

1) laikysime, kad **kaupimo norma** $s = \frac{Y-C}{Y}$, parodanti, kokia nacionalinių pajamų dalis išlieka nesuvaldoma, yra pastovus dydis, t. y. $s = \text{const}$;

2) laikysime, kad investuojamo į gamybą **kapitalo augimo greitis** $\dot{K}$, būdamas proporcingas naujų investicijų dydžiui, yra lygus toms naujoms investicijoms I , kurios buvo investuotos per laiko vienetą (metus), t. y. $\dot{K} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K_2 - K_1}{\Delta t} = I = Y - C$, kai Δt yra vieni metai;

3) laikysime, kad darbo jėgos pasiūlos L augimo normuotas santykinis greitis $\frac{\dot{L}}{L}$ yra pastovus dydis n , t. y. $\frac{\dot{L}}{L} = n = \text{const}$, kur n vadinamas **darbo jėgos augimo santykinio tempu**, arba tiesiog **darbo jėgos augimo tempu**.

Iš visų šių prielaidų ir lygties $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$ išplaukia **pagrindinė makroekonomikos augimo lygtis** $\dot{x} = x \left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \right) = x \frac{I}{K} - nx = \frac{K}{L} \cdot \frac{I}{K} - nx = \frac{I}{L} - nx = \frac{Y}{L} \cdot \frac{I}{Y} - nx = y \frac{I}{Y} - nx = \frac{I}{Y} f(x) - nx = \frac{Y-C}{Y} f(x) - nx = sf(x) - nx$.

Ši lygtis vaizduoja **makroekonominio augimo pusiausvyrinę trajektoriją, atitinkančią pilną užimtumą**.

Stabili pusiausvyra pasiekama tada, kada $\dot{x} = 0$, t. y., tada, kada x įgyja tokią reikšmę x^* , kad $sf(x^*) = nx^*$, iš kur išplaukia formulė $n = \frac{sf(x^*)}{x^*}$, išreiškianti darbo

jėgos L augimo tempo $n = \frac{\dot{L}}{L}$ sąryšį su gamybos aprūpinimo fondais rodikliu $x = \frac{K}{L}$, darbo našumo funkcija $f(x)$ ir kaupimo norma s pusiausvyros būsenoje.

Panagrinėsime, kaip nusistovi ta pusiausvyra. Tarkime, jog turime neoklasikinį modelį ir gamybinę funkciją $Y = F(K, L)$ yra Kobo ir Duglaso funkcija $Y = cK^a \cdot L^{1-a} = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, kurioje $c=1$, o $a=0,5$. Iš šios funkcijos gausime neoklasikinę darbo našumo funkciją $y = f(x)$, kurioje $y = \frac{Y}{L}$, o $x = \frac{K}{L}$. Tuomet

$$y = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{K^{0,5} \cdot L^{0,5}}{L} = \left(\frac{K}{L} \right)^{0,5} = \sqrt{x}, \text{ t. y. } f(x) = \sqrt{x}.$$

Išstatysime šią $f(x)$ išraišką į makroekonominio augimo lygtį $\dot{x} = sf(x) - nx$, šiuo atveju aprašančią paprastą ekonominį augimą, kuris vyktų neatsižvelgiant į techninio progreso galimybes, leidžiančias padidinti darbo našumą $y = f(x)$, didinant ne tik x , bet ir koeficientus c ir a . Šiuo atveju tie koeficientai laikomi pastoviais dydžiais, kaip ir koeficientai s ir n , nors tikrovėje (ilgalaikeje perspektyvoje) visi šie koeficientai gali keistis.

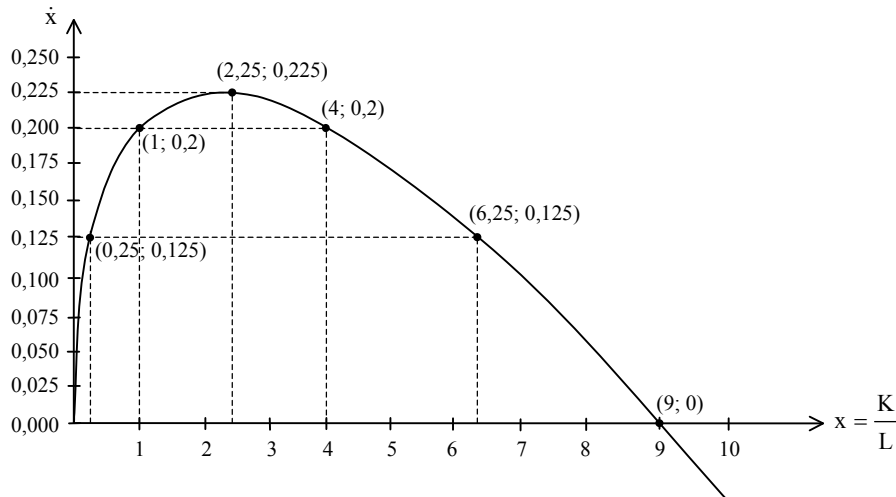
Nagrinėsime atvejį, kada kaupimas (nesuvaldomoji nacionalinių pajamų dalis) sudaro $\frac{3}{10}$ visų nacionalinių pajamų, t. y. atvejį, kai $s=0,3$.

Tarkime, jog darbo resursų priaugimo tempai sudaro 10%, t. y. $n=0,1$.

Tuomet gauname lygtį $\dot{x} = 0,3\sqrt{x} - 0,1x$. Iš šios lygties matome, kad tuo atveju, kai $0,3\sqrt{x} > 0,1x$, t. y. kai $9x > x^2$, arba kai $0 < x < 9$, išvestinė $\dot{x}$ yra teigiamas dydis ir todėl gamybos aprūpinimas fondais turi didėti. Taške $x=9$ to didėjimo tempas tampa lygus 0 ir dydžio x reikšmė stabilizuojasi, nes, jei $x > 9$, tai $\dot{x} < 0$, ir $x(t)$ tampa mažėjančia laiko t funkcija.

Kadangi $\ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} (0,3\sqrt{x} - 0,1x) = \frac{0,3}{2\sqrt{x}} \dot{x} - 0,1\dot{x} = 0,1\dot{x} \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - 1 \right)$, tai intervale $0 < x < \frac{9}{4}$ dydis x didėja didėjančiu tempu, nes tame intervale $\frac{dx(t)}{dt} > 0$ ir $\frac{d^2x(t)}{dt^2} > 0$, taške $x = \frac{9}{4} = 2,25$ funkcija $x(t)$ turi linkio tašką, nes tame taške $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$, o intervale $2,25 < x < 9$ funkcija $x(t)$ didėja jau mažėjančiu tempu, nes tame intervale $\frac{dx(t)}{dt} > 0$, o $\frac{d^2x(t)}{dt^2} < 0$. Taške $x=9$ funkcija $x(t)$ pasiekia maksimalią reikšmę $x(t)=9$, kuri atitinka stabilią pusiausvyrinę būseną x^* , nes padidinus x virš 9, prasidėtų to dydžio mažėjimo procesas, kadangi, kai $x > 9$, tai $\frac{dx(t)}{dt} < 0$.

Dydžio $x = \frac{K}{L}$ kitimo tempo $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$ priklausomybę nuo paties dydžio x (t. y. kreivę $\frac{dx(t)}{dt} = 0,3\sqrt{x(t)} - 0,1x(t)$) vaizduoja 318 pav., o paties dydžio x kitimo trajektoriją $x(t)$ – 319 pav.



318 pav.

Pačią funkcijos $x(t)$ kitimo trajektoriją gautume išsprendę diferencialinę lygtį $\frac{dx(t)}{dt} = 0,3\sqrt{x(t)} - 0,1x(t)$, t. y. suradę integralus $\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{3\sqrt{x} - x} = \frac{1}{10} \int_0^t dt$.

Priimsime, kad $x=u^2$. Tuomet $dx=2udu$, ir integralas $\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{3\sqrt{x} - x}$ susiveda į integralą $\int_{\sqrt{x(0)}}^{\sqrt{x(t)}} \frac{2udu}{3u - u^2} = -2 \int_{\sqrt{x(0)}}^{\sqrt{x(t)}} \frac{du}{u - 3} = -2 \ln(u - 3) \Big|_{\sqrt{x(0)}}^{\sqrt{x(t)}} = -2 \left[\ln(\sqrt{x(t)} - 3) - \ln(\sqrt{x(0)} - 3) \right] = -2 \ln \frac{\sqrt{x(t)} - 3}{\sqrt{x(0)} - 3}$.

Spręsdami lygtį $\int_{\sqrt{x(0)}}^{\sqrt{x(t)}} \frac{du}{u - 3} = -\frac{1}{20} t$, gauname $\ln \frac{\sqrt{x(t)} - 3}{\sqrt{x(0)} - 3} = \ln e^{-\frac{1}{20} t}$, iš kur išplaukia, jog $x(t) = \left[3 + (\sqrt{x(0)} - 3) e^{-\frac{t}{20}} \right]^2$.

Kai $t \rightarrow \infty$, tai nepriklausomai nuo pradinių sąlygų gauname, jog $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 9$, kas sutampa su anksčiau gautu rezultatu.

Rasime $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$ dviem būdais: diferencijuodami funkciją $x(t) = \left[3 + (\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} \right]^2$ ir

naudodamiesi formule $\dot{x} = 0,3\sqrt{x} - 0,1x$.

$$1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot \left[3 + (\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} \right] (\sqrt{x(0)} - 3) \frac{-1}{20} e^{-\frac{t}{20}} = -0,1 \cdot \left[3(\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} + (\sqrt{x(0)} - 3)^2 e^{-\frac{t}{10}} \right] = 0,1(3 - \sqrt{x(0)}) \left[3e^{-\frac{t}{20}} - (3 - \sqrt{x(0)})e^{-\frac{t}{10}} \right].$$

$$2) \quad \dot{x} = 0,3\sqrt{x} - 0,1x = 0,3 \cdot \left[3 + (\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} \right] - 0,1 \cdot \left[3 + (\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} \right]^2 =$$

$$= 0,9 + 0,3(\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} - 0,9 - 0,6(\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} - 0,1(\sqrt{x(0)} - 3)^2 e^{-\frac{t}{10}} =$$

$$= -0,1 \cdot \left[3(\sqrt{x(0)} - 3)e^{-\frac{t}{20}} + (\sqrt{x(0)} - 3)^2 e^{-\frac{t}{10}} \right] = 0,1 \cdot (3 - \sqrt{x(0)}) \left[3e^{-\frac{t}{20}} - (3 - \sqrt{x(0)})e^{-\frac{t}{10}} \right].$$

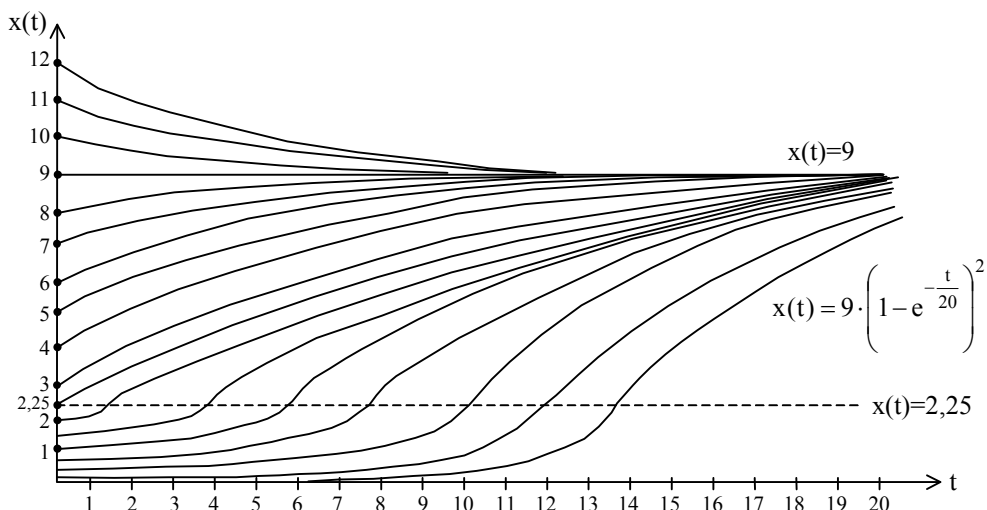
Rezultatai, gauti pirmuoju ir antruoju būdais, sutampa, o tai reiškia, jog trajektorijos $x(t)$, vaizduojančios dydžio $x = \frac{K}{L}$ kitimą, esant bet kurioms pradinėms sąlygoms, surastos teisingai.

Priklausomai nuo pradinių sąlygų (t. y. nuo $x(0)$ reikšmės) tos trajektorijos skiriasi viena nuo kitos, tačiau turi vieną bendrą bruožą: jei $x(0) > 0$, tai $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 9$ nepriklausomai nuo pradinės sąlygos $x(0) > 0$ dydžio.

Kai $\sqrt{x(0)} - 3 = 0$, t. y., kai jau pačioje pradžioje (momentu $t=0$) dydžio x reikšmė yra lygi 9, tai išvestinės $\dot{x}(t)$ reikšmė lygi 0 ne tik momentu $t=0$, bet ir visais kitais momentais $t > 0$. Šiuo atveju trajektorija $x(t)$ yra tiesė $x(t)=9$, lygiagreti abscisių t ašiai. Prie tos tiesės, vaizduojančios augimo proceso pusiausvyrinę būseną, būtinai artėja visos trajektorijos $x(t)$, išskyrus trajektoriją, atitinkančią pradinę sąlygą $x(0)=0$. Ji yra ypatinga: gali artėti prie tiesės $x(t)=9$, bet gali ir neartėti.

Atveju $x(0)=0$ išvestinė $\dot{x}(0)$ taip pat lygi 0 ir dydžio $x = \frac{K}{L}$ augimo neturėtų būti, todėl šiuo atveju trajektorija turėtų būti tiesė $x(t)=0$, sutampanti su abscisių t ašimi. Tačiau būseną $x(t)=0$ nėra stabili: užtenka tik išeiti iš taško $x(t)=0$, nors truputėlį padidinus x ir suteikus jam nors mažytę teigiamą reikšmę, kai tuoj pat prasidės dydžio x didėjimo procesas, kuris pradžioje vyks vis didėjančiu tempu, po to trajektorija $x(t)$ pasieks linkio tašką, nuo kurio $x(t)$ didėjimas tęsis jau mažėjančiu tempu, vis labiau artėjant prie tiesės $x=9$.

Santykio $x = \frac{K}{L}$ didėjimas būdingas visoms trajektorijoms $x(t)$, kurių pradinė sąlyga tenkina nelygybes $0 < x(0) < 9$, gali būti būdingas ir atveju $x(0)=0$, o visoms trajektorijoms, kurių $x(0) > 9$, būdingas santykio $x = \frac{K}{L}$ mažėjimas (žiūr. 319 pav.).



319 pav.

Visoms trajektorijoms $x(t)$, kurių pradinė sąlyga tenkina nelygybės $0 < x(0) < 9$, yra būdinga tai, kad visos jos turi linkio taškus. Tų taškų abscisės t yra teigiamos, kai $0 < x(0) < 2,25$. Kai $x(0) = 2,25$, tai linkio taško abscisė t yra lygi 0, o kai $2,25 < x(0) < 9$, tai linkio taškų abscisės t tampa neigiamais dydžiais.

Visų linkio taškų ordinatės x yra vienodos ir lygios $\frac{9}{4} = 2,25$. Būdinga dar ir tai, kad visuose linkio taškuose trajektorijų $x(t)$ liestinės turi vienodus kampus su abscisių ašimi t , nes tuose taškuose išvestinės $\dot{x}$ reikšmės nepriklausomai nuo pradinių sąlygų yra vienodos ir lygios 0,225.

Irodysime visa tai, apskaičiuodami $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 0,01(3 - \sqrt{x(0)}) \left[-\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{20}} + (3 - \sqrt{x(0)}) e^{-\frac{t}{10}} \right] = 0,01(3 - \sqrt{x(0)}) e^{-\frac{t}{20}} \left[(3 - \sqrt{x(0)}) e^{-\frac{t}{20}} - \frac{3}{2} \right]$. Kadangi linkio taške $\ddot{x}(t) = 0$, tai

linkio taške turi būti tenkinama sąlyga $e^{-\frac{t}{20}} = \frac{3}{2(3 - \sqrt{x(0)})}$, iš kurios gauname, jog linkio taškuose

$$x(t) = \left[3 - (3 - \sqrt{x(0)}) e^{-\frac{t}{20}} \right]^2 = \left[3 - (3 - \sqrt{x(0)}) \cdot \frac{3}{2(3 - \sqrt{x(0)})} \right]^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25. \text{ Įstatę šią reikšmę į}$$

išvestinės $\dot{x}$ formulę $\dot{x} = 0,3\sqrt{x} - 0,1x$, gauname, jog $\dot{x} = 0,3 \cdot \frac{3}{2} - 0,1 \cdot \frac{9}{4} = \frac{0,9}{4} = 0,225$. Iš sąlygos

$$e^{-\frac{t}{20}} = \frac{3}{2(3 - \sqrt{x(0)})} \text{ gauname ir linkio taškų abscisių reikšmes } t = 20 \ln \frac{2(3 - \sqrt{x(0)})}{3}.$$

Kai $x(0)$ reikšmė, būdama teigiamu dydžiu, artėja prie 0, tai trajektorijos $x(t)$ linkio taško ordinatė išlieka pastoviu dydžiu $x^* = 2,25$, o abscisės t reikšmė artėja prie $t^* = 20 \ln 2 \approx 13,863$. Kai $x(0) = 0,25$, tai atitinkamos trajektorijos $x(t)$ linkio taško abscisė yra $t = 20 \ln \frac{6-1}{3} = 20(\ln 5 - \ln 3) \approx 10,219$,

o kai $x(0) = 1$, tai $t = 20(\ln 4 - \ln 3) \approx 5,756$. Kai $x(0) = \frac{9}{4}$, tai linkio taško abscisė $t = 20 \ln \frac{2(3 - \frac{3}{2})}{3} = 20 \ln 1 = 0$, t. y. tuo atveju momentu $t = 0$ trajektorija $x(t)$ prasidėtų nuo linkio taško.

Kai $2,25 < x(0) < 9$, tai linkio taškų abscisės, kaip jau buvo minėta, tampa neigiamais dydžiais. Pavyzdžiui, kai $x(0) = 4$, tai $t = 20(\ln 2 - \ln 3) \approx -8,11$, o kai $x(0)$ artėja prie 9, tai linkio taško abscisė t artėja prie $-\infty$, ordinatei x pasiliekant lygiai 2,25 ir išvestinės $\dot{x}$ reikšmei linkio taške pasiliekant lygiai 0,225.

Nesunku pastebėti tam tikrą **analogiją tarp čia nagrinėjamų trajektorijų $x(t)$ ir logistinių kreivių**, apie kurias buvo rašyta 1.9.1.6. skyrelyje, kalbant apie populiacijų augimo greitį, aprašomą

lygtimi $\frac{dz(t)}{dt} = k_1 z(t) + k_2 z^2(t)$, kurioje $z(t)$ – populiacijos būseną momentu t , charakterizuojama

individue skaičiumi populiacijoje, o k_1 ir k_2 – teigiamo ir neigiamo grįžtamųjų ryšių koeficientai. Kai populiacijoje kiekviename laiko intervale individų gimsta daugiau negu išmiršta, tai $k_1 > 0$, o kai mirimų daugiau negu gimimų, tai $k_1 < 0$. Kai gimstamumas lygus natūraliam mirštamumui, tai $k_1 = 0$. Koeficientas k_2 , charakterizuojantis populiacijos mažėjimo tendenciją, pasireiškiančią tuo, kad, individų skaičiui populiacijoje viršijant jų normalų skaičių, dėl maisto bei vietos stokos tų individų gyvenimo sąlygos pablogėja, dėl ko individų skaičius pradeda mažėti, visada yra neigiamas dydis, t. y. $k_2 < 0$. Procesus, aprašomus logistinėmis kreivėmis, plačiau ir detaliau nagrinėsime antroje šios mokymo priemonės dalyje, o čia apsiribosiu tik pastaba, kad gamybos aprūpinimo fondais kitimo procese, aprašomame

lygtimi $\frac{dx(t)}{dt} = 0,3\sqrt{x(t)} - 0,1x(t)$, taip pat egzistuoja **teigiamas ir neigiamas grįžtamasis ryšys**:

dydžio x didėjimo greičio $\dot{x}$ teigiamą priklausomybę nuo jo kvadratinės šaknies $\sqrt{x}$ dydžio atspindi teigiamas koeficientas $s = \frac{Y-C}{Y}$, charakterizuojantis kaupimo normą, o neigiamą priklausomybę jau

nuo paties dydžio x – koeficientas $n = \frac{\dot{L}}{L}$, charakterizuojantis darbo jėgos pasiūlos santykinį didėjimo

greitį. Kai darbo jėgos pasiūla mažėja, t. y., kai $n = \frac{\dot{L}}{L} < 0$, tai šis grįžtamasis ryšys tampa teigiamu,

skatinančiu gamybos aprūpinimo fondais didėjimą. Tuomet dydžio x kitimo procesą charakterizuotą monotoniškai didėjanti funkcija $x=x(t)$, kurios išvestinė $\dot{x}(t)$ būtų lygi 0 tik tuomet, kai $x(t)=0$, o visais kitais atvejais, vykstant kapitalo kaupimui ir jo investavimui į gamybą, ką charakterizuoja

$s = \frac{Y-C}{Y} > 0$, išvestinė $\dot{x}(t)$ būtų teigiamas dydis, t. y. dydžio x kitimo procesas neturėtų stabilios

pusiausvyros būsenos.

Palieku skaitytojui savarankiškai išnagrinėti atvejus, kai visuomenė kurį laiką vartotų daugiau negu pagamina, gyvendama anksčiau sukaupto kapitalo sąskaita, t. y., kada $s=\text{const}<0$, o $n=\text{const}$ gali būti kaip teigiamu, taip ir neigiamu dydžiu (o taip pat ir dydžiu, lygiu 0).

Toks nagrinėjimas padės skaitytojui giliau suprasti ekonominius reiškinius, vykusius ir tebevykstančius Lietuvoje po Nepriklausomybės atkūrimo 1990 m.

Žymiai sudėtingesniu taptų trajektorijos $x(t)$ gavimas ir nagrinėjimas, kai tektų atsižvelgti į gamybos technologijos tobulinimą ir darbo našumo $\frac{Y}{L} = f(x)$ didinimą ne tik didinant $x = \frac{K}{L}$, bet ir

keičiant gamybinės funkcijos $Y=F(K, L)$ koeficientus c ir a bei taikant modernizuotą Kobo ir Duglaso gamybinę funkciją $Y=ce^{at}L^aK^{1-a}$.

