabla_T x(t) = (1 - F_-^T)x(t) = a \sin \frac{2\pi}{T}t + \varepsilon(t) - a \sin \frac{2\pi}{T}(t-T) - \varepsilon(t-T) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T) = (1 - F_-^T)\varepsilon(t)$ yra tos periodinės sudedamosios dalies jau nebeturinti stacionari laiko eilutė.

Kadangi kartu su periodiniais svyravimais eilutės $x(t)$ sudėtyje gali būti ir trendas $f(t)$, kurį galima aproksimuoti $k-1$ -jo laipsnio ($k=1, 2, \dots$) daugianariu, tai abiejų šių sudedamųjų dalių eliminavimui gali būti taikomas operatorius $\Delta^k \nabla_T^K$, kur operatoriaus ∇_T taikymo laipsnis K parenkamas eksperimentaliai, palaipsniui didinant K , kol eilutė $\Delta^k \nabla_T^K \hat{x}(t)$ netampa apytikriai stacionari. Tuomet tai eilutei jau galime taikyti ARMA(p, q) tipo modelius.

Papildomos informacijos apie laiko eilučių $x(t)$, turinčių periodinę sudedamąją dalį, modelių sudarymą ir jų identifikavimą skaitytojas, kaip jau buvo minėta, gali rasti knygoje [182]. Sistemotyrininkui, kuris tiesiogiai neužsiiminės laiko eilučių analize, o tik bendraus su šios srities specialistais, formuluodamas jiems specialių tyrimų užduotis, ir privalės suprasti bei įvertinti tų tyrimų metu gaunamus rezultatus, kad galėtų jais teisingai ir kūrybiškai pasinaudoti, pakaks ir tų žinių, kurios buvo pateiktos šiame skyrelyje.

1.14.12.3.2.3. Regresiniai modeliai su pasiskirsčiusiais lagais

Neretai pasitaiko atvejų kai laiko eilutės $y(t)$ elementų reikšmės statistiškai priklauso ne tik nuo laiko eilutės $x(t)$ elementų reikšmių, kurias tie elementai įgyja momentu t , kai $t=1, 2, 3, \dots, n$, bet ir nuo anksčiau buvusių reikšmių. Matematiškai tokią priklausomybę galima išreikšti formule $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$, kur $t=T+1, T+2, \dots$. Tokių priklausomybių pavyzdžiai: 1) gyventojų išlaidų $y(t)$, daromų momentu t priklausomybė nuo tų gyventojų pajamų $x(t)$ ne tik momentu t , bet ir prieš tai buvusiais momentais $t-1, t-2, \dots, t-k, \dots, t-T$, t. y. ir nuo $x(t-1), x(t-2), \dots, x(t-k), \dots, x(t-T)$; 2) įmonės pagrindinių fondų dydžio $y(t)$ priklausomybė nuo kapitalinių įdėjimų $x(t)$ ne tik momentu t , bet ir prieš tai buvusiais momentais $t-1, t-2, \dots, t-T$; 3) ežero vandens temperatūros $y(t)$ priklausomybė ne tik nuo oro temperatūros $x(t)$ dabartiniu momentu t , bet ir nuo oro temperatūros prieš tai buvusiais momentais $t-1, t-2, \dots, t-T$.

Modelio $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ parametrų $c_0, T, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots, \theta_T$

nustatymui tiesiogiai taikyti analizės metodus, aprašytus 1.14.12.3.1. skyrelyje, nors ir įmanoma, bet būtų netikslinga, nes, **pirma**, dėl didelio paaiškinamųjų kintamųjų $x(t)$,

$x(t-1), \dots, x(t-T)$ koreliuotumo tarpusavyje neišvengiamai susidurtume su 1.14.12.3.1.1. skyrelyje jau minėtu egzogeninių kintamųjų **multikolinearumo reiškiniu**, o **antra**, nebūtų pasinaudota ta papildoma informacija apie parametrus $c_0, T, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_T$, kuri išplaukia iš priklausomybės $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ bei laiko eilučių $y(t)$ ir $x(t)$ „fizinės“ (t. y. ekonominės ir pan.) esmės. Pasinaudodami tokia informacija, mes, dar nepradėję taikyti matematinės statistikos aparato, jau galime nemažai pasakyti apie modelio, kuris bus identifikuojamas, parametrus.

