

Pereisime prie 1.14.12.3.1.2. skyrelio pavyzdžio, kurį nagrinėdami susidursime dar su viena aplinkybe – regresinio likučio  $\varepsilon(X)$  dispersijos nepastovumu, jos priklausomybe nuo regresijos funkcijos prediktorių vektoriaus  $X$  koordinatinių reikšmių.

**1.14.12.3.1.2. Vidutinių santaupų dydžio  $y_i$  statistinės priklausomybės nuo vidutinių pajamų dydžio  $x_i$  regresinė analizė ir tos priklausomybės ekonometrinio modelio sudarymas**

Išnagrinėsime paprastą pavyzdėlį, paimtą iš jau minėtosios knygos [182].

Tarkime, jog statistinio tyrimo metu buvo tirta namų ūkio šeimos nario vidutinių santaupų per mėnesį dydžio  $y_i$  priklausomybė nuo šeimos nario vidutinio uždarbio ir tuo tikslu buvo sudaryta atsitiktinė imtis po 10 šeimų iš keturių jų grupių  $j$ , charakterizuojamų skirtingomis vidutinėmis mėnesinėmis pajamomis  $x_j^{(0)}$ : po 80, 120, 160 ir 200 piniginių vienetų.

Statistinio tyrimo metu surinkti statistiniai duomenys ir pirminio jų apdorojimo rezultatai patalpinti į 120-ją lentelę.

120. lentelė

| Vieno žmogaus vidutinės pajamos $x_i$ (pinig. vnt. į mėnesį) | Vieno žmogaus vidutinės santaupos $y_i$ (pinig. vnt. į mėnesį)                                                                                                          | Vidutinės vieno žmogaus santaupos $\bar{y}(x_j^{(0)})$ grupėje $j$ (pinig. vnt. į mėnesį) | Vidutinio kvadratinio nuokrypio $\bar{s}(x_j^{(0)})$ ir variacijos koeficiento $\bar{v}_j$ statistiniai įverčiai                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                                            | 2                                                                                                                                                                       | 3                                                                                         | 4                                                                                                                                                                                                                                 |
| $x_1=x_2=\dots=x_9=x_{10}=x_1^{(0)}=80$                      | $y_1=15,2$<br>$y_2=10,7$<br>$y_3=18,5$<br>$y_4=14,9$<br>$y_5=24,1$<br>$y_6=10,3$<br>$y_7=14,2$<br>$y_8=31,0$<br>$y_9=20,4$<br>$y_{10}=20,0$                             | $\hat{\bar{y}}(x_1^{(0)})=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i\approx 17,9$                     | $\hat{\bar{s}}(x_1^{(0)})=\left[\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i-\hat{\bar{y}}(x_1^{(0)}))^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx 6,4$<br>$\hat{\bar{v}}(x_1^{(0)})=\frac{\hat{\bar{s}}(x_1^{(0)})}{\hat{\bar{y}}(x_1^{(0)})}\approx 0,36$   |
| $x_{11}=x_{12}=\dots=x_{19}=x_{20}=x_2^{(0)}=120$            | $y_{11}=70,1$<br>$y_{12}=35,0$<br>$y_{13}=43,0$<br>$y_{14}=29,0$<br>$y_{15}=17,0$<br>$y_{16}=48,2$<br>$y_{17}=18,9$<br>$y_{18}=53,0$<br>$y_{19}=39,4$<br>$y_{20}=46,2$  | $\hat{\bar{y}}(x_2^{(0)})=\frac{1}{10}\sum_{i=11}^{20}y_i\approx 40,0$                    | $\hat{\bar{s}}(x_2^{(0)})=\left[\frac{1}{9}\sum_{i=11}^{20}(y_i-\hat{\bar{y}}(x_2^{(0)}))^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx 16,0$<br>$\hat{\bar{v}}(x_2^{(0)})=\frac{\hat{\bar{s}}(x_2^{(0)})}{\hat{\bar{y}}(x_2^{(0)})}\approx 0,40$ |
| $x_{21}=x_{22}=\dots=x_{29}=x_{30}=x_3^{(0)}=160$            | $y_{21}=49,6$<br>$y_{22}=69,4$<br>$y_{23}=77,8$<br>$y_{24}=43,0$<br>$y_{25}=31,8$<br>$y_{26}=62,6$<br>$y_{27}=100,2$<br>$y_{28}=68,8$<br>$y_{29}=78,0$<br>$y_{30}=29,6$ | $\hat{\bar{y}}(x_3^{(0)})=\frac{1}{10}\sum_{i=21}^{30}y_i\approx 61,1$                    | $\hat{\bar{s}}(x_3^{(0)})=\left[\frac{1}{9}\sum_{i=21}^{30}(y_i-\hat{\bar{y}}(x_3^{(0)}))^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx 22,6$<br>$\hat{\bar{v}}(x_3^{(0)})=\frac{\hat{\bar{s}}(x_3^{(0)})}{\hat{\bar{y}}(x_3^{(0)})}\approx 0,37$ |

|                                                   |                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x_{31}=x_{32}=\dots=x_{39}=x_{40}=x_4^{(0)}=200$ | $y_{31}=125,5$<br>$y_{32}=88,3$<br>$y_{33}=62,0$<br>$y_{34}=58,8$<br>$y_{35}=84,0$<br>$y_{36}=79,0$<br>$y_{37}=95,5$<br>$y_{38}=120,8$<br>$y_{39}=98,1$<br>$y_{40}=29,7$ | $\hat{\bar{y}}(x_4^{(0)}) = \frac{1}{10} \sum_{i=31}^{40} y_i \approx 84,2$                                                                                                                                                   | $\hat{s}(x_4^{(0)}) = \left[ \frac{1}{9} \sum_{i=31}^{40} (y_i - \hat{\bar{y}}(x_4^{(0)}))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 28,9$<br><br>$\hat{v}(x_4^{(0)}) = \frac{\hat{s}(x_4^{(0)})}{\hat{\bar{y}}(x_4^{(0)})} \approx 0,34$ |
|                                                   |                                                                                                                                                                          | $\hat{\bar{y}} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} y_i \approx 50,8$<br><br>$\hat{\bar{y}} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \bar{y}(x_j^{(0)}) \approx$<br>$\approx \frac{17,9 + 40,0 + 61,1 + 84,2}{4} =$<br>$= \frac{203,2}{4} = 50,8$ | $\hat{s}_y^2 = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (y_i - \hat{\bar{y}})^2 \approx 979,17$<br><br>$\hat{v} = \frac{\hat{s}_y}{\hat{\bar{y}}} \approx \frac{31,3}{50,8} \approx 0,62$                                                   |

Kaip rodo 120-oje lentelėje gauti skaičiavimų rezultatai, **regresinio likučio  $\varepsilon(X)$  dispersija nėra pastovi, o reikšmingai priklauso nuo kintamojo  $x$** , būdama skirtinga, esant skirtingoms  $x_j^{(0)}$  reikšmėms. Tuo tarpu **klasikiniame tiesiniame regresijos modelyje**, kurio koeficientų apskaičiavimui ir buvo sukurta 1.14.12.3.1. skyrelyje aprašytoji ir dabar konkrečiais pavyzdžiais iliustruojama metodika, reikalaujama, kad regresijos likučiai tenkintų **homoskedastiškumo reikalavimą**, t. y., kad regresinių likučių  $\varepsilon_i(X(t))$  dispersijos  $D_\varepsilon$  būtų pastovūs dydžiai.

Ši mūsų nagrinėjamo regresinio modelio neatitikimą klasikinio tiesinio regresinio modelio standartams galima pašalinti, padalinus visus mūsų nagrinėjamą modelį sudarančius dėmenis iš  $\hat{s}(x_j^{(0)})$ . Tuomet vietoj regresinio likučio  $\varepsilon(X)$  tektų nagrinėti „normalizuotą“ regresinį likutį  $\tilde{\varepsilon}(X) = \varepsilon(X)/\hat{s}(x)$ , kuris jau tenkintų homoskedastiškumo reikalavimą. Galima būtų teigti, kad  $\tilde{\varepsilon}(X)$  – normaliai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys pasiskirstymo centrą taške  $\tilde{\varepsilon}(X)=0$  ir pastovų kvadratinį nuokrypį  $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ .

Iš to, kas čia pasakyta, išplaukia, jog šiuo atveju, apskaičiuojant regresinės funkcijos įvertinio  $\hat{y}(x) = f(x) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$  koeficientų reikšmes  $\hat{\theta}_0$  ir  $\hat{\theta}_1$ , reikia minimizuoti ne funkciją

$Q(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) = \sum_{i=0}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i)^2$ , o funkciją  $\Delta_n(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i}{\hat{s}(x_i)} \right)^2$ , t. y. spręsti uždavinį

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i}{\hat{s}(x_i)} \right)^2 \rightarrow \min_{\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1}.$$

$$\text{Spręsdami tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais } \hat{\theta}_0 \text{ ir } \hat{\theta}_1 \text{ sistemą } \begin{cases} \frac{\partial \Delta_n(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)}{\partial \hat{\theta}_0} = 0, \\ \frac{\partial \Delta_n(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)}{\partial \hat{\theta}_1} = 0, \end{cases},$$

$$\text{gauname sistemą } \begin{cases} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i}{\hat{s}^2(x_i)} \right] = 0, \\ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i) x_i}{\hat{s}^2(x_i)} \right] = 0, \end{cases}, \text{ kurią (skaičiavimų supaprastinimo dėlei pažymėję}$$

$$\hat{s}^{-2}(x_i) \text{ žymeniu } \lambda_i) \text{ pertvarkome į sistemą } \begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - \hat{\theta}_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i - \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i - \hat{\theta}_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = 0, \end{cases}.$$

$$\text{Ją išsprendę, gauname, jog } \hat{\theta}_1^{(MKM)} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right)}{\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)^2},$$

$$\hat{\theta}_0^{(MKM)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} - \hat{\theta}_1^{(MKM)} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \text{ Lygindami su 1.14.12.3.1. skyrelyje išvestomis formulėmis}$$

$$\hat{\theta}_1^{(MKM)} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad \hat{\theta}_0^{(MKM)} = \bar{y} - \hat{\theta}_1^{(MKM)} \bar{x}, \text{ galime pastebėti analogiją.}$$

Apskaičiuojant  $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$  ir  $\hat{\theta}_0^{(MKM)}$  reikšmes, šiuo atveju reikės atsižvelgti į tai, kad, kai  $i$  keičiasi nuo 1 iki 10, tai  $\hat{s}(x_i) \approx 6,4$ ; kai  $10 \leq i \leq 20$ , tai  $\hat{s}(x_i) \approx 16$ ; kai  $21 \leq i \leq 30$ , tai  $\hat{s}(x_i) \approx 22,6$ , kai  $31 \leq i \leq 40$ , tai  $\hat{s}(x_i) \approx 28,9$ . Todėl

$$\sum_{i=1}^{40} \lambda_i \approx \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{(6,4)^2} + \sum_{i=11}^{20} \frac{1}{16^2} + \sum_{i=21}^{30} \frac{1}{(22,6)^2} + \sum_{i=31}^{40} \frac{1}{(28,9)^2} = 10 \left( \frac{1}{(6,4)^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{(22,6)^2} + \frac{1}{(28,9)^2} \right).$$

$$\text{Analogiškai apskaičiuojame } \sum_{i=1}^{40} \lambda_i x_i \approx \frac{10 \cdot 80}{(6,4)^2} + \frac{10 \cdot 120}{16^2} + \frac{10 \cdot 160}{(22,6)^2} + \frac{10 \cdot 200}{(28,9)^2},$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{40} \lambda_i y_i &\approx \frac{1}{(6,4)^2} \sum_{i=1}^{10} y_i + \frac{1}{16^2} \sum_{i=11}^{20} y_i + \frac{1}{(22,6)^2} \sum_{i=21}^{30} y_i + \frac{1}{(28,9)^2} \sum_{i=31}^{40} y_i = \frac{10}{(6,4)^2} \bar{y}(x_1^{(0)}) + \frac{10}{16^2} \bar{y}(x_2^{(0)}) + \\ &+ \frac{10}{(22,6)^2} \bar{y}(x_3^{(0)}) + \frac{10}{(28,9)^2} \bar{y}(x_4^{(0)}) = 10 \left( \frac{17,9}{(6,4)^2} + \frac{40,0}{16^2} + \frac{61,1}{(22,6)^2} + \frac{84,2}{(28,9)^2} \right) \text{ ir t. t.} \end{aligned}$$

Įstatę apskaičiuotų sumų reikšmes į  $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$  ir  $\hat{\theta}_0^{(MKM)}$  formules, gausime, jog  $\hat{\theta}_1^{(MKM)} \approx 0,685$ ,  $\hat{\theta}_0^{(MKM)} \approx -40,360$ , iš kur išplaukia, jog tiesinės regresijos funkcijos įvertinys, vaizduojantis taupymo priklausomybę nuo pajamų yra  $\hat{y} = \hat{f}(x) \approx -40,360 + 0,685x$ .

Kad įvertintume gautos funkcijos adekvatumą, paskaičiuosime determinacijos koeficiento  $K_d(y, x)$  statistinį įvertį  $\hat{K}_d(y, x) = 1 - \frac{\hat{s}_e^2}{\hat{s}_y^2}$ , kur  $\hat{s}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (y_i - 50,8)^2 \approx 979,17$ , o

$$\hat{s}_e^2 = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^n 9 \hat{s}^2(x_j^{(0)}) \approx \frac{90}{40} (6,4^2 + 16^2 + 22,6^2 + 28,9^2) = \frac{9}{40} (40,96 + 256 + 510,76 + 835,21) = 369,96.$$

$$\text{Todėl } \hat{K}_d(y, x) = 1 - \frac{369,96}{979,17} \approx 1 - 0,377 = 0,623.$$

Gautas rezultatas rodo, kad egzistuoja teigiamas statistinis ryšys tarp tų sumų, kurias žmonės vidutiniškai uždirba, ir tų sumų, kurias jie vidutiniškai kas mėnesį sutaupo. Naudodamiesi šiuo ekonometrinio modeliu ir įvertinę namų ūkių pajamas, galime gauti trumpalaikę įplaukų dydžio ir bankus bei kapitalo investicijų prognozę.

Dabar pereisime prie tokio ekonometrinio modelio sudarymo pavyzdžio, kuriam būdinga tai, jog regresijos funkcija yra netiesinė, tačiau nesunkiai linearizuojama.

### 1.14.12.3.1.3. Regresijos funkcijos linearizavimo pavyzdys: Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos ir modernizuotos Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos parametrų statistinis įvertinimas

Kaip jau buvo minėta 1.14.12.1.2. skyrelyje, ekonomistas Duglasas ir matematikas Kobas, pasinaudodami statistiniais duomenimis apie JAV apdirbamąją pramonę už 1899 – 1922 m. ir nagrinėdami neoklasikinę gamybinę funkciją  $Y=cK^{\alpha}L^{\beta}$ , kur  $Y$  – gamybos indeksas,  $K$  – kapitalo indeksas,  $L$  – darbo (darbo jėgos) indeksas,  $c>0$ ,  $\alpha>0$ ,  $\beta>0$  – neapibrėžti koeficientai, nustatė, jog daugumoje atvejų  $\alpha+\beta\approx 1$ . Nuo to laiko neoklasikinę gamybinę funkciją, tenkinančią sąlygą  $\alpha+\beta=1$ , vadina Kobo ir Duglaso gamybine funkcija ir pateikia formoje  $Y=cK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ ,  $0<\alpha<1$ . Kobo ir Duglaso gamybinė funkcija yra populiariausia gamybinė funkcija ir turi eilę modifikacijų. Tarp jų – labiausiai paplitusi yra **modernizuota Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos forma**  $Y=ce^{\lambda t}K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ , kurioje daugiklio  $e^{\lambda t}$  parametro  $\lambda$  parinkimas leidžia atsižvelgti į **techninio progreso tempą gamyboje**.

Kai  $\lambda=0$ , tai iš modernizuotos Kobo ir Duglaso funkcijos gaunama standartinė jos forma. Todėl **formulę  $Y=ce^{\lambda t}K^{\alpha}L^{1-\alpha}$  galima laikyti bendrąja Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos formule**, o standartinę tos funkcijos formą – modernizuotos Kobo ir Duglaso funkcijos daliniu atveju.

Iš standartinės Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos, vaizduojanti gamybos apimtį  $Y$  priklausomybę nuo paaiškinančiųjų kintamųjų  $K$  ir  $L$ , gamybos technologijai nesikeičiant, ir modifikuotoji (modernizuotoji) Kobo ir Duglaso funkcija, turinti jau tris prediktorius ( $K$ ,  $L$  ir  $t$ ), nėra tiesinės funkcijos. Todėl jų parametrų  $c$ ,  $\alpha$  ir  $\lambda$  nustatymui negali būti taikomi mums jau žinomi klasikinės tiesinės regresijos analizės metodai. Tačiau tos funkcijos yra lengvai linearizuojamos. Lengvai linearizuojama ir neoklasikinė gamybinė funkcija.

Logaritmuodami neoklasikinę gamybinę funkciją  $Y=cK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ , gauname  $\ln Y = \ln c + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L$ . Įsivedę naujus kintamuosius  $\eta = \ln Y$ ,  $\xi^{(1)} = \ln K$  ir  $\xi^{(2)} = \ln L$ , gauname tiesinę neoklasikinės gamybinės funkcijos formą  $\eta(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = \ln c + \alpha \xi^{(1)} + (1-\alpha) \xi^{(2)}$ , kurioje  $\ln c = \theta_0$ ,  $\alpha = \theta_1$  ir  $1-\alpha = \theta_2$ . Dabar jau galime taikyti mums žinomus klasikinės tiesinės regresijos analizės metodus ir apskaičiuoti koeficientų  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  ir  $\theta_2$  skaitinius įverčius  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ . Lygindami tai su 1.14.12.3.1.1. ir 1.14.12.3.1.2. išnagrinėtais pavyzdžiais, matome, jog atsirado tik papildomas darbas: pradžioje statistinius duomenis ( $Y$ ,  $K$  ir  $L$  failų elementus) reikia logaritmuoti, o apskaičiavus  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{\theta}_1$  ir  $\hat{\theta}_2$ , koeficiento  $\theta_0$  įvertį  $\hat{\theta}_0$ , reikia antilogaritmuoti, kad rastume koeficiento  $c$  įvertį  $\hat{c}$ . Kadangi visi šie veiksmai – elementarūs ir gerai žinomi, tai konkrečių pavyzdžių su realiais statistiniais duomenimis čia nebeužrašysiu.

Standartinę Kobo ir Duglaso gamybinę funkciją, norint sumažinti skaičiavimų apimtį, prieš logaritmuojant, tikslinga pertvarkyti, dalinant abi lygybės  $Y=cK^{\alpha}L^{1-\alpha}$  puses iš  $L \neq 0$  ir įsivedant naujus kintamuosius  $y = \frac{Y}{L}$ ,  $k = \frac{K}{L}$ . Gauname lygybę  $y = ck^{\alpha}$ , kuri po logaritmovimo tampa lygybe  $\ln y = \ln c + \alpha \ln k$ . Pažymėję  $\ln y = \eta$ ,  $\ln c = \theta_0$ ,  $\alpha = \theta_1$  ir  $\ln k = \xi$ , gauname standartinę tiesinės regresijos funkciją  $\eta = \theta_0 + \theta_1 \xi$ .

Apskaičiuodami modernizuotos Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos  $Y=ce^{\lambda t}K^{\alpha}L^{1-\alpha}$  parametrų  $c$ ,  $\lambda$  ir  $\alpha$  statistinius įverčius  $\hat{c}$ ,  $\hat{\lambda}$  ir  $\hat{\alpha}$ , galime pasiegti analogiškai: pradžioje pereiname prie formulės  $y=ce^{\lambda t}k^{\alpha}$ , po to – prie formulės  $\ln y = \ln c + \lambda t + \alpha \ln k$ , o dar po to – prie formulės  $\eta = \theta_0 + \theta_1 \xi_1 + \theta_2 \xi_2$ , kurioje  $\eta = \ln y$ ,  $\theta_0 = \ln c$ ,  $\theta_1 = \lambda$ ,  $\xi_1 = t$ ,  $\theta_2 = \alpha$ ,  $\xi_2 = \ln k$ . Taigi, ir šiuo atveju Kobo ir Duglaso funkcijos ekonometrinio modelio sudarymą galima suvesti į standartinio klasikinės tiesinės regresinės analizės uždavinio sprendimą.

Funkcijų logaritmovimas – ne vienintelis netiesinių regresijos funkcijų linearizavimo metodas. Apžvelgsime kai kuriuos dažniausiai taikomus kitus netiesinių regresijos funkcijų linearizavimo metodus.

#### 1.14.12.3.1.4. Elementarių netiesinių regresijos funkcijų linearizavimo metodai: Bokso ir Kokso metodas

Elementarių netiesinių regresijos funkcijų linearizavimo metodų esmė – perėjimas prie atitinkamų naujų kintamųjų. Tokių kintamųjų pakeitimo metodą mes jau taikėme, linearizuodami Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijas ir bendrąją neoklasikinę gamybinę funkciją.

Kai regresijos lygtis  $y=f(X)+\varepsilon(X)$  turi rodiklinę formą  $y = e^{\theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \theta_2 x^{(2)} + \dots + \theta_p x^{(p)} + \varepsilon(X)}$  arba  $y = a^{\theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \theta_2 x^{(2)} + \dots + \theta_p x^{(p)} + \varepsilon(X)}$ , tai pakanka pakeisti kintamąjį  $y$  nauju kintamuoju  $\tilde{y} = \ln y$  arba

$\tilde{y} = \ln y / \ln a$ , kad gautume tiesinę regresijos lygtį  $\tilde{y} = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \theta_2 x^{(2)} + \dots + \theta_p x^{(p)} + \varepsilon(X)$ , kurioje  $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ .

Kai regresijos lygtis turi multiplikacinę laipsninę formą  $y = \theta_0 (x^{(1)})^{\theta_1} \cdot (x^{(2)})^{\theta_2} \cdot \dots \cdot (x^{(p)})^{\theta_p} \cdot e^\varepsilon$ , kaip jau mūsų nagrinėtųjų neoklasikinių gamybinių funkcijų atveju, tai, perėję prie naujų kintamųjų  $\tilde{y} = \ln y$ ,  $\tilde{x}^{(1)} = \ln x^{(1)}$ ,  $\tilde{x}^{(2)} = \ln x^{(2)}$ , ...,  $\tilde{x}^{(p)} = \ln x^{(p)}$ , gauname tiesinę regresijos lygtį  $\tilde{y} = \tilde{\theta}_0 + \theta_1 \tilde{x}^{(1)} + \theta_2 \tilde{x}^{(2)} + \dots + \theta_p \tilde{x}^{(p)} + \varepsilon$ , kurioje  $\tilde{\theta}_0 = \ln \theta_0$ .

Kai regresijos lygtis turi hiperbolinę formą  $y = \theta_0 + \theta_1 \frac{1}{x} + \varepsilon$ , tai pakanka pakeisti kintamąjį  $x$ , įvedant  $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ , kad gautume tiesinę regresijos lygtį  $y = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon$ .

Kai regresijos lygtis yra  $y = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon}$ , tai, pakeitę kintamąjį  $y$  į  $\tilde{y} = \frac{1}{y}$ , gauname tiesinės regresijos lygtį  $\tilde{y} = \theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon$ .

Kai regresijos lygtis yra  $y = \frac{x}{\theta_0 x + \theta_1 + x\varepsilon}$ , tai, pakeitę kintamuosius  $y$  ir  $x$  į  $\tilde{y} = \frac{1}{y}$  ir  $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ , gausime tiesinę lygtį  $\tilde{y} = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon$ .

Kai  $y = \theta_0 e^{\frac{\theta_1 + \varepsilon}{x}}$ , tai, pakeitę kintamąjį  $y$  į  $\tilde{y} = \ln y$  ir kintamąjį  $x$  į  $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ , gauname tiesinę regresijos lygtį  $\tilde{y} = \tilde{\theta}_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon$ , kurioje  $\tilde{\theta}_0 = \ln \theta_0$ .

Kai  $y = \theta_0 a^{\frac{\theta_1 + \varepsilon}{x}}$ , tai, pakeitę kintamąjį  $y$  į  $\tilde{y} = \ln y$  ir kintamąjį  $x$  į  $\tilde{x} = \frac{\ln a}{x}$ , gauname  $\tilde{y} = \tilde{\theta}_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon$ , kur  $\tilde{\theta}_0 = \ln \theta_0$ .

Kai regresijos lygtis priklauso logistinių kreivių šeimai, t. y., kai  $y = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 e^{-x} + \varepsilon}$ , tai, pakeitę kintamuosius  $y$  į  $\tilde{y} = \frac{1}{y}$  ir  $x$  į  $\tilde{x} = \frac{1}{e^x}$ , gauname  $\tilde{y} = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon$ , t. y. tiesinę regresijos lygtį.

Kai  $y = \theta_0 + \theta_1 \ln x + \varepsilon$ , tai išvedę naują kintamąjį  $\tilde{x} = \ln x$ , gauname tiesinę regresijos lygtį  $y = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x} + \varepsilon$ .

Anglų statistikai G. Boksas ir D. Koksas pasiūlė **linearizavimo formules**  $\tilde{y}_i(\lambda) = \frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda}$ ,  $\tilde{x}_i^{(j)}(\lambda) = \frac{(x_i^{(j)})^\lambda - 1}{\lambda}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, p$ , leidžiančias šiek tiek unifikuoti ir formalizuoti linearizavimo procedūrą, parenkant tokią realią (teigiamą ar neigiamą) parametro  $\lambda$  reikšmę  $\lambda^*$ , kad viena iš regresinės lygties formų: 1)  $\tilde{y}_i(\lambda^*) = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x}_i^{(1)}(\lambda^*) + \theta_2 \tilde{x}_i^{(2)}(\lambda^*) + \dots + \theta_p \tilde{x}_i^{(p)}(\lambda^*) + \varepsilon_i^*$  arba 2)  $\tilde{y}_i(\lambda^*) = \theta_0 + \theta_1 x_i^{(1)} + \theta_2 x_i^{(2)} + \dots + \theta_p x_i^{(p)} + \varepsilon_i$  bet kurioms  $i=1, 2, \dots, n$  reikšmėms tenkintų visus reikalavimus, keliamus normaliam klasikiniam tiesiniam regresiniam modeliui.