Tuomet trajektorijos $x(t)$ apskaičiavimo uždavinį jau nebepavyktų išspręsti analiziškai ir tektų griebtis artutinių skaičiavimų bei procesų imitacinio modeliavimo.

Žinoma, ir ką tik išnagrinėtą gana paprastą trajektorijos $x(t)$ apskaičiavimo uždavinį galima spręsti ne tik analiziškai, kaip mes čia tai darėme, bet ir naudojantis imitaciniu modeliavimu. Jau minėtoje knygoje [48] šis uždavinys išspręstas kaip tik taip ir, naudojantis artutiniais skaičiavimo metodais, surasta artutinė pusiausvyrinė reikšmė $x^* \approx 8,960247$. Sumažinus imitavimo žingsnio (Δt , o kartu ir Δx) reikšmę, buvo galima gauti tikslesnį rezultatą, dar artimesnį skaičiui $x^*=9$.

Dabar panagrinėsime neokeinistinės ekonominio augimo teorijos atstovų **Harodo ir Domaro makroekonominį augimo modelį**, kurio gamybinę funkciją $Y=F(K, L)$ aprašoma lygybe

$Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{\ell}\right)$. Joje k ir ℓ yra pastovūs koeficientai, charakterizuojantys kapitalo ir darbo jėgos sąnaudas, reikalingas produkcijos vienetui pagaminimui.

Kadangi $k = \frac{K}{Y}$ ir $\ell = \frac{L}{Y}$, tai Harodo ir Domaro modelio gamybinę funkciją $Y=F(K, L)$ galima

apibrėžti ir taip: $Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{\ell}\right) = \begin{cases} \frac{K}{k}, & \text{kai } x < \frac{k}{\ell} \\ \frac{L}{\ell}, & \text{kai } x \geq \frac{k}{\ell} \end{cases}$, kur $x = \frac{K}{L}$, nes kai $\frac{K}{L} < \frac{k}{\ell}$, tai $\frac{K}{k} < \frac{L}{\ell}$ ir

$Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{\ell}\right) = \frac{K}{k}$, o kai $\frac{K}{L} \geq \frac{k}{\ell}$, tai $\frac{K}{k} \geq \frac{L}{\ell}$ ir $Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{\ell}\right) = \frac{L}{\ell}$. Dydžiai $\frac{K}{k}$ ir $\frac{L}{\ell}$ kaip tik ir reiškia gaminių skaičių Y , kurį leistų pagaminti turimas kapitalas K bei turimi darbo jėgos resursai L .

Gamybinė funkcija $Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{\ell}\right)$ yra homogeninė funkcija, nes $Y = \min\left(\frac{K}{k}, \frac{L}{\ell}\right) = L \min\left(\frac{x}{k}, \frac{1}{\ell}\right)$. Todėl $y = \frac{Y}{L} = \min\left(\frac{x}{k}, \frac{1}{\ell}\right) = \frac{1}{\ell} \min\left(x \frac{\ell}{k}, 1\right) = f(x)$, nes $\frac{1}{\ell}$ ir $\frac{\ell}{k}$ yra konstantos, charakterizuojančios normalią ir pastovią gamybos technologiją.

Išsistatę šią $f(x)$ reikšmę į makroekonominio augimo lygtį $\dot{x} = sf(x) - nx$, kur $s = \text{const}$ ir $n = \text{const}$, gauname lygtį $\dot{x} = \frac{s}{\ell} \min\left(x \cdot \frac{\ell}{k}, 1\right) - nx$. Išspręsti šią lygtį, t. y. surasti trajektoriją $x(t)$,

analiziškai jau nebepavyktų, tačiau sudaryti imitacinį modelį, imituojantį dydžio $x = \frac{K}{L}$ kitimo procesą, nėra sunku. Rekomenduočiau skaitytojui, priėmus tas pačias koeficientų s ir n reikšmes ($s=0,3$; $n=0,1$) ir pasirinkus kokias nors pastovias koeficientų k ir ℓ reikšmes bei proceso imitavimo žingsnio ilgį $\Delta t > 0$ ir pradinę būseną $x(0) > 0$, apskaičiuoti artutinę trajektoriją $x(t) = x(m \cdot \Delta t)$, kur $m=0, 1, 2, 3, \dots$

Pailiustruosiu imitavimo pradžią, perrašydamas diferencialinę makroekonominio augimo lygtį $\dot{x} = \frac{s}{\ell} \min\left(x \cdot \frac{\ell}{k}, 1\right) - nx$ į skirtuminę $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{s}{\ell} \min\left(x \frac{\ell}{k}, 1\right) - nx$. Iš šios lygties, žinodami $x(0 \cdot \Delta t) = x(0)$ reikšmę, pirmajame imitavimo žingsnyje, kai $m=1$, gausime, jog $x(\Delta t) - x(0) =$

$$= \left[\frac{s}{\ell} \min\left(x(0) \cdot \frac{\ell}{k}, 1\right) - nx(0) \right] \Delta t = \begin{cases} \left[\frac{s}{\ell} x(0) \frac{\ell}{k} - nx(0) \right] \Delta t = x(0) \left(\frac{s}{k} - n \right) \Delta t, & \text{kai } x(0) < \frac{k}{\ell}, \\ \left[\frac{s}{\ell} - nx(0) \right] \Delta t, & \text{kai } x(0) \geq \frac{k}{\ell}, \end{cases} \quad \text{iš kur išplaukia,}$$

$$\text{kad naujoji } x \text{ reikšmė } x(\Delta t) = x(0) + \begin{cases} \left(\frac{s}{k} - n \right) x(0) \Delta t, & \text{kai } x(0) < \frac{k}{\ell}, \\ \left[\frac{s}{\ell} - nx(0) \right] \Delta t, & \text{kai } x(0) \geq \frac{k}{\ell}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Apskaičiavę } x(\Delta t) \text{ reikšmę, analogiškai galime apskaičiuoti } x(2\Delta t) = x(\Delta t) + \\ &+ \begin{cases} \left(\frac{s}{k} - n \right) \cdot x(\Delta t) \Delta t, & \text{kai } x(\Delta t) < \frac{k}{\ell}, \\ \left[\frac{s}{\ell} - nx(\Delta t) \right] \Delta t, & \text{kai } x(\Delta t) \geq \frac{k}{\ell} \end{cases} \quad \text{ir, bendrai } x[(m+1)\Delta t] = x(m\Delta t) + \\ &+ \begin{cases} \left(\frac{s}{k} - n \right) \cdot x(m\Delta t) \Delta t, & \text{kai } x(m\Delta t) < \frac{k}{\ell}, \\ \left[\frac{s}{\ell} - nx(m\Delta t) \right] \Delta t, & \text{kai } x(m\Delta t) \geq \frac{k}{\ell}, \end{cases} \quad \text{kur } m=0, 1, 2, 3, \dots, \text{ t. y. galime apskaičiuoti } x(t) \text{ reikšmę bet} \end{aligned}$$

kuriame taške $t = m \cdot \Delta t$.

Pasirinkę pakankamai mažą Δt reikšmę, mes galime apytikriai apskaičiuoti trajektoriją $x(t)$ bet kokioms pradinėms sąlygoms ir bet kokioms teigiamoms koeficientų k ir ℓ reikšmėms.

Nesunku sudaryti standartinę kompiuterinę programą, imituojančią Harodo ir Domaro modeliui dydžio $x = \frac{K}{L}$ kitimą ir apskaičiuojančią to kitimo trajektorijos $x(t)$ taškus $x(m \cdot \Delta t)$ bet kurioms realioms dydžių k , ℓ , s , n , $x(0)$ ir Δt reikšmėms, įstačius vietoj formalių tos programos parametrų k , ℓ , s , n , $x(0)$, Δt faktiškąsias tų parametrų reikšmes, pasirenkamas eksperimentatoriaus nuožiūra. Su tokios programos ir tokio trajektorijos $x(t)$ apskaičiavimo pavyzdžiu galima susipažinti VU MIF Matematinės statistikos katedroje J. Rimkutės diplominio darbo papildyme, kurį atliko A. Galinskis.

Analogiškai gali būti sudaryta programa, imituojanti dydžio x kitimą neoklasikiniame modelyje su kintamais koeficientais c , a , s , n , esant duotoms (pasirenkamoms) pradinėms sąlygoms ir duotajam (pasirenkamam) imitavimo žingsniui Δt .

1.14.12.2.3. Biznio ciklų (business cycle) modeliai

Ilgalaikėje perspektyvoje makroekonomikoje pasireiškia augimo tendencija, tačiau tas augimas nereguliuojamos bei silpnai reguliuojamos rinkos ekonomikos sąlygomis gana dažnai susideda iš eilės viena kitą keičiančių konjunktūros pakilimo ir smukimo bangų, sudarančių savo rūšies periodiškai ar beveik periodiškai besikartojančius ciklus, vadinamus **biznio ciklais (arba ekonominio aktyvumo ciklais)**. Tokių ciklų pavyzdžiai – periodiškai besikartojančios **ekonominės krizės**, kurių metu dėl susidariusios perprodukcijos ekonominio augimo fazę pakeisdavo recesijos fazė. Apie tas krizes ir jų priežastis jau buvo užsiminta 1.14.12.2. ir 1.14.12.2.1. skyreliuose. Dabar rinkos ekonomikos vystimosi cikliškumo reiškinį panagrinėsime detaliau.

Svyravimų ekonomikoje susidarymo mechanizmus galima aiškinti gana įvairiai, nors, bendrai paėmus, **svyravimų susidarymo bet kurioje sistemoje bei bet kurioje terpėje mechanizmai bendrasisteminiai požiūriu yra vienodi**. Kad atsirastų svyravimai, pakanka, kad sistemoje egzistuotų inercija, dėl ko sistema reaguotų į aplinkos poveikius su didesniu ar mažesniu vėlavimu, ir poveikis iššauktų priešingos krypties atoveiksmį. Tuomet, išvedus sistemą iš pusiausvyrinės būsenos, jei terpė nėra labai „klampi“, susidarys situacija, kurioje atsirastų svyravimai. Apie tai šioje mokymo priemonėje buvo jau ne kartą kalbėta. Jei, tiems svyravimams vykstant, dalis energijos negrįžtamai iššvaistoma (pavyzdžiui, įveikiant trintį, nestangrioms deformacijoms, keliant aplinkos temperatūrą ir pan.), tai svyravimų energija ir jų amplitudė, laikui bėgant, mažėja. Šie bendrasisteminiai samprotavimai galioja ir ekonominėms sistemoms, socialiniams reiškiniams, net žmonių psichologinei būsenai. Todėl **įvairūs svyravimų modeliai skiriasi ne tiek savo struktūra, kiek sudėtimi – svyravimų metu veikiančių veiksnių pavadinimais, jų traktavimu (interpretacija)**.

Šiame skyrelyje mes susipažinsime su biznio ciklų susidarymo modeliu, kurį pasiūlė **Samuelsonas ir Hiksas**, svyravimų susidarymo mechanizmo aiškinimui pasinaudoję taip vadinamuoju akseleracijos principu ir 1.14.12.2.1 skyrelyje mūsų jau minėtąja multiplikatoriaus sąvoka.

Akseleracijos principo esmę sudaro teiginys, kad investicijų į produkcijos gamybą dydis $I(t)$ priklauso nuo paklausos tai produkcijai prieš tai buvusio prieauglio $Y(t-1)-Y(t-2)$. Tos priklausomybės proporcingumo koeficientas v vadinamas **akseleracijos faktoriumi**, arba **investicijų koeficientu**. Akseleracijos principas matematiškai išreiškiamas **vėluojančių argumentų lygtimi** $I(t)=v[Y(t-1)-Y(t-2)]$, kuri vadinama **investicijų lygtimi**. Hiksas argumentų vėlavimą aiškina **laiko lagu**, kuris reikalingas tam, kad investicijos, kurios buvo planuojamos $t-1$ -jame takte, lyginant produkcijos paklausą $Y(t-1)$ tame takte su paklausa prieš tai buvusiame takte, būtų investuotos į realią gamybą, vykstančią jau t -jame takte.

Laiko lagas įvedamas ir į **vartojimo funkciją**, jau minėtą 1.14.12.2.1. skyrelyje, nes t -jame takte vartojama ta produkcija, kuri buvo pagaminta (ar užsakyta) $t-1$ -jame takte. Todėl vartojimas C nagrinėjamame Samuelsono ir Hisko modelyje aprašomas vėluojančio argumento lygybe $C(t)=cY(t-1)+b$, kur c – jau minėtasis polinkio vartoti koeficientas, o b – bazinis vartojimas.

Iš paklausos ir pasiūlos šiek tiek idealizuotos pusiausvyros sąlygos, kai visa, kas liko nesuvertota, investuojama į gamybą, išplaukia lygybė $Y(t)=C(t)+I(t)^*$, iš kurios gauname **dinaminę nacionalinių pajamų $Y(t)$ kitimo lygtį** $Y(t)=(c+v) \cdot Y(t-1) - v \cdot Y(t-2) + b$.

Žinodami koeficientų c , v , ir b reikšmes bei nacionalines pajamas dviejuose prieš tai buvusiuose taktuose $t-1$ ir $t-2$, mes galime apskaičiuoti nacionalines pajamas, kurios turėtų atsirasti t -jame takte, po to – analogiškai – $t+1$ -jame takte ir t. t.

Pavyzdžiui, nesunku apskaičiuoti dydžio Y kitimo trajektoriją $Y(t)$, kai $Y(0)=50$, $Y(1)=55$, $c=0,75$, $v=1,05$, $b=20$, ir įsitikinti, kad $Y(t)$ reikšmė svyruoja su didėjančia amplitude. Jei v sumažintume iki 1, tai gautume negėstančius svyravimus su pastovia amplitude. Dar šiek tiek sumažinę v reikšmę, gautume dydžio $Y(t)$ svyravimus su mažėjančia amplitude, t. y. dydis $Y(t)$ svyruodamas artėtų prie pusiausvyrinės būsenos Y^* . Intervale $(0 \leq v < 0,25)$ gautume $Y(t)$ reikšmės aperiodinį artėjimą prie Y^* jau be svyravimų, o esant pakankamai didelėms v reikšmėms, t. y., kai $v > 0,25$, gautume, jog $Y(t)$ toltų nuo Y^* irgi be svyravimų. Kai $v=(1 \pm 0,5)^2$ gauname procesus, galinčius turėti ekstremumo tašką $t=t^*$.

Rekomenduoju skaitytojui sudaryti $Y(t)$ kitimo imitacinį modelį duotoms $Y(0)$, $Y(1)$, c bei b reikšmėms ir, keičiant akseleracijos faktoriaus v reikšmę, nustatyti šio faktoriaus reikšmių intervalą, kuriame $Y(t)$ aperiodiškai artėja prie pusiausvyros būsenos Y^* , po to – v kitimo intervalą, kuriame $Y(t)$ reikšmė svyruodama artėja prie Y^* , dar po to – intervalą, kuriame $Y(t)$ reikšmė svyruodama tolsta nuo pusiausvyrinės būsenos, svyravimų amplitudei didėjant, ir galų gale – tą v kitimo intervalą, kuriame $Y(t)$ reikšmė aperiodiškai tolsta nuo Y^* jau be svyravimų.

Pusiausvyrinę $Y(t)$ reikšmę Y^* galima nustatyti, ne tik eksperimentuojant su imitaciniu modeliu, bet ir analiziškai, pasinaudojant tuo, kad pusiausvyrinėje būsenoje $Y(t)=Y(t-1)=Y(t-2)=Y^*$, ir dinamini $Y(t)$ kitimo lygtimi, į kurią įstatę pusiausvyrinę $Y(t)$, $Y(t-1)$ ir $Y(t-2)$ reikšmę Y^* , gauname $Y^*=(c+v)Y^*-vY^*+b$. Išsprendę šią lygtį, randame, jog $Y^*=\frac{b}{1-c}$. Rekomenduoju skaitytojui, eksperimentuojant su imitaciniu modeliu, patikrinti šią formulę ir įsitikinti, kad Y^* reikšmė nepriklauso nuo v ir nuo pradinių sąlygų $Y(0)$ bei $Y(1)$, o tik nuo bazinio vartojimo b ir multiplikatoriaus $\frac{1}{1-c}$, kurio prasmę mes jau esame išsiaiškinę 1.14.12.2.1. skyrelyje.

Dydį $1-c$ kartais vadina **marginaliniu kaupimo koeficientu (marginaline kaupimo norma)** ir žymi s^* . Marginalinė kaupimo norma s^* skiriasi nuo 1.14.12.2.2. skyrelyje nagrinėtos **kaupimo normos** $s=\frac{Y-C}{Y}$ tuo, kad $s^*=\frac{\Delta Y - \Delta C}{\Delta Y}$, kur $\Delta C=c(Y+\Delta Y)+b-(cY+b)=c\Delta Y$. Įstatę ΔC reikšmę į formulę $s^*=\frac{\Delta Y - \Delta C}{\Delta Y}$, gauname, jog $s^*=1-c$. Šiuo dydžiu patogiu naudotis, sprendžiant aukščiau suformuluotą **investicijų koeficiento v kitimo charakteringųjų intervalų nustatymo uždavinį**.

Šį uždavinį galima išspręsti, ne tik eksperimentuojant su imitaciniu modeliu, bet ir analiziškai, panašiai kaip buvo sprendžiamas panašus uždavinys 1.11.10. skyrelyje, nagrinėjant elektromagnetinių virpesių kontūrą ir nustatant, kada jame kokie procesai vyksta. Pateiksiu vieną sprendimo būdą.

Dinaminę $Y(t)$ kitimo lygtį galima šiek tiek supaprastinti, nagrinėjant ne visos $Y(t)$ reikšmės, o tik jos nuokrypį $z(t)=Y(t)-Y^*$ nuo jos pusiausvyrinės reikšmės Y^* kitimą. Įstatę į dinaminę $Y(t)$ kitimo lygtį vietoj $Y(t)$, $Y(t-1)$ ir $Y(t-2)$ jų išraiškas $Y(t)=z(t)+Y^*$, $Y(t-1)=z(t-1)+Y^*$, $Y(t-2)=z(t-2)+Y^*$, gauname lygtį $z(t)+Y^*=(c+v)[z(t-1)+Y^*]-v[z(t-2)+Y^*]+b$, t. y. lygtį $z(t)=(c+v)z(t-1)-v \cdot z(t-2)+(c+v)Y^*-v \cdot Y^*+b-Y^*=(c+v)z(t-1)-vz(t-2)+b-(1-c)Y^*=(c+v)z(t-1)-vz(t-2)+b-(1-c)\frac{b}{1-c}=(c+v)z(t-1)-vz(t-2)$.

Šią lygtį „pastūmę“ laiką t dviem taktais pirmyn, galime užrašyti ir formoje $z(t+2)=(c+v)z(t+1)-vz(t)$. Nesunku pastebėti, kad vienu tos lygties sprendiniu galėtų būti $z(t)=\text{const}=0$.

* Dėl 1.14.12.2.1. skyrelyje minėtų priežasčių ši lygybė galioja ne visada, o tik tada, kai pelno siekiantys ir turintys kapitalo galimi investuotojai yra įsitikinę, jog investuotas kapitalas atsipirks, t. y. duos tokį pelną, kuris bus didesnis už tas palūkanas, kurias sutinka mokėti bankai. Samuelsono ir Hikso modelis į šią aplinkybę neatsižvelgia.

Tuomet pradinės dinaminės lygties $Y(t)=(c+v)Y(t-1)-vY(t-2)+b$ vienu iš sprendinių galėtų būti $Y(t)=Y^*+z(t)=Y^*=\frac{b}{1-c}=\text{const}$, kuo nesunku įsitikinti tiesiogiai. Tai – trivialus sprendinys. Rasime kitus galimus sprendinius.

Kadangi $z(t)$ bendruoju atveju gali vaizduoti ir svyravimus, ir aperiodinį monotoninį bei nemonotoninį procesus, tai tikslinga lygties $z(t+2)=(c+v)z(t+1)-vz(t)$ sprendinį ieškoti kompleksinėje formoje. Įsivesime kol kas dar neapibrėžtą kompleksinį parametą $\lambda \neq 0$ ir ieškosime tokios jo reikšmės, kad $z(t)=\lambda^t$ galėtų būti **daliniu nagrinėjamos lygties sprendiniu**. Įstatę $z(t)=\lambda^t$ į nagrinėjamą lygtį, gauname lygtį $\lambda^{t+2}=(c+v)\lambda^{t+1}-v\lambda^t$, iš kurios, ją supaprastinę iš $\lambda^t \neq 0$, gausime taip vadinamąją **charakteringąją lygtį** $\lambda^2=(c+v)\lambda-v$, arba $\lambda^2-(c+v)\lambda+v=0$.

$$\text{Spręsdami šią kvadratinę lygtį, randame, jog } \lambda_{1,2} = \frac{c+v \pm \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2} = \\ = \frac{0,75 + 1,05 \pm \sqrt{1,8^2 - 4,2}}{2} = 0,9 \pm j0,2\sqrt{6}. \text{ Čia } j = \sqrt{-1}.$$

Bendruoju lygties $z(t)=(c+v)z(t-1)-vz(t-2)$ sprendiniu, kai $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pasirinkime funkciją $z(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$, kurios kol kas dar neapibrėžtus koeficientus A_1 ir A_2 galėsime rasti, pasinaudodami pradinėmis sąlygomis $Y(0)=50$, $Y(1)=55$, iš kurių išplaukia, jog $z(0)=Y(0)-Y^*=50-\frac{20}{1-0,75}=-30$ ir $z(1)=Y(1)-Y^*=55-80=-25$.