Pavyzdžiui, nagrinėdami regresijos lygtį, aprašančią gyventojų išlaidų $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ priklausomybę nuo jų pajamų $x(t)$, mes galime teigti, jog c_0 – tai gyventojų būtinos išlaidos, kurios nepriklauso nuo gaunamų pajamų dydžio, o koeficientai θ_k apytikriai lygūs toms pajamų dalims, kurios tampa gyventojų išlaidomis tik praėjus k laiko taktų nuo tų pajamų gavimo momento. Todėl koeficientai θ_k turėtų tenkinti nelygybes $0 \leq \theta_k < 1$ ir lygybę $\sum_{k=0}^T \theta_k = 1$, kai t keičiasi nuo 0 iki T .

Žinoma, naudojantis lygybe $\sum_{k=0}^T \theta_k = 1$ reikia atsižvelgti į tai, jog taip būtų, jei gyventojų užregistruotos pajamos $\hat{x}(t)$ būtų lygios jų tikrosioms pajamoms $x(t)$, tačiau tikrovėje gana dažnai pastebime, kad $\hat{x}(t) \leq x(t)$, todėl tikrovėje vietoj lygybės $\sum_{k=0}^T \theta_k = 1$ gana dažniai gauname nelygybę $\sum_{k=0}^T \hat{\theta}_k > 1$.

Antrajame pavyzdėlyje regresijos koeficientų $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_T$ reikšmės turi vaizduoti tai, kokiomis dalimis i -jų metų investicijos $x(i)$ tampa įmonės pagrindiniais fondais i -siais, $(i+1)$ -aisiais, ..., $(i+k)$ -aisiais, ..., $(i+T)$ -aisiais metais. Šiuo atveju koeficientai θ_k turi tenkinti nelygybes $0 \leq \theta_k < 1$ ir lygybę $\sum_{k=0}^T \theta_k < 1$, nes ne visas investuotas į pagrindinių fondų didinimą kapitalas tampa pagrindiniais fondais, kadangi, didinant pagrindinius fondus, atsiranda ir įvairių papildomų išlaidų (valdymo aparato išlaikymas, personalo apmokymas ir pan.). Kadangi T yra laikas, per kurį visas koku nors momentu investuotas kapitalas turėtų būti įsisavintas, tai T reikšmė dažnai yra žinoma iš anksto.

Trečiajame pavyzdėlyje, žinant vandens specifinę šiluminę talpą, specifinę jo garavimo šilumą, vandens šiluminį laidumą, ežero paviršiaus plotą, apytikrę ežere esančio vandens masę, galima sudaryti fizikinį modelį, apytikriai aprašantį, kaip turėtų keistis ežero vandens temperatūra, keičiantis oro temperatūrai, atsižvelgiant į vėlavimą tarp tų pokyčių, atsirandantį dėl vandens „šiluminio inertiškumo“. Laiko eilutėse $x(t)$ ir $y(t)$ sukaupią statistinę informaciją tuomet būtų galima panaudoti sudaryto fizikinio modelio patikrinimui ir patikslinimui.

Taigi, apriorinė situacijos ir jos regresinio modelio analizė gali duoti nemažai informacijos, kuri gali būti naudinga, specifikuojant, identifikuojant, tikslinant ir verifikuojant regresinį modelį.

Dėl aukščiau išvardintų dviejų priežasčių **regresiniai modeliai** $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$, kur $x(t)$ ir $y(t)$ – laiko eilutės, aprašančios inertiškus stochastinius procesus, išskiriami į atskirą regresinių modelių su pasiskirsčiusiais lagais klasę, ir jų identifikavimui naudojami specialūs metodai.

Toks pavadinimas šios klasės modeliams buvo suteiktas todėl, kad **lagais ekonometrikoje vadinami vėlinimai (delšos)**, o terminas „pasiskirstę lagai“ buvo pavartotas todėl, kad **vėluojančio argumento funkcijoje** $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$

argumentų $x(t)$ poveikiai į funkciją $y(t)$ pasiskirstę laike ir gali pasireikšti su tam tikrais lagais. Su vėluojančio argumento funkcijomis mes jau buvome susidūrę 1.4.10. ir 1.4.11. skyreliuose.