**Bokso ir Kokso formulės**  $\tilde{y}_i(\lambda) = \frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda}$  ir  $\tilde{x}_i^{(j)}(\lambda) = \frac{(x_i^{(j)})^\lambda - 1}{\lambda}$  taikomos tais atvejais, kai kintamieji  $y_i$  ir  $x_i^{(j)}$  gali būti tik teigiamais dydžiais. Kai ši sąlyga netenkinama, tai išvedamos tokios **postūmio konstantos**  $c^{(0)}, c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(p)}$ , kad dydžiai  $y_i + c^{(0)}$  ir  $x_i^{(j)} + c^{(j)}$ , kur  $j=1, 2, \dots, p$ , būtų teigiami prie visų  $i=1, 2, \dots, n$ . Tuomet taikomos **apibendrintos Bokso ir Kokso transformacijos formulės**  $\tilde{y}_i(\lambda) = \frac{(y_i + c^{(0)})^\lambda - 1}{\lambda}$ ,  $\tilde{x}_i^{(j)}(\lambda) = \frac{(x_i^{(j)} + c^{(j)})^\lambda - 1}{\lambda}$ .

Bokso ir Kokso transformacijų taikymo diapazonas yra gana platus. Kai  $\lambda^*=1$  ir  $c^{(0)}=c^{(1)}=\dots=c^{(p)}=1$ , Bokso ir Kokso transformacija nieko nekeičia, t. y. tuomet ji atitinka tą atvejį, kai pradinė regresijos lygtis jau yra tiesinė. Kai  $\lambda^*=-1$  ir  $c^{(0)}=c^{(1)}=\dots=c^{(p)}=0$ , tai  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\tilde{y}_i(-1)=1-\frac{1}{y_i}$  ir

$\tilde{x}_i^{(j)}(\lambda^*)=\tilde{x}_i^{(j)}(-1)=1-\frac{1}{x_i^{(j)}}$ . Tuomet formulę  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}+\theta_2x_i^{(2)}+\dots+\theta_px_i^{(p)}+\varepsilon_i$  galima

taikyti tuo atveju, kai  $y_i=\frac{1}{a_0+a_1x_i^{(1)}+a_2x_i^{(2)}+\dots+a_px_i^{(p)}+\varepsilon_i}$ , nes tuomet  $\frac{1}{y_i}=a_0+a_1x_i^{(1)}+$

$+a_2x_i^{(2)}+\dots+a_px_i^{(p)}+\varepsilon_i$  ir  $\tilde{y}_i(-1)=1-\frac{1}{y_i}=1-a_0-a_1x_i^{(1)}-\dots-a_px_i^{(p)}-\varepsilon_i$  – tiesinė regresijos lygtis,

kurioje  $\theta_0=1-a_0$ ,  $\theta_1=-a_1$ ,  $\theta_2=-a_2, \dots$ ,  $\theta_p=-a_p$ . Regresinio likučio  $\varepsilon_i$ , esančio atsitiktiniu dydžiui, ženklas šiuo atveju neturi reikšmės, nes nuo to nei  $E\varepsilon=0$ , nei  $D_\varepsilon=\sigma_\varepsilon^2$  nesikeičia. Formulę  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\theta_0+\theta_1\tilde{x}_i^{(1)}(\lambda^*)+\dots+\theta_p\tilde{x}_i^{(p)}(\lambda^*)+\varepsilon_i$  galima taikyti tuo atveju, kai

$y_i=\frac{1}{a_0+\frac{a_1}{x_i^{(1)}}+\frac{a_2}{x_i^{(2)}}+\dots+\frac{a_p}{x_i^{(p)}}+\varepsilon_i}$ , nes tuomet  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\tilde{y}_i(-1)=1-\frac{1}{y_i}=1-a_0-\frac{a_1}{x_i^{(1)}}-\frac{a_2}{x_i^{(2)}}-$

$-\dots-\frac{a_p}{x_i^{(p)}}-\varepsilon_i=1-a_0+a_1\left(1-\frac{1}{x_i^{(1)}}-1\right)+a_2\left(1-\frac{1}{x_i^{(2)}}-1\right)+\dots+a_p\left(1-\frac{1}{x_i^{(p)}}-1\right)-\varepsilon_i=1-a_0-a_1-a_2-$

$-\dots-a_p+a_1\tilde{x}_i^{(1)}(-1)+a_2\tilde{x}_i^{(2)}(-1)+\dots+a_p\tilde{x}_i^{(p)}(-1)-\varepsilon_i$ , iš kur išplaukia, jog  $\theta_0=1-\sum_{j=0}^p a_j$ ,  $\theta_j=a_j$ ,

$j=\overline{1,p}$ . Kai  $\lambda=0$ , tai  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\tilde{y}_i(0)=\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y_i^\lambda - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda \ln y_i} - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\lambda \ln y_i}{1!} + \frac{(\lambda \ln y_i)^2}{2!} + \dots - 1}{\lambda} =$   
 $= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \ln y_i + \lambda \frac{(\ln y_i)^2}{2!} + \lambda^2 \frac{(\ln y_i)^3}{3!} + \dots \right) = \ln y_i$ . Analogiškai gauname, kad  $\tilde{x}_i^{(j)}(\lambda^*)=\tilde{x}_i^{(j)}(0)=\ln x_i^{(j)}$ .

Todėl šiuo atveju formulė  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}+\theta_2x_i^{(2)}+\dots+\theta_px_i^{(p)}+\varepsilon_i$  taikoma tuomet, kai  $y_i=e^{\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}+\theta_2x_i^{(2)}+\dots+\theta_px_i^{(p)}+\varepsilon_i}$  (arba, kai  $y_i=a^{\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}+\theta_2x_i^{(2)}+\dots+\theta_px_i^{(p)}+\varepsilon_i}$ ), o formulė  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}(\lambda^*)+\dots+\theta_px_i^{(p)}(\lambda^*)+\varepsilon_i$  taikoma tada, kai regresijos lygtis yra multiplikacinė, t. y., kai  $y_i=a_0[x_i^{(1)}]^{a_1} \times [x_i^{(2)}]^{a_2} \times \dots \times [x_i^{(p)}]^{a_p} \times e^{\varepsilon_i}$ .

Kai regresijos lygtis yra  $y_i=\sqrt{a_0+a_1x_i^{(1)}+\dots+a_px_i^{(p)}+\varepsilon_i}$ , tai parametrai  $\lambda$  tikslinga parinkti reikšmę  $\lambda^*=2$  ir taikyti formulę  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}+\theta_2x_i^{(2)}+\dots+\theta_px_i^{(p)}+\varepsilon_i$ , nes tuomet

$\tilde{y}_i(\lambda^*)=\tilde{y}_i(2)=\frac{(y_i)^2-1}{2}=\frac{a_0-1}{2}+\frac{a_1}{2}x_i^{(1)}+\frac{a_2}{2}x_i^{(2)}+\dots+\frac{a_p}{2}x_i^{(p)}+\frac{\varepsilon_i}{2}$ , iš kur išplaukia, jog

$\theta_0=\frac{a_0-1}{2}$ ,  $\theta_j=\frac{a_j}{2}$ ,  $j=1,2,\dots,p$ .

Kai  $y_i=(a_0+a_1x_i^{(1)}+a_2x_i^{(2)}+\dots+a_px_i^{(p)}+\varepsilon_i)^2$ , tai parametrai  $\lambda$  tikslinga parinkti reikšmę  $\lambda^*=\frac{1}{2}$  ir taikyti formulę  $\tilde{y}_i(\lambda^*)=\theta_0+\theta_1x_i^{(1)}+\theta_2x_i^{(2)}+\dots+\theta_px_i^{(p)}+\varepsilon_i$ , nes tuomet  $\tilde{y}(\lambda^*)=$

$=\tilde{y}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(y_i)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}}=2(a_0+a_1x_i^{(1)}+\dots+a_px_i^{(p)}+\varepsilon_i-1)$  iš kur išplaukia, jog  $\theta_0=2(a_0-1)$ ,  $\theta_j=2a_j$ ,

$j=1,2,\dots,p$ .

Tačiau, kai ekonometrinio modelio specifikavimo uždavinys jau išspręstas, t. y. kai regresijos funkcijos forma jau žinoma ir belieka išspręsti tik identifikavimo uždavinį, taikyti Bokso ir Kokso metodą regresinės lygties linearizavimui nėra prasmės, nes galima pasinaudoti ir paprastesnėmis linearizavimo formulėmis.

Pavyzdžiui, kai regresijos funkcija yra  $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sqrt[\beta]{a_0 + a_1(x^{(1)})^\beta + a_2(x^{(2)})^\beta}$ , kur  $\beta$  – bet koks tiksliai žinomas skaičius, nelygus 0, tai vietoj to, kad šios funkcijos linearizavimui taikytume Bokso ir Kokso transformaciją, pasirinkdami  $\lambda^* = \beta$  ir formulę  $\tilde{y}_i(\lambda^*) = \theta_0 + \theta_1 \tilde{x}_i^{(1)}(\lambda^*) + \dots + \theta_p \tilde{x}_i^{(p)}(\lambda^*) + \varepsilon_i$ , kur  $\tilde{y}(\lambda^*) = \tilde{y}(\beta) = \frac{y^\beta - 1}{\beta}$ ,  $\tilde{x}^{(1)}(\lambda^*) = \tilde{x}^{(1)}(\beta) = \frac{(x^{(1)})^\beta - 1}{\beta}$  ir  $\tilde{x}^{(2)}(\lambda^*) = \frac{(x^{(2)})^\beta - 1}{\beta}$ , žymiai paprasčiau yra pasirinkti transformaciją  $\tilde{y} = y^\beta$ ,  $\tilde{x}^{(1)} = (x^{(1)})^\beta$ ,  $\tilde{x}^{(2)} = (x^{(2)})^\beta$ .

Toks metodas yra net universalesnis, nes jį galima taikyti ir regresijos funkcijai  $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sqrt[\alpha]{a_0 + a_1(x^{(1)})^{\beta_1} + a_2(x^{(2)})^{\beta_2}}$ , kai  $\alpha \neq \beta_1 \neq \beta_2$ , išivedant kintamuosius  $\tilde{y} = (y)^\alpha$ ,  $\tilde{x}^{(1)} = (x^{(1)})^{\beta_1}$  ir  $\tilde{x}^{(2)} = (x^{(2)})^{\beta_2}$ .

Taigi, tuo atveju, kai ekonominis (ekonometrinis) modelis jau specifiкуotas, naudotis Bokso ir Kokso transformacija nėra reikalo ir prasmės. **Ir čia ką tik pateikti ir nagrinėti pavyzdžiai – ne Bokso ir Kokso transformacijos taikymo pavyzdžiai, linearizuojant regresijos lygtis, o pavyzdžiai, iliustruojantys teiginį, kad parametrai  $\lambda$  gali turėti įvairias realias reikšmes ir kad Bokso ir Kokso transformacijos taikymo diapazonas gali būti gana platus.**

**Bokso ir Kokso metodo taikymas turi prasmę ir yra naudingas, kai ekonominio modelio specifikacijos uždavinys dar nėra pilnai išspręstas**, o turima ekonominė informacija leidžia iškelti hipotezę, kad regresijos funkcija gali būti aproksimuota formule  $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}) =$

$$= \left[ a_0 + a_1(x^{(1)})^\beta + a_2(x^{(2)})^\beta + \dots + a_p(x^{(p)})^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}, \text{ kurioje } \beta \text{ reikšmė nėra tiksliai žinoma.}$$

Tuomet, norėdami surasti parametro  $\beta$  ir koeficientų  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  reikšmių statistinius įverčius  $\hat{\beta}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$ , minimizuojančius funkcijos  $Q(\lambda, a_0, a_1, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - f(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)}) \right]^2$  reikšmę, galime pasinaudoti Bokso ir Kokso transformacija ir

$$\text{minimizuoti funkciją } Q(a_0, a_1, \dots, a_p, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(y_i)^\lambda - 1}{\lambda} - a_0 - a_1 \frac{(x_i^{(1)})^\lambda - 1}{\lambda} - a_2 \frac{(x_i^{(2)})^\lambda - 1}{\lambda} - \dots - a_p \frac{(x_i^{(p)})^\lambda - 1}{\lambda} \right]^2, \text{ parinkdami atitinkamas koeficientų } a_0, a_1, a_2, \dots, a_p \text{ ir parametro } \lambda \text{ reikšmes.}$$

Ši funkcija yra tiesinė koeficientų  $a_0, a_1, \dots, a_p$  atžvilgiu ir netiesinė parametro  $\lambda$  atžvilgiu.

Fiksuodami to parametro reikšmes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ , mes galime, naudodamiesi jau mums žinomu mažiausiųjų kvadratų metodu, minimizuoti tą funkciją, surasdami kiekvienai  $\lambda_k$  reikšmei atitinkamą minimalią tos funkcijos reikšmę. Lygindami tas minimalias funkcijos  $Q(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, \lambda)$  reikšmes, mes galime parinkti tokią parametro  $\lambda$  reikšmę  $\lambda^*$ , kad minėtosios funkcijos reikšmė būtų pati mažiausia. Tą  $\lambda$  reikšmę  $\lambda^*$  atitinkančios koeficientų  $a_0, a_1, \dots, a_p$  reikšmės  $\hat{a}_0^*, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_p^*$  ir bus ieškomieji regresijos funkcijos įverčiai, o  $\lambda^*$  – parametro  $\beta$  įvertis.

Visa ši procedūra gana sudėtinga ir reikalauja gana daug gana sudėtingų skaičiavimų, todėl ji tampa praktiškai realizuojama, tik naudojantis kompiuteriu.

Plačiau ir detaliau apie Bokso ir Kokso metodo taikymą skaitytojas gali sužinoti jau minėtoje knygoje [182]. Ten jis ras ir šio metodo konkretaus taikymo rezultatų pavyzdį finansų ekonomikoje, specifikuojant ir identifikuojant **pinigų paklausos funkciją**.

Tačiau Bokso ir Kokso metodas tinka tik funkcijų  $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}) = \left[ a_0 + a_1(x^{(1)})^\beta + \dots + a_p(x^{(p)})^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}$  linearizavimui, kai visų kintamųjų laipsniai yra vienodi. Bet neretai

predikatoriai  $x^{(j)}$ , (kur  $j=1, 2, \dots, p$ ) įeina į regresijos funkcijos formulę ne tik su skirtingais koeficientais, bet ir su skirtingais laipsniais. Todėl, nustatant tokio ekonominio modelio parametrų įverčius, kai laipsnių rodiklių reikšmės nėra žinomos, jau nebepavyksta regresijos funkciją linearizuoti ir tenka naudotis gana sudėtingais **netiesinių funkcijų minimizavimo metodais**. Tiesa, ir šiuo atveju būtų galima įvykdyti regresijos funkcijos linearizavimą, naudojantis Bokso ir Kokso formulėmis su skirtingais parametrais  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  kintamiesiems  $y, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ , tačiau tuomet, ieškant funkcijos  $Q(a_1, a_2, \dots, a_p, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$  minimumo, tektų perrinkti tiek daug vektoriaus  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$  reikšmių variantų, kad tai pareikalautų tiek kompiuterinio laiko, jog labiau apsimokėtų naudotis sudėtingais netiesinio optimizavimo metodais.

Prie tokių metodų taikymo pavyzdžių ir pereisime.

#### 1.14.12.3.1.5. Gamybinės funkcijos CES parametrų statistinis įvertinimas netiesiniu mažiausiųjų kvadratų metodu

**Gamybinė funkcija CES (Constant Elasticity of Substitution)** – tai neoklasikinės gamybinės funkcijos modifikacija, kuriai būdingas pastovus pakeitimo elastingumas.

**Pakeitimo elastingumu** vadinamas vieno resurso pakeitimo kitu resursu galimybės matas. Gamybinės funkcijos  $Y=F(X_1, X_2)$  pakeitimo elastingumas geometriškai gali būti charakterizuojamas kaip izokvantės  $F(X_1, X_2)=\text{const}$  kreivumas, kurį homogeninėms gamybinėms funkcijoms  $Y=F(K, L)$

galima apskaičiuoti, naudojantis šia **pakeitimo elastingumo formule**  $E = \frac{\frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L}}{F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \cdot \partial L}}$ .

$$\begin{aligned} &\text{Apskaičiuosime pakeitimo elastingumą Kobo ir Duglaso funkcijai } Y=cK^\alpha L^{1-\alpha}: 1) \frac{\partial F}{\partial K} = \\ &= c\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}; 2) \frac{\partial F}{\partial L} = c(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha}; 3) \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} = c^2\alpha(1-\alpha)K^{2\alpha-1}L^{1-2\alpha}; 4) \frac{\partial^2 F}{\partial K \cdot \partial L} = \frac{\partial}{\partial K} \frac{\partial F}{\partial L} = \\ &= c\alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha}; 5) F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \cdot \partial L} = c^2\alpha(1-\alpha)K^{2\alpha-1}L^{1-2\alpha}; 6) \frac{\frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L}}{F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \cdot \partial L}} = 1. \end{aligned}$$

Nesunku įsitikinti, kad tokią pačią (lygią 1) pakeitimo elastingumo reikšmę gautume ir **modernizuotai Kobo ir Duglaso gamybinei funkcijai**, atsižvelgiančiai į techninio progreso tempą gamyboje. Taigi, Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos priklauso **gamybinių funkcijų, turinčių pastovų pakeitimo elastingumą, klasei ir pasižymi tuo, kad tas elastingumas yra lygus 1**. Tai klasei priklauso ir visos neoklasikinės funkcijos  $Y=cK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ .

CES tipo gamybinės funkcijos skiriasi nuo Kobo ir Duglaso gamybinių funkcijų tuo, kad **CES pakeitimo elastingumas, būdamas pastovus duotajai CES gamybinei funkcijai, gali būti keičiamas, keičiant jos parametą  $\rho$** . Iš to galima padaryti išvadą, kad CES tipo gamybinės funkcijos, priklausydamos specialiai neoklasikinių gamybinių funkcijų klasei, yra bendresnės (lankstesnės) už Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijas ir paprastos neoklasikinės funkcijas.

CES tipo gamybinės funkcijos formulė yra  $Y = ae^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$ , kurioje parametrai  $a, \lambda, \delta$  ir  $\rho$  yra konstantos. Jų reikšmės konkrečiai gamybai reikia nustatyti, atitinkamai apdorojant statistinę informaciją apie tą gamybą.

Rasime CES tipo gamybinės funkcijos resursų  $K$  ir  $L$  pakeitimo elastingumą  $E$ :

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial F}{\partial K} &= ae^{\lambda t} \left( -\frac{1}{\rho} \right) [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1} \delta(-\rho)K^{-\rho-1} = ae^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \delta K^{-(\rho+1)}; \\ 2) \frac{\partial F}{\partial L} &= ae^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} (1-\delta)L^{-(\rho+1)}; 3) \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} = a^2 e^{2\lambda t} [\delta K^{-\rho} + \\ &+ (1-\delta)L^{-\rho}]^{2\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} \delta(1-\delta)(K \cdot L)^{-(\rho+1)}; 4) \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} = \frac{\partial}{\partial K} \frac{\partial F}{\partial L} = ae^{\lambda t} \left( -\frac{1}{\rho} - 1 \right) [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\left(\frac{1}{\rho}+2\right)} \times \end{aligned}$$

$$\times \delta(1-\delta)L^{-(\rho+1)}(-\rho)K^{-\rho-1} = ae^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\left(\frac{1}{\rho}+2\right)} \cdot (1+\rho)\delta(1-\delta)(K \cdot L)^{-(\rho+1)}; \quad 5) \quad F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} =$$

$$= a^2 e^{2\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{2\left(\frac{1}{\rho}+1\right)} (1+\rho)\delta(1-\delta)(K \cdot L)^{-(\rho+1)}; \quad 6) \quad E = \frac{\frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L}}{F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}} = \frac{1}{1+\rho} = \text{const}.$$

CES funkciją, priklausančią nuo trijų kintamųjų  $t$ ,  $K$  ir  $L$ , linearizuoti 1.14.12.3.1.3. ir 1.14.12.3.1.4. skyreliuose aprašytais metodais jau nebepavyksta.

Tiesa, ją būtų galima pabandyti linearizuoti, padalinant abi jos puses iš  $L$  ir pereinant prie dviejų argumentų  $t$  ir  $k = \frac{K}{L}$  funkcijos  $y = \frac{Y}{L} = ae^{\lambda t} [\delta k^{-\rho} + (1-\delta)]^{\frac{1}{\rho}}$ , o po to logaritmuojant ir pakeičiant  $\ln y$  į  $\eta$ ,  $t$  – į  $\xi^{(1)}$  ir  $\delta k^{-\rho} + (1-\delta)$  į  $\xi^{(2)}$ . Tačiau tokiu linearizavimo praktiškai pasinaudoti neįmanoma, nes, nežinodami  $\delta$  ir  $\rho$  reikšmių, mes negalėsime pereiti nuo surinktų statistinių duomenų apie kintamojo  $k = \frac{K}{L}$  reikšmes prie statistinių duomenų apie kintamojo  $\xi^{(2)}$  reikšmes.

Todėl tenka atsisakyti CES funkcijos linearizavimo idėjos ir naudotis **netiesiniu mažiausiųjų kvadratų metodu**, t. y. netiesiniu programavimu, minimizuojant funkciją  $Q(a, \lambda, \delta, \rho) =$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - ae^{\lambda t_i} [\delta K_i^{-\rho} + (1-\delta)L_i^{-\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \right\}^2. \quad \text{Šis uždavinys susiveda į netiesinių lygčių sistemos} \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \rho} = 0 \end{cases}$$

sprendimą koku nors artutiniu metodu, pavyzdžiui, **Markvardto metodu**. Tai specialus netiesinio programavimo metodas, su kuriuo studentai supažindinami optimizavimo metodų kurse, todėl čia aš jo jau nebeaprašinėsiu. Knygoje [48] žingeidesnieji skaitytojai gali rasti ne tik Markvardto metodo aprašymą, bet ir konkretų jo taikymo pavyzdį bei programą kompiuteriui, realizuojančią Markvardto algoritmą. Studentai taip pat gali pasinaudoti Vilniaus universiteto Matematikos statistikos katedroje saugomu studentės N. Demeško diplominiu darbu „Gamybinių funkcijų analizė“, prie kurio pridėtas diskelis su įvairių gamybinių funkcijų (tame tarpe ir CES), parametrų statistinio vertinimo programomis ir tų programų konkretaus taikymo pavyzdžiais.

Trumpai apžvelgę regresinės analizės taikymą ekonometrikoje, pereisime prie ekonometrijos antrosios sudėtinės dalies – laiko eilučių analizės.

### 1.14.12.3.2. Laiko eilučių analizė

**Laiko eilutė** šiame skyrelyje vadinama kokio nors **atsitiktinio dydžio  $\xi$ , charakterizuojančio kokį nors stochastinį procesą  $X(t)$ , statistinių stebėjimų (matavimų), atliktų momentais  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$  ( $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N$ ), rezultatų seka  $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_N)$** . Gana dažnai laiko eilutę  $X(t)$  žymėsime dar paprasčiau, tiesiog,  $x(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  ir pan.

Statistinę laiko eilutę sudarantys elementai, būdami atsitiktinio dydžio reikšmėmis, turi daug bendrų savybių su mūsų jau nagrinėtų atsitiktinių imčių elementais. Todėl jų apibūdinimui gali būti taikomos analogiškos sąvokos, o jų matematiniam apdorojimui – analogiški metodai.

Tačiau laiko eilutės charakterizuoja ne objektų aibes kokiu nors momentu, o atsitiktinius procesus, sistemų raidos trajektorijas  $x(t)$ . todėl jos, turėdamos daug bendrų savybių vis dėl to skiriasi nuo 1.14.12.3.1. skyrelyje nagrinėtų atsitiktinių imčių (pavyzdžiui nuo statistinių duomenų matricių  $X$  ir  $Y$ , kuriomis naudojamos apskaičiuodami regresijos funkcijos koeficientus). Ir skiriasi visų pirma tuo, kad:

1) atsitiktinių imčių elementai, charakterizuojantys kokį tai atsitiktinį dydį (kokio tai atsitiktinio reiškinio, vykusio įvairiose vietose, kokį tai vieną ir tą patį požymį ar kelis požymius), **laikomi (ir turėtų būti) statistiškai nepriklausomais**, kai tuo tarpu **laiko eilučių elementai dažniausiai nėra statistiškai nepriklausomi**, kadangi tai, kas vyksta dabar, gali priklausyti ir nuo to, kas buvo prieš tai; 2) atsitiktinių imčių elementai, charakterizuojantys kokį nors vieną požymį, **laikomi (ir turėtų būti) priklausančiais vienam ir tam pačiam skirstiniui** (normaliam, eksponentiniam, Relėjo, Puasono, binominiam ir pan.), kai tuo tarpu **laiko eilučių elementai gali būti pasiskirstę ne būtinai vienodai** (ir dažnai – nevienodai), t. y. tikimybė  $P\{x(t_1) < x\}$  gali nesutapti su tikimybe  $P\{x(t_2) < x^*\}$ , kai  $t_1 \neq t_2$ .

Iš pirmosios čia paminėtos laiko eilučių savybės išplaukia **papildomos prognozavimo galimybės**, o iš antrosios – **papildomi matematiniai sunkumai**, apdorojant laiko eilutes.

Galima pastebėti ir daugiau sąryšių ir skirtumų tarp laiko eilučių ir imčių.

Registruodami vidutinės bulvių kainas  $x(t)$  momentais  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_j, \dots, t_N$  įvairių, atsitiktinai pasirinktų Lietuvos miestų ir miestelių turgavietėse, sudarysime tų kainų matricą, turinčią  $N$  stulpelių ir  $m$  eilučių. Bulvių kainos  $x(t)$ , priklausančios  $i$ -jai eilutei, bus laiko eilutės, vaizduojančios bulvių kainos kitimą  $i$ -jame mieste ar miestelyje, elementais, o bulvių kainos, priklausančios  $j$ -ajam stulpeliui, bus bulvių kainos imties, paimtos momentu  $t_j$ , atsitiktinai pasirinktuose Lietuvos miestuose bei miesteliuose, elementais. Vadinasi, **vienas ir tas pats bulvių kainų matricos elementas gali priklausyti ir statistinei laiko eilutei, ir atsitiktinei imčiai**.