Koeficientų A_1 ir A_2 nustatymui gauname lygčių sistemą $\begin{cases} A_1 + A_2 = z(0) = -30, \\ A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = z(1) = -25, \end{cases}$ kurią spręsdami randame, jog $A_1 = \frac{z(0)\lambda_2 - z(1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{25 - 30\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $A_2 = \frac{z(1) - \lambda_1 z(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{30\lambda_1 - 25}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

$$\text{Priėmę, jog } \lambda_1 = \frac{c+v - \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2} = 0,9 - 0,2j\sqrt{6} \text{ ir } \lambda_2 = \frac{c+v + \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2} = \\ = 0,9 + 0,2j\sqrt{6}, \text{ gauname, kad } \lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{(c+v)^2 - 4v} = 0,4j\sqrt{6}, \text{ iš kur išplaukia, jog } A_1 = -15 + \frac{5\sqrt{6}}{6}j, \\ A_2 = -15 - \frac{5\sqrt{6}}{6}j.$$

Kompleksinius parametrus λ_1 ir λ_2 , o taip pat ir kompleksinius koeficientus A_1 ir A_2 galima pavaizduoti ne tik algebrinėje formoje, bet ir trigonometrinėje bei eksponentinėje formose, naudojantis formulėmis $a+jb=\rho(\cos\varphi+j\sin\varphi)=\rho e^{j\varphi}$, kuriose $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ yra kompleksinio skaičiaus $a+jb$ modulis $|a+jb|$, o $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ yra kompleksinio skaičiaus $a+jb$ argumentas $\arg(a+jb)$.

$$\text{Gauname, kad } \lambda_2 = 0,9 + j \cdot 0,2\sqrt{6} = \rho e^{j\varphi}, \text{ kur } \rho = \sqrt{(0,9)^2 + 6 \cdot (0,2)^2} = \sqrt{1,05}, \text{ o } \\ \varphi = \arctg \frac{0,2\sqrt{6}}{0,9} = \arctg \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

$$\text{Analogiškai gauname, jog } \lambda_1 = \rho e^{-j\varphi} = \sqrt{1,05} \cdot e^{-j\arctg \frac{2\sqrt{6}}{9}}, \quad A_1 = \frac{5}{6} \sqrt{330} \cdot e^{-j\psi}, \\ A_2 = \frac{5}{6} \sqrt{330} \cdot e^{j\psi}, \text{ kur } \psi \text{ nustatome iš lygybių } \cos \psi = \frac{a}{\rho} = -\frac{15 \cdot 6}{5\sqrt{330}} = -\frac{18}{\sqrt{330}}, \quad \sin \psi = \frac{b}{\rho} = \\ = -\frac{5\sqrt{6} \cdot 6}{6 \cdot 5\sqrt{330}} = -\frac{1}{\sqrt{55}}. \text{ Kadangi } \cos \psi < 0 \text{ ir } \sin \psi < 0, \text{ tai kampas } \psi \text{ yra trečiajame ketvirtyje, t. y. } \\ \psi = \pi + \arctg \frac{\sqrt{6}}{18}.$$

$$\text{Todėl } z(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t = \frac{5}{3} \sqrt{330} \cdot (\sqrt{1,05})^t (e^{-j\psi} \cdot e^{-j\varphi t} + e^{j\psi} \cdot e^{j\varphi t}) = \\ = \frac{5}{3} \sqrt{330} \cdot (1,05)^{\frac{t}{2}} [e^{-j(\varphi t + \psi)} + e^{j(\varphi t + \psi)}] = \frac{5}{3} \sqrt{330} \cdot (1,05)^{\frac{t}{2}} \cos(\varphi t + \psi).$$

Iš formulės $z(t) = \frac{5}{3} \sqrt{330} \cdot (1,05)^{\frac{t}{2}} \cos(\varphi t + \psi)$, kurioje $\varphi = \arctg \frac{2\sqrt{6}}{9}$, o $\psi = \pi + \arctg \frac{\sqrt{6}}{18}$, išplaukia, jog procesas $z(t)$ yra svyravimai, kurių amplitudė $A = \frac{5}{3} \sqrt{330} \cdot (1,05)^{\frac{t}{2}}$ laikui bėgant monotoniškai didėja, nes $(1,05)^{\frac{t}{2}}$ – didėjanti funkcija. Tų svyravimų ciklinis dažnis $\omega = \frac{2\pi}{T}$ yra lygus $\omega = \varphi = \arctg \frac{2\sqrt{6}}{9}$, iš kur išplaukia, jog svyravimų periodas $T = \frac{2\pi}{\arctg \frac{2\sqrt{6}}{9}} \approx 12,6$ laiko vienetų, kuriais buvo matuojamas laikas, sudarant dinaminę nacionalinių pajamų kitimo lygtį. Tokiais laiko vienetais gali būti laikomi metai.* Svyravimų pradinė fazė $\psi = \pi + \arctg \frac{\sqrt{6}}{18} \approx 187^\circ 45'$.

Nesunku patikrinti, kad gautas sprendinys tenkina pradinės sąlygas:

$$1) \quad z(0) \approx \frac{5}{3} \sqrt{330} \cos 187^\circ 45' = -\frac{5}{3} \sqrt{330} \cos 7^\circ 45' \approx -30,000987 \approx -30;$$

$$2) \quad z(1) \approx \frac{5}{3} \sqrt{330} \sqrt{1,05} \times \cos(28^\circ 33' + 187^\circ 45') = -\frac{5}{3} \sqrt{330 \cdot 1,05} \cos 36^\circ 18' \approx -25,002 \approx -25.$$

Kadangi $Y(t) = Y^* + z(t)$, tai $Y(t) = \frac{20}{1-0,75} + z(t) = 80 + \frac{5}{3} \sqrt{330} (1,05)^{\frac{t}{2}} \cos(\varphi t + \psi)$, kur $\varphi = \arctg \frac{2\sqrt{6}}{9} \approx 28^\circ 33'$, o $\psi = \pi + \arctg \frac{\sqrt{6}}{18} \approx 187^\circ 45'$. Artutiniuose skaičiavimuose galima naudotis formule $Y(t) \approx 80 + 30,2765 \cdot (1,05)^{\frac{t}{2}} \cos(28,55t^\circ + 187,75^\circ)$. Rekomendučiau skaitytojui palyginti rezultatus, kuriuos galima gauti, naudojantis šia formule, su imitacinio modeliavimo rezultatais bei įsitikinti, jog $Y(t)$ reikšmė svyruoja ir kad svyravimų amplitudė monotoniškai didėja, o svyravimų periodas T apytikriai lygus 12,6 laiko vienetų.

Nustatysime, esant kokioms v reikšmėms $z(t)$ yra periodiniai svyravimai, o kokioms – neperiodiškai kintanti funkcija, atsimindami, kad bendruoju atveju, kai $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tai $z(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$,

$$\text{kur} \quad \lambda_1 = \frac{c+v-\sqrt{(c+v)^2-4v}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{c+v+\sqrt{(c+v)^2-4v}}{2}, \quad A_1 = \frac{\lambda_2 z(0) - z(1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ = \frac{(c+v-\sqrt{(c+v)^2-4v}) \cdot z(0) - 2z(1)}{2\sqrt{(c+v)^2-4v}} \quad \text{ir} \quad A_2 = \frac{z(1) - z(0)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2z(1) - z(0) \cdot (c+v-\sqrt{(c+v)^2-4v})}{2\sqrt{(c+v)^2-4v}}, \text{ o}$$

ypatinguoju atveju, kai $\lambda_1 = \lambda_2$ (t. y. kai $(c+v)^2 = 4v$, $v = 2-c \pm 2\sqrt{1-c}$ ir $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{c+v}{2} = \sqrt{v}$), tai $z(t) = (A_1 + tA_2)\lambda^t = (A_1 + tA_2)v^{\frac{t}{2}}$, $A_1 = z(0)$, $A_2 = \frac{z(1)}{\sqrt{v}} - z(0)$, ir todėl tuomet $z(t) = \left[z(0) + t \cdot \left(\frac{z(1)}{\sqrt{v}} - z(0) \right) \right] \cdot v^{\frac{t}{2}}$.

Ypatinguoju atveju funkcija $z(t)$ nėra periodinė, o kai $\frac{z(1)}{\sqrt{v}} \neq z(0)$, nėra ir monotoniinė, nes tuomet ji turi ekstremumo tašką t^* , kurį nesunku rasti logaritmuojant ir diferencijuojant tą funkciją:

* Skirtingose ekonominės veiklos sferose verslo ciklų trukmė gali stipriai skirtis. Egzistuoja trumpalaikiai tos ar kitos ūkio šakos konjunkturniai svyravimai, kurių trukmė gali būti nuo vienos paros iki mėnesio, sezoniniai ir pusmetiniai ekonominiai ciklai, mažieji Kitzino gamybinių atsargų ciklai, kurių vidutinė trukmė apie 40 mėn., didieji Juglaro komerciniai ciklai, kurių trukmė nuo 6 iki 10 metų, Lebruso investiciniai ciklai (10-12 m.), Kuznetso statybos ciklai (15-22 m.) ir t. t.

$$1) \ln z(t) = \ln \left[z(0) + t \left(\frac{z(1)}{\sqrt{v}} - z(0) \right) \right] + \frac{t}{2} \ln v;$$

$$2) \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \frac{z(1) - z(0)\sqrt{v}}{z(0)\sqrt{v} + t \cdot [z(1) - z(0)\sqrt{v}]} + \frac{1}{2} \ln v.$$

Spręsdami lygtį $\dot{z}(t) = 0$, t. y. lygtį $\frac{1}{2} \left[z(0) + t \left(\frac{z(1)}{\sqrt{v}} - z(0) \right) \right] \ln v = z(0) - \frac{z(1)}{\sqrt{v}}$, gauname, jog

$$t^* = \frac{z(0)\sqrt{v}}{z(0)\sqrt{v} - z(1)} - \frac{2}{\ln v}, \text{ todėl } t^* \geq 0, \text{ kai } \frac{z(0)\sqrt{v}}{z(0)\sqrt{v} - z(1)} \geq \frac{1}{\ln \sqrt{v}}.$$

Ypatinguoju atveju, kai $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{v}$, funkcija $z(t) = \left[z(0) + t \left(\frac{z(1)}{\sqrt{v}} - z(0) \right) \right] v^{\frac{t}{2}}$ nevaizduoja

periodinių svyravimų ir, kai $v = \frac{(c+v)^2}{4}$, t. y. kai $v = 2 - c \pm 2\sqrt{1-c} = 1 + s^* \pm 2\sqrt{s^*} = (1 \pm \sqrt{s^*})^2$,

mes, didindami v , **gauname du pereinamuosius taškus**: nuo neperiodinio $z(t)$ kitimo prie periodinių svyravimų (kai $v = 1 + s^* - 2\sqrt{s^*} = (1 - \sqrt{s^*})^2$) ir nuo periodinių svyravimų prie neperiodinio kitimo

(kai $v = 1 + s^* + 2\sqrt{s^*} = (1 + \sqrt{s^*})^2$), kur $s^* = \frac{\Delta Y - \Delta C}{\Delta Y} = \frac{\Delta Y - c\Delta Y}{\Delta Y} = 1 - c$.

Kai investicijų koeficientas v kinta intervale $1 + s^* - 2\sqrt{s^*} < v < 1 + s^* + 2\sqrt{s^*}$, tai $(c+v)^2 - 4v < 0$. Tuomet $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ir abu tie dydžiai yra kompleksiniai skaičiai:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c+v}{2} - j \frac{\sqrt{4v - (c+v)^2}}{2} = \sqrt{\left(\frac{c+v}{2} \right)^2 + \frac{4v - (c+v)^2}{4}} \cdot e^{-j\varphi} = \sqrt{v} \cdot e^{-j \arctg \frac{\sqrt{4v - (c+v)^2}}{c+v}} = \\ &= \sqrt{v} \cdot e^{-j \arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}} = \sqrt{v} \cdot e^{-j\varphi}, \quad \lambda_2 = \frac{c+v}{2} + j \frac{\sqrt{4v - (c+v)^2}}{2} = \sqrt{v} \cdot e^{j \arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}} = \sqrt{v} \cdot e^{j\varphi}. \end{aligned}$$

Istatę λ_1 ir λ_2 reikšmes į koeficientų A_1 ir A_2 apskaičiavimo formules, gausime, kad

$$A_1 = \frac{z(0)}{2} - j \frac{(c+v) \cdot z(0) - 2z(1)}{2\sqrt{4v - (c+v)^2}} = \sqrt{\frac{z^2(0)v - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+v) + z^2(1)}{4v - (c+v)^2}} \cdot e^{-j\psi},$$

$$A_2 = \frac{z(0)}{2} + j \frac{(c+v) \cdot z(0) - 2z(1)}{2\sqrt{4v - (c+v)^2}} = \sqrt{\frac{z^2(0)v - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+v) + z^2(1)}{4v - (c+v)^2}} \cdot e^{j\psi}, \text{ kur } \psi \text{ reikšmė nustatoma,}$$

atsižvelgiant į tai, kad $\cos \psi = \frac{z(0) \cdot \sqrt{4v - (c+v)^2}}{2 \cdot \sqrt{z^2(0)v - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+v) + z^2(1)}}$ ir

$$\sin \psi = \frac{(c+v) \cdot z(0) - 2z(1)}{2 \cdot \sqrt{z^2(0)v - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+v) + z^2(1)}}.$$

Istatę $A_1, A_2, \lambda_1, \lambda_2$ reikšmes į formulę $z(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$, gauname, jog $z(t)$ vaizduoja

periodinius svyravimus $z(t) = \sqrt{\frac{z^2(0)v - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+v) + z^2(1)}{4v - (c+v)^2}} \cdot v^{\frac{t}{2}} \left(e^{-j(\varphi t + \psi)} + e^{j(\varphi t + \psi)} \right) =$

$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{z^2(0)v - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+v) + z^2(1)}{4v - (c+v)^2}} \cdot v^{\frac{t}{2}} \cos(\varphi t + \psi), \text{ kur } \varphi = \arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}.$$

Iš išvestų formulių išplaukia, jog **tuo atveju, kai akseleracijos faktorius v tenkina nelygybes $1+s^*-2\sqrt{s^*} < v < 1+s^*+2\sqrt{s^*}$, procesas $z(t)$ yra periodiniai svyravimai**, kurių ciklinis dažnis yra $\omega = \varphi = \arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}$, o svyravimų periodas $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}}$.

Kai $1+s^*-2\sqrt{s^*} < v < 1$, tai svyravimų amplitudė mažėja ir $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. Tas amplitudės mažėjimas vyksta tuo lėčiau, kuo v arčiau 1.

Kai investicijų koeficientas v tampa lygus 1, svyravimų amplitudė tampa pastovi ir lygi $A = 2\sqrt{\frac{z^2(0) - z(0) \cdot z(1) \cdot (c+1) + z^2(1)}{3-2c-c^2}} = 2\sqrt{\frac{z^2(0) - z(0) \cdot z(1) \cdot (2-s^*) + z^2(1)}{s^*(4-s^*)}}$, o svyravimų ciklinis dažnis tampa lygus $\omega = \varphi = \arctg \sqrt{\frac{4}{(c+1)^2} - 1} = \arctg \sqrt{\frac{3-2c-c^2}{(c+1)^2}} = \arctg \frac{\sqrt{s^*(4-s^*)}}{2-s^*}$.

Kai v tenkina nelygybes $1 < v < 1+s^*+2\sqrt{s^*}$, tai $z(t)$ yra periodiniai svyravimai su didėjančia amplitude, kuri didėja tuo greičiau, kuo v arčiau dydžio $1+s^*+2\sqrt{s^*} = (1+\sqrt{s^*})^2$. Didėjant v , kartu didėja ir svyravimų periodo ilgis T , nes mažėja svyravimų ciklinis dažnis $\omega = \varphi = \arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}$.

Kai v tampa lygus $v_2 = (1+\sqrt{s^*})^2$, tai svyravimų ciklinis dažnis $\omega = \varphi = \arctg \sqrt{\frac{4v}{(c+v)^2} - 1}$ tampa lygus $\arctg \sqrt{\frac{4(1+\sqrt{s^*})^2}{4(1+\sqrt{s^*})^2} - 1} = \arctg 0 = 0$, o periodas T – be galo dideliu dydžiu. Gauname

aperiodinį procesą, kurio modulis $|z(t)|$, kai $\frac{z(1)}{\sqrt{v_2}} \neq z(0)$, taške $t^* = \frac{z(0)\sqrt{v_2}}{z(0)\sqrt{v_2} - z(1)} - \frac{1}{\ln \sqrt{v_2}} = \frac{z(0)(1+\sqrt{s^*})}{z(0)(1+\sqrt{s^*}) - z(1)} - \frac{1}{\ln(1+\sqrt{s^*})}$ pasiekia ekstremumą, o po to, kai $t > t^*$, $|z(t)|$ monotoniškai didėja,

didėjant t . Tai reiškia, jog **tuo atveju, kai $v=v_2=(1+\sqrt{s^*})^2$ ir $t > t^*$, didėjant t , funkcijos $Y(t)$ reikšmė tolsta nuo pusiausvyrinės reikšmės Y^* .**

Kai v tenkina nelygybes $0 \leq v < (1-\sqrt{s^*})^2$, tai $(c+v)^2 - 4v > 0$, ir todėl parametrai $\lambda_1 = \frac{c+v - \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2}$ ir $\lambda_2 = \frac{c+v + \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2}$ yra realūs nelygūs skaičiai.

Kai $v=0$, tai $\lambda_1=0$, $\lambda_2=c$, $A_1=z(0)-\frac{z(1)}{c}$, $A_2=\frac{z(1)}{c}$ ir $z(t)=\frac{z(1)}{c}c^t=z(1)c^{t-1}=z(0)c^t$.

Kadangi $0 < c < 1$, tai $|z(t)|$ yra monotoniškai (eksponentiškai) mažėjanti funkcija, artėjanti prie 0, kai $t \rightarrow \infty$.

Kai $0 < v < (1-\sqrt{s^*})^2$, tai $c+v > \sqrt{(c+v)^2 - 4v} > 0$ ir $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

Irodysime, kad šiuo atveju $\lambda_2 < 1$, kai $c < 1$, ir $\lambda_2 = 1$, kai $c = 1$:

1) kai $0 < v < (1 - \sqrt{s^*})^2$, kur $s^* = 1 - c \geq 0$, tai $v = (1 - \sqrt{s^*})^2 - h = 2 - 2\sqrt{s^*} - c - h$, kur $h > 0$; 2) $c + v = 2 - (h + 2\sqrt{s^*})$; 3) $(c + v)^2 - 4v = h^2 + 4h\sqrt{s^*} = (h + 2\sqrt{s^*})^2 - 4s^*$; 4) $\sqrt{(c + v)^2 - 4v} < h + 2\sqrt{s^*}$, kai $0 < c < 1$, ir $\sqrt{(c + v)^2 - 4v} = h + 2\sqrt{s^*}$, kai $c = 1$; 5) $\lambda_2 = \frac{c + v + \sqrt{(c + v)^2 - 4v}}{2} = \frac{2 - (h + 2\sqrt{s^*})}{2} + \frac{\sqrt{(h + 2\sqrt{s^*})^2 - 4s^*}}{2} = 1 - \frac{h + 2\sqrt{s^*}}{2} + \frac{\sqrt{(h + 2\sqrt{s^*})^2 - 4s^*}}{2}$; 6) $\lambda_2 < 1$, kai $c < 1$ ir $\lambda_2 = 1$, kai $c = 1$.

Atvejis $c = 1$ nerealus, nes visos nacionalinės pajamos negali būti skirtos vien tik vartojimui: 1.14.12.2.1. skyrelyje, kur buvo įvestas koeficientas c , charakterizuojantis polinkį vartojimui, specialiai buvo nurodyta, jog $0 < c < 1$. Todėl belieka atvejis $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, iš kur išplaukia, jog **atveju** $0 < v < (1 - \sqrt{s^*})^2$ funkcijos $z(t)$ modulis $|z(t)| = |A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t| = \left| \frac{\lambda_2 z(0) - z(1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1^t + \frac{z(1) - z(0) \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^t \right|$ yra mažėjanti funkcija, artėjanti prie 0, didėjant t , t. y. $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Kai koeficientas v tampa lygus $v_1 = (1 - \sqrt{s^*})^2$, tai λ_2 tampa lygus $\lambda_1 = \frac{c + v}{2} = \frac{c + 1 - 2\sqrt{s^*} + s^*}{2} = \frac{c + 1 - 2\sqrt{1 - c} + 1 - c}{2} = 1 - \sqrt{1 - c} = 1 - \sqrt{s^*} = \sqrt{v_1}$.

Taške $t^* = \frac{z(0)}{z(0) - \frac{z(1)}{\sqrt{v_1}}} - \frac{1}{\ln \sqrt{v_1}} = \frac{z(0)(1 - \sqrt{s^*})}{z(0)(1 - \sqrt{s^*}) - z(1)} - \frac{1}{\ln(1 - \sqrt{s^*})}$, kai $z(0) \neq \frac{z(1)}{\sqrt{v_1}}$,

funkcijos $z(t)$ modulis $|z(t)|$ pasiekia maksimumą, o po to, kai $t > t^*$, **didėjant t , tas modulis monotoniskai mažėja, artėdamas prie 0**. Taigi, ir šiuo atveju $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Kai v tampa didesnis už $(1 - \sqrt{s^*})^2$, bet mažesnis už 1, tai pereinant į intervalą $(1 - \sqrt{s^*})^2 \leq v < 1$, prasideda gęstantys svyravimai, kuriuos mes jau išnagrinėjome. Intervale, kuriame v tenkina nelygybę $(1 - \sqrt{s^*})^2 < v < 1$ tebegalioja teiginys, jog $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. Taigi, visais atvejais, kai $v < 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$, ir todėl $Y(t)$ konverguoja į $Y^* = \frac{b}{1 - c} = \frac{b}{s^*}$, t. y. nusistovi pusiausvyrinė būsena.

Kai $v = 1$, tai $z(t)$, kaip jau buvo gauta anksčiau, yra periodiniai svyravimai su pastovia amplitude. Tuomet $Y(t)$ pastoviai svyruos lygio $Y^* = \frac{b}{s^*}$ atžvilgiu su $z(t)$ svyravimų pastovia amplitude

$$A = \rho = 2 \sqrt{\frac{[z(0) - z(1)]^2 + z(1)z(0)s^*}{s^*(4 - s^*)}}$$
 ir stabilus $Y(t)$ lygis niekada nenusistovės.

Kai $1 < v < (1 + \sqrt{s^*})^2$, tai $z(t)$ svyravimai, kaip jau buvo įrodyta anksčiau, vyks su vis didėjančia amplitude ir pastovus $Y(t)$ lygis taip pat jau niekada nenusistovės. Krizės taps neišvengiamos, nes stiprėjančių svyravimų metu bus ne tik nacionalinių pajamų pakilimai, bet ir labai dideli jų smukimai. Iš viso to išplaukia, jog, **augant investicijų koeficientui v , valstybės ekonomiką palikti savieigai (be valstybinio reguliavimo) yra pavojinga ir todėl neleistina**.

Kai v taptų lygus $v_2 = \left(1 + \sqrt{s^*}\right)^2$, tai $z(t)$, kaip jau buvo apskaičiuota, taptų aperiodiniu procesu, kuriam būtų būdinga, kad, kai $z(0) \neq \frac{z(1)}{\sqrt{v_2}}$, momentu $t^* = \frac{z(0)\left(1 + \sqrt{s^*}\right)}{z(0)\left(1 + \sqrt{s^*}\right) - z(1)} - \frac{1}{\ln\left(1 + \sqrt{s^*}\right)}$ funkcijos $z(t)$ modulis $|z(t)|$ pasiektų ekstremumą, o po to monotoniškai ir neribotai didėtų.