Specialių metodų, taikomų tokio tipo regresinių modelių identifikavimui, idėją ir tikslą galima trumpai apibūdinti kaip **tokį informacijos apie „fizinę“ modeliuojamų procesų ir juose pasireiškiančių priklausomybių esmę bei svorio koeficientų θ_k (kur $k=0, 1, 2, \dots, T$) prasmę ir galimas jų reikšmes panaudojimą, kuris leistų:**

- išspręsti kintamųjų $x(t), x(t-1), \dots, x(t-T)$ multikolinearumo problemą,**
- žymiai supaprastinti modelio identifikavimo uždavinį, matematiškai išreiškiant struktūrinius ryšius tarp koeficientų θ_k , naudojantis nedideliu skaičiumi įvedamų pagalbinių parametrų $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, kur $m \ll T$, taip, kad, nustačius tų parametrų įverčius $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m$, būtų galima apskaičiuoti visų koeficientų θ_k įverčius $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k, \dots, \hat{\theta}_T$, kitaip tariant, suvesti uždavinį su dideliu skaičiumi priklausomų nežinomųjų į uždavinį su daug mažesniu nepriklausomų nežinomųjų skaičiumi.**

Svorinių koeficientų θ_k seka $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_T$ (tame tarpe ir seka, turinti be galo daug narių $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$, kai $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x(t-k) + \delta(t)$), vadinama **lago struktūra**. Kai visi koeficientai θ_k yra neneigiami, tai seką $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$, kurioje $\omega_k = \frac{\theta_k}{\sum_{j=0}^T \theta_j}$ ir todėl $\sum_{k=0}^T \omega_k = 1$, vadina **normuota lago struktūra**.

Normuotos lago struktūros elementus ω galima interpretuoti kaip tikimybes, o pačią normuotą lago struktūrą laikyti diskrečiu tikimybių skirstiniu.

Tuomet **regresinio modelio su pasiskirsčiusiais lagais identifikavimo uždavinys susiveda į tikimybių pasiskirstymo dėsnio nustatymą**, t. y. į hipotezių apie galimus pasiskirstymo dėsnius iškėlimą bei patikrinimą, į tuos dėsnius charakterizuojančių parametrų įvertinimą tikimybių teorijoje bei matematinėje statistikoje žinomais metodais (tokių parametrų paprastai nebūna daug: 1, 2, 3), o po to – į tikimybių ω_k apskaičiavimą.

Pavyzdžiui, nagrinėdami gyventojų išlaidų $y(t)$ priklausomybę $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ nuo pajamų $x(t)$, mes galime pasinaudoti prielaida (tikėtina hipoteze), kad šį modelį galime normuoti, įsivesdami svorinius koeficientus $\omega_k = \frac{\theta_k}{\sum_{j=0}^T \theta_j}$, o

ω_k galime laikyti binominio pasiskirstymo tikimybėmis, apskaičiuojamomis, naudojantis to pasiskirstymo formule $\omega_k = C_T^k p^k (1-p)^{T-k}$, kurioje $k=0, 1, 2, \dots, T$. Taigi, šiuo atveju tam, kad apskaičiuotume visų svorinių koeficientų ω_k reikšmes, pakanka nustatyti tik dviejų parametrų – p ir T – reikšmes. Parametrų p ir T statistinius įverčius $\hat{p}$ ir $\hat{T}$ galima nustatyti apdorojant statistinius duomenis ir

atsižvelgiant į tai, kad p turi tenkinti sąlygas $0 < p < 1$, o parametras T turi rodyti, kiek ilgai dabartinės gyventojų pajamos įtakos jų būsimas išlaidas. Koeficiento c_0 statistinį įvertį $\hat{c}_0$ taip pat nesunku nustatyti, apdorojant statistinę informaciją, o po to ir patikrinti gautą rezultatą, prisimenant, kad c_0 – būtiniausios gyventojų išlaidos, jau nebeprisiklausančios nuo jų pajamų dydžio.