Darydami kainų matricos pjūvius momentais  $t_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) ir **apdorodami gaunamas imtis**, galime apskaičiuoti bulvių kainų vidurkius  $\bar{x}(t_j)$  Lietuvoje momentais  $t_j$  ir sudaryti tokių **vidurkių laiko eilutę, vaizduojančią, kaip keitėsi vidutinė bulvių kaina Lietuvoje**.

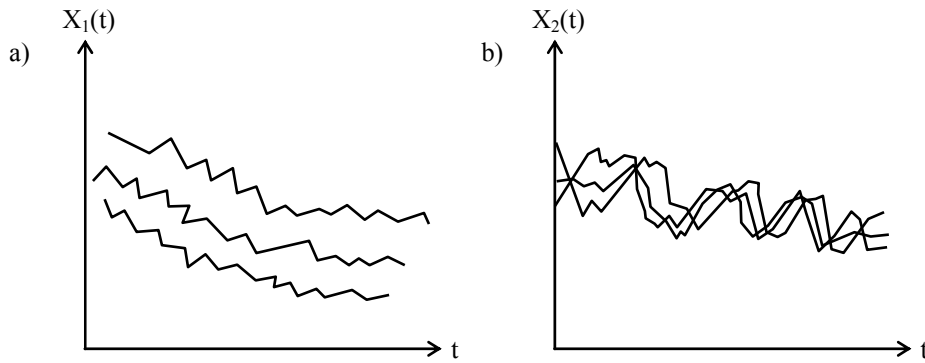
Apskaičiuodami bulvių kainos dispersiją kiekvienai imčiai  $j=1, 2, \dots, N$ , galime sudaryti bulvių kainų **dispersijos kitimo laiko eilutę**, vaizduojančią, kaip, laikui  $t$  bėgant, keitėsi erdvinis bulvių kainų išsibarstymas Lietuvoje.

Šis pavyzdėlis rodo **sąryšį tarp laiko eilučių ir imčių: viena ir ta pati atsitiktinio dydžio reikšmė gali būti ir imties, ir laiko eilutės elementu**.

O dabar pateiksiu pavyzdėlį, iliustruojantį vieną svarbų **skirtumą tarp imčių ir laiko eilučių**.

Jei, nagrinėdami bulvių kainų imtis momentais  $t_j$  ir  $t_k$  įvairiuose Lietuvos miestuose ir miesteliuose, rastume, jog  $\bar{x}(t_j) = \bar{x}(t_k)$  ir  $D_{x(t_j)} = D_{x(t_k)}$ , tai galėtume teigti, kad bulvių kainų imtys, padarytos momentais  $t_j$  ir  $t_k$ , buvo statistiškai ekvivalenčios, t. y., kad tiriant bulvių kainas Lietuvoje, imtys, padarytos momentais  $t_j$  ir  $t_k$ , gali pakeisti viena kitą. Vadinasi, **imčių palyginimui, kai tos imtys turi vienodą skaičių elementų, pakanka tų imčių vidurkių ir dispersijų palyginimo**.

Atsitiktinių procesų ir tų procesų realizacijas aprašančių **laiko eilučių rinkinių statistikiniam palyginimui vidurkių ir dispersijų palyginimo jau nebepakanka, nes du stochastiniai procesai, turintys vienodas tų procesų realizacijų vidurkių ir dispersijų trajektorijas, gali reikšmingai skirtis**. Tai vaizduoja 322 pav. brėžinėliai „a“ ir „b“.



322 pav.

Brėžiniuose „a“ ir „b“ pavaizduota po tris atsitiktinai paimtas dviejų atsitiktinių procesų  $X_1(t)$  ir  $X_2(t)$  realizacijas  $X_1^{(1)}(t)$ ,  $X_1^{(2)}(t)$ ,  $X_1^{(3)}(t)$ ;  $X_2^{(1)}(t)$ ,  $X_2^{(2)}(t)$ ,  $X_2^{(3)}(t)$ . Abiejų procesų momentinių vidurkių ir momentinių dispersijų kitimo trajektorijos yra vienodos (ar beveik vienodos), tačiau atsitiktiniai procesai  $X_1(t)$  ir  $X_2(t)$  – ryškiai skiriasi: proceso  $X_1(t)$  eigą, žinant jo pradinę momentinę reikšmę, prognozuoti žymiai lengviau negu proceso  $X_2(t)$ , nes proceso  $X_1(t)$  laiko eilučių gretimos reikšmės yra stipriai koreliuotos, o procese  $X_2(t)$  koreliacija žymiai silpnesnė ar net gali būti, jog koreliacijos nėra.

Pateiktas pavyzdėlis rodo, jog analizuojant stochastinius procesus ir tuos procesus aprašančias laiko eilutes, negalima apsiriboti vien tik tų procesų realizacijų vidurkių ir dispersijų įverčių  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(k)}(t)$  ir  $\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x^{(k)}(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(k)}(t))^2$ , kur  $k=1, 2, 3, \dots, n$  – proceso  $X(t)$  realizacijos numeris, apskaičiavimu. Reikia apskaičiuoti ir nagrinėjamo atsitiktinio proceso  $X(t)$  **autokovariacijos funkciją**  $\gamma_x(t_i, t_j) = E[(x(t_i) - E[x(t_i)])(x(t_j) - E[x(t_j)])]$ , matematiškai aprašančią statistinę priklausomybę tarp stochastinį procesą  $X(t)$  aprašančios laiko eilutės elementų  $x(t_i)$  ir  $x(t_j)$ . Ši funkcija suteikia žymiai daugiau informacijos apie stochastinį procesą negu dispersija, kuri yra tik dalinis autokovariacijos atvejis:  $D(x(t_i)) = \text{cov}(x(t_i), x(t_i)) = E[x(t_i) - E[x(t_i)]]^2$ . Dalindami autokovariacijos funkciją  $\gamma_x(t_i, t_j) = \text{cov}(x(t_i), x(t_j))$  iš dispersijų  $D(x(t_i))$  ir  $D(x(t_j))$  geometrinio vidurkio  $\sqrt{D(x(t_i)) \cdot D(x(t_j))}$ , gauname proceso  $X(t)$

**autokoreliacinę funkciją**  $r_x(t_i, t_j) = \frac{\gamma_x(t_i, t_j)}{\sqrt{D(x(t_i)) \cdot D(x(t_j))}}$ , kuri matematiškai aprašo

koreliacinę priklausomybę tarp laiko eilutės elementų  $x(t_i)$  ir  $x(t_j)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j=1, 2, 3, \dots, n$ ).

Nesunku įsitikinti, kad  $r_x(t_i, t_i) = r_x(t_j, t_j) = 1$ , t. y., kad laiko eilutės elementai yra stipriausiai koreliuoti patys su savimi. Kai  $t_i \neq t_j$ , tai  $r_x(t_i, t_j)$  reikšmė gali būti lygi bet kuriam skaičiui iš intervalo  $[-1, +1]$ . Kuo didesnė absoliuti koreliacijos funkcijos reikšmė  $|r_x(t_i, t_j)|$ , tuo stipriau pasireiškia tiesinis koreliacinis ryšys tarp laiko eilutės elementų  $x(t_i)$  ir  $x(t_j)$ .

Proceso  $X_1(t)$  realizacijas (žiūr. 322 „a“ pav.) aprašančių laiko eilučių elementai yra žymiai stipriau koreliuoti tarpusavyje negu proceso  $X_2(t)$  realizacijas (žiūr. 322 „b“ pav.) aprašančių laiko eilučių elementai.

Stochastinį procesą aprašančios laiko eilutės autokovariacijos bei autokoreliacijos funkcijų žinojimas leidžia žymiai patikimiau prognozuoti stochastinio proceso eigą. Todėl tomis funkcijomis naudojamosi sudarant stochastinių procesų matematinius modelius ir atliekant tų procesų eigos trumpalaikes, o kartais – ir

vidutinės trukmės prognozes. Tokio prognozavimo pavyzdžiai pateikti šios mokymo priemonės 1.14.12.3.2.4. skyrelyje.

**Laiko eilutės, kurias nagrinėja ekonometrija, turi dar vieną specifinę savybę, skiriančią jas nuo imčių bei laiko eilučių, aprašančių stochastinius procesus, vykstančius gamtoje bei techninėse sistemose:** ekonominiai, socialiniai ir demografiniai procesai, kurių matematinių modelių identifikavimu ir analize užsiima ekonometrija, tik labai retais atvejais gali turėti ne vieną, o kelias realizacijas, kurias būtų galima laikyti nagrinėjamo stochastinio proceso realizacijos imties elementais. Todėl daugumoje atvejų **ekonometristams tenka tenkintis tik viena laiko eilute, aprašančia nagrinėjamą stochastinį procesą**, kuri dažnai būna net nepakankamai ilga. Ši aplinkybė žymiai apsunkina nagrinėjamų stochastinių procesų statistinių charakteristikų apskaičiavimą, nes ne visais metodais, kurie sukurti, vystant stochastinių procesų ir stochastinių funkcijų teoriją, galima pasinaudoti ekonometrijoje. **Tenka kurti specialius metodus, atsižvelgiant į ekonometrinių laiko eilučių specifiką.**

Studijuojantiems sistemotyra naudinga susipažinti ir su ekonometrija (kam skiriamas visas 1.14.12.3. skyrelis), ir su stochastinių procesų bei stochastinių funkcijų teorijos pagrindais, kurie šioje mokymo priemonėje nenagrinėjami, nes šiai mokymo disciplinai yra skiriamas atskiras specialus kursas. Tiems skaitytojams, kurie tokio kurso nėra išlausę, parekomenduočiau pastudijuoti gana nestandartinę tikimybių teorijos vadovėlį [185], skirtą techninių specialybių studentams. Tame vadovylyje stochastinių procesų ir stochastinių funkcijų teorijai skiriami trys gana nemaži skyriai (viso beveik 100 puslapių), kuriuose šios teorijos pagrindai išdėstyti gana paprastai ir aiškiai, dėstymą iliustruojant gerai parinktais konkrečiais pavyzdžiais ir tuo pačiu metu nenusižengiant matematiniam tikslumui. Tai būdinga visoms šios knygos autorės E. S. Ventcel knygoms ir paskaitoms.

Norint sudaryti kokybišką stochastinio proceso matematinį modelį, labai svarbu išsiaiškinti tame procese pasireiškiančius faktorius ir jame veikiančius priežastinius ryšius, suprasti to proceso „mechanizmą“. Tai ypač svarbu, kai statistinių duomenų yra nedaug – tik viena tą procesą charakterizuojanti nelabai ilga laiko eilutė.

Faktorius, kurių poveikiai pasireiškia formuojantis laiko eilučių elementų reikšmėms, priimta skirstyti į **keturias grupes**:

1) **ilgalaikiai**, formuojantys bendrąją ilgalaikę analizuojamojo požymio charakteristikos  $x(t)$  kitimo laike **tendenciją**, aprašomą **neatsitiktine funkcija**, vadinama **trendo funkcija** (arba tiesiog – **trendu**), kurią žymėsime  $f_T(t)$ ;

2) **sezoniniai**, formuojantys periodiškai besikartojančius  $x(t)$  svyravimus; sezoninių faktorių poveikio rezultatas aprašomas **neatsitiktinėmis periodinėmis funkcijomis** (trigonometrinėmis funkcijomis, Furjė eilutėmis ir pan.), kurias žymėsime  $\varphi(t)$ ;

3) **cikliniai (konjunktūriniai)**, formuojantys analizuojamojo požymio  $x(t)$  pokyčius, atsirandančius dėl demografinių, ekonominių bei astrofizinių pokyčių bei ciklų (pavyzdžiui, demografinių „duobių“ ciklai, vidutinės trukmės ekonominės konjunktūros pokyčių ciklai, pavyzdžiui, 1.14.12.2.3. skyrelyje jau minėtieji mažieji Kitzino gamybinių atsargų ciklai (3-4 m.), didieji Juglaro komerciniai ciklai (6-10 m.), Lebruso investicijų ciklai (10-12 m.), Kuznetso statybos ciklai (15-22 m.), ilgųjų bangų, t. y. Kondratjevo bangų ciklai (~50 m.), Saulės aktyvumo ciklai ir pan.); ciklinių faktorių poveikis aprašomas **neatsitiktinėms funkcijoms**, kurias žymėsime  $\psi(t)$ ;

4) **atsitiktiniai** (nereguliarūs), sąlygojantys elementų  $x(t)$  **stochastiškumą**; atsitiktinių faktorių poveikį charakterizuosime atsitiktiniais dydžiais (**atsitiktinėmis laiko funkcijomis**)  $\varepsilon(t)$ .

Atsitiktinius faktorius savo eile galima suskirstyti į **du pogrupius**:

4 „a“) **šuliniai**, t. y. iššaukiantys staigius struktūrinius  $x(t)$  pokyčius (pavyzdžiui, staigius funkcijų  $f_{tr}(t)$ ,  $\varphi(t)$  ar  $\psi(t)$  pokyčius);

4 „b“) **evoliuciniai likutiniai**, iššaukiantys nedidelius atsitiktinius  $x(t)$  nuokrypius nuo tos trajektorijos, kuri turėtų būti, veikiant tik pirmųjų trijų grupių faktoriams.

Matematinėje laiko eilučių teorijoje priimta nagrinėti tik pirmųjų trijų grupių ir 4“b“ grupės faktorių poveikius, paliekant 4“a“ grupės faktorių ir jų poveikių nagrinėjimą ekspertams, gerai žinantiesiems tą situaciją, kurioje vyksta analizuojamas procesas, ir todėl galintiems paaiškinti bei kartais nuspėti šuolinius pokyčius.

**Statistinės laiko eilutės elementų  $x(t)$  formavimėsi ne būtinai dalyvauja visų pirmųjų trijų grupių faktoriai, tačiau būtinai dalyvauja 4 “b“ grupės faktoriai**, todėl dydis  $x(t)$  vaizduojamas suma  $q_1 f_{tr}(t) + q_2 \varphi(t) + q_3 \psi(t) + \varepsilon(t)$ , kurioje koeficientai  $q_1$ ,  $q_2$  ir  $q_3$  gali būti lygūs 1 arba 0, priklausomai nuo to, dalyvauja ar nedalyvauja atitinkami faktoriai laiko eilutės elementų formavimėsi.

Didžioji dalis statistinių duomenų, kuriuos renka ir saugo statistinės tarnybos, yra laiko eilutės.

Su tuo, kaip atrodo realios laiko eilutės ir kaip jose pasireiškia čia išvardinti faktoriai, skaitytojas gali susipažinti jau ne vieną kartą minėtoje S. A. Aivaziano ir V. S. Mchitariano knygoje [182], kurioje yra pateikti trys konkrečių laiko eilučių pavyzdžiai (žiūr. 782-786 pusl.).

Pirmąją laiko eilutę sudaro Didžiosios Britanijos keleivinių lėktuvų 1963÷1970 m. kiekvieną mėnesį praskristų atstumų sumos. Nagrinėdami šios laiko eilutės grafiką, galime pastebėti šios eilutės tendą (minėtųjų sumų metinio vidurkio augimą) ir kiekvienais metais pasikartojančius sezoninius svyravimus, atsirandančius dėl keleivių srauto pokyčių atostogų metu ir švenčių dienomis.

Antrąją laiko eilutę sudaro dvylikos metų (1960-1971 m.) kiekvieno ketvirčio duomenys apie tai, kaip keitėsi akcijų kurso vidutinis indeksas Londono biržoje. Šiai laiko eilutei būdingi ketverių metų ilgio konjunktūriniai ekonominiai ciklai, užsidedantys ant silpnai išreikšto trendo, rodančio lėtą to indekso augimą.

Trečioji laiko eilutė – miežių derliaus kasmetinių vertinimų rezultatai, aprėpiantys 56 metus (1884-1939 m.). Šiai laiko eilutei nėra būdingi nei trendas, nei sezoniniai, nei konjunktūriniai svyravimai, tačiau joje gana stipriai pasireiškia atsitiktiniai derliaus pokyčiai ir kelių (kartais net keliolikos) metų intervalai, kuriuose pastebimi stiprūs koreliaciniai ryšiai tarp gretimų metų. Gali būti, kad čia pasireiškia Saulės aktyvumo pokyčiai.

Visose trejose laiko eilutėse pastebimas atsitiktinių faktorių poveikis, kuris ypač ryškus trečiojoje laiko eilutėje.

**Laiko eilučių analizėje sprendžiami tokie trys pagrindiniai vidiniai tos analizės uždaviniai:**

1) apdorojant turimus statistinius duomenis apie laiko eilutes (t. y. trajektorijas  $x(t_1)$ ,  $x(t_2)$ , ...,  $x(t_N)$ ), **nustatyti  $x(t)$  struktūrą**, t. y. nustatyti, kokios iš sudedamųjų dalių ( $f_{tr}(t)$ ,  $\varphi(t)$  ir  $\psi(t)$ ) įeina į  $x(t)$  sudėtį (kitais tariant, **rasti indikatorių  $q_1$ ,  $q_2$  ir  $q_3$  reikšmes**);

2) **įvertinti neatsitiktines funkcijas**, įeinančias į  $x(t)$  sudėtį, t. y. sudaryti tų funkcijų formules bei grafikus (jų aproksimacijas);

3) **parinkti modelį**, kuris pakankamai adekvačiai aprašytų atsitiktinę  $x(t)$  sudedamąją dalį  $\varepsilon(t)$ , **ir statistiškai įvertinti to modelio parametrus**.

Šių uždavinių kokybiškas išsprendimas leidžia:

1) išsiaiškinti **laiko eilutės  $x(t)$  genezės mechanizmą**, t. y. išsiaiškinti to **reiškinio, kurį aprašo analizuojamoji laiko eilutė, atsiradimo ir funkcionavimo mechanizmą**;

2) sudaryti **pakankamai kokybišką to reiškinio dinaminį ekonometrinių modelių**, t. y. parinkti pakankamai adekvačią tam reiškiniui **modelio struktūrą** (t. y. pakankamai gerai išspręsti **modelio specifikavimo problemą**) ir pakankamai tiksliai statistiškai įvertinti modelio parametrų reikšmes (t. y. pakankamai gerai išspręsti **modelio identifikavimo problemą**);

3) pasiekti **galutinius taikomuosius (išorinius) laiko eilučių analizės tikslus**, tarp kurių svarbiausieji yra šie du:

- a) **trumpalaikių ir vidutinės trukmės prognozių**, nusakančių artimiausiam laikui labiausiai tikėtiną laiko eilutės trajektoriją  $x(t)$ , **sudarymas**;
- b) analizuojamų procesų **optimalaus valdymo strategijos formavimas ir** atsižvelgiančių į egzistuojančių tendencijų pasireiškimą ateityje **valdymo sprendimų parengimas**.

Laiko eilučių teorijoje nagrinėjamos **dvi laiko eilučių klasės**: stacionarios ir nestacionarios laiko eilutės. Pradžioje nagrinėsime stacionarias laiko eilutes, nes jos yra paprastesnės už nestacionarias laiko eilutes ir gali būti laikomos nestacionariųjų atsitiktinių procesų sudedamąja dalimi.

**Stacionariomis laiko eilutėmis** vadinamos laiko eilutės, aprašančios tokius realius procesus, kurių sudėtyje nėra anksčiau minėtųjų determinuotųjų sudedamųjų dalių: trendo  $f_{tr}(t)$  ir sezoninių bei konjunktūrinių svyravimų  $\varphi(t)$  ir  $\psi(t)$ . Tokių procesų pasitaiko tikrovėje, tačiau daug dažniau tokius procesus galima gauti, kai nagrinėjami **likutiniai procesai**, kurie lieka, išskyrus ir eliminavus iš **pradinės laiko eilutės**  $x(t)$  minėtąsias determinuotąsias sudėtines dalis.

Matematiniai stacionarių laiko eilučių  $x(t)$  modeliai gali būti traktuojami **plačiaja prasme** (silpnai stacionarios laiko eilutės) ir **siaurąja prasme** (griežtai stacionarios laiko eilutės).

**Silpnai stacionaria laiko eilute** vadinama laiko eilutė  $x(t)$ , kurios matematinis vidurkis  $a=E[x(t)]$ , dispersija  $\sigma^2=E[(x(t)-E[x(t)])^2]$  ir kovariacija  $\gamma(k)=cov(x(t), x(t+k))=E[(x(t)-E[x(t)])(x(t+k)-E[x(t+k)])]$  nepriklauso nuo  $t$ , t. y.  $a=const$ ,  $\sigma^2=const$  ir  $\gamma(k)=const$  visoms  $t$  reikšmėms (tačiau kovariacija  $\gamma$  gali priklausyti nuo  $k$ ).

Konkrečios stacionarios laiko eilutės, t. y. sekos  $\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2), \dots, \hat{x}(t_i), \dots, \hat{x}(t_N)$ , gautės stebint kokio tai reiškinio požymį  $x$  tam tikrais laiko momentais  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$ , išrikiuotais chronologine (laiko  $t$  didėjimo) tvarka vienodais atstumais vienas nuo kito (dėl ko juos galima žymėti tiesiog jų numeriais  $1, 2, \dots, i, \dots, N$ ), **matematinio vidurkio**  $a=E[x(t)]$  **statistinę įvertį**  $\hat{a}$  galima apskaičiuoti, naudojantis formule  $\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{x}(t)$ .

Konkrečios stacionarios laiko eilutės **dispersijos**  $\sigma^2=E[(x(t)-a)^2]$  **nepaslinktasis statistinis įvertis**  $\hat{\sigma}^2$  apskaičiuojamas, naudojantis formule  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (\hat{x}(t) - \hat{a})^2$ .

Konkrečios stacionarios laiko eilutės **kovariacijos**  $\gamma(k)=cov(x(t), x(t+k))=E[(x(t)-a)(x(t+k)-a)]$  **kokiai nors duotajai reikšmei**  $k$  (kur  $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ ) **statistinis įvertis**  $\hat{\gamma}(k)$  apskaičiuojamas, naudojantis formule

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (\hat{x}(t) - \hat{a})(\hat{x}(t+k) - \hat{a}).$$

Jei įsitikiname, kad analizuojamos konkrečios laiko eilutės statistiniai įverčiai  $\hat{a}$ ,  $\hat{\sigma}^2$  ir  $\hat{\gamma}(k)$  tikrai nepriklauso nuo  $t$ , t. y., kad tie įverčiai, keičiant laiko pradžią – momentą  $t_1$  – ir laiko eilutės elementų skaičių  $N$ , bet paliekant jį pakankamai dideliu, reikšmingai ir tendencingai nesikeičia, tai **galime turimą laiko eilutę, sudarytą iš statistinių duomenų, priskirti stacionarių plačiaja prasme (silpnai stacionarių) laiko eilučių klasei** ir taikyti jos analizei matematinius modelius, priklausančius tipams AR(p), MA(q) ir ARMA(p,q), apie kuriuos bus kalbama šiek tiek vėliau.

**Griežtai stacionaria (stacionaria siaurąja prasme) laiko eilute** vadinama tokia laiko eilutė, kurios elementų  $x(t_i)$  rinkinių (sambūrių)  $x(t_1+k), x(t_2+k), x(t_3+k), \dots$ ,

$x(t_1+k), \dots, x(t_m+k)$  tikimybių **bendras (grupinis) pasiskirstymas nepriklauso nei nuo  $k$ , nei nuo laiko momentų  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_m$  pasirinkimo.**

Tai reiškia, kad griežtai stacionarios laiko eilutės elementai priklauso vienas ir tam pačiam tikimybiniam skirstiniui ir todėl jų (kaip atsitiktinių dydžių) statistinės charakteristikos nepriklauso nuo  $t$ . Todėl tos laiko eilutės, kurios yra stacionarios siaurąja prasme, būtinai yra stacionarios ir plačiąja prasme, o tuo tarpu atvirkštinis teiginys nėra teisingas, nes galima sukonstruoti tokią laiko eilutę, kuri, būdama stacionari plačiąja prasme, nebus stacionari siaurąja prasme.

Analizuojant stacionarias (tiek siaurąja, tiek plačiąja prasme) laiko eilutes, apskaičiuojami tokių jų charakteristikų kaip autokovariacinė ir autokoreliacinė (pilnoji ir dalinė) funkcija ir spektrinis tankis statistiniai įverčiai.

Stacionarios laiko eilutės **autokovariacinė funkcija**  $\gamma(k) = \text{cov}(x(t), x(t+k)) = E[(x(t) - E[x(t)])(x(t+k) - E[x(t+k)])] = E[(x(t) - a)(x(t+k) - a)] = E[x(t)x(t+k)] - a^2$  dėl laiko eilutės  $x(t)$  stacionarumo nepriklauso nuo  $t$ , tačiau gali priklausyti nuo atstumo  $k$  tarp stebėjimo momentų. Ši kovariacija tarp elemento  $x(t)$  ir „pastumto laike“ elemento  $x(t+k)$  vadinama **autokovariacija**, nes ji yra kovariacija tarp vienos ir tos pačios laiko eilutės elementų.

Iš autokovariacinės funkcijos  $\gamma(k)$  ir laiko eilutės dispersijos  $\sigma^2$  apibrėžimų išplaukia, jog  **$\gamma(0) = \sigma^2$** .

Stacionarių laiko eilučių empirinės autokovariacinės funkcijos reikšmės  $\hat{\gamma}(k)$  (t. y. teorinės autokovariacinės funkcijos reikšmių statistinių įverčių reikšmės) apskaičiuojamos, kaip jau buvo minėta, naudojantis formule

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} [(\hat{x}(t) - \hat{a})(\hat{x}(t+k) - \hat{a})],$$
 kuri gali būti taikoma visoms  $k$  reikšmėms  $k=0, 1, 2, \dots, i, \dots, N-1$ .