Mums belieka išnagrinėti atvejį, kai $v > \left(1 + \sqrt{s^*}\right)^2$. Tam atvejui būdinga, jog $(c+v)^2 - 4v > 0$ ir parametrai λ_1 ir λ_2 vėl tampa realiais teigiamais nelygiais skaičiais $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

Nesunku įsitikinti, jog šiuo atveju $\lambda_2 > \lambda_1 = \frac{c+v - \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2} \geq 1$:

1) $v = \left(1 + \sqrt{s^*}\right)^2 + h$, kur $h > 0$; 2) $c+v = 2+h+2\sqrt{s^*}$; 3) $\sqrt{(c+v)^2 - 4v} = \sqrt{(h+2\sqrt{s^*})^2 - 4s^*} \leq h+2\sqrt{s^*}$; 4) todėl $\lambda_1 > 1$, nes $c+v - \sqrt{(c+v)^2 - 4v} \geq 2$, o tuo labiau $\lambda_2 > 1$, nes $\lambda_2 > \lambda_1$. To pakanka, kad funkcija λ_2^t būtų neribotai didėjanti funkcija.

Tuomet funkcijos $z(t) = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t = \lambda_2^t \left[A_2 + A_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^t \right]$ modulis $|z(t)|$ būtų neribotai

didėjanti funkcija, asimptotiškai artėjanti prie $|A_2| \lambda_2^t$, nes, didėjant t , dydis $A_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^t$ artėtų prie 0,

kadangi $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ir $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$. Funkcijos $z(t)$ ženklas, esant pakankamai didelėms t reikšmėms, sutaptų su

$A_2 = \frac{z(1) - z(0)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2z(1) - z(0)\left(c+v - \sqrt{(c+v)^2 - 4v}\right)}{2\sqrt{(c+v)^2 - 4v}}$ ženklą, kuris priklauso nuo koeficiento v

reikšmės ir nuo pradinių sąlygų $Y(0)$ ir $Y(1)$. Esant stipriam ekonominiam pakilimui, kai $Y(1) > Y(0)$ ir $Y(1) > Y^*$, koeficiento A_2 reikšmė gali būti teigiama, ir tuomet stipri akseleracija vės prie tolydaus ekonominio augimo – nacionalinių pajamų $Y(t)$ tolydaus didėjimo.

Iš viso šio nagrinėjimo, kuris galėtų būti dar vienu **sisteminės analizės pavyzdžiu makroekonomikoje**, analogišku tam, kuris 1.11.10. skyrelyje iliustravo, kaip sisteminė analizė gali būti taikoma elektrotechnikoje bei radioelektronikoje, galima padaryti kelias išvadas, naudingas ir sistemotyrai ir makroekonomikos mokslui.

Pirmoji išvada – „sistemotyrinė“: ir **elektrotechnikoje bei radioelektronikoje, ir ekonomikoje gali būti taikomi gana panašūs matematinės sisteminės analizės metodai**, nes procesai, vykstantys šiose, atrodo, visiškai skirtingose srityse, yra tam tikra prasme izomorfiški, aprašomi izomorfiškais matematiniais modeliais. Todėl įmanomas ne tik matematinis imitacinis ekonominių reiškinių modeliavimas, bet ir analoginis fizinis jų modeliavimas, kuriant elektrotechninius (radiotechninius) ekonominių reiškinių modelius.

Antroji išvada – „makroekonominė“: kol akseleracijos faktorius v yra mažesnis už $\left(1 - \sqrt{s^*}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{1-c}\right)^2$, kur c – vartojimo koeficientas, nacionalinių pajamų lygis $Y(t)$ ir be papildomo reguliavimo savaime pasiekia stabilią pusiausvyrinę būseną, kuriai būdingos nacionalinės pajamos $Y^* = \frac{b}{1-c}$; kai akseleracijos faktorius v

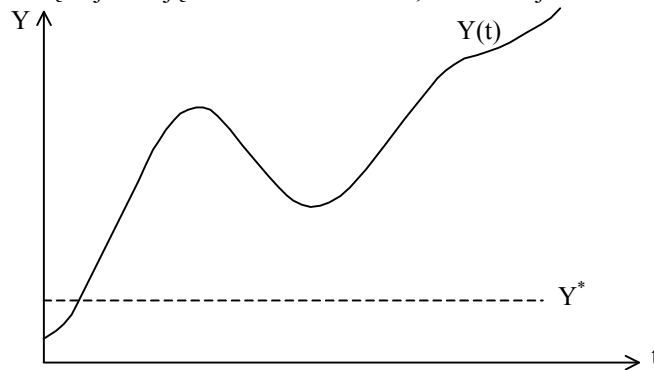
bedidėdamas patenka į intervalą $\left(1 - \sqrt{s^*}\right)^2 \leq v < 1$, tai ekonominiai procesai pasiekia pusiausvyrinę būseną banguodami, todėl ir čia dar galima apsieiti be papildomo

ekonominio reguliavimo; tačiau, kai v peržengia vieneto ribą, pusiausvyrinė būsena jau nebeusistovi ir čia papildomas ekonominis reguliavimas, paremtas ekonominiais paskaičiavimais ir ekonominių procesų modeliavimu, tampa būtinas, jei norime išvengti nepageidautinų ekonominių krizių ir turėti normalų ekonominį augimą. Norint turėti pakankamai pilną užimtumą (ar užimtumą, pakankamai artimą pilnam), valstybinis reguliavimas reikalingas visada.

Iš čia ką tik išnagrinėto biznio ciklų modelio, pasiūlyto, kaip jau buvo minėta, Samuelsono ir Hikso, galima gauti ir šiek tiek sudėtingesnę biznio ciklų modelį, įvedus į jo sudėtį sudedamąją dalį $G(t)$, vaizduojančią **valstybinį vartojimą**. Tuomet lygtį $Y(t)=C(t)+I(t)$ tektų papildyti, ir gautume, jog $Y(t)=C(t)+I(t)+G(t)$.

Ryšium su tuo pasikeistų ir dinaminė lygtis $Y(t)=(c+v)Y(t-1)-vY(t-2)+b$, tapdama lygtimi $Y(t)=(c+v)Y(t-1)-vY(t-2)+b+G(t)$, kur valstybinio vartojimo $G(t)$ kitimo apskaičiavimui galėtume pasinaudoti formule $G(t)=(1+r)G(t-1)$, kurioje konstanta r yra lygi **valstybinio vartojimo augimo tempui**, nustatomam analizuojant statistinius duomenis bei planuojant valstybės biudžetą.

Rekomenduočiau skaitytojui sudaryti procesų $Y(t)=(c+v)Y(t-1)-vY(t-2)+b+G(t)$ ir $G(t)=(1+r)G(t-1)$ imitacinį modelį, kai $Y(0)=50$, $Y(1)=55$, $c=0,75$, $b=20$, $v=0,8$, $G(0)=10$, $r=0,05$, ir įsitikinti, kad šiuo atveju nacionalinių pajamų augimo trajektorija yra kreivė pavaizduota 320 pav. Ar įmanoma apskaičiuoti šią trajektoriją analiziniais metodais, nesinaudojant imitaciniu modeliavimu?



320 pav.

Vidutinės trukmės konjunktūriniai svyravimai, atsirandantys, kai investicijų koeficientas v patenka į intervalą $\left(\left(1-\sqrt{s^*}\right)^2, \left(1+\sqrt{s^*}\right)^2 \right)$, nėra vieninteliai svyravimai, būdingi ekonomikai.

Egzistuoja dar ir jau minėtieji trumpalaikiai konjunktūriniai svyravimai bei ilgalaikiai (periodas ~50 metų) konjunktūros ciklai, vadinami Kondratjevo ilgųjų bangų ciklais, cikliniai šimtamečių svyravimų trendai, ir visiems gerai žinomi produkcijos, kurios gamybai būdingas sezoniskumas, pasiūlos, paklausos ir kainų sezoniniai svyravimai.

1.14.12.2.4 Tarpšakinių ryšių analizė. Leontjevo modelis

Mikroanalizės ir makroanalizės sintezė įvykdė ekonomikos moksle reformą, kurią kartais vadina „Keinso revoliucija“. Tačiau, norint nors šiek tiek detaliau išsiaiškinti šiuolaikinės ekonomikos funkcionavimo ir jos raidos dėsningumus, nepakanka 1.14.12.1.1÷1.14.12.2.3. skyreliuose išdėstytų mikroekonomikos ir makroekonomikos metodų ir jų sintezės. Būtina atsižvelgti dar ir į sudėtingus santykius tarp ekonomikos šakų, kurios, būdamos surištos viena su kita daugybe tiesioginių ir grįžtamųjų ryšių, veikia viena į kitą ir kartu sudaro labai sudėtingą šiuolaikinę atskirų valstybių ir viso pasaulio ekonominę sistemą.

Tarpšakiniai ryšiai ekonomikoje atsiranda todėl, kad ekonomikos šakos i ($i=1, 2, \dots, n$, kur n – šakų skaičius), gamindamos savo produkciją, kurios kiekį, išreikštą piniginiiais ar natūriniais vienetais, žymėsime X_i , gali vartoti kitų šakų j (tame tarpe ir

savo) produkciją kiekiais X_{ji} kaip gamybai reikalingus resursus ir gali tiekti savo produkciją ne tik **galutiniam vartojimui** kiekiais F_i , bet ir kitoms šakoms j kiekiais X_{ij} kaip **tarpinio vartojimo produktą**, tampa tų šakų resursu.

Dėl šių aplinkybių iškyla **atskirų ekonomikos šakų gaminamos produkcijos kiekių X_i ir tiekiamų bei gaunamų produkcijos kiekių X_{ij} bei X_{ji} subalansavimo problemos**, o taip pat **pusiausvyrinių kainų, kuriomis ta tarpinio vartojimo produkcija turi būti tiekiama bei perkama, nustatymo problemos**. Visų tokių problemų sprendimu užsiima **tarpšakinė ekonominė analizė (interindustry analysis)**.

Šiame skyrelyje susipažinsime su tarpšakinės ekonominės analizės metodu, vadinamu **I/O analize (input-output analysis)** ir su to metodo taikymais, sprendžiant kai kuriuos tarpšakinės ekonominės analizės uždavinius. I/O analizės metodo pagrindus sukūrė iš Rusijos kilęs JAV ekonomistas V.V.Leontjevas, 1973m. gavęs Nobelio premiją už matricinės algebros pritaikymą tarpšakinių ekonominių ryšių tyrimui. Tarpšakinių planų optimizavimą nagrinėsime 1.15.2.6. skyrelyje.

Tarpšakinio balanso sudarymo uždavinio matematinį modelį gamybai (output) vaizduoja lygčių sistema $X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + F_i$, $i=1, 2, \dots, n$, kurioje X_i – i-jo

produkto gamybos apimtis (output), X_{ij} – tarpinė i-jo produkto paklausa (suvartojimas) j-jo produkto gamybai, F_i – galutinis i-jo produkto suvartojimas.

Įvesdami **tiesioginių sąnaudų koeficientus** $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$, rodančius, kiek vienetų produkcijos i reikalinga produkcijos j vienetui pagaminimui, šią sistemą galima perrašyti į sistemą $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i$, $i=1, 2, \dots, n$, išreiškiančią tarpšakinio balanso sąlygą.

Šioje formoje tarpšakinio balanso sudarymo uždavinio matematinis modelis gamybai yra patogesnis, nes šioje formoje spręsti lygčių sistemą, surandant tokias produkcijos i ($i=1, 2, \dots, n$) gamybos apimtis X_i , kurios atitiktų gaminio i galutinio vartojimo poreikius F_i ir tarpinio vartojimo poreikius $\sum_{j=1}^n X_{ij}$, žymiai lengviau, kadangi

koeficientai a_{ij} gali būti laikomi mums žinomomis konstantomis, kai tuo tarpu tarpinio vartojimo produkcijos apimtys X_{ij} yra nežinomieji, kurių reikšmės, sprendžiant balanso sudarymo uždavinį, dar reikia surasti.

Taip yra todėl, kad, keičiantis gamybos apimtims X_j , keičiasi ir dydžiai X_{ij} , kai tuo tarpu **santykiai $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ kuri laiką, kol žymiai nepasikeičia gamybos**

technologija, išlieka pastovūs ir gali būti nustatyti apdorojant statistinius duomenis apie gamybą ir tarpinį vartojimą įvairiose ūkio šakose.

Nustačius koeficientų a_{ij} reikšmes už praėjusį periodą, jomis galima naudotis, sudarant tarpšakinį balansą planuojamam periodui.

Toks uždavinys matematine prasme yra jau gana paprastas, nes susiveda į tiesinių lygčių sistemas $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i$, $i=1, 2, \dots, n$, su duotomis koeficientų a_{ij} ir

galutinio vartojimo apimčių F_i reikšmėmis sprendimą. Tokią sistemą galima išspręsti naudojantis **tiesioginiais metodais** (Gauso ir Žordano nuoseklaus nežinomųjų eliminavimo metodu, Kramerio formulėmis, atvirkštinės matricos metodu ir t. t.) bei

netiesioginiais metodais (iteraciniais Jakobi ir Zeidelio metodais, žingsninio agregavimo metodu), lyg ir imituojančiais ekonomikos artėjimo prie pusiausvyrinės būsenos procesus.

Minėtuosius metodus galima taikyti ir tuomet, kai norima nustatyti, kaip pasikeistų gamybos apimtys X_i įvairiose šakose, o taip pat ir tarpinio vartojimo produktų paklausos apimtys X_{ij} , jei pasikeistų galutinio vartojimo apimtys, tapdamos vietoj buvusių dydžių F_i dydžiais $F_i + \Delta F_i$.

Lygčių sistemą $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) ir aukščiau išvardintus jos

sprendimo metodus galima taikyti tarpšakinio balanso sudarymui ir tais atvejais, kai vyksta planiniai gamybos technologijos pasikeitimai, leidžiantys apskaičiuoti apytikres būsimas naujas kai kurių ar net visų koeficientų a_{ij} reikšmes.

Sprendžiant tarpšakinės ekonominės analizės uždavinius (pavyzdžiui, pusiausvyrinius kainų nustatymo uždavinius), naudojamosi dar ir **kita tarpšakinio balanso tiesinių lygčių sistemos forma**, kuri gaunama iš **balanso lygčių sistemos**

sąnaudoms (input) $X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j$, $j=1, 2, \dots, n$, vaizduojančios **piniginėje**

išraiškoje kiekvienos šakos j (kiekvienos produkcijos j) gamybos **pilnas sąnaudas** X_j , susidedančias iš **tarpinių sąnaudų** $\sum_{i=1}^n X_{ij}$ ir **pridėtinės vertės** V_j , į kurią įeina

produkcijos j gamybai samdomųjų darbuotojų pajamos, verslininkų, organizuojančių tos produkcijos gamybą, pelnas, amortizaciniai atskaiciavimai įrenginių, patalpų ir pan. susidėvėjimui padengti, netiesioginio apmokestinimo suma ir t. t.

Istatę į lygtis $X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j$ vietoj X_{ij} jų išraiškas $X_{ij} = a_{ij} X_j$, gauname lygčių

sistemą $X_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} X_j + V_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

Šiai sistemai būdinga tai, kad joje apimčių matavimui naudojami piniginiai vienetai. Balansiniuose skaičiavimuose patogumo dėlei ne tik sąnaudų, bet ir gamybos bei vartojimo apimtys taip pat išreiškiamos piniginiais vienetais. Todėl mes čia laikysime, kad ne tik formulėse $X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j$, bet ir formulėse $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i$, $i=1, 2, \dots, n$, visi dydžiai (X_i , X_{ij} , F_i) išreikšti piniginiais vienetais.

Naudodamiesi formule $X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j$, $j=1, 2, \dots, n$, apskaičiuosime šakos i

sąnaudas $X_i = \sum_{j=1}^n X_{ji} + V_i$. Laikydami, kad subalansuotoje ekonomikoje pajamos ir

sąnaudos turi būti lygios, kiekvienai šakai i gausime lygybę $\sum_{j=1}^n X_{ij} + F_i = \sum_{j=1}^n X_{ji} + V_i$.

Sumuodami abi tos lygybės puses, t. y. apskaičiuodami visų šakų visos pagamintos produkcijos vertės ir sąnaudų sumas, gauname, jog $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} + \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ji} +$

$+\sum_{i=1}^n V_i$. Kadangi $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ji}$, tai iš čia išplaukia, jog **subalansuotoje**

ekonomikoje turi būti tenkinama lygybė $\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n V_i$, t. y. bendroji galutinio

vartojimo suma $\sum_{i=1}^n F_i$ turi būti lygi bendrajai visos pridėtinės vertės sumai $\sum_{i=1}^n V_i$.

Šioje lygybėje kaupimas, importas ir eksportas įeina į galutinį vartojimą (žiūr. 111. lentelę).

Tarpšakinio balanso pavaizdavimui gana patogi yra lentelinė forma (žiūr. jau minėtąją 111-ją lentelę), kurioje eilutės i vaizduoja šakų i (produkcijos i) gamybą (output) $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i$, o stulpeliai j – šakų j (produkcijos j gamybos) sąnaudas

(input) $X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j$.

Šioje lentelėje sumos $\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_{ij} + F_i \right)$ ir $\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j \right)$, kai

ekonomika yra subalansuota, turi sutapti. Turi sutapti ir $\sum_{i=1}^n F_i$ su $\sum_{j=1}^n V_j$.

Tarpšakinio balanso sudarymo uždavinį galime suformuluoti ir naudodamiesi matricinės algebros kalba, užrašydami tiesinių lygčių sistemą $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + F_i$, $i=1,$

$2, \dots, n$, kompaktiškoje **matricinėje formoje** $X=AX+F$, kur X ir F yra vektoriai – stulpeliai, turintys po n eilučių, o A – kvadratinė **tiesioginių sąnaudų koeficientų matrica** $n \times n$. Ji vadinama **Leontjevo tiesiogine matrica**.

111. lentelė

Šakos-pirkėjai. Paklausos sektorai		Gamybos šakos (sektorai)						Galutinis vartojimas	Pagamintos produkcijos šakose i apimtys (output)
		1	2	...	j	...	n	Vartojimas, kaupimas, investicijos, eksportas, importas (su “ ženklų) ir t.t.	
Šakos- pardavėjai. Pasiūlos sektorai	1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$		$X_{1,j}$		$X_{1,n}$	F_1	$X_1 = \sum_{j=1}^n X_{1j} + F_1$
	2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$		$X_{2,j}$		$X_{2,n}$	F_2	$X_2 = \sum_{j=1}^n X_{2j} + F_2$
	i	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$		$X_{i,j}$		$X_{i,n}$	F_i	$X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + F_i$
	n	$X_{n,1}$	$X_{n,2}$		$X_{n,j}$		$X_{n,n}$	F_n	$X_n = \sum_{j=1}^n X_{nj} + F_n$
Gamybos šakos (sektorai)									
Pridėtinė vertė	Darbuotojų pajamos, verslininkų pelnas, amortizaciniai atskaičiavimai, netiesioginis apmokėstinimas ir t.t.	V_1	V_2		V_j		V_n	$\sum_{i=1}^n F_i$ $\sum_{j=1}^n V_j$	
Bendra sąnaudų apimtys šakose j (input)		$X_1 = \sum_{i=1}^n X_{i1} + V_1$	$X_2 = \sum_{i=1}^n X_{i2} + V_2$		$X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j$		$X_n = \sum_{i=1}^n X_{in} + V_n$		$\sum_{i=1}^n X_i$ $\sum_{j=1}^n X_j$

Išskleidę matricinę lygtį $AX+F=X$, gautume:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Spręsdami šią matricinę lygtį, gauname **subalansuotą tarpšakinį gamybos planą** – vektorių – stulpelį $X=(I-A)^{-1}F$, kur I – vienetinė kvadratinė $n \times n$ matrica, $I-A$ – matricų I ir A skirtumas – kvadratinė $n \times n$ matrica, $(I-A)^{-1}$ – **pilnų sąnaudų koeficientų** kvadratinė $n \times n$ matrica, atvirkštinė $(I-A)$ matriciai.

Matricą $B=(I-A)^{-1}$ vadina **Leontjevo atvirkštinė matrica** (arba **Leontjevo multiplikatoriumi**, arba tiesiog – **matriciniu multiplikatoriumi**). Toks pavadinimas šiai matriciai suteiktas todėl, kad jos vaidmuo ir savybės yra šiek tiek analogiškos Keinsio multiplikatoriaus $\frac{1}{1-c}$ vaidmeniui ir savybėms.

$$\text{Pavyzdžiui, kai } c < 1, \text{ tai } 1+c+c^2+c^3+\dots = \frac{1}{1-c} \text{ ir todėl } (1-c)^{-1}=1+c+c^2+c^3+\dots$$

Nesunku įrodyti, jog analogiškai galime gauti, kad $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3+\dots$

Todėl $X=(I-A)^{-1}F=(I+A+A^2+A^3+\dots)F$, iš kur išplaukia, jog **matricinę lygtį $X=AX+F$ galima spręsti ne tik atvirkštinės matricos, bet ir iteraciniais metodais, lyg ir imituojančiais ekonominės sistemos artėjimą prie pusiausvyrinės būsenos, atitinkančios tarpšakinį balansą.**

Atrodytų, kad tiesioginiai metodai yra pranašesni už netiesioginius, nes pirmieji leidžia gauti tikslų lygčių sistemos sprendinį iškart, o antrieji veda prie jo per iteracinius ciklus, kurių gali būti gana daug, jei, pavyzdžiui, pradinė situacija, nuo kurios pradedamos iteracijos, dar gana toli nuo pusiausvyrinės būsenos. Tačiau **tarpšakinių balansų sudarymo praktikoje iteraciniais metodais naudojamas gana dažnai**, ypačingai tais atvejais, kai tarpšakinį gamybos planą tenka perskaičiuoti ryšium su kai kuriais (palyginti nedideliais) pokyčiais vartojime ar gamyboje. Tuomet labiau apsimoka atlikti keleta ar keliolika iteracinių ciklų, kuriuose naudojamas paprastais standartiniais besikartojančiais skaičiavimais, negu spręsti lygčių sistemą, turinčią daugybę nežinomųjų, naudojantis tiesioginiais metodais, reikalaujančiais gana gremėzdiškų skaičiavimų. Tiesa, jei koeficientai a_{ij} nesikeičia, o keičiasi tik vartojimas F_i , tai naują subalansuotą tarpšakinį gamybos planą galima rasti iškart, naudojantis ta pačia, jau anksčiau paskaičiuota, atvirkštine matrica $(I-A)^{-1}$ ir jau minėtąja formule $X=(I-A)^{-1}F$. Tačiau net vienkartinė kelis kartus naudojamos atvirkštinės matricos elementų apskaičiavimo procedūra yra gana gremėzdiška, o ir matricių daugyba, nors ir yra standartinė, bet vis dėl to yra šiek tiek sudėtingesnė operacija negu paprastų skaičių daugyba.