Skaitytojui gali kilti klausimas, kodėl šiuo atveju buvo pasirinktas būtent binominis tikimybių pasiskirstymo dėsnis, o ne koks nors kitas, kitaip tariant todėl buvo parinkta **binominė lago struktūra**. Atsakymą į šį klausimą rasime, atsižvelgdami į resursų kaupimo ir panaudojimo procesams būdingą savybę: svoriniai koeficientai θ_k , didėjant k , pradeda monotoniškai mažėti ne iškart, o tik po to, kai koeficientų θ_k reikšmės, pradžioje didėdamos, pasiekia maksimumą. Panašią savybę turi ir binominio skirstinio tikimybės $\omega_k = C_T^k p^k (1-p)^{T-k}$. Atsakymą į klausimą, iš kur atsiranda tokia savybių analogija, surasime išgilinę į resursų kaupimo ir jų panaudojimo procesų „mechanizmų“ funkcionavimą ir į procesus, kuriuos aprašo binominis tikimybių pasiskirstymo dėsnis, į minėtųjų **procesų izomorfiškumą**.

Šis pavyzdėlis rodo, kad, **sudarant procesų matematinius modelius, didelį vaidmenį vaidina tų procesų fizinės, ekonominės ir pan. esmės ir juose veikiančių „mechanizmų“ žinojimas, o taip pat ir modeliuotojo intuicija**. Jo siūlomos hipotezės po to tikrinamos naudojantis praktika (sukauptais realiais statistiniais duomenimis) ir tik po to priimamos arba atmetamos. Hipotezės, kad mūsų šio skyrelio pradžioje paminėtų pirmųjų dviejų konkrečių regresijos su pasiskirsčiusiais lagais pavyzdžių modeliuose $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ koeficientai θ_k gali būti interpretuojami kaip binomiškai pasiskirsčiusios tikimybės, jas statistiškai patikrinus, nebuvo atmetos. Sudarant trečiojo pavyzdėlio modelį net hipotezės neprireikė, nes buvo galima pasinaudoti nagrinėjamo proceso artutiniu fizikiniu modeliu, kurį bereikėjo tik padidinti, jį identifikuojant.

Kai atsitiktinio proceso $y(t)$ „atminties“ ilgis T yra begalinis (t. y. kai $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x(t-k) + \delta(t)$) ir kai koeficientai θ_k gali būti interpretuojami kaip tikimybės (t. y. kai jie sudaro normalizuotą lago struktūrą), tai tikslinga patikrinti hipotezę, ar lago struktūra nėra taip vadinamoji **Paskalio struktūra**, kurios elementų θ_k reikšmės gali būti apskaičiuotos, naudojantis formule $\theta_k = (1-p)^M C_{M+k-1}^k p^k$, kur $k=0, 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$, o M – sveikas teigiamas skaičius, kurio reikšmę (kaip ir parametro p reikšmę) reikia ir galima įvertinti apdorojant statistinius duomenis.

Tais atvejais, kai mums trūksta informacijos, kad galėtume iškelti hipotezę apie koeficientų θ_k (arba apie normalizuotų svorinių koeficientų $\omega_k = \frac{\theta_k}{\sum_{j=0}^T \theta_j}$) pasiskirstymą,

galima priimti hipotezę, kad koeficientų θ_k reikšmės yra kokių nors tolydžių funkcijų $f(k)$ reikšmės, kurią galima aproksimuoti m -jo laipsnio ($m \ll T$) daugianariu, t. y. priimti, kad $f(k) = \theta_k = \sum_{i=0}^m a_i k^i$, kur $k=0, 1, 2, \dots, T$.

Naudodamiesi šia formule, išreiškiame T koeficientų θ_k reikšmes per žymiai mažesnius skaičius m parametrų a_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = a_0, \\ \theta_1 = \sum_{i=0}^m a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_m, \\ \theta_2 = \sum_{i=0}^m a_i 2^i = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^m a_m, \\ \dots\dots\dots \\ \theta_T = \sum_{i=0}^m a_i T^i = a_0 + Ta_1 + T^2 a_2 + \dots + T^m a_m. \end{array} \right.$$