Priėmę, jog  $k=0$ , gauname  $\hat{\gamma}(k) = \hat{\sigma}^2$ , t. y. empirinės autokovariacijos reikšmė taške  $k=0$  lygi stacionarios laiko eilutės **empirinei dispersijai** – teorinės dispersijos statistiniam įverčiui.

Laiko eilutės **autokoreliacinė funkcija** vadinama funkcija  $r(k) = \frac{E[(x(t) - a)(x(t+k) - a)]}{\sqrt{E[(x(t) - a)^2] \cdot E[(x(t+k) - a)^2]}}$ , vaizduojanti, kaip kinta koreliacijos tarp dviejų

laiko eilutės elementų  $x(t)$  ir  $x(t+k)$  koeficiento  $r$  reikšmė  $r(k)$ , keičiantis atstumui  $k$  tarp tų elementų.

Kadangi stacionariai laiko eilutei galioja lygybė  $E[(x(t) - a)^2] = E[(x(t+k) - a)^2] = \gamma(0)$ , tai iš to išplaukia, jog stacionarių laiko eilučių autokoreliacinė funkcija

$$r(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}.$$

Autokoreliacinė funkcija yra patogesnė už autokovariacinę funkciją, nes autokoreliacinės funkcijos reikšmės nepriklauso nuo to, kokiais matavimo vienetais bus išmatuotos laiko eilutės elementų reikšmės.

Kaip tai išplaukia iš apibrėžimo, autokoreliacinės funkcijos reikšmė taške  $k=0$  visada yra lygi 1. Iš laiko eilutės stacionarumo išplaukia, jog  $r(-k) = r(k)$ , t. y. kad autokoreliacinė funkcija yra simetrinė (lyginė) funkcija. Iš autokoreliacinės funkcijos apibrėžimo išplaukia ir tai (kuo nesunku įsitikinti), kad autokoreliacinės funkcijos reikšmės gali keistis tik segmente  $[-1; 1]$ .

Kai laiko eilutė  $x(t)$  yra tokia, kad  $r(k) = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = 0, \\ 0, & \text{kai } k \neq 0 \end{cases}$ , tai tos laiko eilutės

elementai  $x(t)$  skirtingoms  $t$  reikšmėms nėra tarpusavyje koreliuoti ir tokią „laiko eilutę“ reikia laikyti paprasta statistine nepriklausomų elementų imtimi, kurios analizei nėra prasmės taikyti laiko eilučių analizės specifinius metodus ir modelius. Jos analizei pakanka standartinių matematinės statistikos metodų, skirtų **tikimybinio skirstinio**, kuriam priklauso paprastos atsitiktinės imties elementai, ir to **skirstinio parametrų** bei tokių **statistinių charakteristikų kaip matematinis vidurkis, moda, dispersija, asimetrija, ekscesas** ir pan. nustatymui.

Toliau, nagrinėdami laiko eilutes ir jas aprašančius matematinius modelius, **mes laikysime, kad jos yra tikros laiko eilutės, kurių elementai yra tarpusavyje daugiau ar mažiau koreliuoti, ir todėl tokių atsitiktinių dydžių aibių statistiniam apdorojimui reikalingi specialūs metodai ir modeliai, leidžiantys gauti papildomą prognostinę informaciją, kurios neįmanoma būtų gauti iš paprastų imčių, nesančių tikromis laiko eilutėmis.**

Stacionarių laiko eilučių autokoreliacinėms funkcijoms  $\gamma(k)$  būdinga tai, kad, esant pakankamai didelėms  $k$  reikšmėms, didėjant  $k$ , absoliuti  $\gamma(k)$  reikšmė  $|\gamma(k)|$  mažėja, artėdama prie 0. Tai natūralu, nes **kuo labiau nutolę laike laiko eilutės elementai vienas nuo kito, tuo silpnesnis yra ryšys tarp tų elementų ir todėl tuo mažesnė koreliacijos tarp jų koeficiento reikšmė.** Tai labai aiškiai galima pastebėti, nagrinėjant funkcijos  $r(k)$  grafikus, kartais vadinamus **korelogramomis**. Eilėje atvejų galima net nustatyti tokią kintamojo  $k$  **slenkstinę reikšmę  $k_0$** , nuo kurios, kai  $k \geq k_0$ , autokoreliacinės funkcijos  $r(k)$  visas reikšmes praktiškai galima laikyti lygiomis nuliui.

Autokoreliacinės funkcijos reikšmių statistinius įverčius  $\hat{r}(k)$  galima

apskaičiuoti, naudojantis formule  $\hat{r}(k) = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} [(\hat{x}(t) - \hat{a})(\hat{x}(t+k) - \hat{a})]}{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (x(t) - \hat{a})^2} = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$ , kurioje

$k=0, 1, 2, \dots, N-1$ .

**Empirinės autokoreliacinės funkcijos  $\hat{r}(k)$  modulis  $|\hat{r}(k)|$ , kaip tai galima pastebėti nagrinėjant realių procesų korelogramas, ne visada monotoniškai mažėja, didėjant  $k$ , ir tuo skiriasi nuo teorinės autokoreliacinės funkcijos  $r(k)$  modulio kitimo.**

Kad būtų galima įvertinti **grynąją autokoreliaciją tarp dviejų laiko eilutės narių  $x(t)$  ir  $x(t+k)$ , kai  $k \geq 2$ , eliminuojant tarpinių eilutės narių poveikį, įsivedamos dalinės autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacinės funkcijos sąvokos.**

Pavyzdžiui, laiko eilutei  $x(t)$ , turinčiai matematinį vidurkį  $E[x(t)] = a$ , dalinė pirmos eilės autokoreliacinė funkcija  $r_{dal}(2) = r(x(t), x(t+2) | x(t+1) = a)$ , laikant, jog  $x(t+1)$  reikšmė yra fiksuota ir yra lygi  $a$ , apskaičiuojama naudojantis formule

$$r_{dal}(2) = \frac{r(x(t), x(t+2)) - r(x(t), x(t+1)) \cdot r(x(t+2), x(t+1))}{\sqrt{[1 - r^2(x(t), x(t+1))] \cdot [1 - r^2(x(t+2), x(t+1))]}}.$$

Stacionarioms laiko eilutėms gauname, jog  $r_{dal}(2) = \frac{r(2) - r^2(1)}{1 - r^2(1)}$ .

Dalinė antros eilės autokoreliacinė funkcija  $r_{dal}(3) = r(x(t), x(t+3) | x(t+1) = x(t+2) = a)$  gali būti apskaičiuota, naudojantis formule  $r_{dal}(3) = \frac{r_{03,1} - r_{02,1} \cdot r_{32,1}}{\sqrt{(1 - r_{02,1}^2) \cdot (1 - r_{32,1}^2)}}$ ,

$$\text{kurioje } r_{03,1}=r(x(t), x(t+3)|x(t+1)=a)=\frac{r(3)-r(1)r(2)}{\sqrt{[1-r^2(1)][1-r^2(2)]}}, r_{02,1}=r(x(t), x(t+2)|x(t+1)=a)=$$

$$=\frac{r(2)-r^2(1)}{1-r^2(1)}, r_{32,1}=r(x(t+3), x(t+2)|x(t+1)=a)=\frac{r(1)-r(2)r(1)}{\sqrt{[1-r^2(2)][1-r^2(1)]}}.$$

Bendrąsias dalinių autokoreliacinių funkcijų reikšmių apskaičiavimo formules ir paaiškinimus, kaip (ir kodėl taip) jos sudaromos, skaitytojas gali surasti jau minėtoje knygoje [182].

**Empirinės dalinės autokoreliacinės funkcijos** gaunamos iš teorinių, pakeičiant jose teorines koreliacijos koeficientų  $r(k)$  reikšmes jų statistiniais įverčiais  $\hat{r}(k)$ .

Dar viena svarbi ir informatyvi stacionarių laiko eilučių charakteristika yra jų autokoreliacijos funkcijos **spektrinis tankis**  $\rho(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) \cdot e^{ik\omega} =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k) [\cos(k\omega) + i \sin(k\omega)].$$

Paaiškinsiu, iš kur ir kaip atsirado ši formulė, o kartu – ir spektro bei spektrinio tankio sąvokas.

Iš Furjė eilučių teorijos\* žinoma, jog bet kurį determinuoto ar stochastinio, tolydaus ar diskretaus **proceso  $x(t)$  fragmentą** bet kuriame mūsų pačių **laisvai pasirinktame intervale  $a < t < b$** , kai tame intervale egzistuoja funkcijos  $x(t)$  modulio Lebegeo integralas, galima ekvivalenčiai atvaizduoti suma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_1 t + b_k \sin \omega_1 t), \text{ vadinama}$$

**proceso  $x(t)$  intervale ( $a < t < b$ ) Furjė eilute ir esančia proceso  $x(t)$  fragmento ( $a, b$ ) matematiniu modeliu**, intervale ( $a, b$ ) ekvivalenčiai atvaizduojančiu procesą  $x(t)$  ir galinčiu sutapti ar nesutapti su tuo procesu už to intervalo ribų.

Proceso  $x(t)$  matematinio modelio sutapimas ar nesutapimas su savo fragmento ( $a, b$ ) Furjė eilute už intervalo ( $a, b$ ) ribų priklauso nuo to, ar procesas  $x(t)$  yra periodinis, o taip pat nuo to, ar intervalo ( $a, b$ ) ilgis yra proceso  $x(t)$  periodo kartotinis, ar ne.

Pati Furjė eilutė  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega_1 t + b_k \sin k \omega_1 t)$  yra argumento  $t \in (-\infty, +\infty)$

**periodinė funkcija  $f(t)$** , kiekviename savo periode, turinčiame ilgį  $T_1=b-a$ , kartojanti funkcijos  $x(t)$  fragmentą, esantį intervale  $a < t < b$ . Todėl funkciją  $f(t)$  kartais vadina **proceso  $x(t)$  fragmento ( $a, b$ ) periodiniu pratęsimu**. Jis, kaip jau minėjau, už intervalo ( $a, b$ ) ribų gali sutapti su funkcija  $x(t)$ , bet gali ir nesutapti. Funkcijos  $f(t)$  grafiko pavyzdys bus pateiktas vėliau (žiūr. 324 pav.)

Furjė eilutės koeficientų  $a_k$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ) ir  $b_k$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ) reikšmių apskaičiavimui taikomas **integralinės formulės**:

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) \cos k \frac{2\pi}{b-a} t dt \text{ ir } b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) \sin k \frac{2\pi}{b-a} t dt.$$

Dydis  $\frac{2\pi}{b-a} = \omega_1$  vadinamas Furjė eilutės **pagrindiniu cikliniu dažniu**, nes visų Furjė eilutės harmonikų dažniai  $\omega_k = k\omega_1$ , yra dažnio  $\omega_1$  kartotiniai. Todėl

\* Skaitytojams, kurie šios teorijos nestudijavo ar ją pamiršo, rekomenduočiau knygą [186], kurioje ši teorija išdėstyta aiškiai, pakankamai griežtai ir su daugybe pavyzdžių.

**intervalo (a, b) ilgis b-a yra visų Furjė eilutės harmonikų periodų  $T_1, T_2, T_3, \dots$  kartotinis:  $T_1=b-a, 2T_2=b-a, 3T_3=b-a, \dots$**

Apskaičiuojant koeficiento  $a_0$  reikšmę, reikia naudotis formule  $a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) dt$ , kuri yra bendrosios formulės  $a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) \cos\left(t \frac{2\pi}{b-a}\right) dt$  dalinis atvejis, nes tuo atveju, kai  $k=0$ , funkcijos  $\cos \frac{2\pi}{b-a} t$  reikšmė yra lygi 1.

Jei bandytume rasti koeficiento  $a_0$  reikšmę, pradžioje apskaičiuodami integralą  $a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b x(t) \cos k \frac{2\pi}{b-a} t$  visoms numerių  $k=1, 2, 3, \dots$  reikšmėms ir po to bandydami gautame rezultate numerį  $k$  pakeisti nuliui, tai susidurtume su formulės neapibrėžtumu.

Jei funkcijos  $x(t)$  absoliutus integruojamumas išliktų ir padidintame intervale, tai, didindami intervalo (a, b) ilgį  $b-a$ , gautume Furjė eilutę, ekvivalenčią vis didesniajam proceso  $x(t)$  absoliučiai integruojamam fragmentui.

Didėjant intervalo (a, b) ilgiui, ilgėtų Furjė eilutės pagrindinį dažnį  $\omega_1$  o, atitinkantis periodas  $T_1=b-a$ , esantis ir funkcijos  $f(t)$  periodu. Kartu mažėtų pagrindinis dažnis  $\omega_1 = \frac{2\pi}{b-a}$  ir, atsirandant naujoms harmonikoms, mažėtų „atstumai“ tarp Furjė eilutės harmonikų gretimų dažnių  $\omega_{k+1} = (k+1)\omega_1$  ir  $\omega_k = k\omega_1$ , t. y. mažėtų skirtumai  $\omega_{k+1} - \omega_k = \omega_1 = \frac{2\pi}{b-a}$ .

Pasinaudodami Eulerio formulėmis  $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$  ir  $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ , Furjė eilutę  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$ , užrašytą „trigonometrinėje“ **formoje**, galime pertvarkyti į eilutę  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$ , užrašytą **kompleksinėje eksponentinėje formoje**.

Tokios eilutės koeficientų  $c_k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) apskaičiavimui taikoma integralinė formulė  $c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} t} dt$ , išvedama iš formulių  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$  ir  $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ .

Koeficiento  $c_0$  reikšmė yra lygi  $\frac{a_0}{2}$ , nes laikoma, jog  $b_0$ , jei toks koeficientas būtų, reikšmė turėtų būti lygi 0, nes  $b_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b \sin\left(0 \cdot \frac{2\pi}{b-a} t\right) dt = 0$ .

Reikia pažymėti, kad, taikant  $c_0$  apskaičiavimui bendrąją formulę  $c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) e^{-ik\omega_1 t} dt$  ir norint išvengti neapibrėžtumų, būtina, kaip ir  $a_0$  apskaičiavimo atveju, šioje formulėje iškart (dar iki integralo apskaičiavimo) pakeisti  $k$  į 0 ir gauti formulę  $c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) e^{-i0 \frac{2\pi}{b-a} t} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$ .

Iš formulės  $c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$  seka, jog  $c_0$  (o kartu ir jam lygus  $\frac{a_0}{2}$ ) yra funkcijos  $x(t)$  vidurkis intervale  $(a, b)$  bei periodinės funkcijos  $f(t)$  vidurkis  $E[f(t)]$ .

Todėl intervale  $(a, b)$  suma  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right)$ , būdama lygi  $x(t) - \frac{a_0}{2} = x(t) - E[x(t)]$ , yra argumento  $t \in (a, b)$  funkcija, vaizduojanti, kaip keičiasi funkcijos  $x(t)$  nuokrypis nuo jos vidurkio intervale  $(a, b)$ , keičiantis  $t$ .

Intervale  $(-\infty < t < +\infty)$  suma  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right)$  yra lygi  $f(t) - c_0 = f(t) - E[f(t)]$  ir vaizduoja funkcijos  $f(t)$  nuokrypio nuo savo vidurkio priklausomybę nuo  $t$ .

Akivaizdu, kad

$$E \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right) \right] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right) \right) dt = 0, \text{ nes}$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \left( x(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{a_0}{2} dt = c_0 - \frac{a_0}{2} = 0. \text{ Todėl integralas } \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{b-a} t} \right) dt$$

yra lygus  $c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$ , t. y. funkcijos  $x(t)$  vidurkiui  $E[x(t)]$  intervale  $(a, b)$ .

Kai  $x(t)$  yra stacionarus ergodinis stochastinis procesas, tai

$$E \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right) \right)^2 \right] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right) \right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( x(t) - \frac{a_0}{2} \right)^2 dt \text{ yra proceso } x(t) \text{ dispersija intervale } (a, b), \text{ vaizduojanti, kaip atsitiktinio}$$

kintamojo  $x(t)$  reikšmės, argumentui  $t$  kintant nuo  $a$  iki  $b$ , yra išsibarsčiusios vidurkio  $E[x(t)] = \frac{a_0}{2}$  atžvilgiu.

Kadangi  $\text{cov}(x(t), x(t+\tau)) = E[(x(t) - E[x(t)])(x(t+\tau) - E[x(t+\tau)])]$  yra proceso  $x(t)$  autokovariacinė funkcija, tai tos funkcijos reikšmės intervale  $(a, b)$  galima apskaičiuoti ne tik tiesiogiai, bet ir pasinaudojant atsitiktinio proceso  $x(t)$  fragmento tame intervale Furjė eilute:  $\text{cov}(x(t), x(t+\tau)) =$

$$= E \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cos k \omega_1 t + b_k^{(1)} \sin k \omega_1 t \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cos k \omega_1 (t+\tau) + b_k^{(2)} \sin k \omega_1 (t+\tau) \right) \right]. \text{ Šioje formulėje}$$

koeficientai  $a_k^{(1)}$  ir  $b_k^{(1)}$  apskaičiuojami procesui  $x(t)$  intervale  $(a, b)$ , o koeficientai  $a_k^{(2)}$  ir  $b_k^{(2)}$  – procesui  $x(t+\tau)$  intervale  $(a+\tau, b+\tau)$ , t. y., kai  $t$  kinta nuo  $a$  iki  $b$ .

Naudodamiesi Furjė eilutėmis, analogiškai galime gauti ir autokoreliacinę proceso  $x(t)$  fragmento funkciją.

Galima pasielgti ir atvirkščiai: suradus kokio nors būdu atsitiktinio proceso  $x(t)$  autokovariacinę ar autokoreliacinę funkciją, po to nagrinėti tų funkcijų fragmentų Furjė eilutes ir, pasinaudojant tokios analizės rezultatais, pavyzdžiui, autokovariacijos bei autokoreliacijos funkcijų spektrais, apie kuriuos kalbėsime šiame skyrelyje, spręsti apie patį atsitiktinį procesą  $x(t)$  bei jame egzistuojančias dėsningumas.

Furjė eilutė gali daug pasakyti apie nagrinėjamą procesą, nes tos eilutės koeficientų  $c_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) moduliai  $|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  vaizduoja amplitudes elementarių harmonikų  $c_k e^{ik\omega_1 t} = a_k \cos k\omega_1 t +$

$$+ i b_k \sin k\omega_1 t, \text{ sudarančių proceso } x(t) \text{ nuokrypį } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) \text{ nuo jo vidurkio } c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Yra įrodyta (žiūr. **Rymano ir Lebegeo teorema** [186]), kad tais atvejais, kai funkcija  $x(t)$  yra absoliučiai integruojama kokiame nors savo egzistavimo intervale, tai tos funkcijos fragmento, atitinkančio tą intervalą, **Furjė eilutės koeficientai  $a_k$  ir  $b_k$ , indekso  $k$  reikšmei artėjant prie  $\infty$ , artėja prie 0**, t. y.  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$  ir  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ . **Artėja prie 0 ir koeficientų  $c_k$  moduliai  $|c_k|$** , kai  $k \rightarrow \pm\infty$ . Tas artėjimas gali vykti įvairiai.

Todėl **Furjė eilutės gali būti taikomos įvairių funkcijų nagrinėjimui bei jų aproksimavimui trigonometriniais daugianariais** (panašiai, kaip taikomos Teiloro eilutės, aproksimuojančios funkcijas laipsniniais daugianariais) **ir funkcijų artutinių reikšmių apskaičiavimui**. Su Furjė eilučių taikymu, apskaičiuojant tiesinių blokų nusistovėjusias išėjimo trajektorijas perdavimo funkcijų metodu, mes jau esame susidūrę šios mokymo priemonės 1.11. skyrelyje.

Ypatingai svarbų vaidmenį Furjė eilutės ir Furjė integralai vaidina **spektrinėje analizėje**, sudarant ir analizuojant įvairių procesų spektrus. Su spektrais mes jau irgi buvome susidūrę šios mokymo priemonės 1.9.1.2. skyrelyje. Dabar pateiksime **proceso  $x(t)$  fragmento spektro apibrėžimą**.

**Proceso  $x(t)$  fragmento intervale  $t \in (a, b)$  spektru vadinamas to fragmento Furjė eilutės  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$  ciklinių dažnių  $\omega_k = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T} = k \frac{2\pi}{b-a}$  (ar dažnių**

**$\nu_k = k\nu_1 = k \frac{1}{T} = \frac{k}{b-a}$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) ir tuos dažnius atitinkančių harmonikų**

**$c_k e^{ik\omega_1 t} = a_k \cos k\omega_1 t + ib_k \sin k\omega_1 t$  amplitudžių  $|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  (ar joms proporcingų dydžių) rinkinys**, vaizduojantis, kaip tos harmonikos ir jų amplitudės yra išsidėsčiusios abscisų  $\omega$  (ar  $\nu = \frac{1}{T}$ ) ašyje ir kaip tų harmonikų amplitudžių dydžiai  $|c_k|$  priklauso nuo  $\omega$  (ar  $\nu$ ).

**Proceso  $x(t)$  baigtinio fragmento spektras grafiškai vaizduojamas vertikalėmis atkarpomis**, turinčiomis ilgus, proporcingus  $|c_k|$ , ir išsidėsčiusiomis abscisų  $\omega$  ašies taškuose  $\omega = \omega_k = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T} = k \frac{2\pi}{b-a}$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Proceso  $x(t)$  fragmento spektras – **labai informatyvi ir labai vaizdi to fragmento charakteristika**, nes, žinodami bei matydami proceso fragmento spektrą, mes galime nustatyti, kokių dažnių  $\omega_k$  harmonikos sudaro to fragmento Furjė eilutę, kiek tų harmonikų spektre yra ir kokios tų harmonikų amplitudės.

**Bet kurio proceso baigtinio ilgio  $T$  fragmento spektras yra diskretus**, nes tarpai tarp gretimų spektro linijų negali būti mažesni už  $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = (k+1)\omega_1 - k\omega_1 = \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{b-a}$ .

Toks spektras gali turėti be galo daug spektro linijų, atitinkančių dažnius  $\omega_k = k\omega_1$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  tačiau egzistuoja ir tokie procesai bei jų fragmentai, kurių spektrai gali turėti tik baigtinį skaičių spektro linijų, nes tų fragmentų Furjė eilutėse tik baigtinis skaičius koeficientų  $c_k$  nėra lygūs 0.

Pavyzdžiui, harmoninių svyravimų  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  bet kurio fragmento spektras, kai to fragmento ilgis  $b-a$  yra funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  periodo  $T$  kartotinis, turi tik dvi nenulines spektro linijas.

Irodysiu šį teiginį, sudarydamas proceso  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmento, kurio ilgis  $b-a$  yra lygus  $nT$ , Furjė eilutę ir išsiaiškindamas, kokias reikšmes įgyja tos eilutės koeficientas, kai  $n$  yra sveikas skaičius.

$$c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt = \frac{1}{nT} \int_a^b \cos \frac{2\pi}{T}t dt = \frac{1}{2\pi n} \left( \sin \frac{2\pi}{T}b - \sin \frac{2\pi}{T}a \right) = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{\pi(b-a)}{T} \cos \frac{\pi(b+a)}{T} =$$

$$= \frac{1}{nT} \sin n\pi \cos \frac{\pi(b+a)}{T} = 0, \text{ nes tuo atveju, kai } n - \text{sveikas skaičius, } \sin n\pi = 0.$$

$$\text{Kai } k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ tai } c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{nT} \int_a^b \cos \frac{2\pi}{T}t e^{-ik \frac{2\pi}{T}t} dt =$$

$$= \frac{1}{2nT} \int_a^b \left( e^{i \frac{2\pi}{T}t} + e^{-i \frac{2\pi}{T}t} \right) e^{-ik \frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{2nT} \int_a^b \left( e^{\frac{i2\pi}{T}(\frac{k}{n}-1)t} + e^{\frac{i2\pi}{T}(\frac{k}{n}+1)t} \right) dt.$$

Eksponenčių laipsnių daugikliai  $\left(\frac{k}{n}-1\right)$  ir  $\left(\frac{k}{n}+1\right)$ , kai  $n$  yra sveikas skaičius, gali tapti lygūs 0 ir būtinai jais tampa, kai koeficientų  $c_k$  numeriai  $k$  tampa lygūs  $n$  ar  $(-n)$ .

$$\text{Todėl } c_n = \frac{1}{2nT} \int_a^b \left( 1 + e^{\frac{i4\pi}{T}t} \right) dt = \frac{b-a}{2nT} - \frac{1}{8i\pi n} \left( e^{\frac{i4\pi}{T}b} - e^{\frac{i4\pi}{T}a} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8i\pi n} e^{\frac{i4\pi(a+b)}{2T}} \left( e^{\frac{i4\pi(b-a)}{2T}} - e^{\frac{i4\pi(a-b)}{2T}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8i\pi n} e^{\frac{i2\pi(a+b)}{T}} \left( e^{-i2\pi n} - e^{i2\pi n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n\pi} e^{\frac{2i\pi(a+b)}{T}} \sin 2n\pi = \frac{1}{2}, \text{ nes, kai } n - \text{sveikas skaičius, } \sin n\pi = 0.$$

Analogiškai gauname, jog ir  $c_{-n} = \frac{1}{2}$ .