Naudojantis **paprasta iteracija** (taip vadinamuoju **Jakobi metodu**), kintamųjų X_i reikšmės $X_i^{(k+1)}$ naujojoje ($k+1$ -joje) iteracijoje apskaičiuojamos, naudojantis senomis jų reikšmėmis ir formule $X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)} + F_i$. Kai iteracinis procesas konverguoja, tai skirtumai $\Delta X_i^{(k+1)} = X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}$ mažėja, artėdami prie 0, ir galų gale pasiekama situacija, kai $X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)}$ visiems nežinomiesiems X_i , kur $i=1, 2, \dots, n$. Jei pradinės kintamųjų X_i reikšmės $X_i^{(0)}$ nėra duotos (žinomos), tai priimama, kad $X_i^{(0)} = F_i$, t. y. priimama, kad pradžioje gamyba gamina produkciją tik galutiniam vartojimui. Iteracinio metodo taikymo metu kaip tik ir vyksta **tarpinio (tarpšakinio) vartojimo formavimosi imitavimas**.

Iteracinį procesą galima pagreitinoti, naudojantis **Zeidelio (kartais vadinamu Gauso ir Zeidelio) metodu**, kuriame, pereinant nuo k -sios prie $k+1$ -sios iteracijos, naudojamas ne tik senomis (k -sios iteracijos), bet ir naujomis (ką tik gautomis $k+1$ -joje iteracijoje) kintamųjų X_i reikšmėmis, t. y. naudojamas formulėmis:

$$X_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n a_{1j} X_j^{(k)} + F_1 ;$$

$$X_2^{(k+1)} = a_{21} X_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n a_{2j} X_j^{(k)} + F_2 ;$$

$$X_3^{(k+1)} = a_{31} X_1^{(k+1)} + a_{32} X_2^{(k+1)} + \sum_{j=3}^n a_{3j} X_j^{(k)} + F_3 ;$$

$$X_4^{(k+1)} = \sum_{j=1}^3 a_{4j} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=4}^n a_{4j} X_j^{(k)} + F_4 ;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_m^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=m}^n a_{mj} X_j^{(k)} + F_m ;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} X_j^{(k+1)} + a_{nn} X_n^{(k)} + F_n.$$

Kartais naudojamosi dar ir **žingsninio agregavimo metodu**, jungiančiu mikrobalsą su makrobalsu ir to ryšio dėka įvedančiu į mikrobalsą lygtį $X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)} + F_i$ specialų daugiklį $Z^{(k+1)}$ (vadinamą **makrobalsą multiplikatoriumi**), pagreitinantį iteracinio proceso konvergavimą.

Tuomet **mikrobalsą lygtimi** tampa formulė $X_i^{(k+1)} = Z^{(k+1)} \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)} + F_i$, kur $i=1, 2, \dots, n$.

Makrobalsą multiplikatoriaus $Z^{(k+1)}$ reikšmę surandama iš lygybės $Z^{(k+1)} = \frac{X^{(k+1)}}{X^{(k)}}$ ir **makrobalsą lygties** $X^{(k+1)} = a^{(k)} X^{(k)} + F$, kur $X^{(k)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(k)}$,

$$X^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(k+1)}, F = \sum_{i=1}^n F_i, a^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}}.$$

Makrobalsą lygtyje pakeitę $X^{(k+1)}$ sandauga $Z^{(k+1)} X^{(k)}$, gauname $Z^{(k+1)} X^{(k)} = a^{(k)} Z^{(k+1)} X^{(k)} + F$, iš kur išplaukia, jog makrobalsą multiplikatorių $Z^{(k+1)}$ galima

$$\text{apskaičiuoti, naudojantis formule } Z^{(k+1)} = \frac{F}{X^{(k)} - X^{(k)} a^{(k)}} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n X_i^{(k)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)}}.$$

Apskaičiavę $Z^{(k+1)}$, naudodamiesi mikrobalsą lygtimis $X_i^{(k+1)} = Z^{(k+1)} \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)} + F_i$, surandame visus $X_i^{(k+1)}$ ir po to galime pradėti naują iteracinį ciklą, skirtą $X_i^{(k+2)}$ apskaičiavimui: apskaičiuoti $Z^{(k+2)}$, o po to – visus $X_i^{(k+2)}$ ir t. t.

Iteracinių metodų taikymą pailiustruosiu paprastu pavyzdžiu, kai $n=2$, $a_{11}=0,1$, $a_{12}=0,4$, $a_{21}=0,3$, $a_{22}=0,2$, $F_1=1$, $F_2=13$.

Jei taikytume kokį nors tiesioginį metodą, tai tektų spręsti lygčių sistemą $\begin{cases} X_1 = 0,1X_1 + 0,4X_2 + 1, \\ X_2 = 0,3X_1 + 0,2X_2 + 13 \end{cases}$ ir iškart gautume, kad $X_1^* = 10$, $X_2^* = 20$.

Taikydami paprastos iteracijos metodą, gautume: 1) $X_1^{(1)} = a_{11} X_1^{(0)} + a_{12} X_2^{(0)} + F_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + F_1 = 0,1 \cdot 1 + 0,4 \cdot 13 + 1 = 6,3$, iš kur $\Delta X_1^{(1)} = X_1^{(1)} - X_1^{(0)} = 6,3 - 1 = 5,3$; 2) $X_2^{(1)} = a_{21} X_1^{(0)} + a_{22} X_2^{(0)} + F_2 = 0,3 \cdot 1 + 0,2 \cdot 13 + 13 = 15,9$, iš kur $\Delta X_2^{(1)} = X_2^{(1)} - X_2^{(0)} = 15,9 - 13 = 2,9$.

Analogiškai apskaičiuotume $X_1^{(2)} = 0,1 \cdot 6,3 + 0,4 \cdot 15,9 + 1 = 7,99$; $\Delta X_1^{(2)} = 7,99 - 6,3 = 1,69$; $X_2^{(2)} = 0,3 \cdot 6,3 + 0,2 \cdot 15,9 + 13 = 18,07$; $\Delta X_2^{(2)} = 18,07 - 15,9 = 2,17$ ir t. t.

Skaičiavimų rezultatus patalpinsime į 112-ąją lentelę.

112. lentelė

k	$X_1^{(k)}$	$\Delta X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$\Delta X_2^{(k)}$
0	1		13	
1	6,3	5,3	15,9	2,9
2	7,99	1,69	18,07	2,17

113. lentelė

k	$X_1^{(k)}$	$\Delta X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$\Delta X_2^{(k)}$
0	1		13	
1	6,3	5,3	17,49	4,49
2	8,63	2,33	19,09	1,60

114. lentelė

k	$Z^{(k)}$	$X_1^{(k)}$	$\Delta X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$\Delta X_2^{(k)}$
0		1		13	
1	2,41	13,79	12,79	20,00	7,00
2	0,86	9,07	-4,73	20,00	0,00

3	9,03	1,04	19,01	0,94
4	9,51	0,48	19,51	0,50
5	9,75	0,25	19,75	0,24
6	9,88	0,12	19,88	0,12
7	9,94	0,06	19,94	0,06
8	9,97	0,03	19,97	0,03
9	9,98	0,02	19,96	0,02
10	9,99	0,01	19,98	0,01
11	10,00	0,00	19,99	0,01
12	10,00	0,00	20,00	0,00
13	10,00	0,00	20,00	0,00

3	9,50	0,87	19,67	0,58
4	9,82	0,32	19,88	0,21
5	9,93	0,12	19,96	0,08
6	9,98	0,04	19,98	0,03
7	9,99	0,02	19,99	0,01
8	10,00	0,01	20,00	0,00
9	10,00	0,00	20,00	0,00

3	1,04	10,28	1,21	20,00	0,00
4	0,99	9,92	-0,36	20,00	0,00
5	1,00	10,02	0,10	20,00	0,00
6	1,00	9,99	-0,03	20,00	0,00
7	1,00	10,00	0,01	20,00	0,00
8	1,00	10,00	0,01	20,00	0,00

Taikydami tam pačiam pavyzdžiui Zeidelio metodą, gautume:

1) $X_1^{(1)} = 0,1 \cdot 1 + 0,4 \cdot 13 + 1 = 6,3$; 2) $X_2^{(1)} = 0,3 \cdot 6,3 + 0,2 \cdot 13 + 13 = 17,49$; 3) $X_1^{(2)} = 0,1 \cdot 6,3 + 0,4 \cdot 17,49 + 1 \approx 8,63$; 4) $X_2^{(2)} \approx 0,3 \cdot 8,63 + 0,2 \cdot 17,49 + 13 \approx 19,09$ ir t. t. (žiūr. 113-ją lentelę). Kaip matome, pusiausvyrinei būsenai pasiekti prireikė šiek tiek mažiau iteracijų. Šis metodo pranašumas prieš paprastos iteracijos metodą didėja, didėjant n.

$$\begin{aligned} \text{Taikydami žingsninio agregavimo metodą, gautume: } 1) \quad Z^{(1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n X_i^{(0)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(0)}} = \\ &= \frac{1+13}{(1+13) - (0,1 \cdot 1 + 0,4 \cdot 13 + 0,3 \cdot 1 + 0,2 \cdot 13)} = \frac{14}{14 - 8,2} = \frac{70}{29} \approx 2,41; \quad 2) \quad X_1^{(1)} = Z^{(1)} \sum_{j=1}^n a_{1j} X_j^{(0)} + F_1 = \\ &= \frac{70}{29} (0,1 \cdot 1 + 0,4 \cdot 13) + 1 = \frac{70}{29} \cdot 5,3 + 1 = \frac{400}{29} \approx 13,79; \quad 3) \quad X_2^{(1)} = \frac{70}{29} (0,3 \cdot 1 + 0,2 \cdot 13) + 13 = \frac{70}{29} \cdot 2,9 + \\ &+ 13 = 20; \quad 4) \quad Z^{(2)} = \frac{14}{\left(\frac{400}{29} + 20\right) - \left(0,1 \cdot \frac{400}{29} + 0,4 \cdot 20 + 0,3 \cdot \frac{400}{29} + 0,2 \cdot 20\right)} = \frac{203}{236} \approx 0,86; \quad 5) \quad X_1^{(2)} = \\ &= \frac{203}{236} \left(0,1 \cdot \frac{400}{29} + 0,4 \cdot 20\right) + 1 = \frac{535}{59} \approx 9,07; \quad 6) \quad X_2^{(2)} = \frac{203}{236} \left(0,3 \cdot \frac{400}{29} + 0,2 \cdot 20\right) + 13 = \frac{1652}{236} + 13 = \\ &= 7 + 13 = 20 \text{ ir t. t. (žiūr. 114-ją lentelę). Kaip nesunku pastebėti, iteracijų skaičius vėl šiek tiek sumažėjo. Esant didesnėms n reikšmėms, agregavimo metodo idėją galima sujungti su Zeidelio metodo idėja ir tokiu būdu dar padidinti konvergavimo greitį.} \end{aligned}$$

Paprastos iteracijos ir Zeidelio algoritmai konverguoja visada, jei tik koeficientų a_{ij} matrica A yra **produktyvi**, t. y. visi koeficientai a_{ij} tenkina neneigiamumo sąlygą $a_{ij} \geq 0$ ir egzistuoja nors vienas toks vektorius $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ (čia T – transformacijos ženklas, reiškiantis, kad vektorius $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ yra vektorius – stulpelis), kuris tenkintų sąlygą $X > AX$, t. y. sąlygą $(I - A)X > 0$.

Matricos A, su kuriomis tenka turėti reikalo, sprendžiant realius tarpšakinės ekonominės analizės uždavinius, visada produktyvios, nes tiesioginių sąnaudų koeficientai a_{ij} praktikoje niekada nebūna neigiami, o sąlyga $(I - A)X > 0$ sutampa su sąlyga, kad lygtis $X = AX + F$ turi sprendinį $X = (I - A)^{-1}F$ nors vienai teigiamai vartojimo vektoriaus $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ reikšmei. Matematiškai ši sąlyga reiškia, kad matricai $(I - A)$ turi egzistuoti atvirkštinė matrica $(I - A)^{-1}$, kitaip tariant, matricos $(I - A)$ determinantas neturi būti lygus 0, o ekonomiškai ši sąlyga reikalauja, kad kiekviena ekonomikos šaka i privalo sugebėti pagaminti kokią nors baigtinį kiekį produkcijos $X_i > 0$. Todėl ir ši sąlyga praktiškai visada yra tenkinama.

Žingsninio agregavimo metodas praktikoje taikomas tada, kada sudaromi tarpšakiniai balansai kokiame nors viename produktui arba produktų grupei, kuriuos „fiziškai“ galima agreguoti.

Realioje ekonomikoje įvairių produktų rūšių yra gana daug, todėl, sudarant tarpšakinį subalansuotą gamybos planą, tenka dirbti su gana dideliais masyvais koeficientų, konstantų ir kintamųjų. Sudaryti specialūs programų paketai, kuriais naudojantis tampa įmanomas gana detalus tarpšakinės gamybos planavimas.

Sudarydami tarpšakinį gamybos planą, mes sudarinėjome ir nagrinėjome lygčių sistemą, kuri aprašo 111-osios lentelės eilutes. Nagrinėdami lygčių sistemą, aprašančią 111-sios lentelės stulpelius, mes galime ieškoti produkcijos pusiausvyrinių kainų P_i^* ekonominėje sistemoje, kurioje gaminama ir vartojama daug įvairių produkcijos rūšių $i=1, 2, \dots, n$.

Kaip jau buvome gavę anksčiau, kiekvienam 111-sios lentelės stulpeliui j galioja lygybė $X_j^* = \sum_{i=1}^n X_{ij}^* + V_j$, kur X_{ij}^* – resurso i (produkcijos i) kiekio, reikalingo produkcijos j kiekio X_j pagaminimui, vertė, o X_j^* – produkcijos j kiekio X_j vertė.

Pažymėsime produkcijos i kainą žymeniu P_i . Tuomet produkcijos j kiekis X_j kainuos $P_j X_j$, produkcijos i kiekis X_{ij} kainuos $P_i X_{ij}$. Tuo atveju, kai pridėtinė vertė V_j išreikšta tais pačiais piniginiiais vienetais kaip ir kainos, gauname sukurto vertės ir sąnaudų balanso lygtį $P_j X_j = \sum_{i=1}^n P_i X_{ij} + V_j$.

Kadangi $X_{ij} = a_{ij} X_j$, tai iš šios balanso lygties, kai $X_j \neq 0$, gauname: 1) $P_j X_j = \sum_{i=1}^n P_i a_{ij} X_j + V_j$; 2) $P_j = \sum_{i=1}^n P_i a_{ij} + \frac{V_j}{X_j}$; 3) $P_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} P_i + v_j$, kur $v_j = \frac{V_j}{X_j}$ –

produkcijos j vieneto pridėtinė vertė.

Kadangi i ir j – produkcijos identifikatoriai (numeriai), žymintys tą pačią tvarką tą produkciją atitinkančias eilutes ir stulpelius, tai indeksus i ir j galima sukeisti vietomis. Tuomet iš formulės $P_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} P_i + v_j$ gauname formulę $P_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} P_j + v_i$,

kur $i=1, 2, \dots, n$. Ši formulė vaizduoja lygtis, kurias turi tenkinti pusiausvyrinės kainos P_i^* . Šią lygčių sistemą vadina **pusiausvyrinių kainų modeliu**.

Šį modelį dažnai vaizduoja matricinėje formoje $P = A^T P + v$, kurioje $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$ produkcijos kainų vektorius – stulpelis, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ – produkcijos vienetų pridėtinės vertės vektorius – stulpelis, A^T – matrica, kuri gaunama transponuojant (sukeičiant vietomis stulpelius ir eilutes) tiesioginių sąnaudų a_{ij} matricą A .

Spręsdami matricinę lygtį $P - A^T P = v$, gauname $P = (I - A^T)^{-1} v = [(I - A)^{-1}]^T v$.

Pusiausvyrinių gamybos apimčių modelis $X = AX + F$ ir pusiausvyrinių kainų modelis $P = A^T P + v$ yra dualūs. Šiais modeliais galima naudotis ne tik pusiausvyrinių gamybos apimčių X^* ir pusiausvyrinių kainų P^* apskaičiavimui, bet ir apskaičiuojant gamybos apimčių bei kainų prieauglius $\Delta X = (\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n)^T$ ir $\Delta P = (\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n)$, atsirandančius dėl vartojimo ar pridėtinės vertės prieauglių $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n)^T$ ir $\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n)^T$: $\Delta X = (I - A)^{-1} \Delta F = B \Delta F$, kur B – Leontjevo atvirkštinė matrica; $\Delta P = [(I - A)^{-1}]^T \Delta v = B^T \Delta v$, kur B^T – **matricinis kainų multiplikatorius** – Leontjevo atvirkštinės matricos transpozicija.

Dėl ką tik minėtojo dualumo, o taip pat todėl, kad tie patys statistiniai duomenys gali būti panaudoti įvairiuose ekonominiuose skaičiavimuose, **tarpšakinę ekonominę analizę tikslinga daryti kompleksine**, panaudojant ekonominę informaciją ir skaičiavimų rezultatus ne tik tam, kad būtų gautas atsakymas į kurią nors

vieną mus dominantį klausimą (pavyzdžiui, į klausimą, kokios turi būti gamybos įvairiose šakose bei tarpšakinių pristatymų pusiausvyrinės apimtys, arba į klausimą, kokios turi būti produkcijos pusiausvyrinės kainos), bet ir tam, kad tuo pačiu metu, remiantis tais pačiais duomenimis ir pasinaudojant jau įvykdytų skaičiavimų rezultatais, būtų gauti atsakymai ir į eilę kitų klausimų, kurie galėtų dominti verslininkus, valstybės valdymo tarnybas, ekonomikos mokslų atstovus.

Realioje tarpšakinėje kompleksinėje analizėje tarpšakinių balansų lentelės gali turėti po kelias dešimtis ar net šimtus eilučių ir stulpelių, atitinkančių ne tik įvairias ūkio šakas bei svarbiausias produkcijos rūšis, bet ir galutinio vartojimo bei pridėtinės vertės sudėtinės dalis, išskiriančias atskiromis eilutėmis samdomų darbuotojų pajamas, verslininkų pelną, amortizacinius atskaitymus, subsidijas, netiesioginius mokesčius ir t. t. bei atskirais stulpeliais – asmeninį ir valstybinį vartojimą, vidines investicijas, atsargų pokyčius, eksportą, importą ir t. t.

Ryšium su tuo realioje kompleksinėje tarpšakinėje ekonominėje analizėje neretai detalizuojami ir tarpšakinio balanso lentelių eilučių ir stulpelių matematiniai modeliai. Pavyzdžiui, mūsų jau nagrinėtasis matricinis modelis $X=AX+F$ pakeičiamas sudėtingesniu modeliu $X=AX+F^{(D)}+F^{(E)}-M(AX+F^{(D)})$, kuriame $F_i^{(D)}$ – **vidinis produkto i suvartojimas** (vidinė produkto i paklausa) – vektoriaus $F^{(D)}=(F_1^{(D)}, F_2^{(D)}, \dots, F_n^{(D)})^T$ viena iš komponentų, $F_i^{(E)}$ – **produkto i eksportas** – vektoriaus $F^{(E)}=(F_1^{(E)}, F_2^{(E)}, \dots, F_n^{(E)})^T$ viena iš komponentų, M – **importo matrica**

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \text{ kurios elementai } m_i - \text{importo koeficientai} - \text{yra}$$

apskaičiuojami, dalinant produkto i importo apimtį M_i iš to produkto **pilno vidinio suvartojimo** $\sum_{j=1}^n X_{ij} + F_i^{(D)}$, t. y. naudojantis formule $m_i = \frac{M_i}{\sum_{j=1}^n X_{ij} + F_i^{(D)}}$. Gali būti

$$\text{detalizuojamos ir lygtys } X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + V_j.$$

Sprendami matricinę lygtį $X=AX+F^{(D)}+F^{(E)}-M(AX+F^{(D)})$, gauname lygybę $[I-(I-M)A]X=(I-M)F^{(D)}+F^{(E)}$, iš kurios išplaukia, jog matricinės lygties sprendinys – pusiausvyrinį tarpšakinį balansą vaizduojantis vektorius – stulpelis $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ – yra lygus $X=[I-(I-M)A]^{-1}[(I-M)F^{(D)}+F^{(E)}]$. Žinodami pusiausvyrines produkcijos j apimtis X_j ir matricos A elementus a_{ij} , galime nustatyti pusiausvyrines X_{ij} reikšmes, rodančias, kiek savo pagamintos produkcijos šaka i turi skirti šakos j tarpiniam vartojimui, t. y. sudaryti **pilną tarpšakinį gamybos balansą**.

Kompleksinės tarpšakinės ekonominės analizės kompiuterinės programos sudaromos taip, kad, naudojantis tų programų meniu, būtų galima sudaryti ne tik tarpšakinį gamybos apimčių X_i balansą bei nustatyti produkcijos pusiausvyrines kainas, bet ir apskaičiuoti tuos pokyčius, kurie atsiranda bei gali atsirasti tarpšakinėje ekonomikoje, keičiantis vartojimo paklausai, eksportui, importui, produkcijos kainoms, pridėtinės vertės sudėtinėms dalims (darbo užmokesčiui, mokesčiams, palūkanų normoms, subsidijoms ir t. t.).

Su tokios tarpšakinės kompleksinės makroekonominės analizės konkrečiu pavyzdžiu skaitytojas gali susipažinti knygoje [48], kurios 189-215 p.p. aprašytas

Japonijos ekonomikos tarpšakinės analizės matematinis modelis, pateikta kompiuterinė programa ir tos programos darbo rezultatų fragmentai – gana daug įvairių mašinogramų.

Gana dažnai kompleksinės tarpšakinės analizės programos leidžia apskaičiuoti jautrumo įvairiems poveikiams koeficientus, rodančius, kaip pasikeistų ekonominės sistemos modelio kintamųjų reikšmės, pasikeitus kai kurių to modelio parametrų bei kai kurių kitų kintamųjų reikšmėms. Kaip apskaičiuojamos **jautrumo koeficientų** reikšmės, skaitytojas bus supažindintas 1.15. skyriuje. Tokių koeficientų reikšmių žinojimas leidžia gana lengvai ir greitai įvertinti tų ar kitų pokyčių ekonomikoje galimas pasekmes, kas gana svarbu, priimant tuos ar kitus valdymo sprendimus.

Į kompleksinę tarpšakinę ekonominę analizę gali būti įvestos ir gamybinės funkcijos, turinčios dešimtis ir daugiau argumentų (pavyzdžiui, $X_j = \min_j \left(\frac{X_{1j}}{a_{1j}}, \frac{X_{2j}}{a_{2j}}, \dots, \frac{X_{ij}}{a_{ij}}, \dots, \frac{X_{nj}}{a_{nj}} \right)$, $j=1, 2, \dots, n$), o taip pat ir vartojimo funkcijos. Gali būti atsižvelgta į ekonominio augimo proceso cikliškumą, į pereinamuosius procesus ekonomikoje ir pan., o taip pat į valstybinio reguliavimo galimybes.