Istatę šias koeficientų θ_k išraiškas į formules $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ ir gautoje sumoje grupuodami dėmenis su vienodais koeficientais α_i bei išskeldami pastaruosius už skliaustelių, gausime: $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t) = c_0 + a_0 x(t) +$

$$\begin{aligned} &+ x(t-1) \sum_{i=0}^m a_i + x(t-2) \sum_{i=0}^m 2^i a_i + \dots + x(t-k) \sum_{i=0}^m k^i a_i + \dots + x(t-T) \sum_{i=0}^m T^i a_i + \delta(t) = \\ &= c_0 + a_0 [x(t) + x(t-1) + x(t-2) + \dots + x(t-k) + \dots + x(t-T)] + a_1 [x(t-1) + 2x(t-2) + 3x(t-3) + \dots + \\ &+ kx(t-k) + \dots + Tx(t-T)] + a_2 [x(t-1) + 2^2 x(t-2) + 3^2 x(t-3) + \dots + k^2 x(t-k) + \dots + T^2 x(t-T)] + \\ &+ \dots + a_i [x(t-1) + 2^i x(t-2) + 3^i x(t-3) + \dots + k^i x(t-k) + \dots + T^i x(t-T)] + \dots + a_m [x(t-1) + 2^m x(t-2) + \\ &+ 3^m x(t-3) + \dots + k^m x(t-k) + \dots + T^m x(t-T)] + \delta(t) = c_0 + a_0 \sum_{j=0}^T x(t-j) + a_1 \sum_{j=1}^T jx(t-j) + \\ &+ a_2 \sum_{j=1}^T j^2 x(t-j) + a_3 \sum_{j=1}^T j^3 x(t-j) + \dots + a_i \sum_{j=1}^T j^i x(t-j) + \dots + a_m \sum_{j=1}^T j^m x(t-j) + \delta(t). \end{aligned}$$

Koeficientų a_i , kai $i=1, 2, \dots, m$, daugikliai – sumos $\sum_{j=1}^T j^i x(t-j)$ – yra lygūs sumoms $\sum_{j=0}^T j^i x(t-j)$, nes kai $i \neq 0$, tai $0^i = 0$ ir $\sum_{j=1}^T j^i x(t-j) = \sum_{j=0}^T j^i x(t-j)$.

Laikydami (kaip priimta matematikoje), kad $0^0 = 1$ (t. y., kad $a^0 = 1$, esant bet kuriai a reikšmei), koeficiento a_0 daugiklį – sumą $\sum_{j=0}^T x(t-j)$ – galime užrašyti ir formoje $\sum_{j=0}^T j^0 x(t-j)$.

Tuomet bet kurio koeficiento a_i , kur $i=0, 1, 2, \dots, m$, daugiklį galima užrašyti unifikuotoje formoje $\sum_{j=0}^T j^i x(t-j)$ ir $y(t)$ priklausomybę nuo $x(t), x(t-1), x(t-2), \dots,$

$x(t-T)$ išreikšti formule $y(t) = c_0 + \sum_{i=0}^m a_i \sum_{j=0}^T j^i x(t-j) + \delta(t)$, besiskiriančia nuo pirminės

formulės $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ tuo, kad, identifikuojant naująją formulę, tereikia statistiškai įvertinti tik $(m+4)$ parametrų ($c_0, a_0, a_1, \dots, a_m, m$ ir T) reikšmes, kai tuo tarpu pradinėje formulėje tokių parametrų buvo net $T+3$: $c_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_T, T$, t. y. žymiai daugiau, nes $T \gg m$.

Sumų $\sum_{j=0}^T j^i x(t-j)$ reikšmių statistinius įverčius galima apskaičiuoti, naudojantis statistiniais duomenimis – laiko eilute $x(t)$, susidedančia iš $(n+1)$ elementų $\hat{x}(t)$, $\hat{x}(t-1)$, $\hat{x}(t-2)$, ..., $\hat{x}(t-T)$, ..., $\hat{x}(t-n)$, kur $n \gg T+m$.

Pačias sumas $\sum_{j=0}^T j^i x(t-j)$, kur $i=0, 1, 2, \dots, m$, galime laikyti naujais – antriniais – egzogeniniais kintamaisiais $\hat{x}^{(i)}$, sudarytais iš pirminio egzogeninio kintamojo x reikšmių $\hat{x}(t-T)$, $\hat{x}(t-T+1)$, ..., $\hat{x}(t-2)$, $\hat{x}(t-1)$, $\hat{x}(t)$.