Visų kitų koeficientų  $c_k$  reikšmės, kai  $k \neq n$  ir  $k \neq -n$ , yra lygios 0, nes tuomet

$$c_k = \frac{1}{2nT} \left[ \int_a^b e^{\frac{i2\pi(k-n)t}{nT}} dt + \int_a^b e^{\frac{i2\pi(k+n)t}{nT}} dt \right] = \frac{-1}{4i\pi} \left[ \frac{1}{k-n} \left( e^{\frac{i2\pi(k-n)b}{nT}} - e^{\frac{i2\pi(k-n)a}{nT}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k+n} \left( e^{\frac{i2\pi(k+n)b}{nT}} - e^{\frac{i2\pi(k+n)a}{nT}} \right) \right] = -\frac{1}{4i\pi(k^2-n^2)} \left[ (k+n)e^{\frac{i2\pi(k-n)(a+b)}{nT}} \left( e^{\frac{i2\pi(k-n)(b-a)}{nT}} - e^{\frac{i2\pi(k-n)(a-b)}{nT}} \right) \right.$$

$$\left. - e^{\frac{i2\pi(k-n)(a-b)}{nT}} \right] + (k-n)e^{\frac{i2\pi(k+n)(a+b)}{nT}} \left( e^{\frac{i2\pi(k+n)(b-a)}{nT}} - e^{\frac{i2\pi(k+n)(a-b)}{nT}} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{4i\pi(k^2-n^2)} \left[ (k+n)e^{\frac{i\pi(k-n)(a+b)}{nT}} \left( e^{-i\pi(k-n)} - e^{i\pi(k-n)} \right) + (k-n)e^{\frac{i\pi(k+n)(a+b)}{nT}} \left( e^{-i\pi(k+n)} - e^{i\pi(k+n)} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(k^2-n^2)} \left[ (k+n)e^{\frac{i\pi(k-n)(a+b)}{nT}} \sin(k-n)\pi + (k-n)e^{\frac{i\pi(k+n)(a+b)}{nT}} \sin(k+n)\pi \right] = 0, \text{ kadangi, kai } n -$$

sveikas skaičius,  $\sin(k-n)\pi = 0$  ir  $\sin(k+n)\pi = 0$ .

Vadinasi, funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmento, kurio ilgis  $b-a$  yra tos

funkcijos periodo  $T$  kartotinis, Furjė eilutė yra suma  $c_n e^{\frac{i2\pi}{T}t} + c_{-n} e^{-\frac{i2\pi}{T}t} =$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{i2\pi}{T}t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{i2\pi}{T}t} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{i2\pi}{T}t} + e^{-\frac{i2\pi}{T}t} \right) = \cos \frac{2\pi}{T}t = x(t).$$

O tai reiškia, jog šis funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmento periodinis

pratęsimas – funkcija  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{T}t}$  – sutampa su pačia funkcija  $x(t)$ . Tai

natūralu, nes kai periodinės funkcijos  $x(t)$  fragmentą sudaro vienas ar keli tos funkcijos periodai, tai tokio fragmento periodiniai kartojimai – tokio fragmento periodinis pratęsimas  $f(t)$  – negali nesutapti su pačia periodine funkcija.

**Antroji išvada**, kuri išplaukia iš gauto rezultato: funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$

fragmento, kurio ilgis  $b-a$  yra tos funkcijos periodo  $T$  kartotinis, **spektras turi dvi ir tik dvi nenulines spektro linijas, ką ir buvau pažadėjęs įrodyti.**

**Trečioji išvada:** funkcijų  $y_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  ir  $y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

fragmentų, kurių ilgiai  $(b-a)$  yra tų funkcijų periodų  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  ir  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$  kartotiniai,

Furjė eilutes galima gauti ne tik apskaičiuojant tų eilučių koeficientų  $a_k$ ,  $b_k$  ir  $c_k$  reikšmes, naudojantis integralinėmis Furjė eilučių koeficientų reikšmių apskaičiavimo

formulėmis, bet ir skaidant tas funkcijas į elementarių harmoninių  $c_k e^{ik \frac{2\pi}{b-a}t}$  ir  $c_{-k} e^{-ik \frac{2\pi}{b-a}t}$  algebrines sumas, naudojantis Eulerio formulėmis.

Šią išvadą galima taikyti ne tik atskiroms funkcijoms  $y_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  ir  $y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ , bet ir jų algebrinėms sumoms.

Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti nuspėti, kiek spektro linijų turi procesų  $y_3(t) = 2\sin 4t + 3\sin 6t$  ir  $y_4(t) = 6\sin 10t \cdot \cos 2t$  fragmentų, turinčių ilgį  $(b-a)$ , esančius skaičiaus  $\pi$  kartotiniais, spektrai, kokius ciklinius dažnius  $\omega$  atitinka nenulinės tų spektrų linijos ir kokie atkarpu, vaizduojančių tas linijas, ilgiai. Taip pat siūlyčiau skaitytojui šiuos savo spėjimus bei skaičiavimus patikrinti, apskaičiuojant tų funkcijų fragmentų Furjė eilučių koeficientų, naudojantis integralinėmis formulėmis. Tai leistų Jums sužinoti, ar pakankamai gerai įsisavinote funkcijų fragmentų reikšmes Furjė eilučių ir tų fragmentų spektrų sudarymo „technologiją“.

Žymiai sudėtingiau atrodo čia nagrinėtų periodinių funkcijų fragmentų spektrai, kai tų fragmentų ilgiai nėra tų funkcijų periodų kartotiniai. Žymiai sudėtingesnės yra ir funkcijos  $f(t)$  – tų fragmentų periodiniai pratęsimai.

Pavyzdžiui, jau mūsų nagrinėtos funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmento, kurio ilgis yra  $b-a=nT$ ,

kai  $n$  nėra sveikas skaičius, Furjė eilutės koeficientų  $c_n$  reikšmės yra jau visiškai kitokios. Jos **priklauso ne tik nuo fragmento ilgio, bet ir nuo intervalo  $(a, b)$  padėties**, kitaip tariant, koeficientai  $c_k$  yra parametru  $n$  ir  $a$ , charakterizuojančių fragmento ilgį ir padėtį, funkcijos. Nuo tų parametru priklauso ir tų fragmentų spektrai. Įrodysiu tai.

Apskaičiuodami funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmento, kurio ilgis  $a=nT$ , Furjė eilutės koeficiento

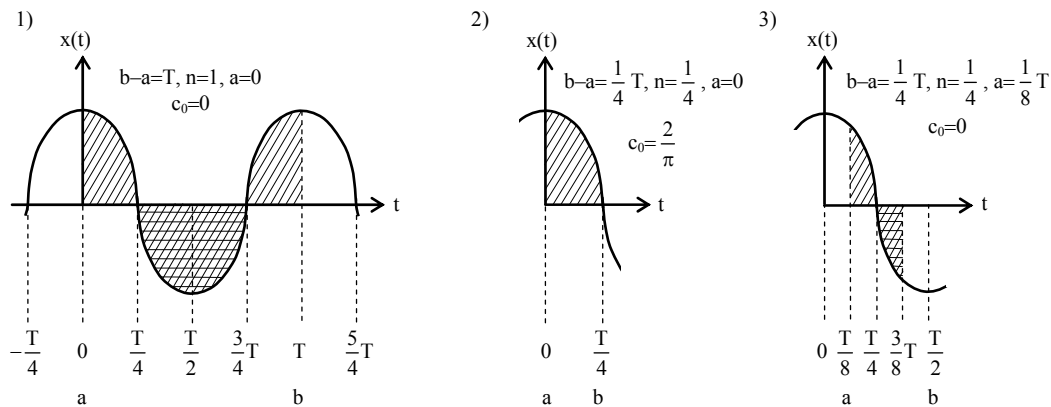
$c_0$ , reikšmę, jau buvome nustatę, jog  $c_0 = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n \cos \frac{\pi(a+b)}{T}$ . Kadangi  $b-a=nT$ , tai  $a+b=2a+nT$ . Todėl

$c_0 = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n \cos \left( \frac{2\pi a}{T} + n\pi \right)$  yra ne tik funkcijos  $x(t) = \frac{2\pi}{T}t$  periodo  $T$ , bet ir intervalo  $(a, b)$  parametru  $n$  ir  $a$ , charakterizuojančių intervalo  $(a, b)$  ilgį ir padėtį, funkcija.

Pavyzdžiui, kai  $n = \frac{1}{4}$  ir  $a=nT$ , kur  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , tai  $c_0 = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( 2\pi m + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\pi}$ , o kai

$n = \frac{1}{4}$  ir  $a = \left( m + \frac{1}{8} \right) T$ , tai  $c_0 = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( 2\pi m + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$ .

Prisiminę, jog  $c_0$  yra lygus funkcijos  $x(t)$  reikšmių intervale  $(a, b)$  vidurkiui, šią koeficiento  $c_0$  reikšmės priklausomybę nuo intervalo ilgio ir jo padėties galime paaiškinti ir grafiškai (žiūr. 323 pav).



323 pav.

Kadangi funkcijos  $x(t)$  reikšmių vidurkis intervale  $(a, b)$  yra lygus  $\frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$ , tai jis turi būti lygus aukštinei stačiakampio, kurio pagrindas yra tas intervalas  $(a, b)$ , o plotas yra lygus funkcijos  $x(t)$  tame intervale ribojamam plotui  $\int_a^b x(t) dt$ .

323 pav. tie plotai užštrichuoti: teigiami plotai – viengubai, neigiami – dvigubai. Todėl koeficiento  $c_0$  ženklas priklauso nuo ploto  $\int_a^b x(t) dt$  ženklo, t. y. nuo teigiamų ir neigiamų plotų algebrinės sumos ženklo, o koeficiento absoliuti reikšmė – nuo algebrinės plotų sumos ir intervalo ilgio  $b-a$  santykio. Stumdant intervalą  $(a, b)$  į kairę ar į dešinę, t. y. keičiant tašką  $a$  padėti, bet nekeičiant  $n$ , intervalo ilgis  $(b-a)$  nesikeičia. Todėl koeficiento  $c_0$  reikšmės pokyčiai yra proporcingi minėtosios teigiamo ir neigiamo plotų algebrinės sumos pokyčiams, ir 323 pav. suteikia galimybę ir be skaičiavimų stebėti, kaip koeficiento  $c_0$  reikšmė priklauso nuo  $n$  ir  $a$ .

Analizuodami 323 pav. pirmąjį brėžinį, mes akivaizdžiai matome, jog tuo atveju, kai intervalą  $(a, b)$  sudaro sveikas funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  periodų skaičius, plotas  $\int_a^b x(t) dt$  ir koeficientas  $c_0$  gali būti lygūs tik 0 ir nepriklauso nuo  $a$ , nes stumdant tašką  $a$  (o kartu su juo ir tašką  $b$ ) į kairę ar dešinę taip, kad intervalo  $(a, b)$  ilgis išliktų pastovus, teigiamo ir neigiamo plotų algebrinė suma išlieka lygi 0.

Antrasis brėžinėlį vaizduoja atvejį  $\left(n = \frac{1}{4}\right) \wedge (a = 0)$ . Iš to brėžinėlio matyti, kad plotas  $\int_a^b x(t) dt$  yra teigiamas, todėl ir  $c_0$  privalo būti teigiamas.

Jei, nekeisdami  $a$ , šiek tiek padidintume  $n$ , tai plotas  $\int_a^b x(t) dt$ , išlikdamas teigiamas, sumažėtų. Išliktų teigiama, bet sumažėtų ir koeficiento  $c_0$  reikšmė. Padidinę  $n$  iki  $\frac{1}{2}$ , gautume, jog  $c_0$  taptų lygus 0, o dar šiek tiek padidinus  $n$  – jau neigiamu dydžiu.

Jei  $n$  liktų pastovus ir lygus  $\frac{1}{4}$ , tai, šiek tiek padidinus  $a$ , koeficiento  $c_0$  reikšmė sumažėtų, o sumažinus – padidėtų. Visa tai rodo, jog tuo atveju, kai  $n$  nėra sveikas skaičius, koeficiento  $c_0$  reikšmė priklauso ir nuo  $n$ , ir nuo  $a$ .

Trečiasis brėžinėlį vaizduoja situaciją  $\left(n = \frac{1}{4}\right) \wedge \left(a = \frac{T}{8}\right)$ . Ši situacija yra ypatinga tuo, kad joje net tuo atveju, kai  $n$  nėra sveikas skaičius, koeficientas  $c_0$  yra lygus 0. Jis išlieka lygus 0 ir didinat, ir mažinant intervalo ilgį taip, kad intervalo  $(a, b)$  centras liktų toje pačioje vietoje. Tai leidžia padaryti išvadą, kad intervalo  $(a, b)$  padėtį būtų tikslingiau charakterizuoti ne intervalo pradžios ar

**pabaigos taškų, o jo vidurio koordinate.** Nuo to formulėse padaugėtų simetrijos ir kai kurie dėsniniai teptų lengviau pastebimi.

Analizuojant trečiąją 323 pav. brėžinė, nesunku pastebėti, kad truputėlį pastūmus intervalą (a, b), nekeičiant jo ilgio, į dešinę, koeficiento reikšmė taptų neigiamą, o į kairę – teigiamą.

Rekomenduojama skaitytojui paanalizuoti, kaip keistųsi koeficiento  $c_0$  reikšmės, keičiant a (ar intervalo (a, b) centrą  $t_c = \frac{a+b}{2}$ ), kai n būtų lygus  $\frac{3}{2}$ . Būtų naudinga, kad skaitytojas šią analizę atliktų abiem būdais (grafiskai ir analiziškai), o po to palygintų ne tik gautus rezultatus, o ir pačius tų rezultatų gavimo metodus, įvertindamas, kada ir siekiant kokio tikslo kuriuo metodu tikslinga naudotis ir kada galėtų būti naudinga abiejų metodų sintezė.

Iš formulės, kurią taikėme funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  fragmentų Furjė eilučių koeficientų  $c_k$  reikšmių apskaičiavimui, kai n buvo sveikas skaičius ir k nebuvo lygus nei 0, nei n, nei (-n), nesunku gauti tokią formulę koeficientų  $c_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) reikšmių apskaičiavimui, kuri tiktų ir atvejui, kai n nėra sveikas skaičius, bei leistų analizuoti tų koeficientų reikšmių priklausomybę nuo intervalo (a, b) ilgio ir jo padėties, kaip tai ką tik darėme, nagrinėdami koeficiento  $c_0$  apskaičiavimo formulę.

Aš čia tos formulės nebeišvedinėsiu, palikdamas tą darbą pačiam skaitytojui kaip pratybinę užduotį, ir apsiribosiu tik pačios tos formulės pateikimu, kad skaitytojas galėtų patikrinti, ar teisingai tą užduotį atliko. Ta formulė bus mums reikalinga ne tik apskaičiuojant koeficientų  $c_k$  reikšmes, bet ir darant kai kurias išvadas apie funkcijų fragmentų spektrus ir tų fragmentų periodinius pratęsimus –

$$\text{funkcijos } f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{b-a} t}.$$

Koeficientų  $c_k$  reikšmių apskaičiavimo formulė yra tokia:

$$c_k = -\frac{\sin \pi n}{\pi(k^2 - n^2)} e^{-\frac{i2\pi ka}{\pi T}} \left[ ik \sin \left( \frac{2a\pi}{T} + n\pi \right) + n \cos \left( \frac{2a\pi}{T} + n\pi \right) \right].$$

Šiai formulei galima suteikti dar šiek tiek kompaktiškesnę ir simetriškesnę formą, pereinant nuo intervalo (a, b) padėties charakterizavimo intervalo pradžios koordinate a prie tos padėties charakterizavimo intervalo vidurio koordinate  $c = \frac{a+b}{2}$ . Tuomet  $a = c - n \frac{T}{2}$  ir todėl visoms  $k = \pm 1, \pm 2,$

$$\pm 3, \dots \text{ reikšmėms } c_k = (-1)^{k-1} \frac{\sin \pi n}{\pi(k^2 - n^2)} e^{-\frac{i2\pi kc}{nT}} \left( ik \sin \frac{2\pi c}{T} + n \cos \frac{2\pi c}{T} \right).$$

Pasinaudosime šiomis formulėmis, apskaičiuodami koeficientų  $c_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) reikšmes funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  fragmentams, kuriems jau esame apskaičiavę koeficientų  $c_0$  reikšmes.

Pirmąją formulę pasinaudosime Furjė eilutės sudarymui šios funkcijos fragmentams ( $mT < t < (m + \frac{1}{4})T$ ), o antrąją – tos pačios funkcijos fragmentams ( $(m + \frac{1}{8})T < t < (m + \frac{3}{8})T$ ).

Fragmentuose  $\left( mT; \left( m + \frac{1}{4} \right) T \right)$  Furjė eilutės parametrų a ir b reikšmės yra:  $a = mT$ ,

$$b = \left( m + \frac{1}{4} \right) T, \quad b - a = \frac{1}{4} T, \quad \text{todėl } n = \frac{1}{4} \quad \text{ir} \quad c_k = -\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\pi \left( k^2 - \frac{1}{16} \right)} e^{-i8\pi k} \left[ ik \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4} \cos \left( 2\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi \left( k^2 - \frac{1}{16} \right)} (\cos 8\pi k - i \sin 8\pi k) \frac{\sqrt{2}}{2} \left( ik + \frac{1}{4} \right) = \frac{-2(4ik + 1)}{\pi(16k^2 - 1)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Koeficiento  $c_0$  reikšmę esame suradę jau anksčiau. Ji lygi  $\frac{2}{\pi}$ . Vadinasi, šio fragmento Furjė eilutės visi koeficientai  $c_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) yra nelygūs 0. Todėl **šio fragmento spektrą sudaro be galo daug spektro linijų.**

Šis rezultatas, kartais nustebinantis kai kuriuos studentus, gali šiek tiek nustebinti ir skaitytoją. Juk funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  fragmentų, kurių ilgis (b-a) buvo tos funkcijos periodo T kartotiniai,

**spektrą sudarė tik dvi linijos**, o tų fragmentų Furjė eilutė buvo suma  $\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t} = \cos\frac{2\pi}{T}t$ , sutampanti su pačia funkcija  $x(t)$  kiekviename jos taške: ir intervale  $(a, b)$ , ir už jo ribų. Tai buvo natūralu ir suprantama. **Kodėl, pasikeitus tik intervalo ilgiui, taip pasikeitė tame intervale tą pačią funkciją  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  vaizduojanti Furjė eilutė ir fragmento spektras?** Juk bet kuriame funkcijos

$$x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t \text{ fragmento taške galioja lygybė } x(t) = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}.$$

Nejaugi ta lygybė nebegalioja funkcijai  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  intervaluose  $(mT < t < (m + \frac{1}{4})T)$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ?

Į šiuos klausimus (juos man kartais užduoda studentai), atsakysiu šiek tiek vėliau, kai susikaups dar daugiau faktų, bylojančių apie Furjė eilučių ir įvairių funkcijų įvairių fragmentų spektrų savybes, o dabar pratęsiu funkcijos  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  fragmento  $(mT < t < (m + \frac{1}{4})T)$  Furjė eilutės nagrinėjimą.

$$\text{Kadangi } c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \text{ ir } c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \text{ tai}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{-2(4ik+1)}{\pi(16k^2-1)} + \frac{2(4ik-1)}{\pi(16k^2-1)} = \frac{-4}{\pi(16k^2-1)}, \text{ o } b_k = \frac{1}{i}(c_{-k} - c_k) = \frac{16k}{\pi(16k^2-1)}.$$

$$\text{Iš lygybės } \frac{a_0}{2} = c_0 \text{ seka, jog šioje Furjė eilutėje } a_0 = \frac{4}{\pi}.$$

Dabar jau galime užrašyti funkcijos  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  fragmento  $0 < t < \frac{T}{4}$  Furjė eilutę, kuri tuo pačiu metu yra ir funkcijos  $f(t)$  – to fragmento periodinio pratęsimo į abi puses (argumento  $t$  didėjimo ir mažėjimo kryptimis) – formulė.

Pateiksiu šią formulę kompleksinėje eksponentinėje ir „trigonometrinėje“ formose:

$$f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = -\frac{2}{\pi} \frac{4ik+1}{16k^2-1} e^{ik\frac{8\pi}{T}t} \text{ ir}$$

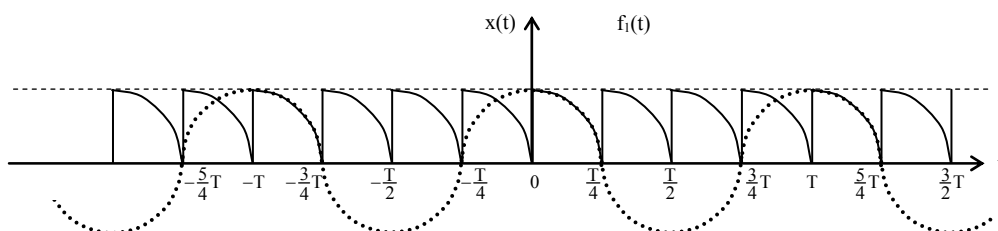
$$f_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{T}t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T}t \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1} \left( \cos k \frac{8\pi}{T}t - 4 \sin k \frac{8\pi}{T}t \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{15} \cos \frac{8\pi}{T}t - \frac{4}{15} \sin \frac{8\pi}{T}t + \frac{1}{63} \cos \frac{16\pi}{T}t - \frac{8}{63} \sin \frac{16\pi}{T}t + \frac{1}{143} \cos \frac{24\pi}{T}t - \frac{12}{63} \sin \frac{24\pi}{T}t + \dots \right).$$

Abi Furjė eilutės formos ir funkcijos  $f(t)$  išraiškos – kompleksinė eksponentinė ir „trigonometrinė“ – yra ekvivalenčios.

Funkcija  $f_1(t)$ , būdama funkcijos  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  fragmento  $0 < t < \frac{T}{4}$  periodiniu pratęsimu, yra periodinė. Jos periodas yra lygus  $b-a$ , t. y.  $nT = \frac{1}{4}T$ , kitaip tariant, keturis kartus trumpesnis už funkcijos  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  periodą  $T$ . Intervaluose  $mT < t < \left(m + \frac{1}{4}\right)T$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) funkcija  $f_1(t)$  sutampa su funkcija  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$ , o visur kitur – jau nebesutampa.

Funkcijų  $f_1(t)$  ir  $x(t)$  grafikai pateikti 324 pav.: funkcijos  $x(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$  grafikas pavaizduotas taškučiais, o funkcijos  $f_1(t)$  grafikas – ištisine linija.



Analizuodami 324 pav. pateiktus funkcijų  $x(t)$  ir  $f_1(t)$  grafikus, galime akivaizdžiai įsitikinti, jog funkcija  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$  ir funkcija  $f_1(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \left( \cos k \frac{8\pi}{T}t - 4k \sin k \frac{8\pi}{T}t \right)$  nėra tapačios funkcijos, nors intervaluose  $\left( mT < t < \left( m + \frac{1}{4} \right) T \right)$  jos ir sutampa. Už tų intervalų ribų funkcijos  $x(t)$  ir  $f_1(t)$  jau nebesutampa ir todėl ką tik minėtoji Furjė eilutė jau nėra lygi funkcijai  $x(t)$ .

Vaizdžiai kalbant, intervaluose  $\left( mT < t < \left( m + \frac{1}{4} \right) T \right)$  algebrinės sumos  $\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$  ir  $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \left( \cos k \frac{8\pi}{T}t - 4k \sin k \frac{8\pi}{T}t \right)$  yra matematinės kalbos „žodžio“ – formulės  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  – „sinonimai“, žymintys vieną ir tą patį „denotatą“.

Skirtumas tik tas, kad už tų intervalų ribų „žodžių“  $\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$  ir  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  „sinonimiškumas“ išlieka, o „žodžių“  $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \left( \cos k \frac{8\pi}{T}t - 4k \sin k \frac{8\pi}{T}t \right)$  ir  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  „sinonimiškumo“ nebelieka. Tai – skirtingos funkcijos. Todėl mes ir žymime jas skirtingai: vieną žymime  $f_1(t)$ , kitą –  $x(t)$ .

Periodinė funkcija  $f(t)$ , būdama periodinės funkcijos  $x(t)$  intervalo  $(a, b)$  periodiniu pratęsimu, kartais gali ir pilnai (t. y. visoje tų funkcijų apibrėžimo srityje) sutapti su funkcija  $x(t)$ , kartais gali sutapti tik intervale  $a < t < b$  o kartais, nesutapdama visoje tų funkcijų apibrėžimo srityje, gali sutapti ne tik intervale  $a < t < b$ , bet ir eilėje kitų, periodiškai besikartojančių intervalų. Šis – trečiasis – atvejis ir iliustruojamas 324 pav., kuriame funkcija  $f(t)$  sutampa su funkcija  $x(t)$  intervaluose  $\left( mT < t < \left( m + \frac{1}{4} \right) T \right)$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

**Pirmasis atvejis** – funkcijų  $f(t)$  ir  $x(t)$  pilno sutapimo atvejis – būna tada, kada funkcijos  $f(t)$  periodas  $(b-a)$  yra funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotinis, t. y. tada, kai santykis  $\frac{b-a}{T}$  yra sveikas skaičius, nes tada funkcija  $f(t)$ , kartodama savo periodus  $b-a$ , turinčius sveiką skaičių funkcijos  $x(t)$  periodų  $T$ , tuo pačiu metu kartoja ir funkcijos  $x(t)$  periodus, pakartodama funkcijos  $x(t)$  reikšmės kitimo eigą visoje jos apibrėžimo srityje. Tokį atvejį mes jau esame išnagrinėję anksčiau.

**Antrasis atvejis** nutinka tada, kai funkcija  $x(t)$  yra neperiodinė, taip pat ir tada, kai funkcija  $x(t)$  yra periodinė, tačiau santykis  $\frac{b-a}{T}$  yra iracionalus skaičius. Tuomet funkcijų  $x(t)$  ir  $f(t)$  intervalinis sutapimas, egzistuojantis intervale  $a < t < b$ , funkcijai  $f(t)$  kartojant šį funkcijos  $x(t)$  reikšmių intervalą, niekur pasikartoti jau nebegali.

**Trečiasis atvejis** nutinka tada, kada santykis  $\frac{b-a}{T}$  yra racionalus skaičius, bet nėra sveikas skaičius. 324 pav. kaip tik ir pavaizduotas toks atvejis, kai tas santykis yra  $\frac{1}{4}$ , t. y., kai periodas  $b-a$  yra racionalus skaičius mažesnis už  $T$ .

Panašų atvejį būtume gavę ir tada, kai tas santykis būtų buvęs, pavyzdžiui,  $\frac{5}{3}$ , t. y. ir tada, kada  $b-a > T$ .

O jei tas santykis būtų buvęs „ $\sqrt{2}$ “, „ $e$ “ arba „ $\pi$ “, tai būtume gavę antrąjį atvejį. Antrąjį atvejį būtume gavę ir tada, kai  $x(t)$  būtų buvusi neperiodinė funkcija, pavyzdžiui, eksponentė  $e^{-|t|}$ .