Gaila, kad Lietuvos Vyriausybė 1991 m., kaip jau minėjau*, atsisakė Vilniaus universiteto matematikų ir LMS skyriaus „Taurus“ mokslininkų siūlomų paslaugų ekonomikos modeliavimo ir jo rezultatų analizės srityje, galėjusių padėti Vyriausybei vykdyti labiau subalansuotą ekonominę politiką ir išvengti eilės klaidų, atvedusių Lietuvos ekonomiką į tokią sunkią būklę, kokioje ji atsidūrė XXI a. pradžioje.

Baigdamas šią trumpą makroekonominių modelių apžvalgą, parekomenduočiau skaitytojui, norinčiam turėti ne tik bendrą supratimą apie matematinę makroekonomiką, bet ir sugebėti kvalifikuotai nagrinėti sudėtingus ekonominius reiškinius bei naudotis tokiais sudėtingais ekonominiais modeliais kaip Pasaulio banko modelis RMSM–X ar dinaminis Lietuvos ekonomikos modelis, su kuriais teks susidurti studijuojant antrąją sistemotyros kurso dalį ir savarankiškai kuriant ekonominius modelius, rimtai išstudijuoti knygas [48, 176, 177, 178, 179, 180, 181] bei susipažinti su automatizuotomis imitacinio modeliavimo sistemomis (tokiomis kaip Powersim, GPSS ir pan.).

Kuriant ekonominius modelius būtinai prireiks žinių ir iš tokio mokslo kaip ekonometrika, prie kurio metodų bei modelių apžvalgos dabar ir pereisime.

1.14.12.3. Ekonometriniai modeliai

1.14.12.1. ir 1.14.12.2. skyreliuose, sudarinėdami įvairius mikroekonominius ir makroekonominius modelius, mes gana dažnai vartojome įvairius koeficientus bei laipsnių rodiklius (pavyzdžiui, gamybinėse funkcijose, tiesioginių sąnaudų matricoje ir pan.), pažymėdami, kad konkrečios tų koeficientų bei laipsnių rodiklių reikšmės yra nustatomos, apdorojant statistinę informaciją ekonometrikos metodais. Šiame skyrelyje kaip tik ir kalbėsime apie tuos metodus bei jų taikymo ypatumus ir apie ekonometriką apskritai.

Ekonometrikos terminą 1926 m. įvedė norvegų ekonomistas ir statistikas P. Frišas. Pažodžiui tas terminas galėtų būti išverstas kaip „matavimai ekonomikoje“ ir pačia plačiąja savo prasme kaip tik ir reiškia mokslą apie įvairių ekonominių rodiklių matavimą bei vertinimą, o taip pat apie tų matavimų rezultatų matematinį apdorojimą

* Žiūr. 1.14.12.2.1. skyrelį.

ir taikymą, sudarant matematinius modelius, aprašančius įvairius ekonominius reiškinius. Tačiau taip plačiai ekonometrika traktuojama gana retai.

Daug dažniau žodis „**ekonometrika**“ vartojamas žymiai siauresne prasme, reiškiančia **matematinės statistikos ir tikimybių teorijos aparato taikymą, nustatant ryšių tarp įvairių ekonominių rodiklių matematinės išraiškas bei statistiškai vertinant ekonominių reiškinių matematinių modelių parametrų nežinomas reikšmes**, kurių kitais būdais nustatyti nepavyksta.

Ekonometrika – dar gana jaunas mokslas, todėl jo traktuotė, laikui bėgant, keitėsi ir dar gali šiek tiek keistis ateityje. Dabartiniu metu, kalbant apie ekonometriką, galima laikyti jos apibrėžimo, sudaryto, apibendrinant daugumos specialistų, dirbančių ekonometrikos srityje, nuomonę, ir pateikto gana fundamentalioje knygoje [182], skirtoje taikomajai statistikai ir ekonometrikos pagrindams. Toje knygoje ekonometrika apibrėžiama kaip **savarankiška mokslinė disciplina**, kuri, remdamasi **ekonomikos teorija** (tame tarpe ir **matematine ekonomika**), **socialine ir ekonomine statistika** bei jų teikiamais **statistiniais duomenimis** kaip **informacine ekonometrikos baze**, o taip pat **matematinės statistikos aparatu** kaip pagrindiniu **matematinio ekonometrikos instrumentu**, jungia savyje tokius **teorinius rezultatus, metodus ir modelius**, kurie leidžia suteikti **konkrečią išraišką** tiems **dėsningumams, kurie išplaukia iš ekonominės teorijos ir konkrečių ekonominių tyrimų**.

Iš šio ekonometrikos apibrėžimo išplaukia, jog **matematinė ekonomika, kuri yra ne kas kita kaip matematikos kalba išreikšta ekonomikos teorija, tampa ekonometrika, kai matematinės ekonomikos formulių simboliniai koeficientai, naudojantis statistiniais duomenimis apie ekonominių bei socialinių rodiklių faktines reikšmes ir matematinės statistikos metodais, pakeičiami tų koeficientų statistiniais įverčiais, išreikštais konkrečiais skaičiais, įvertinant ir nurodant tų įverčių patikimumą ar jų nustatymo galimų paklaidų ribas**. Tokiu būdu iš ekonominės matematikos modelių gauti matematiniai modeliai vadinami **ekonometriniiais modeliais**.

Pavyzdžiui, jei matematiname Kobo ir Duglaso dviejų veiksnių gamybinės funkcijos modelyje $Y=F(K,L)=cL^aK^{1-a}$, naudodamiesi surinktais statistiniais duomenimis apie gamyboje panaudotą kapitalą K , darbo jėgos resursus L bei pagamintos produkcijos apimtį Y ir apdorodami tuos duomenis regresinės analizės metodais (pavyzdžiui, mažiausiųjų kvadratų metodu), nustatysime tos funkcijos koeficiento c ir laipsnio rodiklio a reikšmių statistinius įverčius, įvertindami ir nurodydami tų įverčių patikimumą, tai gausime **ekonometrinių Kobo ir Duglaso gamybinės funkcijos modelių**.

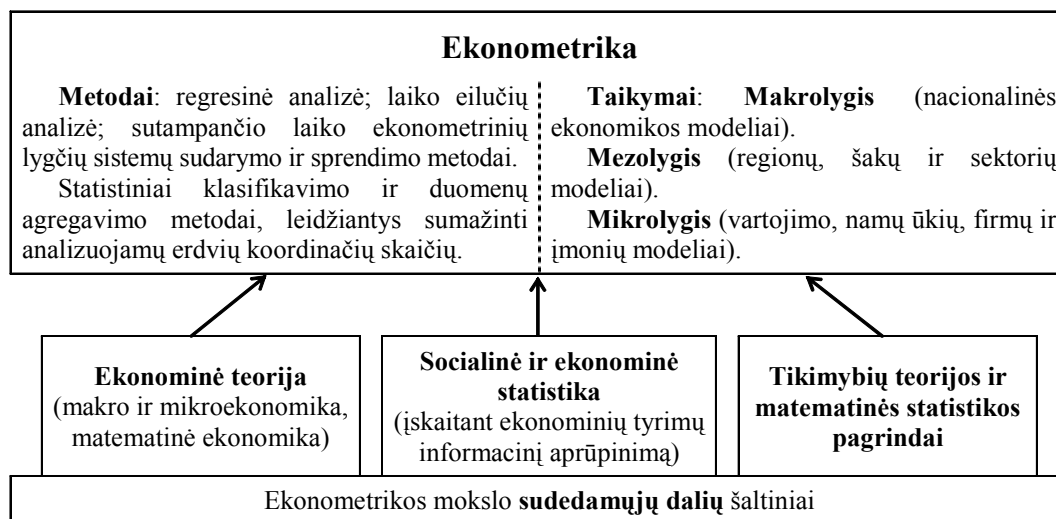
Galima teigti, kad ekonometrika priklauso šios mokymo priemonės „Įvade“ minėtųjų **hibridinių mokslų grupei**, kuriems būdinga, kad jie, atsirasdami skirtingiems mokslams priklausančių sričių susikirtimo taškuose (tiksliau, persidengimo zonose), sintezuoja tų mokslų pasiekimus ir emerđencijos reiškinio dėka sukuria naują kokybę. **Ekonometrika kaip tik ir yra ekonominės teorijos, statistikos ir matematikos sintezės rezultatas**, įgijęs tokių savybių, kurių nė vienas iš šių čia paminėtųjų trijų labai svarbių ir naudingų mokslų, paimtų atskirai, neturi ir turėti negali. **Ekonometrika savo egzistavimu ir duodama praktine nauda dar kartą patvirtina minėtajame „Įvade“ suformuluoto teiginio apie mokslų integravimo naudą teisingumą**.

Kalbėdami apie **taikomuosius ekonometrikos tikslus**, minėtosios knygos autoriai išskiria du pagrindinius: ekonominių ir socialinių rodiklių – kintamųjų, charakterizuojančių analizuojamos organizacinės sistemos būseną, – reikšmių

prognozę ir tos sistemos ekonominės ir socialinės raidos įvairių **galimų scenarijų imitavimą, norint** (eksperimentuojant su situaciniais imitaciniais analizuojamos sistemos ir joje vykstančių reiškinių modeliais) **nustatyti, kaip tie ar kiti planuojami ar prognozuojami pasikeitimai gali atsiliepti analizuojamos sistemos charakteristikoms bei kokias pasekmes tie pasikeitimai galėtų iššaukti.**

Nagrinėdami tradicinėje ekonometrikoje taikomus metodus ir modelius, sudarančius **ekonometrikos kaip taikomojo mokslo turinį**, knygos [182] autoriai išskiria tris pagrindines to turinio dalis: 1) **regresinės analizės metodus ir modelius**, 2) **statistinių laiko eilučių analizę ir jos modelių taikymą prognozavime** ir 3) **sutampančio laiko ekonometrinių lygčių sistemų sudarymo ir sprendimo metodus**, t. y. sudėtingų similtaninių ekonometrinių modelių, kuriuose kai kurie kintamieji vienos lygties gali būti argumentais, o kitose – funkcijomis, sudarymo ir jų taikymo metodus.

321 pav. pateikta schema rodo, kaip minėtosios knygos autoriai vaizduoja ekonometrikos ryšius su kitais mokslais, ekonometrikos metodus ir jos taikymo lygius bei sritis.



321 pav.

Čia pateiktąją schemą, mano nuomone, reikėtų papildyti. Kalbant apie ekonometrikoje naudojamus metodus derėtų paminėti dar ir **koreliacinę bei dispersinę analizę**. Nors koreliacinė analizė ekonometrikoje ir nevaidina tokio svarbaus vaidmens kaip regresinė analizė, kurią galima laikyti pagrindine sudedamąja ekonometrikos dalimi ir kuri gali apsieiti be koreliacinės analizės visais tais atvejais, kai matematinė ekonomika sugeba pakankamai kokybiškai išreikšti ekonomines priklausomybes matematinėmis formulėmis, matematiniais ženklais rišančiomis simbolius, vaizduojančius tuos ar kitus ekonominius rodiklius, ir ekonometrikams belieka tik nustatyti konkrečias tų formulių koeficientų reikšmes, tačiau **koreliacinė analizė tampa labai reikalinga, kada matematinė ekonomika nepajėgia pakankamai tiksliai nustatyti formos tų matematinių formulių, kurios turėtų vaizduoti ryšius tarp kai kurių svarbių ekonominių rodiklių, ir susidaro situacija, kada dar neaišku, kokios priklausomybės ir tarp kokių rodiklių galėtų egzistuoti, o kartais net ir tai, ar jos iš viso egzistuoja**. Koreliacinė analizė taip pat tampa labai reikalinga ir naudinga, kada reikia išsiaiškinti, kokie ekonominiai reiškiniai aprašančių funkcijų argumentai yra esminiai, o kokie – mažiau svarbūs, ar tie argumentai yra tarpusavyje priklausomi ar nepriklausomi. Todėl aš laikičiau koreliacinę analizę, nors

ir pagalbiniu, bet vis dėl to gana svarbiu ekonometrikos instrumentu, ir įtraukčiau į ekonometrikos instrumentų sąrašą.

Panašiai būtų galima pasakyti ir apie **dispersinę analizę, kuri tampa reikalinga regresinių modelių tikslumo vertinimui**, o neretai – ir sprendžiant klausimą, ar teisingai buvo pasirinkta ta ar kita matematinė ekonometrinio modelio forma, o taip pat klausimą, **ar sudarant kokios nors funkcijos matematinę išraišką, kuri turėtų aprašyti sudėtingą ekonominį reiškinių, buvo atsižvelgta į visus reikšmingus faktorius, t. y., ar tos funkcijos argumentų sąrašas yra pakankamai pilnas**. Pastaruoju atveju tampa reikalinga ne tik dispersinė, bet ir koreliacinė analizė, ypač, jei tą argumentų sąrašą tenka papildyti arba atvirkščiai – išbraukti iš jo kai kuriuos kintamuosius, bereikalingai didinančius ekonominės funkcijos sudėtingumą bei įnešančius papildomą „triukšmą“, apskaičiuojant tos funkcijos reikšmių įverčius.

Manychiau taip pat, kad efektyviu ekonometrinių tyrimų metodu ir instrumentu, tiriant galimas tų ar kitų įvykių bei valdymo poveikių pasekmes, prognozuojant ekonominių ir socialinių procesų raidą, tampa **statistinis kompiuterinis ekonominių procesų modeliavimas ir matematiniai eksperimentai su tų procesų ekonometriniais modeliais**.

Išvardinant ekonometrikos taikymo sritis, mano nuomone, nederėtų pamiršti ir tokio dalyko kaip **rinka** (ne tik vartojimo produkcijos bei paslaugų, bet ir darbo jėgos, kapitalo, vertybinių popierių vidinė ir tarptautinė rinka), o kalbant apie makrolygį, reikėtų neapsiriboti vien tik nacionalinėmis ekonomikomis, bet ir laikyti ekonometrikos objektu bei taikymo sritimi taip pat ir **pasaulinę ekonomiką**, kuri jau gana seniai nebėra vien tik nacionalinių ekonomikų suma, o vis labiau panašėja į sudėtingą organizmą su savo specifinėmis savybėmis ir dėsningumais.

Manychiau, kad su šiomis mano pastabomis sutiktų ir patys knygos [182] autoriai, nes toliau nagrinėdami, pavyzdžiui, ekonometrinio modeliavimo etapus ir to modeliavimo metu išskylančias problemas bei konkrečius ekonometrinių modelių sudarymo pavyzdžius, jie neapsiriboja vien tik tais metodais, kurie buvo išvardinti 321 pav. schemeje, bei toje schemeje nurodytomis ekonometrikos taikymo sritimis. O kad **ekonometrikos metodų taikymo sritis turi tendenciją plėstis**, byloja ir tokie faktai, jog **ekonometriniai metodai dabar taikomi ne tik ekonomikoje bei sociologijoje, bet ir demografinių reiškinių nagrinėjime, ekologijoje, psichologijoje, medicinoje ir t. t.**

Nagrinėdami **ekonometrinio modelio sudarymo procesą**, minėtosios knygos autoriai išskiria **šešis pagrindinius to proceso etapus**:

1) **parengiamąjį**, kurio metu išsiaiškinami ir **raštiškai** suformuluojami **galutiniai ekonometrinio modelio sudarymo ir jo panaudojimo tikslai**, nustatomas faktorių ir rodiklių, kurie (ir ryšiai tarp kurių) bus nagrinėjami modelyje, rinkinys, jų vaidmuo nagrinėjamuose reiškiniuose ir būsimame modelyje;

2) **apriorinį**, kurio metu vyksta priešmodelinė nagrinėjamų **reiškinių ekonominės esmės analizė**, formuojama ir analizuojama apriorinė statistinė informacija, išsiaiškinama tos informacijos esmė ir kilmė, analizuojami kauzaliniai ir koreliaciniai ryšiai tarp nagrinėjamų faktorių bei rodiklių, tarp kintamųjų, kurie bus laikomi nagrinėjamų funkcijų argumentais ir ekonometrinėje analizėje bus vadinami **paaiškinančiais (egzogeniniais) kintamaisiais**, ir tų kintamųjų, kurie bus laikomi nagrinėjamų funkcijų reikšmėmis ir ekonometrinėje analizėje bus vadinami **paaiškinamaisiais (endogeniniais) kintamaisiais**, sudaromi **egzogeninių ir endogeninių kintamųjų sąrašai**;

3) **modelio parametrizavimo etapą**, kurio metu pasirenkami **modelio tipas ir forma**, matematiškai išreiškiami ryšiai tarp modelio elementų, t. y. tarp modelio

kintamųjų ir į modelį įvedamų koeficientų; šio etapo sėkmingas užbaigimas reiškia **matematinio – ekonominio modelio specififikavimo problemos išspindimą**;

4) **informacinį**, kurio metu renkama reikalinga modelio identifikavimui statistinė informacija, matuojant ir registruojant dalyvaujančių modelyje faktorių bei rodiklių reikšmes tam tikruose erdvės bei laiko taškuose, kuriuose pasireiškia nagrinėjami ir modeliuojami reiškiniai;

5) **modelio identifikavimo etapą**, kurio metu, naudojantis surinkta statistine informacija ir regresinės analizės metodais, surandami modelio koeficientų bei laipsnių rodiklių reikšmių statistiniai įverčiai; **sėkmingai užbaigus šį etapą, ekonominis modelis tampa ekonometriniu**;

6) **modelio verifikavimo etapą**, kurio metu, lyginant modeliavimo rezultatus su realiais duomenimis, tikrinamas sudaryto modelio adekvatumas tikrovei, vertinamas modelio patikimumas bei modeliavimo rezultatų tikslumas.

Šeštuoju etapu, įsitikinus, kad sudarytas modelis pakankamai adekvatus realiam analizuojamam reiškiniui ir kad modeliavimo rezultatai pakankamai patikimi ir pakankamai tikslūs, **užsibaigia ekonometrinio modelio sudarymo procesas** ir prasideda to **modelio taikymo procesas**, kurį būtų tikslinga laikyti septintuoju **ekonometrinio modeliavimo plačiąja prasme** etapu.

Ekonometrinėje praktikoje ekonometrinis modeliavimas ne visada prasideda nuo pirmojo etapo. Pavyzdžiui, jei matematinės ekonomikos atstovai patys be ekonometrikos specialistų pagalbos sėkmingai įvykdė pirmuosius tris etapus ir sėkmingai išsprendė ekonominio modelio specififikavimo problemą, tai ekonometrikai gali pradėti savo darbą nuo ketvirtojo etapo. Gali atsitikti ir taip, kad net reikalingos modelio identifikavimui statistinės informacijos rinkti jau nebereikia, nes ją galima gauti valstybinės statistikos tarnybose ar mokslinių tyrimų institutuose. Tuomet ekonometrinio modelio sudarymą galima pradėti nuo penktojo etapo t.y. nuo **ekonometrikos pačia siaurąja prasme** specifinių metodų taikymo. Kaip tik šiems specifiniams klausimams ir specifiniams metodams ir bus skiriama daugiausia dėmesio šiame (1.14.12.3-jame) skyrelyje.

Reikia pažymėti, kad ekonometristui 4-me, 5-me ir 6-me ekonometrinio modelio sudarymo etapuose tais atvejais, kai surinkta statistinė informacija nėra pakankamai pilna ir patikima, tenka spręsti dar ir daug iteracijų bei išsradinumo reikalaujančią **modelio kalibravimo problemą**, kol galų gale gaunamas pakankamai nepriekaištingas ir identifikuojamas nagrinėjamų reiškinių matematinis modelis. Modelio kalibravimu vadinamas normatyvinių reikalavimų, kurie išplaukia iš nagrinėjamų reiškinių esmės, kuriuos turi tenkinti formalūs kuriamo modelio elementai (pavyzdžiui, modelio koeficientai), patenkinimas **statistinės informacijos nepilnumo, nepakankamo apibrėžtumo ir nepakankamo patikimumo sąlygomis**. Juk neretai, apskaičiuojant statistinius modelio parametrų įverčius, tampa nebeaišku, kuo galima labiau pasikliauti: ar surinkta statistine informacija, ar modelio sudarytojo ekonomine intuicija. Būna kartais ir taip, kad gaunami nesuderinami ir net prieštaringi rezultatai. Todėl, kalibruojant ekonometrinį modelį, neretai tenka po daug kartų kartoti skaičiavimo procedūras, naudojantis įvairiomis statistinių duomenų porcijomis, papildomai renkant bei tikslinant statistinę informaciją, **kol pasiekiamas suderinamumas tarp normatyvinių reikalavimų, keliamų modelio parametrams, ir jų reikšmių statistinių įverčių, gaunamų apdorojant turimą statistinę informaciją**.

Ekonometriniai modeliai gali būti sudaromi taip vadinamoje **struktūrinėje ir redukuotoje formose**. Prieš įvesdamas tų formų apibrėžimus ir suformuluodamas

ekonometrinio modelio identifikuojamumo problemą, pailiustruosiu tas sąvokas, naudodamasis konkretaus ekonometrinio modelio pavyzdžiu.

Tarkime, kad ekonomistas teoretikas, panagrinėjęs priklausomybes tarp vartojimo, nacionalinių pajamų, investicijų, valstybinių užsakymų bei kitokių valstybinio ekonomikos reguliavimo poveikių, suformulavo tokias hipotetines išvadas:

1) vartojimas yra didėjanti gaunamų pajamų funkcija, tačiau, didėjanti, matyt, lėčiau negu didėja pajamos;

2) investicijų apimtis yra nacionalinių pajamų didėjanti funkcija ir tuo pačiu metu priklauso nuo valstybinio reguliavimo (pavyzdžiui, yra palūkanų procento normos mažėjanti funkcija);

3) nacionalinės pajamos yra vartojimo, investicijų ir valstybinių užsakymų prekėms ir paslaugoms suma.

Ekonometristams iškeliamas uždavinys pervesti tuos teiginius į matematinę kalbą, sudarant matematinį ekonominį modelį ir, naudojantis statistine informacija bei matematinės statistikos metodais, identifikuoti to modelio parametrus, sudarant tų parametrų statistinius įverčius, o po to – verifikuoti sudarytą ekonometrinį modelį, tuo pačiu metu patikrinant, ar ekonomisto suformuluotos hipotetinės kokybinės išvados ir suteikta joms kiekybinė išraiška atitinka tikrovę.