„Pririšdami“ antrinių kintamųjų $\hat{x}^{(i)}$ reikšmes $\sum_{j=0}^T j^i \hat{x}(t-j)$ laike prie momentų $\tilde{t} = t-T$, nuo kurių prasideda pirminio egzogeninio kintamojo x vėluojantis poveikis į endogeninį kintamąjį $y(t)$, t. y. priimdami, kad $\sum_{j=0}^T j^i \hat{x}(t-j) = \hat{\tilde{x}}^{(i)}(t-T) = \hat{\tilde{x}}^{(i)}(\tilde{t})$, mes

galime $y(t)$ išreikšti formule $y(t) = c_0 + \sum_{i=0}^m a_i \tilde{x}^{(i)}(\tilde{t}) + \delta(\tilde{t} + T)$, kurios parametrus c_0 , a_0 , $a_1, \dots, a_m$, atitinkamai pasirinkę T ir m reikšmes, jau galime statistiškai įvertinti, naudodamiesi turimais statistiniais duomenimis ir klasikiniu mažiausiųjų kvadratų metodu.

Perėjimas nuo pirminio egzogeninio kintamojo x prie daugiamačio antrinio egzogeninio kintamojo $(\tilde{x}^{(0)}, \tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(m)})$ davė dvigubą naudą: 1) kai parametrų T ir m reikšmės jau nustatytos (t. y. pasirinktos, išbandžius galimas hipotezes), tai vietoj $T+2$ nežinomų koeficientų $c_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_T$, reikšmių $\hat{c}_0, \hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_m$ belieka statistiškai įvertinti tik $m+2$ nežinomųjų koeficientų $c_0, a_0, a_1, \dots, a_m$ reikšmes $\hat{c}_0, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$; 2) vietoj to, kad tektų operuoti su stipriai tarpusavyje koreliuotomis kintamojo x reikšmėmis $\hat{x}(t), \hat{x}(t-1), \dots, \hat{x}(t-T)$, susiduriant su multikolinearumo problema, dabar tenka operuoti su silpnai koreliuotais tarpusavyje antriniais egzogeniniais kintamaisiais $\tilde{x}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{x}^{(1)}(\tilde{t}), \tilde{x}^{(2)}(\tilde{t}), \dots, \tilde{x}^{(m)}(\tilde{t})$, kuomet koeficientų $c_0, a_0, a_1, \dots, a_m$ reikšmių statistiniam įvertinimui jau galima taikyti standartinį mažiausiųjų kvadratų metodą.

Norint, kad koeficientų $c_0, a_0, a_1, \dots, a_m$ statistinius įverčius galėtume apskaičiuoti, naudodamiesi standartiniu programinės įrangos kompiuteriams paketu, pradinius statistinius duomenis – laiko eilutę $\hat{x}(t), \hat{x}(t-1), \hat{x}(t-2), \dots, \hat{x}(t-N)$ – tikslinga pertvarkyti į antrinių statistinių duomenų matricą $\tilde{X}$, turinčią $(n-T+1)$ eilučių ir $(m+2)$ stulpelių

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tilde{x}}^{(0)}(\tilde{t}) & \hat{\tilde{x}}^{(1)}(\tilde{t}) & \dots & \hat{\tilde{x}}^{(m)}(\tilde{t}) \\ 1 & \hat{\tilde{x}}^{(0)}(\tilde{t}-1) & \hat{\tilde{x}}^{(1)}(\tilde{t}-1) & \dots & \hat{\tilde{x}}^{(m)}(\tilde{t}-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \hat{\tilde{x}}^{(0)}(\tilde{t}-r) & \hat{\tilde{x}}^{(1)}(\tilde{t}-r) & \dots & \hat{\tilde{x}}^{(m)}(\tilde{t}-r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \hat{\tilde{x}}^{(0)}(\tilde{t}-n+T) & \hat{\tilde{x}}^{(1)}(\tilde{t}-n+T) & \dots & \hat{\tilde{x}}^{(m)}(\tilde{t}-n+T) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{kurioje } \tilde{t} = t - T, \dots, \quad \tilde{t} - r = t - T - r, \dots, \quad \tilde{t} - n + T = t - n, \quad \text{o} \quad \hat{\tilde{x}}(\tilde{t} - r) = \\ = \sum_{j=0}^T j^i \hat{x}(t - r - j). \end{aligned}$$