Funkcijos  $x(t) = e^{-|t|}$  fragmento  $(a, b)$  Furjė eilutę ir spektrą mes dar nagrinėsime, tačiau šiek tiek vėliau.

Reikėtų pažymėti, kad antruoju ir trečiuoju atvejais pasireiškia dar vienas skirtumas tarp funkcijų  $f(t)$  ir  $x(t)$ : periodinės funkcijos  $f(t)$  periodų turinčių ilgį  $b-a$  galuose gali atsirasti pirmosios rūšies trūkiai. Juos galime pastebėti ir 324 pav., kur tie trūkiai atsiranda taškuose dėl  $t = m \frac{T}{4}$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ).

$\pm 2, \dots$ ). Pereinant tuos taškus argumento  $t$  reikšmės didėjimo kryptimi, funkcijos  $f_1(t)$  reikšmė padidėja šuoliu nuo 0 iki 1, t. y. taškuose  $t=m\frac{T}{4}$  atsiranda funkcijos  $f_1(t)$  pirmosios rūšies trūkiai bei funkcijos  $f_1(t)$  reikšmės neapibrėžtumas tuose taškuose. Funkcijos  $f(t)$  neapibrėžtumas taškuose  $t=a+m(b-a)$  egzistavo ir tuo atveju, kai funkcijos  $f(t)$  periodas  $b-a$  buvo funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotinis, nes mes, konstruodami funkcijos  $x(t)$  fragmento, apibrėžto **atvirame intervale**  $a < t < b$ , Furjė eilutę ir funkciją  $f(t)$  – to fragmento periodinį pratęsimą, funkcijos  $f(t)$  reikšmės taškuose  $t=a$  ir  $t=b$  niekaip neapibrėžėme. To neapibrėžtumo mes tuomet nepastebėjome todėl, kad atveju, kai lygybėje  $b-a=nT$  skaičius  $n$  yra sveikas, funkcija  $f(t)$  neturi trūkio taškų, nes, pereinant per taškus  $t=a+m(b-a)=a+mnT$ , funkcijos  $f(t)$  reikšmė keičiasi tolydžiai, nedarydama šuolių. Taip atsitinka todėl, kad tuomet  $x(b)=\cos\frac{2\pi}{T}b=$   
 $=\cos\left(\frac{2\pi}{T}(a+nT)\right)=\cos\left(\frac{2\pi a}{T}+n2\pi\right)=\cos\frac{2\pi}{T}a=x(a)$  ir funkcija  $f(t)$  periodiškai kartojamo intervalo  $(a, b)$  galuose turi vienodas reikšmes. Tai leidžia jungti tuos intervalus į grandinę be funkcijos  $f(t)$  reikšmės pokyčio šuolių. Kai  $n=\frac{1}{4}$  ir  $a=0$ , o  $b=\frac{1}{4}T$ , tokios lygybės tarp  $x(a)$  ir  $x(b)$  jau nėra, nes  $x(a)=\cos\frac{2\pi}{T}a=\cos 0=1$ , o  $x(b)=\cos\frac{2\pi}{T}b=\cos\frac{\pi}{2}=0$ . Dėl to ir atsiranda funkcijos  $f_1(t)$  reikšmės šuoliai, pereinant per taškus  $t=a+m(b-a)$ .

Šiuose taškuose tų šuolių dydis yra lygus funkcijos  $x(t)$  teiksmių taškuose  $t=a$  ir  $t=b$  skirtumo absoliučiai reikšmei  $|x(a)-x(b)|$ .

324 pav. vaizduoja atvejį  $a=0$ ,  $b=\frac{T}{4}$ ,  $x(t)=\cos\frac{2\pi}{T}t$ . Todėl šiuo atveju funkcijos  $f_1(t)$  ypatingųjų taškų, kuriose funkcijos  $f_1(t)$  reikšmė daro šuolius, koordinatės yra  $t=a+m(b-a)=0+m\left(\frac{T}{4}-0\right)=m\frac{T}{4}$ , o šuolių dydis yra lygus  $|x(a)-x(b)|=\left|\cos\left(\frac{2\pi}{T}0\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right)\right|=|1-0|=1$ .

Nors pačiuose taškuose  $t=m\frac{T}{4}$  funkcijos  $f_1(t)$  reikšmę mes nesame apibrėžę, tačiau galima pabandyti išsiaiškinti, kokią reikšmę įgyja Furjė eilutė  $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2-1}\left(\cos k\frac{8\pi}{T}t-4k\sin k\frac{8\pi}{T}t\right)$ , kai  $t=0$  ir kai  $t=\frac{T}{4}$ .

$$\begin{aligned} f_1(a)=f_1(0) &= \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2-1}(\cos 0-4k\sin 0)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2-1}= \\ &= \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+1}\right)=\frac{2}{\pi}\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+1}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots\right)= \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Pasinaudodami gerai žinoma (išplaukiančia iš  $\arctg x$  Teiloro eilutės, kai  $x=1$ ) **Leibnicio formule**  $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ , randame, jog mūsų nagrinėjamos Furjė eilutės ir funkcijos  $f_1(t)$  reikšmė intervalo  $(a,b)$  pradžios taške  $a$ , kuris kartu yra ir funkcijos  $f_1(t)$  reikšmės šuolio taškas, yra  $\frac{2\pi}{\pi 4}=\frac{1}{2}$ .

Analogiškai gauname, jog

$$f_1(b)=f_1\left(\frac{T}{4}\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2-1}\left(\cos k\frac{8\pi}{T}\frac{T}{4}-4k\sin k\frac{8\pi}{T}\frac{T}{4}\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2-1}=f_1(0)=f_1(a)=\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, rastoji funkcijos  $f_1(t)$  reikšmė intervalo  $(a, b)$  pabaigos taške  $t=b$  sutampa su tos funkcijos reikšme intervalo pradžios taške  $a$ .

Kadangi funkcija  $f_1(t)$  yra funkcijos  $x(t)$  intervalo  $(a, b)$  periodinis pratęsimas į kairę ir į dešinę, tai visuose taškuose  $t = m\frac{T}{4}$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), kuriuose funkcijos  $f_1(t)$  reikšmė šuoliu keičiasi nuo 0 iki 1, funkcijos  $f_1(t)$  reikšmę  $f_1(m\frac{T}{4})$  laikysime lygia  $\frac{1}{2}$ .

Pabrėžtina, kad ši reikšmė tenkina lygybę  $f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$ , galiojančią ir visiems funkcijos  $f(t)$  apibrėžimo taškams, priklausantiems tos funkcijos tolydumo sritims. Todėl galima teigti, jog formulė  $f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$  galioja visai  $f(t)$  egzistavimo sričiai  $t \in (-\infty, +\infty)$ , įskaitant ir tos funkcijos reikšmės diskretaus kitimo taškus  $t = m\frac{T}{4}$ .

Pažymėtina taip pat, kad atliktų skaičiavimų rezultatai rodo, jog  $f_1(a) \neq x(a)$  ir  $f_1(b) \neq x(b)$ . Juk  $x(a) = x(0) = \cos \frac{2\pi}{T} 0 = 1$  ir  $x(b) = x\left(\frac{T}{4}\right) = \cos \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \neq \frac{1}{2}$ .

Tai reiškia, jog funkcijų  $f_1(t)$  ir  $x(t)$  reikšmės, sutapdamos atvirame intervale  $0 < t < \frac{T}{4}$  (ir bendrai intervaluose  $mT < t < \left(m + \frac{1}{4}\right)T$ ), nesutampa tų intervalų galuose. Kitaip tariant, funkcijos  $f_1(t)$  ir  $x(t)$ , sutapdamos atviruose intervaluose, nėra pilnai sutampančiomis uždaruose intervaluose  $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$  (ir bendrai – intervaluose  $mT \leq t \leq \left(m + \frac{1}{4}\right)T$ ).

Galime pastebėti dar ir tai, kad  $f_1(a) = f_1(b) = \frac{x(a) + x(b)}{2}$ , nes kaip jau esame paskaičiavę:  $f_1(a) = f_1(b) = \frac{1}{2}$ , o  $x(a) = x(0) = 1$  ir  $x(b) = x\left(\frac{T}{4}\right) = 0$ .

Kad ši lygybė reiškia dėsningumą, o ne atsitiktinį sutapimą, galėsime įsitikinti, atlikdami dar vieną (jau anksčiau pažadėtą) matematinį eksperimentą – sudarydami Furjė eilutę tos pačios funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  to paties ilgio  $b - a = \frac{1}{4}T$  fragmentui, tačiau turinčiam kitą pradžios tašką  $a$  lygu ne 0, kaip buvo ką tik nagrinėtame pavyzdyje, o  $\frac{T}{8}$ . Taško  $b$  koordinatė šiuo atveju yra lygi  $a + (b - a) = \frac{T}{8} + \frac{T}{4} = \frac{3}{8}T$ . Žinodami  $a$  ir  $b$  reikšmes, galime surasti intervalo taško  $c$ , charakterizuojančio intervalo  $(a, b)$  padėtį, koordinatę:  $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}T + \frac{3}{8}T\right) = \frac{T}{4}$ .

Šio funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  fragmento Furjė eilutės koeficiento  $c_0$  reikšmę mes jau esame apskaičiavę ir buvome radę, jog  $c_0 = 0$ .

Esame suradę ir to fragmento grafiką. Jis pateiktas 323 pav. trečiajame brėžinyje ir riboja ten užstrichuotą plotą. Periodiškai pratęsdami tą funkcijos  $x(t)$  grafiko fragmentą, atitinkantį atvirą intervalą  $\frac{T}{8} < t < \frac{3T}{8}$ , į kairę ir į dešinę, mes gautume funkcijos  $f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{8\pi}{T}t}$  grafiką. Jis jau būtų kitoks negu mūsų anksčiau sudarytos Furjė eilutės grafikas, pavaizduotas 324 pav., tačiau ir šis grafikas turėtų funkcijos  $f_2(t)$  kitimo šuoliu taškus, bet jau kitose vietose: tų taškų koordinatės yra  $t = a + m(b - a) = \frac{T}{8} + m\frac{T}{4}$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Taip pat ir funkcijos  $f_2(t)$  reikšmės šuolių dydžiai būtų jau kitokie: ne nuo  $x(b) = \cos \frac{2\pi}{T} b = \cos \frac{2\pi}{T} \frac{3T}{8} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  iki  $x(a) = \cos \frac{2\pi}{T} a = \cos \frac{2\pi}{T} \frac{T}{8} = 1$ , o nuo  $x(b) = \cos \frac{2\pi}{T} b = \cos \frac{2\pi}{T} \frac{3T}{8} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  iki

$x(a) = \cos \frac{2\pi T}{T} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Šuolio dydis  $|x(a) - x(b)| = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$  šiuo atveju būtų jau didesnis negu atveju, pavaizduotu 324 pav.

Funkcijos  $f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik \frac{8\pi}{T} t}$  koeficientų  $c_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) apskaičiavimui, kaip jau buvo žadėta, pasinaudosime formule, vaizduojančia koeficientų  $c_k$  reikšmių priklausomybę nuo parametrų  $k$ ,  $T$ ,  $n$  ir  $c$ :  $c_k = (-1)^{k-1} \frac{\sin \pi n}{\pi(k^2 - n^2)} e^{-\frac{ik2\pi c}{nT}} \left( ik \sin \frac{2\pi c}{T} + n \cos \frac{2\pi c}{T} \right)$ . Įstatę į šią formulę  $n = \frac{1}{4}$  ir  $c = \frac{T}{4}$ , gauname jog šiuo atveju  $c_k = (-1)^{k-1} \frac{8ik\sqrt{2}}{\pi(16k^2 - 1)}$ .

Kadangi koeficientų  $c_k$  reikšmės yra menamos, tai šiuo atveju koeficientai  $a_k$  yra lygūs 0. Koeficientai  $b_k$  yra lygūs  $\frac{1}{i}(c_{k-1} - c_k) = \frac{1}{i} \left[ (-1)^{k-1} \frac{8ik\sqrt{2}}{\pi(16k^2 - 1)} \right] (-1 - 1) = (-1)^k \frac{16k\sqrt{2}}{\pi(16k^2 - 1)}$ .

Funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  fragmento  $\left( \frac{T}{8} < t < \frac{3T}{8} \right)$  Furjė eilutę ir to fragmento periodinį pratęsimą vaizduojanti funkcija  $f_2(t)$  atrodo taip:  $f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{8ik\sqrt{2}}{\pi(16k^2 - 1)} e^{ik \frac{2\pi}{T} t} =$   
 $= \frac{8i\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{16k^2 - 1} e^{ik \frac{8\pi}{T} t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{b-a} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} t \right) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{16k^2 - 1} \sin k \frac{8\pi}{T} t =$   
 $= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \left( -\frac{1}{15} \sin \frac{8\pi}{T} t + \frac{2}{63} \sin \frac{16\pi}{T} t - \frac{3}{143} \sin \frac{24\pi}{T} t + \frac{4}{255} \sin \frac{32\pi}{T} t - \frac{5}{399} \sin \frac{40\pi}{T} t + \dots \right)$ .

Funkcija  $f_2(t)$  intervaluose  $a + m(b-a) < t < b + m(b-a)$ , t. y. intervaluose  $\frac{T}{8} + m \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{8} + m \frac{T}{4}$ , sutampa su funkcija  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$ , o taškuose  $t = a + m(b-a) = \frac{T}{8} + m \frac{T}{4} = (2m+1) \frac{T}{8}$  ir taškuose  $t = b + m(b-a) = \frac{3T}{8} + m \frac{T}{4} = (2m+3) \frac{T}{8}$  (kurie yra tie patys taškai  $t = (2m+1) \frac{T}{8}$ , tik turintys vienetu didesnę numerį  $m$ , galintį turėti reikšmes 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , ...) šuoliu keičia savo reikšmę ir jau nebesutampa su funkcijos  $x(t)$  reikšme.

Apskaičiuosime funkcijos  $f_2(t)$  reikšmę tuose taškuose. Taške  $a = \frac{T}{8}$  funkcijos  $f_2(t)$  reikšmė yra  $f_2(t) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{16k^2 - 1} \sin k \frac{8\pi}{T} \frac{T}{8} = 0$ . Tokią pačią reikšmę funkcija  $f_2(t)$  turi ir taške  $b = \frac{3T}{8}$ .

Lygybės  $f_2(a) = f_2(b)$  ir  $f_1(a) = f_1(b)$  nėra atsitiktinis funkcijų  $f_1(t)$  ir  $f_2(t)$  reikšmių sutapimas. Jis išplaukia iš funkcijų  $f(t)$  periodiškumo. Juk atstumas tarp taškų  $a$  ir  $b$  yra lygus funkcijos  $f(t)$  periodui  $b-a$ . Todėl funkcijos  $f(t)$  reikšmės taškuose  $t=a$  ir  $t=b$  privalo sutapti. Matematiniai eksperimentai tai patvirtina.

Tačiau tos reikšmės (kaip ir anksčiau nagrinėtu atveju) nesutampa su funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$  reikšmėmis tuose taškuose:  $x(a) = \cos \frac{2\pi T}{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  nesutampa su  $f_2\left(\frac{T}{8}\right) = 0$ ;  $x(b) = \cos \frac{2\pi 3}{T} \frac{T}{8} = \cos \frac{3}{4} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  nesutampa su  $f_2\left(\frac{3T}{8}\right) = 0$ .

Kadangi  $x(a) + x(b) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$  tai ir šiuo atveju galioja lygybė  $f(a) = f(b) = \frac{x(a) + x(b)}{2}$ . Ši lygybė yra Furjė eilučių savybė, išplaukianti iš savybės  $f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$ . Todėl ji galioja visoms Furjė eilutėms visuose taškuose  $t$ .

Kad įsitikintume, jog Furjė eilutė  $\frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{16k^2-1} \sin \frac{8\pi k}{T} t$  intervale  $\frac{T}{8} < t < \frac{3}{8}T$

sutampa su funkcija  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T} t$ , reikėtų įrodyti, kad bet kuriame to intervalo taške  $t$  galioja lygybė

$f_2(t) = x(t)$ . Tiesioginis šios lygybės įrodymas nėra paprastas, nors šios lygybės galiojimas visuose intervalo  $a < t < b$  taškuose išplaukia iš Furjė eilutės sudarymo algoritmo: jos koeficientų  $a$ ,  $b$  ir  $c$  reikšmės parenkamos taip, kad intervale  $a < t < b$  ši lygybė egzistuotų, tiksliau sakant, **tų koeficientų apskaičiavimo integralinės formulės buvo išvestos remiantis šią lygybę ir todėl, naudojantis tomis formulėmis apskaičiuojamos tokios tų koeficientų reikšmės, kad intervalo  $(a, b)$  taškuose Furjė eilutės reikšmės sutaptų su tos funkcijos, kuriai ta eilutė sudaryta, reikšmėmis.**

Tačiau jei skaitytojas panorėtų tiesiogiai patikrinti, ar tikrai sudarytoji Furjė eilutė intervale  $(a, b)$  sutampa su funkcija  $x(t)$ , jis galėtų tai padaryti, apskaičiuodamas intervalo  $a < t < b$  taškuose  $t$  funkcijų  $x(t)$  ir  $f(t)$  reikšmes ir palygindamas jas.

Pavyzdžiui, pasirinkęs intervalo  $\left(\frac{T}{8}, \frac{3}{8}T\right)$  vidurio tašką  $c = \frac{T}{4}$ , jis gautų, jog  $x\left(\frac{T}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  ir  $f_2\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{16k^2-1} \sin\left(k \frac{8\pi T}{T} \frac{T}{4}\right) = 0$ , t. y. tiesiogiai įsitikintų, jog taške  $t = c = \frac{T}{4}$  lygybė  $f_2(t) = x(t)$  galioja.

Ne visuose intervalo  $\frac{T}{8} < t < \frac{3}{8}T$  taškuose  $t$  lygybės  $f_2(t) = x(t)$  galiojimo patikrinimas yra toks lengvas. Daugumoje taškų tenka pasitenkinti tuo, jog juose Furjė eilutė konverguoja į funkcijos  $x(t)$  reikšmes tuose taškuose, nes ne visada pavyksta Furjė eilutę transformuoti į eilutę, kurios sumos tiksli reikšmė mums žinoma ar lengvai apskaičiuojama.

Jei, pavyzdžiui, parinktume tašką  $t = \frac{T}{6}$ , taip pat priklausantį intervalui  $\left(\frac{T}{8}, \frac{3}{8}T\right)$ , tai gautume, jog  $x\left(\frac{T}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , o  $f_2\left(\frac{T}{6}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{16k^2-1} \sin\left(k \frac{8\pi T}{T} \frac{T}{6}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(4k-1)(4k+1)} \sin \frac{4}{3} k\pi$ .

Kadangi  $\sin \frac{4}{3} k\pi = \sin\left(k\pi + \frac{k\pi}{3}\right) = \sin k\pi \cos \frac{k\pi}{3} + \cos k\pi \sin \frac{k\pi}{3} = (-1)^k \sin k \frac{\pi}{3}$ , tai  $f_2\left(\frac{T}{6}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k-1)(4k+1)} \sin k \frac{\pi}{3}$ , nes  $(-1)^k (-1)^k = 1$ .

Kai  $k=1$ , tai  $\sin k \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; kai  $k=2$ , tai  $\sin k \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; kai  $k=3$ , tai  $\sin k \frac{\pi}{3} = 0$ ; kai  $k=4$ , tai  $\sin k \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; kai  $k=5$ , tai  $\sin k \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; kai  $k=6$ , tai  $\sin k \frac{\pi}{3} = \sin 2\pi = 0$ .

Kadangi  $2\pi$  yra funkcijos  $\sin x$  periodas, toliau viskas kartojasi. Kitaip tariant,  $\sin(6m+0) \frac{\pi}{3} = 0$ ,  $\sin(6m+1) \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin(6m+2) \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin(6m+3) \frac{\pi}{3} = 0$ ,  $\sin(6m+4) \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin(6m+5) \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin(6m+6) \frac{\pi}{3} = 0$ .

Ši  $\sin k \frac{\pi}{3}$  reikšmės kitimo dėsningumą galima užrašyti dar trumpiau:  $\sin 3m \frac{\pi}{3} = 0$ ,  $\sin(3m+1) \frac{\pi}{3} = \sin(3m+2) \frac{\pi}{3} = (-1)^m \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Todėl } f_2\left(\frac{T}{6}\right) = \frac{8\sqrt{6}}{\pi} \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{7 \cdot 9} - \frac{4}{15 \cdot 17} - \frac{5}{19 \cdot 21} + \frac{7}{27 \cdot 29} + \frac{8}{31 \cdot 33} - \frac{10}{39 \cdot 41} - \frac{11}{43 \cdot 45} + \frac{13}{51 \cdot 53} + \right. \\ \left. + \frac{14}{55 \cdot 57} - \frac{16}{63 \cdot 65} - \frac{17}{67 \cdot 69} + \dots \right) = \frac{8\sqrt{6}}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{7 \cdot 9} \right) - \left( \frac{4}{15 \cdot 17} + \frac{5}{19 \cdot 21} \right) + \left( \frac{7}{27 \cdot 29} + \frac{8}{31 \cdot 33} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{10}{39 \cdot 41} + \frac{11}{43 \cdot 45} \right) + \left( \frac{13}{51 \cdot 53} + \frac{14}{55 \cdot 57} \right) - \left( \frac{16}{63 \cdot 65} + \frac{17}{67 \cdot 69} \right) + \dots \right].$$

Ši keičianti ženklą eilutė, kurios nariai monotoniškai mažėja, konverguoja prie tam tikros ribos, artėdama prie jos iš abiejų pusių. Nesunku įsitikinti, jog ši riba yra  $\frac{1}{2}$ , o tai kaip tik ir patvirtina, kad

$$f_2\left(\frac{T}{6}\right) = x\left(\frac{T}{6}\right).$$

Aš čia apsiribosiu tik šios Furjė eilutės konvergavimo proceso pradžios pademonstravimu.

Jei apsiribotume tik pirmuoju teigiamu šios eilutės nariu, tai gautumėme, jog

$$\frac{8\sqrt{6}}{\pi} \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{7 \cdot 9} \right) \approx 0,6139 > 0,5.$$

Pridėję antrąjį – neigiamą – tos eilutės narį, gautume, jog

$$\frac{8\sqrt{6}}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{7 \cdot 9} \right) - \left( \frac{4}{15 \cdot 17} + \frac{5}{19 \cdot 21} \right) \right] \approx 0,4379 < 0,5.$$

Pridėję trečią – teigiamą – eilutės narį, gautume, jog

$$\frac{8\sqrt{6}}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{7 \cdot 9} \right) - \left( \frac{4}{15 \cdot 17} + \frac{5}{19 \cdot 21} \right) + \left( \frac{7}{27 \cdot 29} + \frac{8}{31 \cdot 33} \right) \right] \approx 0,5424 > 0,5.$$

Pridėję ketvirtą – neigiamą – eilutės narį, gautume, jog

$$\frac{8\sqrt{6}}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2}{7 \cdot 9} \right) - \left( \frac{4}{15 \cdot 17} + \frac{5}{19 \cdot 21} \right) + \left( \frac{7}{27 \cdot 29} + \frac{8}{31 \cdot 33} \right) - \left( \frac{10}{39 \cdot 41} + \frac{11}{43 \cdot 45} \right) \right] \approx 0,4679 < 0,5.$$

Stebėdami, kaip keičiasi eilutės dalinės sumos, didėjant dėmenų skaičiui, galime pastebėti, kad dalinės sumos, turinčios nelyginį dėmenų skaičių, ribodamos funkcijos  $f_2\left(\frac{T}{6}\right)$  reikšmę iš viršaus, monotoniškai mažėja, artėdamos prie jos reikšmės, lygios 0,5, o dalinės sumos, turinčios lyginį dėmenų skaičių, ribodamos funkcijos  $f_2\left(\frac{T}{6}\right)$  reikšmę iš apačios, monotoniškai didėja, taip pat artėdamos prie funkcijos  $f_2\left(\frac{T}{6}\right)$  reikšmės. Dar greičiau artėja prie  $f_2\left(\frac{T}{6}\right)$  reikšmės gretimų nelyginių ir lyginių dalinių sumų vidurkiai: pirmosios poros vidurkis yra  $\approx 0,5259$ , antrosios  $\approx 0,5052$  ir t. t.. Pratešdamas skaičiavimus, skaitytojas gali įsitikinti, jog šios Furjė eilutės suma ir funkcijos  $f_2(t)$  reikšmė taške  $t = \frac{T}{6}$  yra lygi tiksliai  $\frac{1}{2}$ .

Išradingesni skaitytojai gali pabandyti paieškoti būdo, leidžiančio įrodyti lygybę  $f_2\left(\frac{T}{6}\right) = \frac{1}{2}$ , nesinaudojant artutiniais skaičiavimais, o transformuojant šią Furjė eilutę taip, kad ji būtų suvesta į eilučių, kurių sumos mums yra žinomos, kompoziciją.

Mums gi čia svarbu dar kartą pabrėžti, jog funkcijų  $A\cos(\omega t + \varphi)$  bei  $B\sin(\omega t + \psi)$  **baigtinių fragmentų spektrai gali turėti ir baigtinį, ir begalinį nenulinių spektro linijų skaičių:**

1) kai fragmento ilgis  $b-a$  yra tų harmoninių funkcijų bei jų kompozicijų periodų  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  kartotinis, tai tokio fragmento spektras turi baigtinį nenulinių spektro linijų skaičių ir nesikeičia, keičiant to fragmento padėtį bei ilginant ar trumpinant jo ilgį taip, kad tas ilgis išliktų periodo  $T$  kartotinis; 2) kai fragmento ilgis nėra minėtųjų harmoninių funkcijų periodo  $T$  kartotinis, tai tokio fragmento spektras turi be galo daug nenulinių spektro linijų ir gali keistis, keičiant fragmento padėtį ar ilgį; 3) keičiant fragmento padėtį, bet nekeičiant fragmento ilgio, gali keistis tik koeficientų  $a_k$ ,  $b_k$  bei  $c_k$  reikšmės, bet nesikeičia elementarių harmonikų dažniai, kitaip tariant, gali keistis tik proceso  $x(t)$  fragmento spektro

grafinio modelio atkarpų ilgiai, vaizduojantys proceso  $x(t)$  fragmentą sudarančių harmoninių svyravimų amplitudes, tačiau nesikaučia nei tų linijų padėtis, nei atstumas tarp jų; 4) keičiant fragmento ilgį, gali keistis ne tik Furjė eilutės koeficientų reikšmės, bet ir elementariųjų harmonikų dažniai; 5) kai fragmento ilgis didėja, tai mažėja pagrindinis Furjė eilutės dažnis  $\omega$  ir „atstumas“ tarp spektro linijų, o kai fragmento ilgis trumpėja, tai didėja Furjė eilutės pagrindinis dažnis  $\omega_1$ , ir „atstumai“ tarp gretimų spektro linijų.