Šį uždavinį galima dekomponuoti į eilę smulkesnių uždavinių, turinčių savo specifiką ir jiems būdingus sprendimo metodus:

1) reikia nuspręsti, kokius kintamuosius šiuo atveju laikysime egzogeniniais, t. y. keičiamais pagal mūsų nuožiūrą arba priklausančiais nuo faktorių, kurie yra išoriniai nagrinėjamų reiškinių atžvilgiu, o kokius – endogeniniais, t. y. priklausomais nuo egzogeninių kintamųjų ir apskaičiuojamais modelio taikymo metu;

2) reikia nustatyti endogeninių kintamųjų priklausomybės nuo egzogeninių kintamųjų matematinės išraiškos formą, nusprendžiant ar ji tiesinė, ar logaritminė, ar polinominė, ar eksponentinė, ar trigonometrinė, ar dar kokia nors kitokia;

3) reikia nustatyti, kokie turi būti kintamųjų lagai (vėlavimai, delsos);

4) reikia nustatyti, koku metodu naudojantis būtų galima kuo tiksliau ir kuo lengviau apskaičiuoti modelio parametrų reikšmių statistinius įverčius, o po to, surinkus ar gavus reikalingą statistinę informaciją, apskaičiuoti tuos įverčius;

5) reikia nuspręsti, naudodamiesi kokiais metodais verifikuosime modelį, t. y. įvertinsime modelio pilnumą, patikimumą bei tikslumą, o po to – atlikti sudaryto ekonometrinio modelio verifikavimą.

Atsižvelgdami į ekonomisto suformuluotas hipotezes bei pasirinkdami (bent jau pakol kas) paprasčiausią – tiesinę – modelio formą, spręsdami pirmuosius tris aukščiau suformuluotus uždavinius, gauname sistemą, susidedančią iš dviejų lygčių ir vienos tapatybės:

$$\begin{cases} y^{(1)}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 [y^{(3)}(t) - x^{(1)}(t)] + \delta_1(t), \\ y^{(2)}(t) = \beta_1 y^{(3)}(t-1) + \beta_2 x^{(2)}(t) + \delta_2(t), \\ y^{(3)}(t) \equiv y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t) + x^{(3)}(t), \text{ kuriose } y^{(1)}(t) - \text{vartojimas, } y^{(2)}(t) - \end{cases}$$

investicijos, $y^{(3)}(t)$ – nacionalinės pajamos, $x^{(1)}(t)$ – pajamų mokestis, $x^{(2)}(t)$ – palūkanų procento norma, naudojama šiame modelyje kaip valstybinio reguliavimo instrumentas, $x^{(3)}(t)$ – valstybiniai užsakymai, $\delta_1(t)$ ir $\delta_2(t)$ – atsitiktiniai kintamieji, atspindintys kitų (neįtrauktų į modelį) faktorių poveikį į kintamuosius $y^{(1)}(t)$ ir $y^{(2)}(t)$, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$ – modelio parametrai, kurių reikšmių statistinius įverčius $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$

reikės nustatyti, sprendžiant aukščiau suformuluotą ketvirtąjį uždavinį, atsižvelgiant į tai, kad jie turi tenkinti normatyvinius reikalavimus: $\hat{\alpha}_0 > 0$, $0 < \hat{\alpha}_1 < 1$, $\hat{\beta}_1 > 0$, $\hat{\beta}_2 < 0$.

Kintamieji $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ ir $x^{(3)}(t)$ šiuo atveju yra egzogeniniai, o kintamieji $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t)$, $y^{(3)}(t)$ – endogeniniai. Kintamąjį $y^{(3)}(t-1)$, turintį laiko lagą lygų 1, – vėluojančio argumento kintamąjį – laikysime egzogeniniu.

Dabar apibendrinsime sudarytąjį modelį ir įvesime ekonometrinio modelio struktūrinės formos sąvoką.

Įvesime visų egzogeninių kintamųjų, kurių reikšmės laikysime modeliavimo metu užduodamomis, vektorių $X(t) = (x^{(0)}(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(i)}(t), \dots, x^{(p)}(t))^T$, turintį $p+1$ koordinačių. Mūsų nagrinėjamo konkretaus pavyzdžio atveju to vektoriaus koordinatėmis bus: $x^{(0)}(t) \equiv 1$ (ši koordinatė reikalinga konstantų įvedimui į modelį), egzogeniniai kintamieji $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$ ir vėluojančio argumento kintamasis $x^{(4)}(t) = y^{(3)}(t-1)$. Taigi, mūsų nagrinėjamojo atveju $p=4$, o vektorių $X(t)$ turės penkias koordinates: $x^{(0)}(t) \equiv 1$, $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$, $x^{(4)}(t)$.

Taip pat įsivesime endogeninių (paaiškinamųjų, rezultatinių) kintamųjų vektorių $Y(t) = (y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(m)}(t))^T$, pažymėdami jo koordinačių skaičių m . Mūsų nagrinėjamo atveju $m=3$ ir $Y(t) = (y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), y^{(3)}(t))^T$.

Priimsime, kad ekonometrinį modelį sudarančių lygybių (lygčių ir tapatybių) skaičius yra taip pat lygus m , nes, jei tų lygybių būtų mažiau nei m , endogeninių kintamųjų reikšmės tomis lygybėmis nebūtų pilnai apibrėžtos, o atveju, kai tų lygybių skaičius būtų didesnis už m , kai kurios iš tų lygybių turėtų būti arba priklausomos nuo likusiųjų arba kelti tų lygybių kintamiesiems nesuderinamus reikalavimus, dėl ko galėtų neegzistuoti tokios endogeninių kintamųjų reikšmės, kurios tenkintų visas lygybes.

Mūsų nagrinėjamo atveju modelį sudarančių lygybių skaičius sutampa su endogeninių kintamųjų skaičiumi $m=3$.

Suskaidysime ekonometrinį modelį sudarančių lygybių aibę į du poaibius: į **ekonometrinių lygčių**, kurių skaičių pažymėsime m_1 (mūsų nagrinėjamo atveju $m_1=2$), **poaibį** ir į **ekonominių tapatybių**, kurių skaičių pažymėsime m_2 (mūsų nagrinėjamojo konkrečiu atveju $m_2=1$), **poaibį**. Aišku, kad $m_1+m_2=m$.

Ryšium su tuo endogeninių kintamųjų aibė, susidedanti iš m kintamųjų, irgi susiskaidys į du poaibius, turinčius po m_1 ir po m_2 kintamųjų. Į pirmąjį poaibį pateks tie endogeniniai kintamieji, kurie apibrėžiami ekonometrinėmis lygtimis, o į antrąjį – tie, kurie apibrėžiami tapatybėmis. Tuomet endogeninių kintamųjų vektorių $Y(t) = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m_1-1)}, y^{(m_1)}, y^{(m_1+1)}, \dots, y^{(m)}]^T$ bus galima laikyti susidedančiu iš dviejų

vektorių $Y^{(1)}$ ir $Y^{(2)}$, t. y. $Y = \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix}$, kur $Y^{(1)} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m_1)})^T$, $Y^{(2)} = (y^{(m_1+1)}, y^{(m_1+2)}, \dots, y^{(m)})^T$. Mūsų nagrinėjamo atveju $Y^{(1)} = (y^{(1)}, y^{(2)})^T$, $Y^{(2)} = y^{(3)}$.

Taip apibendrintą ekonometrinį modelį jau galėsime užrašyti taip vadinamojoje **struktūrinėje formoje**:

$$\begin{cases} B_1 Y^{(1)}(t) + B_2 Y^{(2)}(t) + C_1 X(t) = \Delta(t), \\ B_3 Y^{(1)}(t) + B_4 Y^{(2)}(t) + C_2 X(t) \equiv 0_{m_2} \end{cases}, \text{ kurioje } B_1 = (\beta_{ij})_{i,j=1,\overline{m_1}} - \text{kvadratinė matrica,}$$

turinti m_1 eilučių ir m_1 stulpelių, sudaryta iš koeficientų prie endogeninių kintamųjų $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(i)}, \dots, y^{(m_1)}$ ekonometrinėse lygtyse $i=1,\overline{m_1}$; $B_2 = (\beta_{ij})_{i=1,\overline{m_1}, j=m_1+1,\overline{m_1+m_2}}$ – matrica, turinti m_1 eilučių ir m_2 stulpelių, sudaryta iš koeficientų prie endogeninių kintamųjų $y^{(m_1+1)}, \dots, y^{(m)}$ ekonometrinėse lygtyse $i=m_1+1,\overline{m_1+m_2}$; $B_3 =$

$= (\beta_{ij})_{i=\overline{m_1+1, m_1+m_2}, j=\overline{1, m_1}}$ – matrica, turinti m_2 eilučių ir m_1 stulpelių, sudaryta iš koeficientų prie $y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(m_1)}$ tapatybėse $i=\overline{m_1+1, m}$; $B_4 = (\beta_{ij})_{i, j=\overline{m_1+1, m_1+m_2}}$ – kvadratinė matrica, turinti m_2 eilučių ir m_2 stulpelių, sudaryta iš koeficientų prie $y^{(m_1+1)}(t), y^{(m_1+2)}(t), \dots, y^{(m)}$ tapatybėse $i=\overline{m_1+1, m}$; $C_1 = (c_{ij})_{i=\overline{1, m_1}, j=\overline{0, p}}$ – matrica, turinti m_1 eilučių ir $p+1$ stulpelių ir sudaryta iš koeficientų prie laisvojo nario $x^{(0)}(t) \equiv 1$ ir prie egzogeninių kintamųjų $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(p)}(t)$ ekonometrinėse lygtyse $i=\overline{1, m_1}$; $C_2 = (c_{ij})_{i=\overline{m_1+1, m_1+m_2}, j=\overline{0, p}}$ – matrica turinti m_2 eilučių ir $p+1$ stulpelių, sudaryta iš koeficientų prie laisvojo nario $x^{(0)}(t) \equiv 1$ ir prie egzogeninių kintamųjų $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(p)}(t)$ ekonominėse tapatybėse $i = \overline{m_1+1, m_1+m_2}$; $\Delta(t) = (\delta^{(1)}(t), \delta^{(2)}(t), \dots, \delta^{(m_1)}(t))^T$, vektorius – stulpelis, sudarytas iš atsitiktinių likutinių kintamųjų $\delta^{(i)}(t)$ ekonometrinėse lygtyse $i=\overline{1, m_1}$; $0_{m_2} = (0, 0, \dots, 0)^T$ – vektorius stulpelis, sudarytas iš m_2 nulių.

Matricų B_3, B_4 ir C_2 elementus galime laikyti žinomais, nes jie – ekonominių tapatybių koeficientai, atspindintys žinomus ekonominius dėsnius.

Nežinomus matricų B_1, B_2 ir C_1 elementus, sudarytus iš ekonometrinių lygčių koeficientų, teks nustatyti naudojantis surinktais statistiniais duomenimis apie egzogeninių ir endogeninių kintamųjų reikšmes, kurias laikysime patalpintas į matricas

$$Y = \begin{pmatrix} Y(1)^T \\ Y(2)^T \\ \vdots \\ Y(n)^T \end{pmatrix} \text{ ir } X = \begin{pmatrix} X(1)^T \\ X(2)^T \\ \vdots \\ X(n)^T \end{pmatrix}, \text{ sudarytas iš transformuotų vektorių – stulpelių } Y(i) \text{ ir }$$

$X(i)$ (kur $i=\overline{1, 2, \dots, n}$), paverčiant tuos stulpelius matricų Y ir X eilutėmis.

Matrica Y turės n eilučių, atitinkančių statistinių stebėjimų (matavimų) serijų numerius $i=\overline{1, 2, \dots, n}$, ir m stulpelių, atitinkančių endogeninių kintamųjų numerius, o matrica X taip pat turės n eilučių, tačiau skirsis stulpelių skaičiumi, kuris bus lygus $p+1$. Pats kairysis matricos X stulpelis bus sudarytas iš vienetukų.

Ekonometrinį modelį, sudarytą struktūrinėje formoje, galima suvesti ir į vieną **matricinę lygtį** $BY(t)+CX(t)=\overline{\Delta(t)}$, kurioje $B = \begin{pmatrix} B_1; B_2 \\ B_3; B_4 \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$,

$$\overline{\Delta(t)} = \begin{pmatrix} \Delta(t) \\ 0_{m_2} \end{pmatrix}.$$

Mūsų jau nagrinėtoju konkrečiu atveju, pertvarkę ekonometrinį modelį į standartinę struktūrinę formą, gauname sistemą:

$$\begin{cases} y^{(1)}(t) + 0 - \alpha_1 \cdot y^{(3)}(t) - \alpha_0 \cdot x^{(0)}(t) + \alpha_1 \cdot x^{(1)}(t) + 0 + 0 + 0 = \delta_1(t), \\ 0 + y^{(2)}(t) + 0 + 0 + 0 - \beta_2 \cdot x^{(2)}(t) + 0 - \beta_1 \cdot y^{(3)}(t-1) = \delta_2(t), \\ -y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t) + y^{(3)}(t) + 0 + 0 + 0 - x^{(3)}(t) + 0 \equiv 0, \end{cases}$$

$$\text{kurioje } B_1 = \begin{pmatrix} 1; 0 \\ 0; 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_0; \alpha_1; 0; 0; 0 \\ 0; 0; -\beta_2; 0; -\beta_1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = (-1; -1),$$

$$B_4 = (1), \quad C_2 = (0; 0; 0; -1; 0), \quad \Delta(t) = (\delta^{(1)}(t), \delta^{(2)}(t))^T, \quad Y^{(1)}(t) = (y^{(1)}(t), y^{(2)}(t))^T, \\ Y^{(2)}(t) = (y^{(3)}(t)), \quad X(t) = (x^{(0)}(t); x^{(1)}(t); x^{(2)}(t); x^{(3)}(t); y^{(3)}(t-1))^T.$$

Pertvarkydami šį ekonometrinį modelį į formą $BY(t)+CX(t)=\bar{\Delta}(t)$, gautume,

$$\text{jog } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\Delta}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta(t) \\ 0_{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{(1)}(t) \\ \delta^{(2)}(t) \\ 0_{m_2} \end{pmatrix}, Y(t) = \begin{pmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \\ y^{(3)}(t) \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ x^{(3)}(t) \\ y^{(3)}(t-1) \end{pmatrix}.$$

Įstatę į bendrojo ekonometrinio modelio matricinę formą $BY(t)+CX(t)=\bar{\Delta}(t)$ statistinius duomenis, patalpintus į matricas X ir Y , gautume **matricinę lygybių sistemą** $YB^T+XC^T=\bar{\Delta}$, kurioje

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} (\bar{\Delta}(1))^T \\ (\bar{\Delta}(2))^T \\ \vdots \\ (\bar{\Delta}(n))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{(1)}(1); \delta^{(2)}(1); \delta^{(3)}(1); \dots; \delta^{(m_1)}(1); 0; \dots; 0 \\ \delta^{(1)}(2); \delta^{(2)}(2); \delta^{(3)}(2); \dots; \delta^{(m_1)}(2); 0; \dots; 0 \\ \vdots \\ \delta^{(1)}(n); \delta^{(2)}(n); \delta^{(3)}(n); \dots; \delta^{(m_1)}(n); 0; \dots; 0 \end{pmatrix}.$$

Šią lygybių sistemą, kurioje matricų X ir Y elementai – mums žinomi statistiniai duomenys, jau galime panaudoti matricų B ir C elementų – ekonometrinio modelio koeficientų – nustatymui, t. y. **ekonometrinio modelio identifikacijos uždavinio sprendimui**, siekiant parinkti tų koeficientų reikšmes, taip, kad atsitiktinių likučių $\delta^{(j)}(t)$ kvadratų suma būtų mažiausia. Tai galima padaryti, naudojantis **mažiausiųjų kvadratų metodu**, apie kurį pakalbėsime truputi vėliau.

Dabar jau galime įvesti **tiesinio ekonometrinio modelio struktūrinės formos apibrėžimą**.

Struktūrinė tiesinio ekonometrinio modelio forma vadinama forma

$$\begin{cases} B_1 Y^{(1)}(t) + B_2 Y^{(2)}(t) + C_1 X(t) = \Delta(t), \\ B_3 Y^{(1)}(t) + B_4 Y^{(2)}(t) + C_2 X(t) \equiv 0_{m_2}, \end{cases} \quad (\text{arba jai ekvivalenčios formos: } BY(t) +$$

$+CX(t)=\bar{\Delta}(t)$ arba $YB^T+XC^T=\bar{\Delta}$), kurioje lygčių sistema yra normuota (t. y. tenkinami normavimo taisyklių reikalavimai, kad i -je lygtyje, kur $i=1, 2, \dots, m$, koeficientas prie i -jo endogeninio kintamojo $y^{(i)}(t)$ būtų lygus 1), o matricos B_4 ir B – neišsigimusios.

Pasinaudojus į ekonometrinio modelio sudėtį įeinančiomis tapatybėmis, endogeninius kintamuosius $y^{(m_1+1)}(t), y^{(m_1+2)}(t), \dots, y^{(m)}(t)$, sudarančius vektorių – stulpelį $Y^{(2)}(t)$, galima išreikšti per egzogeninius kintamuosius bei endogeninius kintamuosius $y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(m_1)}(t)$ ir tokiu būdu eliminuoti juos iš lygčių sistemos, paliekant ekonometrinio modelio sudėtyje tik m_1 endogeninių kintamųjų $y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(m_1)}(t)$.

Matricinėje formoje tas eliminavimas atrodo taip: 1) iš tapatybės $B_3 Y^{(1)}(t) + B_4 Y^{(2)}(t) + C_2 X(t) \equiv 0_{m_2}$ gauname tapatybę $B_4 Y^{(2)}(t) \equiv -B_3 Y^{(1)}(t) - C_2 X(t)$, iš kurios, kadangi matrica B_4 yra neišsigimusi, išplaukia, jog $Y^{(2)}(t) \equiv -B_4^{-1} B_3 Y^{(1)}(t) - B_4^{-1} C_2 X(t)$; 2) įstatę šią $Y^{(2)}(t)$ išraišką į matricinę lygtį $B_1 Y^{(1)}(t) + B_2 Y^{(2)}(t) + C_1 X(t) = \Delta(t)$, gauname lygtį $B_1 Y^{(1)}(t) + B_2 [-B_4^{-1} B_3 Y^{(1)}(t) - B_4^{-1} C_2 X(t)] + C_1 X(t) = \Delta(t)$, t. y. lygtį $[B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3] \times$

$\times Y^{(1)}(t) + [C_1 - B_2 B_4^{-1} C_2] X(t) = \Delta(t)$. Šią lygtį galima užrašyti kompaktiškiau kaip lygtį $B^* Y^{(1)}(t) + C^* X(t) = \Delta(t)$, kurioje $B^* = B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3$ ir $C^* = C_1 - B_2 B_4^{-1} C_2$.

Mūsų jau išnagrinėtoju konkrečiu atveju gautume jog $B_4^{-1} = (1)^{-1} = (1)$,

$$B_2 B_4^{-1} B_3 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-1; -1) = \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_1 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, B^* = B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3 = \begin{pmatrix} 1; 0 \\ 0; 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_1 \\ 0, 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1, -\alpha_1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}; B_2 B_4^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0; 0; 0; -1; 0) = \begin{pmatrix} 0; 0; 0; \alpha_1; 0 \\ 0; 0; 0; 0; 0 \end{pmatrix}, C^* = C_1 - B_2 B_4^{-1} C_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_0; \alpha_1; 0; 0; 0 \\ 0; 0; -\beta_2; 0; -\beta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0; 0; 0; \alpha_1; 0 \\ 0; 0; 0; 0; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_0; \alpha_1; 0; -\alpha_1; 0 \\ 0; 0; -\beta_2; 0; -\beta_1 \end{pmatrix}, \text{ t. y. gautume}$$

lygčių sistemą $\begin{cases} (1 - \alpha_1) y^{(1)}(t) - \alpha_1 y^{(2)}(t) - \alpha_0 + \alpha_1 x^{(1)}(t) - \alpha_1 x^{(3)}(t) = \delta^{(1)}(t), \\ y^{(2)}(t) - \beta_2 x^{(2)}(t) - \beta_1 x^{(4)}(t) = \delta^{(2)}(t). \end{cases}$

Nesunku įsitikinti, jog tą pačią lygčių sistemą būtume gavę ir be matricų algebros, įstatę į pirmąją lygtį tapatybę $y^{(3)}(t) = y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$.

Norint apskaičiuoti endogeninių kintamųjų reikšmes, atitinkančias duotąsias egzogeninių kintamųjų reikšmes, reikia endogeninius kintamuosius išreikšti per egzogeninius kintamuosius, t. y. gauti **ekonometrinio modelio redukuotąją formą**.

Turėdami ekonometrinį modelį struktūrinėje formoje $BY(t) + CX(t) = \bar{\Delta}(t)$, kai matrica B nėra išsigimusi, mes galime gauti jo redukuotąją formą, padauginę iš kairės abi matricinės lygybės puses iš matricos B atvirkštinės matricos B^{-1} : 1) $B^{-1}BY(t) + B^{-1}CX(t) = B^{-1}\bar{\Delta}(t)$; 2) $Y(t) = B^{-1}\bar{\Delta}(t) - B^{-1}CX(t)$.

Turėdami ekonometrinį modelį formoje $B^* Y^{(1)}(t) + C^* X(t) = \bar{\Delta}(t)$, analogiškai būtume gavę jog $Y^{(1)}(t) = (B^*)^{-1}\bar{\Delta}(t) - (B^*)^{-1}C^* X(t)$.

Pažymėję matricų sandaugą $(-B^{-1}C)$ sutrumpintai Π , o $B^{-1}\bar{\Delta}(t)$ pažymėję $\varepsilon(t)$, gautume, jog $Y(t) = \Pi X(t) + \varepsilon(t)$, o taip pat $Y^{(1)}(t) = \Pi^* X(t) + \varepsilon^*(t)$, kur $\Pi^* = -(B^*)^{-1}C^*$, o $\varepsilon^*(t) = (B^*)^{-1}\bar{\Delta}(t)$.

Redukuotą tiesinio ekonometrinio modelio formą galima apibrėžti kaip formą, kurioje visi endogeniniai kintamieji yra tiesiškai išreikšti per egzogeninius kintamuosius ir atsitiktines likutines komponentes.