Apskaičiavus koeficientų a_i (kur $i=0, 1, \dots, m$) įverčius $\hat{a}_i$, naudojantis formulėmis $\theta_k = \sum_{i=0}^m k^i a_i$ gali būti apskaičiuoti ir koeficientų θ_k statistiniai įverčiai

$$\hat{\theta}_k = \sum_{i=0}^m k^i \hat{a}_i.$$

Skaitytojas, perskaitęs šio metodo, vadinamo **polinominės lago struktūros metodu** (o taip pat ir to metodo autorės Širli Almon vardu), aprašymą, gali pasakyti: „Taip, kai m ir T reikšmės yra žinomos, viskas aišku ir paprasta. Tačiau kaip nustatyti parametrų m ir T reikšmes?“

Parametro m reikšmė nustatoma samprotavimais ir bandymais. Praktikoje retai naudojamosi m reikšmėmis, didesnėmis už 3, nes dauguma funkcijų, aprašančių realius procesus, gana neblogai aproksimuojasi trečiojo (o neretai – ir antrojo) laipsnio **splainais**. Todėl parametro m reikšmės parinkimas nekelia didelių problemų: pakanka priimti $m=3$ ir jau galima pradėti modelio identifikavimo procedūrą. Tais atvejais, kai galima tikėtis, kad θ_k reikšmės, didėjant k , nuo pat pradžios monotoniškai mažėja, pakanka priimti $m=2$, tokiu būdu sumažinant skaičiavimų apimtį. Žinoma, jei kyla kokių nors abejonių dėl hipotezės apie koeficientų θ_k monotonišką mažėjimą teisingumo, tikslinga patikrinti tą hipotezę, apskaičiuojant koeficientų θ_k reikšmes dar ir atveju $m=3$, ir po to palyginant prognozių, išplaukiančių iš abiejų modelių, kokybę.

Šiek tiek sunkiau pasirinkti tinkamą parametro T reikšmę. Pačioje pradžioje, išgilinus į nagrinėjamus procesų $y(t)$ ir $x(t)$ „fiziką“ bei jų sąveikavimo „mechanizmus“, intuityviai bei eksperimentiniu (atitinkamų bandymų) būdu bandoma įvertinti, kiek ilgai egzogeninio kintamojo x reikšmės pokyčiai galėtų atsiliiepti endogeninio kintamojo y reikšmei, ir iškeliamos hipotezės, kurios galėtų būti teisingos. Po to, tikrinant eilinę hipotezę $T=T_1$, kur T_1 – koks tai teigiamas sveikas skaičius, naudojantis turimais statistiniais duomenimis apskaičiuojamos koreliacijos koeficiento $r_{y,x}(T_1)$, o dažnai dar ir koreliacijos koeficientų $r_{y,x}(T_1+1)$ ir $r_{y,x}(T_1-1)$ reikšmės. Jei $r_{y,x}(T_1+1)$ reikšmė yra maža, o $r_{y,x}(T_1)$ – dar pakankamai didelė, tai priimame, jog hipotezė $T=T_1$ verta tolesnio išbandymo, jei $r_{y,x}(T_1)$ – mažas dydis, o $r_{y,x}(T_1-1)$ reikšmė patvirtina reikšmingo koreliacinio ryšio egzistavimą, tai tolesniems bandymams paliekama hipotezė $T=T_1$. Kai ir $r_{y,x}(T_1-1)$ – mažas dydis, apskaičiuojama $r_{y,x}(T_1-2)$ reikšmė ir t. t. Kai ir $r_{y,x}(T_1+1)$ – pakankamai didelis dydis, apskaičiuojama $r_{y,x}(T_1+2)$ reikšmė ir t. t.