**Visa tai svarbu žinoti ir į tai būtina atsižvelgti atliekant tiriamų procesų spektrinę analizę, taikant kintančio dydžio slenkančių „langu“ bei veivletinės analizės metodus,** apie kuriuos šioje mokymo priemonėje pakalbėsime šiek tiek vėliau.

O dabar pabandysiu pateikti anksčiau pažadėtąjį paaiškinimą, kodėl vienos ir tos pačios harmoninės funkcijos skirtingų fragmentų Furjė eilutės ir spektrai gali būti skirtingi, bei kodėl Furjė eilutė, adekvačiai aprašanti funkciją  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  intervale  $(a, b)$ , kurio ilgis nėra funkcijos  $x(t)$

periodo  $T$  kartotinis, negali būti lygi sumai  $\frac{1}{2}e^{\frac{i2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i2\pi}{T}t}$ , nors kiekviename to intervalo taške  $t$  Furjė eilutės ir sumos  $\frac{1}{2}e^{\frac{i2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i2\pi}{T}t}$  reikšmės sutampa.

Vienos ir tos pačios funkcijos  $x(t)$  skirtingų fragmentų Furjė eilutės gali skirtis viena nuo kitos ir nuo pačios funkcijos  $x(t)$  todėl, kad tos **Furjė eilutės yra ne funkcijos  $x(t)$ , o funkcijų  $f(t)$ , esančių funkcijos  $x(t)$  fragmentų periodiniais pratęsimais, matematiniai modeliai.**

Funkcija  $f(t)$  sutampa su funkcija  $x(t)$  tik tada, kai  $f(t)$  yra periodinis pratęsimas tokio funkcijos  $x(t)$  fragmento, kurio ilgis  $b-a$  yra funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotinis. Kai ši sąlyga netenkinama, funkcija  $f(t)$  ir funkcija  $x(t)$  – skirtingos funkcijos, galinčios sutapti tik kai kuriuose intervaluose (žiūrėti pavyzdžiui, 324 pav.). **Funkcijos  $f(t)$ , periodiškai pratęsiančios skirtingus vienos ir tos pačios funkcijos  $x(t)$  intervalus, kai tie periodiškai pratęsimai fragmentai yra skirtingi ir jų ilgiai nėra funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotiniai, taip pat yra skirtingos funkcijos.**

Kad tuo įsitikintumėme, pakanka palyginti funkcijos  $f_1(t)$  grafiką, pavaizduotą 324 pav., su grafiku, kuris galėtų būti gautas periodiškai pratęsiant tos pačios funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  net ir to paties ilgio, bet kitoje vietoje pasirinktą fragmentą, pavaizduotą 323 pav. trečiajame brėžinyje. Minėtųjų funkcijų nesutapimą vienos su kita patvirtina ne tik jų grafikų, bet ir jų matematinių modelių – šiame

skyrelyje sudarytų Furjė eilučių  $f_1(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \left[ \cos(k \frac{8\pi}{T}t) - 4k \sin(k \frac{8\pi}{T}t) \right]$  ir  $f_2(t) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \times$   
 $\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{16k^2 - 1} \sin(k \frac{8\pi}{T}t)$  – nesutapimas.

324 pav. paaiškina ir tai, kodėl negalima dėti tapatybės ženklo tarp sumos  $\frac{1}{2}e^{\frac{i2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i2\pi}{T}t}$  ir

Furjė eilutės  $f_1(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \left[ \cos(k \frac{8\pi}{T}t) - 4k \sin(k \frac{8\pi}{T}t) \right]$ , nes tai – skirtingos funkcijos. Jų

reikšmės sutampa tik intervaluose  $mT < t < (m + \frac{1}{4})T$ , o visoms kitoms  $t$  reikšmėms – skiriasi.

Neturėtų stebinti ir tai, kad skirtingos formulės, būdamos skirtingų funkcijų matematiniais modeliais, kai kuriuose savo argumentų kitimo intervaluose gali turėti vienodas reikšmes ir tuose intervaluose gali būti laikomos vieno ir to paties tam tikro objekto matematiniais modeliais, besiskiriančiais tik savo forma, bet reiškiančiais tą patį, t. y. būti matematinės kalbos „sinonimais“.

Juk su matematinės kalbos „sinonimais“ mums tenka susidurti gana dažnai. Pavyzdžiui,  $x(t) = \cos t$ ,  $x(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$  ir laipsninė Teiloro eilutė  $x(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$  reiškia tą

patį ir yra matematinės kalbos „sinonimu“, nors, žinoma, tas formules galima būtų pavadinti ir matematinės kalbos sakiniiais, išreikšančiais tą pačią mintį, panaudojant skirtingus „žodžius“. Analogiškai maž-

tant, formulės  $x(t) = \frac{1}{2}(e^{\frac{i2\pi}{T}t} + e^{-\frac{i2\pi}{T}t})$  ir  $f_1(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \left[ \cos(k \frac{8\pi}{T}t) - 4k \sin(k \frac{8\pi}{T}t) \right]$  gali būti

laikomas skirtingais matematinės kalbos sakiniiais, kurie tam tikrose situacijose gali reikšti ir tą patį. Iš

kitos pusės, prisimenant, iš kur ir kaip atsiranda Furjė eilutė  $f_1(t)$ , šias dvi formules galima laikyti „matematinės kalbos sakiniiais“, išreiškiančiais dviejų tyrėjų mintis apie tiriamą procesą, kilusias (ar galėjusias kilti) tų tyrėjų galvose po to, kai jie, ištyrę skirtingus to proceso „gabalus“, pabandė įsivaizduoti, kaip galėtų atrodyti „visas“ procesas.

Analogiją tarp kalbų – natūraliosios ir matematinės – galima būtų tęsti ir tęsti, nes ji yra žymiai turtingesnė negu galėtų atrodyti iš pirmo žvilgsnio. Ji galėtų padėti pažvelgti į kai kuriuos reiškinius šiek tiek kitaip negu įprasta ir pamatyti juose kažką naujo bei pilniau ir giliau tuos reiškinius suprasti. Aš čia ta analogija kaip tik todėl ir pasinaudojau, kad norėjau padėti skaitytojui geriau suprasti šiame skyrelyje dėstomą gana sudėtingą teoriją.

Manau, kad daugelis studentų šią teoriją supranta nepakankamai ar net visai jos nesupranta, nes esu daugelį kartų susidūręs su tuo, kad studentai (ir ne tik studentai) spektrinę analizę atlieka grynai „receptūriškai“, nepakankamai suprasdami, ką daro, kodėl daro taip, o ne kitaip. Todėl jie ne visada gauna teisingus rezultatus, o kartais net teisingus rezultatus ne visai teisingai interpretuoja. Aišku, jog tokie „specialistai“ nėra pakankamai pajėgūs išnaudoti spektrinės analizės metodo galimybes.

Taip pat manau, jog dėl to kalti ne tik studentai, bet ir mes, dėstytojai, dažnai apsiribojantys tik mokymo programose nurodyto žinių kiekio pateikimu ir mažai skiriantys dėmesio studentų mokėjimui tas žinias pilnai teisingai suprasti, jomis kūrybiškai naudotis.

Siekdamas sumažinti šią mūsų – dėstytojų – darbo spragą, ryžausi šiek tiek detalesniam ir suprantamesniam šios svarbios sistematyrai temos išdėstymui. Kad šios mano pastangos nėra bergėdžios, įtikinamai rodo daugelio studentų pasisakymai: „Tik dabar supratome, kad iki šiol net nesupratome, jog anksčiau, šia temą studijuodami, nebuvo jos supratę.“

Skirdamas tiek dėmesio šiai temai, siekiau dar ir kito tikslo: **norėjau studentams parodyti, kaip sisteminės analizės metodai gali būti taikomi sudėtingos teorijos nagrinėjimui ir kaip jie gali padėti pilnesniam ir gilesniam tos teorijos supratimui. Tokiam supratimui, kuris neleistų atsirasti dabar taip dažnai pasitaikančiam prarajai tarp studentų teorinių žinių ir mokėjimo jomis naudotis praktikoje, o padėtų tam, kad teorinės žinios taptų efektyviai veikiančiu labai naudingu instrumentu, kuriuo studentai sugebėtų kūrybiškai naudotis.** Šis tikslas sistematyros kurso studijose yra net svarbesnis už pirmą tikslą – Furjė eilučių teorijos ir spektrinės analizės pagrindų išsiaiškinimą.

Todėl pateikdamas šioje mokymosi priemonėje įvairius Furjė eilučių sudarymo ir jų specifinių savybių nagrinėjimo pavyzdžius, aš siekiu ne tik padėti studentams taip suprasti spektrinės analizės esmę ir specifiką, kad jie sugebėtų tos analizės metodais kūrybiškai naudotis, bet ir stengiuosi parodyti jiems, **kaip taikomi sisteminės analizės metodai pačiose įvairiausiose srityse ir situacijose ir ką jie gali duoti**, bandau pripratinti studentus prie tokių metodų ir jų taikymo, prie „sistematyriškumo dvasios“, prie sisteminio mąstymo ir sisteminio požiūrio.

Šis – antrasis – tikslas yra vienas pagrindinių viso sistematyros kurso tikslų. Jis negali būti pasiektas iškart, nes reikalingų įpročių ir įgūdžių įsigijimui nepakanka tik supratimo ir įsitikinimų, o reikalingos dar ir daugkartinės „treniruotės“. Todėl tokių sisteminės analizės pavydžių šioje mokymo priemonėje – ne vienas ir ne du, nors jie ir užima daug vietos, didindami ir taip jau didelę šios mokymo priemonės apimtį. Tačiau kito kelio, leidžiančio pasiekti šį tikslą, nežinau. Žinau, kad šios „išlaidos“ pilnai atsiperka. Tai patvirtina ir mano paties asmeninė patirtis.

Esu jau ne vieną kartą pastebėjęs, kaip sisteminės analizės ir sisteminės sintezės metodų taikymas yra padėjęs man atkreipti dėmesį į tai, ko pradžioje nebuvo pastebėjęs, bei rasti tai, apie ką net nežinojau, kad tai galėtų egzistuoti. Net šios mokymo priemonės rašymo metu su tokiomis situacijomis esu nemažai kartų susidūręs. Tai padėjo man išvengti kai kurių klaidų, nors, žinoma, negaliu būti įsitikinęs, kad jų jau nebeliko.

Ir kai daugelis mano buvusių studentų, jau spėję po universiteto baigimo padirbėti ir susidurti su gyvenimo reikalavimais, prie progos padėkoja, sakydami kad sistematyros kursas išplėtė jų akiratį ir padėjo daug ką, tame tarpe ir anksčiau studijuotas disciplinas, žymiai giliau suprasti, pamatyti žinojimo ir supratimo naudą ir jų taikymo galimybes, aš atsakau (ir atsakau visiškai nuoširdžiai, nes esu tuo įsitikinęs), jog dėkoti reiktų ne tiek man, kiek sisteminiam požiūriui ir sisteminiam mąstymui, padėjusiems man pastebėti tas dėstomo kurso vietas, kurias jie nepakankamai supranta, suprasti, kodėl nesupranta, bei surasti būdus kaip pasiekti pilnesnį aiškumą ir, kas dar svarbiau, kaip ugdyti tokio aiškumo poreikį. Juk žmogui, kuris pripranta suprasti, kas vyksta aplinkui ir ką bei kodėl jis pats daro, tampa „nekomfortabilu“, kai jis ko nors nesupranta. Tada jis pradeda kelti sau klausimus ir ieškoti atsakymų į juos, ir net tais atvejais, kai tų atsakymų surasti nepavyksta, jis tobulėja. O juk dažnai ir atsakymus surasti pavyksta!

Manau, kad sisteminis mąstymas naudingas visų pirmą tuo, kad jis padidina žmogaus išvalgumą ir kūrybiškumą. Jis padeda pastebėti tai, ko daugelis kažkodėl nepastebi (tame tarpe net geri savo srities specialistai, jau ilgą laiką dirbantys toje srityje), ir iškelti tokius klausimus, atsakymų paieška į kuriuos atveria naujus horizontus. Tai labai svarbu. Tačiau sisteminis mąstymas neapsiriboja

tik naudingų klausimų kėlimu. Jis, didindamas išvalgumą ir kūrybiškumą, padeda ir atsakymų į iškilusius klausimus paieškos kelyje, padeda spręsti sudėtingas problemas, projektuoti ir tobulinti tų sprendimų realizavimo sistemas, mažinti nepakankamai pagrįstų išvadų ir klaidų skaičių. Todėl jis naudingas kiekvienam individui, ypač tiems, kurie imasi vadovaujančio vaidmens ir priima sprendimus, nuo kurių priklauso ne tik pačių, bet ir kitų žmonių likimai. Vadovams jis ne tik naudingas. Jis jiems – būtinas. Visuomenė, kuri leidžia tapti jos vadovais žmones, nesugebančius sistemiškai mąstyti, baudžia pati save, skaudžiai užmokėdama už tai, kad sisteminio mąstymo stinga ir daugumai jos piliečių. Iš tokios krizinės situacijos galima išeiti tik keliant visuomenės sisteminio mąstymo lygį. Tai labai aktualu ir Lietuvai, ir visam pasauliui. Todėl nederėtų gailėti pastangų, laiko ir lėšų sisteminio mąstymo filosofijos sklaidai, sisteminės metodologijos tobulinimui ir kuo platesnio žmonių rato supažindinimui su jos metodais, sisteminio mąstymo įgūdžių ugdymui visose visokio lygio ir visokios paskirties mokyklose, konkrečiais pavydžiais parodant tokio mąstymo naudą ir specifiką, pradedant jį taikyti konkrečiose situacijose ir darant tai ne „nuo progos prie progos“, o pastoviai, sistematiškai.

Sekdamas šiuo „priesaku“ pabandysiu parodyti sisteminio mąstymo naudą ir specifiką, dar šiek tiek papildydamas savo atsakymą į klausimus, iškilusius studentams, nepakankamai įsigilinusiems į Furjė eilučių teoriją ir todėl nesupratusiems, kodėl funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmentų Furjė eilutės

kartais sutampa su suma  $\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$ , o kartais – ne, nors ta suma kiekviename kiekvieno funkcijos

$x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  fragmento taške turi lygiai tą pačią reikšmę kaip ir funkcija  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$ .

Tie papildymai užims daug vietos bei pareikalaus iš skaitytojo nemažai laiko ir kantrybės, tačiau tikiuosi, kad tiems skaitytojams, kuriems užteks kantrybės ir laiko, taps žymiai aiškiau, kuo skiriasi sisteminis požiūris nuo teisingo, bet dar nesisteminio požiūrio, o sisteminis mąstymas nuo teisingo, bet dar nesisteminio mąstymo, taip pat ir tai, ką duoda dėl šių skirtumų atsiradę papildymai.

Manau, kad daugelis skaitytojų, prisiminę ką tik vėl paminėtus studentų klausimus ir mano atsakymą į juos pritartę nuomonei, jog mano jau anksčiau pateiktas atsakymas į ką tik pakartotinai suformuluotą studentų klausimą yra pakankamai aiškus ir pakankamai pilnas: Furjė eilutės ir sumos

$\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$  gali reikšti tą patį ir sutapti, bet gali reikšti ir ne visai tą patį ir todėl nesutapti, nes suma

$\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$  yra funkcijos  $x(t) = \cos \frac{2\pi}{T}t$  viena galimų matematinio aprašymo formų, vaizduojančių

šią ir tik šią funkciją, ir todėl galėtų būti funkcijos  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  ekvivalentu ar net jos apibrėžimu, o

funkcijos  $x(t)$  fragmentų Furjė eilutės yra funkcijų  $f(t)$  – tų fragmentų periodinių pratęsimų matematiniai

modeliai, kurie sutampa su suma  $\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$ , kai funkcijos  $x(t)$  fragmentai yra tokie, kad jų

periodiniai pratęsimai sutampa su funkcija  $x(t)$ , ir nesutampa su ta suma, kai funkcijos  $x(t)$  fragmentai yra tokie, kad jų periodiniai pratęsimai nesutampa su funkcija  $x(t)$ .

Aš irgi pritarčiau šiai nuomonei, kad šis atsakymas yra pakankamai geras, jei mąstyčiau nepakankamai sistemiškai ir matyčiau tik šį studentų klausimą bei manyčiau, kad mano tikslas – tik atsakyti į šį klausimą.

Iš tikrųjų gi mano tikslai, kurių aš privalau siekti dėstydamas šį sistemotyros kursą, yra žymiai platesni, ir aš, atsakydamas į minėtąjį studentų klausimą, turiu nepamiršti tų tikslų ir atsakymą suformuluoti taip, kad tas atsakymas maksimaliai pasitarnautų ne tik einamųjų, bet ir pagrindinių tikslų pasiekimui.

Juk ligos simptomai nėra visiškai tas pats kaip pati liga ir tuo labiau – ne priežastys, tą ligą sukėlusios. Ir todėl reikia kovoti ne tik ir ne tiek su ligos simptomais, kiek su pačia liga, o žiūrint dar plačiau – ir su tą ligą sukėlusiomis priežastimis. Reikia ne tik pagydyti ligonį, bet ir pasirūpinti tuo, kad ta liga ateityje nei jis, nei kiti nesusergtų ar sirgtų rečiau. Tai, kad atsirado studentas, kuriam kilo toks klausimas, tai tik simptomas, bylojantis apie tai, kad ne visi studentai pakankamai suprato studijuojamą svarbią temą. Ir gerai, kad atsirado toks studentas, kuriam kilo toks klausimas ir poreikis rasti atsakymą į jį. Juk, manau, kiekvienas šiek tiek patyręs dėstytojas žino, kad yra nemažai studentų, kurie supranta mažiau už šį, paklausiusįjį, studentą ir kuriems nei tokie klausimai, nei tokie poreikiai klausti ir sužinoti atsakymus nekyla.

Susidūręs su ligos simptomais ir ieškodamas ligos atsiradimo priežasčių, jos gydymo ir profilaktikos metodų, sistemiškai mąstantis dėstytojas suprastų, kad čia kaltas galėtų būti ne tik

studentas, bet ir dėstymo metodai. Todėl jis kritiškai pažvelgtų į savo bei savo kolegų paskaitas ir į tuos vadovėlius, kuriais studentams tenka naudotis. Tai padaręs, jis gana greitai įsitikintų, kad, įvedant naujas svarbias ir sudėtingas sąvokas, ir paskaitose, ir vadovėliuose ne visada skiriama pakankamai dėmesio ir laiko tų sąvokų išsiaiškinimui, kad gana dažnai apsiribojama vien tik formaliais apibrėžimais, kurie apriori laikomi savaime suprantamais ir pakankamais, jog studijuojančiųjų galvose susiformuotų pakankamai pilnas, tikslus ir pakankamai „aktyvus“ koncepcinis modelis to, ką apibrėžia paskaitoje ar vadovėlyje pateiktas formalus apibrėžimas.

Pagrindinių sąvokų nepilnas bei nepakankamai tikslus suvokimas, o kartais – ir visiškas jų nesupratimas jau pačioje naujos temos pradžioje „išjungia“ studento savarankišką mąstymą ir priverčia studentą arba „čiuožti“ studijuojamo dalyko paviršiumi, daug ko nesuprantant ir į nieką nesigilinant, o todėl ir beveik nieko naudingo neišmokstant, arba, pasitelkiant dar jauną ir nepavargusią atmintį, mechaniškai „kalti“ nepakankamai suprantamą tekstą „išmokstant“ tik „receptūriškai“ išimintą, bet nepakankamai suprastą informaciją. Vargu ar tokios „žinios“ gali skatinti būsimo diplomuoto „specialisto“ kūrybiškumą, ugdyti sisteminių jo mąstymą.

Todėl sistemos tyros kurse neretai tenka užpildyti supratimo spragas, trukdančias sistemos tyroje tinkamai pasinaudoti tuo, ką studentai privalėjo įsigyti studijuodami kitas disciplinas. Sisteminis požiūris ne tik reikalauja, bet ir leidžia tai padaryti taip, kad ne tik būtų likviduojamos pastebėtos spragos, bet ir žymiai pagilėtų viso specialaus kurso supratimas.

Spektrinės analizės ir Furjė eilučių tema, kurios papildomo paaiškinimo prireikė šiame skyrelyje – ne išimtis. Todėl tie papildymai, kuriuos čia pateiksiu, yra aktualūs ne tik Furjė eilutėms. Jie turi ir bendrasisteminę vertę.

Sisteminis požiūris neleidžia apsiriboti vien tik pastebėto ligos simptomo pašalinimu, tai yra, tik tiesioginiu atsakymu į anksčiau minėtąjį studento klausimą. Tenka šalinti ne tik simptomą, bet ir jo atsiradimo priežastis, todėl tenka gilintis į Furjė eilutės specifikos suvokimą, kartu parodant, kad **jį – ne tik abstrakti matematinė konstrukcija, bet ir fizinės realybės matematinis modelis**, kad kai kurios jos savybės yra ne tik formaliais apibrėžimais įsivestų abstrakčių matematinių esybių savybės, logiškai išplaukiančios iš tų apibrėžimų, bet ir matematine kalba išreikšti objektyviai egzistuojančių realių esybių realių savybių atspindžiai.

Formaliais apibrėžimais galima įsivesti daug įvairių abstrakčių sąvokų – įsivaizduojamų abstrakčių esybių koncepcinių modelių – ir po to nagrinėti jų savybes, tačiau tas nagrinėjimas gali tapti tikrai rezultatyviu ir praktiškai naudingu tik tada, kada formaliai įsivestos abstrakčios esybės ir jų savybės bei santykiai tarp jų atspindi kažką tokio, kas egzistuoja ar galėtų egzistuoti realiame pasaulyje, ir išreiškia jo dėsningumus, nes tik tada tas nagrinėjimas gali išplėsti ir pagilinti mus supančio ir mumyse esančio pasaulio suvokimą, sustiprinti prognostines ir kūrybines mūsų galias.

Furjė eilučių ir Furjė transformacijų įsivedimas į matematikos instrumentarijų – kaip tik toks žmonijos progresui naudingas reiškinys.

Aš čia pabandysiu tai įrodyti, pradžioje šiek tiek pagilindamas Furjė eilutės esmės ir specifikos suvokimą, o po to parodydamas Furjė eilučių sąryšį su realaus pasaulio reiškiniais, tuo pačiu metu įrodydamas, jog **Furjė eilutės, Furjė transformacijos ir spektrinė analizė – ne tik matematikos ir gamtos mokslų, bet ir sistemos tyros instrumentas**.

Tai padės skaitytojui suprasti, kodėl šiems klausimams mokymo priemonėje skiriama tiek daug dėmesio ir vietos, o taip pat dar kartą patvirtins labai svarbų teiginį, jog **sisteminis požiūris padeda net žinomuose dalykuose įžvelgti kažką naujo, pastebėti tai, į ką iki šiol nebuvo atkreipta pakankamai dėmesio**.

Furjė eilutės esmės ir specifikos suvokimo pagilinimui pasinaudosiu Furjė eilutės palyginimu su matematinių specialybių studentams gerai žinoma Teiloro eilute.

Lygindami tas eilutes, galime pastebėti, kad **jos ne tik turi daug bendrų savybių**, nes abi gali būti taikomos gana plačios klasės funkcijų aproksimavimui begalinėmis sumomis, susidedančiomis iš standartiniu būdu sudarytų dėmenų ir tam tikrose tų funkcijų argumentų kitimo srityse konverguojančiomis į tas funkcijas, bet ir **esminiai skiriasi**.

Funkcijos  $x(t)$  Teiloro eilutė  $x(t)=x(t_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{d^k}{dt^k}x(t)\right]_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^k}{k!}$  skiriasi nuo tos pačios funkcijos Furjė eilutės  $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{2\pi}{b-a}t+b_k\sin k\frac{2\pi}{b-a}t\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^bx(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{b-a}\int_a^bx(t)\cos k\frac{2\pi}{b-a}tdt\right)\cos k\frac{2\pi}{b-a}t+\left(\frac{2}{b-a}\int_a^bx(t)\sin k\frac{2\pi}{b-a}tdt\right)\times\sin k\frac{2\pi}{b-a}t\right]$  ne tik tuo, kad Teiloro eilutė aproksimuoja funkcijos  $x(t)$  reikšmių skirtumus nuo jos „taškinės“ reikšmės  $x(t_0)$  „laipsnine“ suma  $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t-t_0)^k$ , o Furjė eilutė aproksimuoja funkcijos  $x(t)$  reikšmių skirtumus nuo tų reikšmių intervalinio vidurkio  $c_0=\frac{a_0}{2}$  „trigonometrine“ suma  $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{2\pi}{b-a}t+b_k\sin k\frac{2\pi}{b-a}t\right)$ , bet ir tuo, kad Teiloro eilutės koeficientai  $a_k$  yra funkcijos  $x(t)$

taškinės diferencialinės charakteristikos, priklausančios nuo funkcijos  $x(t)$  išvestinių reikšmių taške  $t=t_0$ , o Furjė eilutės koeficientai  $a_k$  ir  $b_k$  yra funkcijos  $x(t)$  intervalinės integralinės charakteristikos, priklausančios nuo funkcijos  $x(t)$  integralo reikšmių intervale  $(a, b)$  ir galinčios priklausyti dar ir nuo intervalo  $(a, b)$  ilgio  $b-a$  bei nuo intervalo padėties argumentu  $t$  ašyje.