Tais atvejais, kai „fizinės“ procesų $y(t)$ ir $x(t)$ analizės metu jokių daugiau ar mažiau pagrįstų hipotezių apie galimą T reikšmę nekylo, apskaičiuojama koreliacinė funkcija $r_{y,x}(T)$, kur $T=1, 2, 3, \dots$ ir, analizuojant tos funkcijos grafiką, ieškoma tokia T reikšmė, po kurios koreliacinės funkcijos reikšmę jau galima laikyti tokia maža, kad būtų galima atmesti hipotezę apie koreliacinio ryšio tarp y ir vėluojančio lagon, didesniu už T , egzogeninio kintamojo x buvimą. Tokią T reikšmę ir priimame, sudarydami

modelį $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^T \theta_k x(t-k) + \delta(t)$ ir vėliau jį transformuodami į modelį

$y(t) = c_0 + \sum_{i=0}^m a_i \tilde{x}^{(i)}(\tilde{t}) + \delta(t)$ bei apskaičiuodami statistinius modelių koeficientų

įverčius. Tais atvejais, kai nėra tvirto įsitikinimo, jog T reikšmė pasirinkta teisingai, tikslinga sudaryti keletą modelių su skirtingomis T reikšmėmis ir po to palyginti tų modelių kokybę, prognozuojant naujas y reikšmes $y(t+1)$, $y(t+2)$, ... Modelių identifikavimui reikalinguose skaičiavimuose naudojantis kompiuteriu, tokie galimų variantų išbandymai tampa praktiškai realizuojami, ir todėl parametro T reikšmės parinkimo problema taip pat tampa praktiškai išsprendžiama.

Kai laiko eilutės $\hat{x}(t)$, $\hat{x}(t-1)$, $\hat{x}(t-2)$, ..., $\hat{x}(t-k)$, ..., $\hat{x}(t-N)$ ir $\hat{y}(t)$, $\hat{y}(t-1)$, $\hat{y}(t-2)$, ..., $\hat{y}(t-k)$, ..., $\hat{y}(t-N)$ yra pakankamai ilgos ir atrodo, jog turėtų būti teisinga hipotezė, kad $T=\infty$, tai vietoj ką tik nagrinėtos polinominės lągo struktūros tikslinga išbandyti **geometrinę lągo struktūrą**, vadinamą dar ir tą struktūrą pasiūliusio olandų ekonometriko **Koiko** (L. M. Koyck) vardu.

Nagrinėdamas formulę $y(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x(t-k) + \delta(t)$, Koikas priėmė natūralią prielaidą, kad koeficientų θ_k suma neturėtų būti begaliniai didelė, t. y. kad $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T \theta_k < \infty$, ir įsivedė baigtinio dydžio parametą $\beta = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T \theta_k$.

Įsivedęs normuotus svorinius koeficientus $\omega_k = \frac{\theta_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j} = \frac{\theta_k}{\beta}$, Koikas priėmė antrą

(taip pat gana natūralią) prielaidą, kad svoriniai koeficientai ω_k , būdami teigiamais skaičiais, turėtų eksponentiškai mažėti, didėjant k . Koeficiento ω_k priklausomybės nuo k aprašymui Koikas įsivedė antrąjį parametą λ , tenkinantį nelygybes $0 < \lambda < 1$, ir, teigdamas, kad ω_k turi būti proporcingas λ^k , gavo formulę $\omega_k = (1-\lambda)\lambda^k$. Koeficientas $1-\lambda$ šioje formulėje atsirado iš normavimo sąlygos $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k = 1$, nes $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$.

Sujungę abi tas hipotezes, gauname, jog $\theta_k = \beta(1-\lambda)\lambda^k$ ir, įstatę šias koeficientų θ_k išraiškas į $y(t)$ regresinę lygtį, išvedame formulę $y(t) = c_0 + \beta(1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x(t-k) + \delta(t)$, kuri turėtų galioti visoms t reikšmėms, tame tarpe ir momentui $t-1$.

Todėl $y(t-1) = c_0 + \beta(1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x(t-k-1) + \delta(t-1)$. Padauginę abi šios lygties puses iš λ ir atėmę gautas sandaugas iš pirmosios lygties atitinkamų pusių, randame, jog $y(t) - \lambda y(t-1) = c_0(1-\lambda) + \beta(1-\lambda) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} x(t-k-1) \right] + \delta(t) - \lambda \delta(t-1) = c_0(1-\lambda) + \beta(1-\lambda) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x(t-k) - \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r x(t-r) \right] + \delta(t) - \lambda \delta(t-1) = c_0(1-\lambda) +$