Kitaip tariant, Teiloro eilutė yra bet kurios tolydžios diferencijuojamos funkcijos  $x(t)$  reikšmių apskaičiavimo ir jos „elgesio“ tyrimo taškuose  $t$ , priklausančiuose mūsų pačių pasirinkto „pradinio taško“  $t=t_0$  aplinkai, **matematinis instrumentas, kuris yra kuriamas remiantis detalio informacija apie funkcijos  $x(t)$  reikšmę ir „elgesį“ viename taške – taške  $t=t_0$** , o Furjė eilutė yra bet kurios funkcijos  $x(t)$ , absoliučiai integruojamas intervale  $a<t<b$ , tyrimo ir jos reikšmių to intervalo taškuose apskaičiavimo bei modeliavimo **matematinis instrumentas, kuris yra kuriamas remiantis apibendrinta informacija apie funkcijos  $x(t)$  reikšmes visuose nagrinėjamo intervalo  $(a, b)$  taškuose.**

„Taškinis“ Teiloro ir „intervalinis“ Furjė eilučių konstravimo principai pasireiškia ne tik nustatant tų eilučių koeficientų reikšmes, kaupiančias ir teikiančias informaciją apie aproksimuojamų funkcijų  $x(t)$  reikšmes ir „elgesį“ anksčiau minėtuose taškų  $t=t_0$  aplinkos bei intervalų  $(a, b)$  taškuose, bet ir konstruojant nuo funkcijų  $x(t)$  jau nepriklausančius standartinės formos tų eilučių dėmenų daugiklius, kurių sandaugos su atitinkamais eilučių koeficientais ir yra minėtieji dėmenys.

Teiloro eilučių dėmenų standartiniai daugikliai  $(t-t_0)^k$  yra argumento  $t$  funkcijos, priklausančios nuo parametro  $t_0$ , **charakterizuojančio ne funkciją  $x(t)$ , bet mūsų pasirinktąjį tašką  $t_0$ , jo vietą** argumento  $t$  ašyje, o Furjė eilučių dėmenų standartiniai daugikliai  $e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t}$ ,  $e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}t}$  bei  $\cos k\frac{2\pi}{b-a}t$ ,  $\sin k\frac{2\pi}{b-a}t$  yra argumento  $t$  funkcijos, priklausančios nuo parametrų  $a$  ir  $b$ , **charakterizuojančių ne funkciją  $x(t)$ , bet mūsų pasirinktojo intervalo  $(a, b)$  ilgį ir vietą** argumento  $t$  kitimo ašyje.

Čia pažymėtina dar viena Teiloro ir Furjė eilučių savybė, atspindinti ir analogiją tarp tų eilučių, ir jų esminį skirtumą.

Visi Teiloro eilutės standartiniai daugikliai  $(t-t_0)^k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) yra **pirmojo daugiklio  $t-t_0$ , vaizduojančio taško  $t$  atstumą nuo taško  $t_0$ , kartotiniai**, o Furjė eilutės standartinių cikliniai dažniai  $\omega_k=\omega_1 k$  yra **pagrindinio Furjė eilutės ciklinio dažnio  $\omega_1=\frac{2\pi}{b-a}$ , priklausančio nuo pasirinkto intervalo  $(a, b)$  ilgio  $b-a$ , kartotiniai**.

Iš šios Furjė eilutės savybės seka, kad tą eilutę sudarančių elementarių harmonikų cikliniai dažniai  $\omega_k=\omega_1 k=k\frac{2\pi}{b-a}$  ir tų harmonikų formulėmis vaizduojamų **harmoninių virpesių** periodai  $T_k=\frac{T_1}{k}=\frac{b-a}{k}$  vienareikšmiškai priklauso nuo intervalo  $(a, b)$  ilgio  $(b-a)$ , automatiškai tampančio Furjė eilutės – periodinės funkcijos  $f(t)$  – periodu  $T_1=\frac{2\pi}{\omega}$ .

Todėl bet kurios funkcijos  $x(t)$  intervalo  $(a, b)$  **Furjė eilutės  $f(t)$  sudėtyje negali būti elementarių harmonikų, kurių cikliniai dažniai nebūtų tos eilutės pagrindinio dažnio  $\omega_1=\frac{2\pi}{b-a}$ , vienareikšmiškai apibrėžiamo intervalo  $(a, b)$  ilgio  $(b-a)$ , kartotiniai**.

Ši Furjė eilutės savybė turi ir fizikinį paaiškinimą, kurį aš pateiksiu šiek tiek vėliau. Ji pati paaiškina, kodėl, keičiant  $(a, b)$  ilgį, gali keistis funkcijos  $x(t)$  fragmentų spektrai, pavyzdžiui, kodėl funkcijos  $x(t)=\cos\frac{2\pi}{\pi}t$  intervalo, kurio ilgis  $(b-a)$  yra

lygus sveikam tos funkcijos periodų  $T$  skaičiui, Furjė eilutė yra  $f(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{i2\pi}{T}t}+\frac{1}{2}e^{-\frac{i2\pi}{T}t}$  ir

kodėl, kai to ilgio  $(b-a)$  santykis su periodu  $T$  nėra sveikas skaičius, intervalo  $(a, b)$  Furjė eilutė  $f(t)$  visuose taškuose  $t\in(a, b)$ , turėdama tą pačią reikšmę kaip ir suma  $\frac{1}{2}e^{\frac{i2\pi}{T}t}+\frac{1}{2}e^{-\frac{i2\pi}{T}t}$ , turi jau kitokią formą ir už intervalo  $(a, b)$  ribų funkcijos  $f(t)$  reikšmė

jau ne visada sutampa su funkcijos  $x(t)=\cos\frac{2\pi}{T}t=\frac{1}{2}(e^{\frac{i2\pi}{T}t}+e^{-\frac{i2\pi}{T}t})$  reikšme. Juk

pastaruoju atveju  $f(t)$  sudėtyje net harmonikų, turinčių dažnius  $\omega=\frac{2\pi}{T}$ , būti negali!

Galime pastebėti analogiją tarp funkcijos  $x(t)$  tyrimo, sudarant pasirinktų taškų  $t=t_0$  aplinkoms Teiloro eilutes, ir kokios nors sudėtingos sistemos tyrimo, kurį atlieka siaurų sričių aukštos kvalifikacijos specialistai, o taip pat tarp tos pačios funkcijos  $x(t)$  tyrimo, sudarant tos pačios funkcijos intervalų  $(a, b)$  Furjė eilutes, ir jau minėtos sudėtingos sistemos tyrimo, kurį atlieka dženeralistai bei sisteminiai analitikai.

**Sisteminė metodologija teigia, kad „taškinį“ ir „intervalinį“ tyrimo metodus, tiriant sudėtingas sistemas ir sudėtingas situacijas, tikslinga sujungti, nes abu metodai gali vienas kitą papildyti, kad sudėtingos sistemos tyrimus turėtų atlikti įvairių specialybių specialistų kompleksinės grupės, vadovaujamos dženeralistų, nes pastarieji supranta, jog visapusiškiems tyrimams nepakanka tik kurio nors vieno metodo.**

Ne visi specialistai linkę vadovautis šiuo teiginiu savo praktinėje veikloje. Jų nuomone, abu metodai – „taškinis“ ir „intervalinis“ – bei iš jų išplaukiančios Teiloro ir Furjė eilučių formulės leidžia analizuoti gana plačias funkcijų klases ir su

pageidaujamu tikslumu apskaičiuoti jų artutines reikšmes taškuose, priklausančiuose taško  $t_0$  aplinkai (taikant Teiloro formulę) ir intervalui  $a < t < b$  (taikant Furjė eilutės formulę). **Todėl jie, žiūrėdami į tai grynai teoriškai, reikšmingo skirtumo tarp abiejų metodų nemato. Tačiau taikant šias formules praktiniam funkcijos  $x(t)$  reikšmių apskaičiavimui, skirtumą jau galima pajusti.** Juk, apskaičiuojant funkcijos  $x(t)$  reikšmes, naudojantis minėtomis formulėmis, visada tenka apsiriboti koku nors baigtiniu tų sumų dėmenų skaičiumi, atmetant likusius dėmenis, kurių reikšmės (nors ir mažėja, bet kadangi tų atmetamų dėmenų be galo daug) sumoje gali sudaryti reikšmingą paklaidą. Tos paklaidos dydis, esant fiksuotam neatmetų dėmenų skaičiui, taikant Teiloro eilutę, labai priklauso nuo atstumo  $t - t_0$  ir gana greitai paaiškėja, kad, nedidinant neatmetamų dėmenų skaičiaus, teks apsiriboti gana siauru intervalu  $t_0 - \Delta_1 t < t < t_0 + \Delta_2 t$ , kuriame Teiloro eilutė aproksimuos funkciją  $x(t)$  su pageidaujamu tikslumu. Šį intervalą plečiant, paklaidos dydis sparčiai didėja. Ją galima šiek tiek sumažinti, didinant neatmetamų Teiloro eilutės dėmenų skaičių, tačiau tai padėtų tik iki tam tikros ribos, nes nuo tam tikros ribos Teiloro eilutė jau nebekonverguoja į funkcijos  $x(t)$  reikšmę, o diverguoja. Juk kai  $|t - t_0| > 1$ , tai  $(t - t_0)^k$  reikšmės, didėjant  $k$ , sparčiai didėja.

Taikant fiksuoto Furjė eilutės dėmenų skaičiaus sumą funkcijos  $x(t)$  artutinių reikšmių apskaičiavimui intervalo  $a < t < b$  taškuose, paklaidos dydis to intervalo taškuose yra praktiškai vienodas, o plečiant intervalą  $(a, b)$  dydį ir perskaičiuojant Furjė eilutės koeficientų reikšmės, ne tik nedidėja, bet gali sumažėti ar net tapti lygus nuliui.

**Štai čia ir pasireiškia esminis praktinis skirtumas tarp „taškinio“ ir „intervalinio“ principų.** Juk Teiloro eilutės koeficientų  $a_k$  reikšmės, plečiant taško  $t = t_0$  aplinką nesikeičia ir todėl, didėjant taško  $t$  atstumui nuo taško  $t = t_0$  Teiloro eilutės dėmenų  $a_k(t - t_0)^k$  absoliučios reikšmės, kai  $a_k \neq 0$ , gali tik didėti, didindamos atmetamų Teiloro eilutės dėmenų sumą ir tokiu būdu didindamos aproksimavimo paklaidą. Pakeisti funkcijos  $x(t)$  Teiloro eilutės koeficientų  $a_k$  reikšmes galima tik pakeičiant pradinį tašką  $t_0$  todėl, taikant Teiloro eilučių metodą ir norint ištirti funkcijos  $x(t)$  „elgesį“ visoje jos apibrėžimo srityje, tektų parinkti labai daug „pradinių taškų“  $t_0$  ir sudaryti bei išanalizuoti labai daug Teiloro eilučių, kad jos tomis taškų  $t_0$  aplinkomis, kuriose Teiloro eilutės konverguoja, padengtų visą funkcijos  $x(t)$  apibrėžimo sritį.

Dėl šios priežasties Teiloro eilutės, būdamos universaliu ir efektyviu instrumentu funkcijų „elgesio“ atskiruose (gana dažnai – kuo nors ypatinguose) taškuose detaliam nagrinėjimui bei atvaizdavimui, negali būti patogiu ir efektyviu instrumentu, matematiškai aprašant bei tiriant funkcijų „elgesį“ plačiuose jų argumentų kitimo intervaluose ir visose jų egzistavimo srityse.

Čia labiau tinka Furjė eilutės, kurių koeficientai koncentruotoje formoje vienareikšmiškai ir pilnai aprašo funkcijos elgesį visame tame intervale, kuriame buvo apskaičiuotos tų koeficientų reikšmės. Žinodami tas koeficientų reikšmes ir to intervalo, kuriam koeficientai buvo apskaičiuoti, ilgį  $b - a$  bei padėtį, mes galėtume apskaičiuoti funkcijos  $x(t)$  reikšmę kiekviename to intervalo taške. Intervalo ilgį galima didinti iki bet kurio norimo dydžio: pakanka tik perskaičiuoti Furjė eilutės

koeficientus (kurių aibė, tiesa, padidėja, nes sumažėja „atstumai“  $\omega_1 = \frac{2\pi}{b-a}$  tarp Furjė

eilutę sudarančių elementarių harmonikų ciklinių dažnių  $\omega_k = k\omega_1$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ir gaunate naują Furjė eilutę, kuri ekvivalenčiai aprašo funkcijos  $x(t)$  „elgesį“ visame padidėjusiam intervale, leisdamą apskaičiuoti funkcijos  $x(t)$  reikšmę kiekviename to pailgėjusio intervalo taške.

Čia nėra nieko nuostabaus: padidėjus intervalo  $(a, b)$  ilgiui, padidėjęs Furjė eilutės koeficientų skaičius leidžia „užrašyti“ visą padidėjusį informacijos kiekį, reikalingą funkcijos  $x(t)$  reikšmių kiekviename to padidėjusio intervalo taške apskaičiavimui. Ši frazė reiškia dar ir tai, jog Furjė eilutę sudarančių kosinusoidžių ir sinusoidžių (kurių periodai  $T_1=b-a$ ,  $T_2=\frac{T_1}{2}$ , ...,  $T_k=\frac{T_1}{k}$ , ... mažėja nuo  $b-a$  iki 0, o

amplitudžių dydžius nusako Furjė eilutės koeficientų reikšmės, pakanka, kad tų kosinusoidžių ir sinusoidžių begalinio skaičiaus suma, sudėta su funkcijos  $x(t)$  vidurkiu intervale  $(a, b)$ , taptų lygi funkcijos  $x(t)$  fragmento  $(a, b)$  grafikui ir periodiškai jį kartotų už intervalo ribų, sudarydama periodinės funkcijos  $f(t)$ , turinčios periodą  $b-a$ , grafiką, esantį funkcijos  $f(t)$  grafiko intervale  $(a, b)$  periodiniu pratęsimu.

**Didindami funkcijos  $x(t)$  intervalo  $(a, b)$ , kurį aproksimuos Furjė eilutė  $f(t)$ , ilgi, mes Furjė eilutėje sukaupiame vis daugiau informacijos apie funkcijos  $x(t)$  „elgesį“, ir funkcija  $f(t)$ , būdama ekvivalenti funkcijai  $x(t)$  intervalo ribose, kai funkcijos  $x(t)$  „elgesyje“ yra kokie nors dėsningumai, gali atspindėti tuos dėsningumus, kurie pasireiškia intervale  $(a, b)$  bei gali pasireikšti ir už to intervalo ribų.** Todėl intervalo  $(a, b)$  didinimą, vaizdžiai kalbant, galima palyginti su „lango“, pro kurį stebime funkcijos  $x(t)$  „elgesį“, matmenų didinimu.

Kai funkcija  $x(t)$  neperiodinė, norint gauti visą informaciją apie jos „elgesį“, tą „langą“ tektų plėsti iki begalybės. Tuomet Furjė eilutę tektų paversti Furjė integralu, apie kurį pakalbėsime šiek tiek vėliau. Jis bus mums reikalingas spektrinio tankio sąvokos įvedimui.

Kai funkcija  $x(t)$  periodinė, norint gauti visą informaciją apie tos funkcijos „elgesį“, pakanka padaryti intervalo  $(a, b)$  ilgį lygų funkcijos  $x(t)$  periodui  $T$ , tuomet Furjė eilutė  $f(t)$  sutaps su funkcija  $x(t)$  ne tik intervalo  $(a, b)$  ribose, bet ir visoje funkcijos  $x(t)$  apibrėžimo srityje, nes funkcija  $f(t)$ , periodiškai pratęsdama funkcijos  $x(t)$  periodą  $T$ , atvaizduos funkcijos  $x(t)$  reikšmės kitimą visame intervale  $(-\infty, +\infty)$ .

Tolesnis intervalo  $(a, b)$  ilgio  $b-a$  didinimas naujos informacijos apie periodinį procesą  $x(t)$  jau nebeduos, tačiau Furjė eilutės grafikas, periodiškai kartojantis funkcijos  $x(t)$  intervalo  $(a, b)$  grafiką, keisis. Keisis ir elementarių harmonikų, esančių Furjė eilutės sudėtyje, cikliniai dažniai, nes keisis

pagrindinis eilutės dažnis  $\omega_1 = \frac{2\pi}{b-a}$ . Kai intervalo  $(a, b)$  ilgis bedidėdamas taps lygus  $2T$ , tai  $f(t)$  vėl

sutaps su periodine funkcija  $x(t)$  visoje funkcijų  $x(t)$  ir  $f(t)$  egzistavimo srityje. Toks periodinių funkcijų  $f(t)$  ir  $x(t)$  sutapimas kartosis kiekvieną kartą, kai, didinant intervalo  $(a, b)$  ilgį, tas ilgis taps funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotiniu.

Kai periodinė funkcija  $x(t)$  yra elementari harmoninė funkcija ar harmoninių funkcijų algebrinė suma, tai, kaip jau esame nustatę anksčiau, tokios funkcijos intervalų, kurių ilgiai  $(b-a)$  yra harmoninės funkcijos periodo  $T$  kartotiniai, spektrai yra baigtiniai. Šis reiškinys paaiškinamas gana paprastai.

Kadangi intervalo ilgis  $(b-a)$  yra harmoninės funkcijos  $x(t)$  periodo kartotinis, pavyzdžiui,  $b-a=mT$ , kur  $m$  – teigiamas sveikasis skaičius, tai tarp elementarių harmonikų, įeinančių į intervalo  $(a, b)$

Furjė eilutės sudėtį, būtinai atsiranda harmonikos  $c_k e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t} = c_k e^{ik\frac{2\pi}{mT}t}$  ir  $c_{-k} e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}t} = c_{-k} e^{-ik\frac{2\pi}{mT}t}$ , kurių

cikliniai dažniai  $\omega_k = k\omega_1 = k\frac{2\pi}{b-a} = \frac{k}{m} \cdot \frac{2\pi}{T}$  sutampa su harmoninės funkcijos  $x(t)$  cikliniu dažniu

$\omega = \frac{2\pi}{b-a}$ . Tokiomis harmonikomis tampa harmonikos, turinčios numerius  $k=m$  ir  $k=-m$ . Tų harmonikų

suma  $c_m e^{im\frac{2\pi}{b-a}t} + c_{-m} e^{-im\frac{2\pi}{b-a}t} = c_m e^{im\frac{2\pi}{mT}t} + c_{-m} e^{-im\frac{2\pi}{mT}t} = c_m e^{i\frac{2\pi}{T}t} + c_{-m} e^{-i\frac{2\pi}{T}t}$ , parinkus atitinkamas koeficientų  $c_m$  ir  $c_{-m}$  reikšmes, gali tapti lygi harmoninės funkcijos  $x(t)$  nuokrypiui taške  $t$  nuo savo vidurkio  $E[x(t)]_{t \in (a,b)}$  intervale  $(a, b)$ , o tos sumos suma su minėtu vidurkiu – funkcijos  $x(t)$  reikšmei taške  $t$ .

Kaip tik tokių reikšmių Furjė eilutės koeficientams  $c_k$  parinkimą ir atlieka formulė

$$c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) \cdot e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} t} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) \cdot e^{-ik \frac{2\pi}{nT} t} dt, \text{ nes integralas } \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i \frac{2\pi}{T} t} e^{-ik \frac{2\pi}{mT} t} dt \text{ yra lygus vienetai,}$$

kai  $k=m$ , ir yra lygus 0, kai  $k$  yra sveikas skaičius, nelygus nei  $m$ , nei 0.

Todėl harmoninės funkcijos  $x(t)$  intervalo  $(a, b)$ , kurio ilgis  $(b-a)$  yra funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotinis, spektre gali būti tik dvi ar trys nenulinės spektro linijos: dvi nenulinės spektro linijos būna tada, kai funkcijos  $x(t)$  vidurkis intervale  $(a, b)$  yra lygus 0, o trys, kai tas vidurkis nėra lygus 0.

Kai funkcija  $x(t)$  yra kelių harmoninių funkcijų ir pastovaus dydžio  $A$  (kuris gali būti teigiamas, neigiamas ar lygus 0) suma  $x(t) = A + \sum_{i=1}^n B_i \cos\left(\frac{2\pi}{T_i} + \varphi_i\right) + \sum_{j=1}^n C_j \sin\left(\frac{2\pi}{T_j} + \varphi_j\right)$  ir kai tų harmoninių

funkcijų periodai  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) ir  $T_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) turi bendrąjį matą  $T_0$  (kitaip tariant, kai egzistuoja toks  $T_0$ , kad teiginys  $\forall_i \forall_j [T_i = n_i T_0] \wedge [T_j = m_j T_0]$  yra teisingas), tai visada galima rasti toki šios funkcijos intervalo  $(a, b)$  ilgį  $(b-a)$ , kad funkcijos  $x(t)$  šio intervalo  $(a, b)$  Furjė eilutė  $f(t)$  sutaptų su funkcija  $x(t)$  ne tik intervale  $(a, b)$ , bet ir visoje srityje  $(-\infty < t < +\infty)$ . Vienas paprasčiausias būdų rasti tokį intervalo ilgį

$(b-a)$  yra rasti sandaugą  $T_0 \prod_{i=1}^n n_i \prod_{j=1}^m n_j$ . Bendroji formulė, kurią turi tenkinti intervalo ilgis  $(b-a)$  tokiu

atveju yra  $b-a = \underset{s=1,2,3,\dots}{sT_0} \cdot \underset{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m}}{BMK(n_i, n_j)}$ . Čia santrumpa BMK reiškia skaičių  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) ir

$n_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) bendrąjį mažiausiąjį kartotinį. Tokiais atvejais funkcijos  $x(t)$  intervalo ir pačios funkcijos spektras turės irgi baigtinį nenulinių linijų skaičių, tačiau tų linijų galės būti gana daug. Tai

bus linijos, turinčios numerius  $k_i = \pm \frac{b-a}{T_i}$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) bei  $k_j = \pm \frac{b-a}{T_j}$  ( $j=1, 2, 3, \dots, m$ ), o tuo

atveju, kai  $A \neq 0$ , dar ir numerį  $k=0$ .

Visais kitais atvejais, t. y. atvejais, kai funkcija  $x(t)$  nėra pastovus dydis ar nėra harmoninių funkcijų, kurių periodai turi bendrąjį matą, suma, funkcijos  $x(t)$  bet kurio baigtinio intervalo spektras turės be galo daug spektro linijų.

Be galo daug spektro linijų turės ir harmoninės funkcijos intervalų bei tokių funkcijų sumos intervalų spektrai, kai intervalų  $(b-a)$  ilgiai nebus bent vienos tų funkcijų periodo kartotiniai. Tokius atvejus mes jau nagrinėjome ir išsiaiškinome tokio reiškimo priežastis.

Be galo daug nenulinių spektro linijų turės ir **periodinės neharmoninės funkcijos**  $x(t)$  bet kurio intervalo (net ir tokio, kuris yra funkcijos  $x(t)$  periodo  $T$  kartotinis) spektras. Tokio reiškimo priežastis paaiškinsiu, nagrinėdamas konkrečios tokios funkcijos Furjė eilutės  $f(t)$ , sutampančios su funkcija  $x(t)$  visoje srityje  $(-\infty < t < +\infty)$ , sudarymo pavyzdį.

Be galo daug nenulinių spektro linijų turės ir **neperiodinės funkcijos**  $x(t)$  bet kurio baigtinio intervalo spektras. Tą reiškiniį irgi paaiškinsiu, nagrinėdamas tokios funkcijos intervalo Furjė eilutės sudarymo pavyzdį.

Prieš pereidamas prie čia paminėtų konkrečių Furjė eilučių sudarymo pavyzdžių, pateiksiu jau anksčiau žadėtąjį Furjė eilučių kai kurių savybių fizikinį paaiškinimą, parodydamas, kad **Furjė eilutės – ne tik abstrakti matematinė konstrukcija, bet ir realių procesų matematinis modelis.**

Furjė eilutės ir Furjė transformacijos yra taip plačiai taikomos ne tik matematikoje, bet ir įvairiose kitose mokslo ir technikos srityse **ne tik ir ne tiek todėl**, kad Furjė eilutės ir Furjė transformacijos yra gana universalios „matematinės konstrukcijos“, suteikiančios galimybes išreikšti standartizuotoje „trigonometrinėje“ bei kompleksinėje eksponentinėje formoje įvairias funkcijas, priklausančias gana plačiai jų aibei, aprėpiančiai ne tik tolydžias, bet ir netolydžias absoliučiai integruojamas funkcijas, ir po to analizuoti tas funkcijas standartiniais matematiniais metodais, **kiek todėl, kad Furjė eilutės ir Furjė integralai – gana universalūs realių procesų matematiniai modeliai ir tų procesų spektrinės analizės instrumentai.**

**Furjė eilutės skaido daugelio realių procesų fragmentų matematinius modelius kaip tik į tokias komponentes, į kurias fiziškai skaidosi pats to realaus proceso fragmentas. Juk kokio nors proceso fragmento spektras, kurį galime**

išreikšti ir analizuoti taikydami Furjė eilutes, yra ne tik matematinė sąvoka, vartojama matematinėje kalboje, charakterizuojant realius nagrinėjamus procesus, bet ir reali esybė, kurią galime stebėti ir analizuoti, naudodamiesi tokiais fizikiniais prietaisais kaip spektroskopai, spektrografai, rezonatoriai ir pan.

Egzistuoja nemažai gamtos ir technikos reiškinių, kurių „mechanizmų“ nagrinėjimas leidžia padaryti išvadą, jog **kai kurie dėsningumai, matematiškai nustatomi analizuojant Furjė eilutes ir Furjė integralus bei jų savybes, yra ne tik matematiniai, bet ir fizikiniai dėsningumai.** Kartais galima išsireikšti dar „stipriau“: „**pirmoje eilėje – fizikiniai, o matematiniai dėsningumai pasireiškia kaip tų – fizikinių – dėsningumų atspindys, jų matematinė išraiška, matematinis modelis**“, nors tas modelis ir buvo gautas ne stebint bei aprašant realų fizikinį reiškinį, o logiškai išplaukė (buvo išvestas) iš tų ar kitų matematinių teorijų, iš priimtų jose apibrėžimų ir aksiomų bei jau įrodytų teoremų.