Mūsų nagrinėtojo konkretaus ekonometrinio modelio redukuotoji forma, gauta iš formos $B^* Y^{(1)}(t) + C^* X(t) = \bar{\Delta}(t)$, atrodytų taip:

$$\begin{cases} y^{(1)}(t) = \frac{[\alpha_0 - \alpha_1 x^{(1)}(t) + \alpha_1 \beta_2 x^{(2)}(t) + \alpha_1 x^{(3)}(t) + \alpha_1 \beta_1 x^{(4)}(t) + \delta^{(1)}(t) + \alpha_1 \delta^{(2)}(t)]}{1 - \alpha_1}, \\ y^{(2)}(t) = \beta_2 x^{(2)}(t) + \beta_1 x^{(4)}(t) + \delta^{(2)}(t), \end{cases}$$

t. y. gauname, jog $\Pi^* = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}; -\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}; \frac{\alpha_1 \beta_2}{1 - \alpha_1}; \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}; \frac{\alpha_1 \beta_1}{1 - \alpha_1} \\ 0; 0; \beta_2; 0; \beta_1 \end{pmatrix}, \quad o$

$$\varepsilon^*(t) = \left(\frac{\delta^{(1)}(t)}{1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \delta^{(2)}(t); \delta^{(2)}(t) \right)^T.$$

Atsižvelgdami į tai, kad formulėje $Y^{(1)}(t) = \Pi^* X(t) + \varepsilon^*(t)$ matrica Π^* turi $m_1 \times (p+1)$ elementų, o struktūrinėje ekonometrinio modelio formoje $B^* Y^{(1)}(t) + C^* X(t) = \bar{\Delta}(t)$ matricos B^* ir C^* turi $m_1 \times m_1 + m_1 \times (p+1) = m_1 \times [m_1 + (p+1)]$ elementų, kurių skaičius yra **didesnis** už matricos Π^* elementų skaičių, gauname, jog, žinodami

matricos Π^* elementus, ne visada galima vienareikšmiškai atstatyti matricas B^* ir C^* . Tai reiškia, jog **sugrįžimas nuo redukuotos tiesinio ekonometrinio modelio formos prie jo struktūrinės formos ne visada gali būti vienareikšmiškai įvykdytas**. Ryšium su tuo atsiranda sunkumų, **nustatant struktūrinės formos koeficientų statistinius įverčius**, kitaip tariant, iškyla struktūrinės ekonometrinio modelio formos **identifikuojamumo problema**, kurios nebūtų, jei, turėdami ekonometrinį modelį redukuotoje formoje, galėtume vienareikšmiškai atstatyti jo struktūrinę formą.

Taigi, sudarant ekonometrinį modelį, tenka spręsti eilę problemų.

Pirmoji ir pati sunkiausia problema, kurią tenka spręsti, sudarant ekonometrinius modelius, tai **modelio specifikavimo problema**, t. y. **ryšių tarp ekonometrinio modelio kintamųjų nustatymo ir jų matematinio išreiškimo problema**. Ši problema, kaip buvo minėta, pradedama spręsti jau pirmajame etape ir užsibaigia trečiuoju ekonometrinio modelio sudarymo proceso etapu, kuomet nustatomi nagrinėjamų funkcijų argumentų sąrašai ir matematiškai išreiškiama tų funkcijų priklausomybė nuo argumentų. Sunkumai, kurie iškyla sprendžiant specifikavimo problemą, surišti su tuo, kad dažniausiai nebūna pilnai aišku, kaip vieni kintamieji priklauso nuo kitų, o statistinė informacija dažnai būna nepakankamai pilna ir nepakankamai patikima. Todėl ir sunku būna nuspręsti, ar numanomos priklausomybės iš viso egzistuoja, ar jos yra tiesinės, ar logaritminės, ar polinominės, ar hiperbolinės, ar eksponentinės, ar trigonometrinės, ar dar kokios nors kitos.

O juk nuo modelio specifikavimo problemos sprendimo kokybės pirmoje eilėje priklauso kuriamo ekonometrinio modelio kokybė, nes klaidos, padarytos specifikavimo metu, dažniausiai jau nebegali būti ištaisytos kituose etapuose. Todėl, joms išaiškėjus, tenka ekonometrinio modelio kūrimo procesą pradėti beveik iš naujo.

Reikia taip pat pažymėti, kad specifikavimo problemos sprendimas mažiausiai pasiduoda formalizavimui, todėl tos problemos sprendimo kokybė labai priklauso nuo sprendėjo kvalifikacijos, jo išvalgumo ir patirties.

Sprendžiant modelio specifikavimo problemą, dažniausiai pradedama nuo to, kad išbandoma paprasčiausia – tiesinė – regresinio modelio forma, ir tik po to, jei įsitikinama, kad ši forma visiškai netinka, ieškoma kokios nors kitos nelabai sudėtingos netiesinės formos, kuri galėtų pakankamai gerai atvaizduoti nagrinėjamą reiškinių. Bandomos (vietoj tiesinės formos) polinominė (laipsninė), hiperbolinė, logaritminė, eksponentinė, trigonometrinė ir t. t. priklausomybės, taikomi įvairūs linearizavimo metodai. Su vienu tokiu metodu, pasiūlytu anglų statistikų Bokso ir Kokso, susipažinsime šiek tiek vėliau, nagrinėdami regresinės analizės taikymą, sudarant ekonometrinius modelius.

Kita svarbi ir nelengva problema – tai jau minėtoji **ekonometrinio modelio identifikuojamumo problema**. Jei pasirodo, kad kuriamas modelis netenkina identifikuojamumo reikalavimų, t. y., kai iš jo redukuotos formos jo struktūrinė forma negali būti vienareikšmiškai atstatyta, modelio koeficientų reikšmių statistinių įverčių apskaičiavimui jau nebepakanka paprasto ar apibendrintojo mažiausiųjų kvadratų metodo ir tenka naudotis sudėtingesniais metodais (pavyzdžiui, dviejų ar net trijų žingsnių mažiausiųjų kvadratų metodais). Taigi **nuo modelio identifikuojamumo priklauso to modelio identifikavimo problemos sprendimo būdas**. Kad būtų galima greičiau nustatyti, ar kuriamas ekonometrinis modelis yra identifikuojamas, ar ne, ekonometrikoje naudojamosi modelio **identifikuojamumo požymiais**, kurių aš čia nevardinsiu. Skaitytojas tų požymių aprašymus (ir atitinkamas teoremas) gali rasti jau minėtoje knygoje [182].

Trečioji problema – tai **pakankamai pilnos ir pakankamai patikimos informacijos surinkimo problema**. Šios problemos sprendimui skiriamas ketvirtasis

ekonometrinio modelio sudarymo proceso etapas. Šis etapas reikalauja gana daug „juodo“ darbo, specifinių įgūdžių ir atitinkamų sąlygų. Apie šį darbą aš čia nekalbėsiu, nes jo aprašymui statistikos kurse išskiriami ištisi skyriai, ir aš tų skyrių turinio čia nedubliuosiu. Pažymėsiu tik, jog nuo surinktos statistinės informacijos kokybės labai priklauso ekonometrinio modelio kokybė. Šio didelio darbo apimtis ir su tuo darbu surištas išlaidas galima žymiai sumažinti, nepabloginant statistinės informacijos kokybės, kai sugebama kvalifikuotai pasinaudoti **statistinės informacijos atrankos metodais**, kurių teorija dėstoma matematinės statistikos bei imčių teorijos (žiūr. [183, 184]) kursuose.

Penktajame ekonometrinio modelio kūrimo etape susiduriame su **modelio identifikavimo problema**. Kai kuriamas modelis tenkina identifikuojamumo reikalavimus, tai tos problemos sprendimui galima pasinaudoti paprastu ar apibendrintu **mažiausiųjų kvadratų metodu**. Šio metodo esmę tuo atveju, kai statistikai tiriama didelė homogeninių (ar laikomų homogeniniais) objektų aibė, apie kuriuos ketvirtajame ekonometrinio tyrimo etape surinktą statistinę informaciją galima laikyti pakankamai didele atsitiktine imtimi, matematiškai išreiškia tikslo funkcijos

formulės $Q_j(\hat{\theta}^{(j)}) = \sum_{i=1}^n [y_i^{(j)} - f^{(j)}(\hat{\theta}^{(j)}, X_i)]^2 \rightarrow \min_{(\hat{\theta}^{(j)})}, j=1, 2, \dots, m$. Šios formulės nurodo,

kaip, naudojantis ketvirtajame ekonometrinio tyrimo etape surinktais statistiniais duomenimis – faktiškosiomis egzogeninių kintamųjų reikšmėmis, sudarančiomis vektorius X_i , ir tas reikšmes atitinkančiomis endogeninių kintamųjų $y_i^{(j)}$ faktiškomis reikšmėmis $y_i^{(j)}$, turi būti sprendžiamas ekonometrinio modelio identifikavimo uždavinys, t. y., kaip turi būti apskaičiuotas į to modelio sudėtį įeinančių **regresijos funkcijų** $f^{(j)}(\theta^{(j)}, X)$ neapibrėžtųjų koeficientų $\theta_{j,k}$ įverčių reikšmės $\hat{\theta}_{j,k}$ ir tų reikšmių vektorius $\hat{\theta}^{(j)}$. Tos reikšmės turi būti paklaidos, charakterizuojančios modelio neatitikimo tikrovei laipsnį, minimizavimo uždavinio sprendiniu, t. y. turi būti tokios, kad skirtumų tarp kintamųjų $y_i^{(j)}$ faktiškųjų reikšmių $y_i^{(j)}$ ir regresijos funkcijų reikšmių $f^{(j)}(\hat{\theta}^{(j)}, X_i)$ kvadratų suma būtų pati mažiausia.

Tokiu būdu apskaičiuotos neapibrėžtųjų koeficientų $\theta_{j,k}$ reikšmės yra tų koeficientų statistiniai įverčiai $\hat{\theta}_{j,k}$. Norėdami nurodyti, jog jie apskaičiuoti naudojantis mažiausiųjų kvadratų metodu, minimizuojančiu regresijos funkcijų kvadratinę paklaidą, tuos įverčius žymėsime $\hat{\theta}_{j,k}^{(MKM)}$, $k=0, 1, 2, \dots, j=1, 2, \dots, m$.

Šie įverčiai apskaičiuojami, surandant kiekvienos tikslo funkcijos $Q_j(\hat{\theta}^{(j)})$ ($j=1, 2, \dots, m$) dalines išvestines $\frac{\partial Q_j(\hat{\theta}^{(j)})}{\partial \hat{\theta}_{j,k}}$ ($k=0, 1, \dots$, t. y. tiek išvestinių, kiek

neapibrėžtųjų koeficientų $\theta_{j,k}$ turi regresijos funkcija $f^{(j)}(\theta^{(j)}, X)$, arba, kitaip tariant, kiek koordinačių turi vektorius $\hat{\theta}^{(j)}$, po to prilyginant kiekvieną išvestinę nuliui ir sprendžiant lygčių sistemas, $\left\{ \frac{\partial Q_j(\hat{\theta}^{(j)})}{\partial \hat{\theta}_{j,k}} = 0, k=0, 1, \dots, \right.$ turinčias po tiek lygčių, kiek

jose yra nežinomųjų – neapibrėžtųjų koeficientų $\theta_{j,k}$. Išsprendę visas tokias lygčių sistemas ($j=1, 2, \dots, m$), surandame visų neapibrėžtųjų koeficientų reikšmes kiekvienai regresijos funkcijai $f^{(j)}(x)$ ir tokiu būdu gauname jau identifikuotą ekonometrinį

* Apie regresijos funkcijas, jų sudarymą ir taikymą bus rašoma 1.14.12.3.1. skyrelyje. Ten bus pateiktas ir regresijos funkcijos apibrėžimas.

modelį, vaizduojantį kintamųjų $y^{(j)}$, ($j=1, 2, \dots, m$) priklausomybę nuo kintamųjų $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)})$.

Taikant čia aprašytąjį mažiausiųjų kvadratų metodą atsitiktiniams procesams, endogeninių ir egzogeninių kintamųjų vidurkių kitimo trajektorijų statistinės priklausomybės matematiniam aprašymui gauti, t. y. apskaičiuojant tų priklausomybių matematinių išraiškų koeficientų statistinius įverčius kiekvienam atsitiktinio proceso statistinio stebėjimo momentui t ir tokiu būdu gaunant tų koeficientų statistinių įverčių kitimo trajektorijų taškus, neretai tenka susidurti su pakankamo kiekio statistinių duomenų, reikalingų mažiausiųjų kvadratų metodo taikymui, neegzistavimo problema. Su tokia problema susiduriama neišvengiamai, kai nagrinėjami atsitiktiniai procesai nėra masiniai ir todėl neįmanoma rasti pakankamo kiekio šių procesų realizacijų, vykstančių nagrinėjamame laiko intervale tuo pačiu metu.

Pavyzdžiui, nagrinėdami Lietuvos nacionalinių pajamų kitimą tam tikru laikotarpiu, negalime stebėti kelių šio proceso realizacijų, vykstančių tuo pačiu laikotarpiu, nes tokia realizacija yra tik viena.

Tokiais atvejais tenka naudotis jau kitokiais metodais ir kurti kitokius ekonometrinius modelius. Tokius metodus ir modelius mes nagrinėsime 1.14.12.3.2. skyrelyje, analizuodami **laiko eilutes** – išrikiuotus laiko t atžvilgiu statistinius duomenis, charakterizuojančius atsitiktinių procesų eigą.

Tačiau, kai atsitiktiniams procesams yra būdinga **ergodiškumo savybė**, tai jų nagrinėjimui ir jų statistinių charakteristikų įverčių apskaičiavimui net tuo atveju, kai tie procesai nėra masiški, gali būti taikomi mažiausiųjų kvadratų ir kiti 1.14.12.3.1. skyrelyje nagrinėjami klasikinės regresinės analizės metodai.

Ergodišku vadinamas toks atsitiktinis procesas, kurio statistinių charakteristikų įverčiai, apskaičiuoti analizuojant tik vieną pakankamai ilgai besitęsiančią tokio proceso realizaciją ir vidurkinant laiko atžvilgiu įvairiais laiko momentais gautus matavimo rezultatus, leistinių paklaidų ribose sutampa su analogiškais to proceso statistinių charakteristikų įverčiais, apskaičiuotais analizuojant nagrinėjamo proceso realizacijų aibę ir vidurkinant atskirų realizacijų charakteristikų matavimo rezultatus gautus tuo pačiu momentu t , t. y. vidurkinant, ne laiko, o realizacijų aibės atžvilgiu.

Iš to, kas čia pasakyta apie ergodiškumą, išplaukia, jog procesai, kurie per nagrinėjamą laikotarpį pastebimai evoliucionuoja, negali būti laikomi ergodiškais. Ergodiškumo savybė gali būti būdinga tik stacionariems procesams.

Pavyzdžiui, apdorodami statistinius duomenis, surinktus stebint šimto vienodo amžiaus jaunuolių sveikatą ir fizinę bei dvasinę raidą vienerius metus, gausime rezultatus, kurie žymiai skirsis nuo rezultatų, gautų apdorojant laiko eilutę, surinktą stebint vieno „jaunuolio“ sveikatą ir fizinę bei dvasinę raidą šimtą metų, nors bendras surinktų statistinių duomenų kiekis ir žmonių raidos stebėjimų suminis laiko intervalas abiem atvejais yra vienodas. Jis lygus 100 metų.

Tačiau nemažai procesų pakankamai trumpose laiko atkarpose gali būti laikomi praktiškai ergodiškais.

Pavyzdžiui, lygindami statistinius duomenis apie televizorių gedimus bei jų veikimo patikimumą, stebint vieną dieną tūkstantį vienos markės televizorių, iki to laiko jau buvusių eksploatacijoje apie vienerius metus, su duomenimis, gautais stebint šimtą dienų dešimt tos pačios markės ir tokio paties amžiaus televizorių, galime pastebėti, jog tie duomenys statistiškai reikšmingai nesiskiria.

Todėl, nagrinėjant ergodiškus atsitiktinius procesus, matavimo rezultatų, gautų stebint tų procesų realizacijas i , vidurkinimą tų realizacijų aibės atžvilgiu, galima pakeisti matavimo rezultatų, gautų stebint tokio proceso vieną realizaciją, vidurkinimu laiko t atžvilgiu. Kitaip tariant, indekso i vaidmenį vidurkių apskaičiavimo formulėse ergodiškų procesų nagrinėjimo atveju gali atlikti kintamasis t , reiškiantis laiką.

Pavyzdžiui, norėdami mažiausiųjų kvadratų metodu apskaičiuoti endogeninio kintamojo $y^{(j)}(t)$, charakterizuojančio ergodinį procesą, tiesinės regresijos funkcijos $f(X)=E[Y/X]$ koeficientų $\theta_{j,0}, \theta_{j,1}, \theta_{j,2}, \dots, \theta_{j,p}$ statistinius įverčius $\hat{\theta}_{j,0}, \hat{\theta}_{j,1}, \hat{\theta}_{j,2}, \dots, \hat{\theta}_{j,p}$, tikslo funkcijos $Q(\theta^{(j)})$ formulė galime laikyti formulę

$$Q(\theta^{(j)}) = \sum_{t=1}^n (y^{(j)}(t) - \hat{y}^{(j)}(t))^2 \rightarrow \min_{\hat{\theta}_{j,0}, \dots, \hat{\theta}_{j,p}} \text{ kurioje } y^{(j)}(t) \text{ yra endogeninio kintamojo } y^{(j)} \text{ reikšmė,}$$

užregistruota statistiniuose stebėjimuose momentu t , o $\hat{y}^{(j)}(t)$ – endogeninio kintamojo $y^{(j)}$ regresinės funkcijos $f^{(j)}(X)$ reikšmė $\hat{y}^{(j)}(t) = \hat{\theta}_{j,0} + \hat{\theta}_{j,1}x^{(1)}(t) + \hat{\theta}_{j,2}x^{(2)}(t) + \dots + \hat{\theta}_{j,p}x^{(p)}(t)$, kurią ji turėtų įgyti taške $X = X_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)})$.

Ekonometrinio modelio koeficientų $\hat{\theta}_{j,0}, \hat{\theta}_{j,1}, \dots, \hat{\theta}_{j,p}$ **optimalias reikšmes** (kur $j=1, 2, \dots, m_1$, kai modelio forma yra $Y^{(1)}(t) = \Pi^* X(t) + \varepsilon^*(t)$, arba $j=1, 2, \dots, m_1 + m_2$, kai modelis pateiktas formoje $Y(t) = \Pi X(t) + \varepsilon(t)$), minimizuojančias tikslo funkcijas $Q_j(\hat{\theta}_{j,0}, \hat{\theta}_{j,1}, \dots, \hat{\theta}_{j,p}) = \sum_{t=1}^n (y^{(j)}(t) - \hat{\theta}_{j,0} - \hat{\theta}_{j,1}x^{(1)}(t) - \dots - \hat{\theta}_{j,p}x^{(p)}(t))^2$, rasime sprenddami

lygčių sistemas, sudarytas kiekvieno endogeninio kintamojo $y^{(j)}$ regresijos funkcijos neapibrėžtųjų koeficientų nustatymui ir susidedančias iš $p+1$ lygčių:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_j(\hat{\theta}_{j,0}, \hat{\theta}_{j,1}, \dots, \hat{\theta}_{j,p})}{\partial \theta_{j,0}} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_j(\hat{\theta}_{j,0}, \hat{\theta}_{j,1}, \dots, \hat{\theta}_{j,p})}{\partial \theta_{j,p}} = 0. \end{cases}$$

Pavyzdžiui, kai $p=1$, tai $Q_j(\hat{\theta}_{j,0}, \hat{\theta}_{j,1}) = \sum_{t=1}^n (y^{(j)}(t) - \hat{\theta}_{j,0} - \hat{\theta}_{j,1}x^{(1)}(t))^2$, iš kur,

diferencijuodami šią funkciją, gauname taip vadinamąją **normaliųjų lygčių sistemą**

$$\begin{cases} 2 \sum_{t=1}^n (y^{(j)}(t) - \hat{\theta}_{j,0} - \hat{\theta}_{j,1}x^{(1)}(t))(-1) = 0, \\ 2 \sum_{t=1}^n (y^{(j)}(t) - \hat{\theta}_{j,0} - \hat{\theta}_{j,1}x^{(1)}(t)) \cdot (-x^{(1)}(t)) = 0, \end{cases} \text{ kurią galima supaprastinti ir užrašyti}$$

$$\text{standartinėje formoje} \begin{cases} n\hat{\theta}_{j,0} + \hat{\theta}_{j,1} \cdot \sum_{t=1}^n x^{(1)}(t) = \sum_{t=1}^n y^{(j)}(t), \\ \hat{\theta}_{j,0} \cdot \sum_{t=1}^n x^{(1)}(t) + \hat{\theta}_{j,1} \cdot \sum_{t=1}^n (x^{(1)}(t))^2 = \sum_{t=1}^n x^{(1)}(t)y^{(j)}(t). \end{cases}$$

Sprendami šią lygčių sistemą, surasime **optimalias koeficientų $\hat{\theta}_{j,0}$ ir $\hat{\theta}_{j,1}$ reikšmes, kurias pažymėsime $\hat{\theta}_{j,0}^{(MKM)}$ ir $\hat{\theta}_{j,1}^{(MKM)}$** . Viršutiniai indeksai (MKM) rodo, kad tos reikšmės randamos, naudojantis mažiausiųjų kvadratų metodu (MKM).

Gautos lygčių sistemos užrašymo supaprastinimo dėlei išsivesime žymėjimus kintamųjų aritmetiniams vidurkiams: $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x^{(1)}(t) = \bar{x}^{(1)}, \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y^{(j)}(t) = \bar{y}^{(j)}$.

Tuomet, supaprastinę pirmąją sistemos lygtį iš n , o tai padaryti galima, nes $n > 0$, gauname: $\hat{\theta}_{j,0} + \hat{\theta}_{j,1}\bar{x}^{(1)} = \bar{y}^{(j)}$, t. y. $\hat{\theta}_{j,0} = \bar{y}^{(j)} - \hat{\theta}_{j,1}\bar{x}^{(1)}$. Įstatę šią $\hat{\theta}_{j,0}$

$$\text{išraišką į antrąją lygtį, randame, jog } \theta_{j,1}^{(MKM)} = \frac{\sum_{t=1}^n x^{(1)}(t) \cdot y^{(j)}(t) - n\bar{x}^{(1)}\bar{y}^{(j)}}{\sum_{t=1}^n (x^{(1)}(t))^2 - n(\bar{x}^{(1)})^2} =$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^n (x^{(1)}(t) - \bar{x}^{(1)}) (y^{(j)}(t) - \bar{y}^{(j)})}{\sum_{t=1}^n (x^{(1)}(t) - \bar{x}^{(1)})^2}. \quad \text{Įstatę šią } \hat{\theta}_{j,1}^{(MKM)} \text{ reikšmę į lygybę}$$

$$\hat{\theta}_{j,0} = \bar{y}^{(j)} - \hat{\theta}_{j,1} \bar{x}^{(1)}, \text{ gauname, jog } \hat{\theta}_{j,0}^{(MKM)} = \frac{\bar{y}^{(j)} \sum_{t=1}^n (x^{(1)}(t))^2 - \bar{x}^{(1)} \sum_{t=1}^n x^{(1)}(t) \cdot y^{(j)}(t)}{\sum_{t=1}^n (x^{(1)}(t))^2 - n^2 (\bar{x}^{(1)})^2}.$$

Ką tik išvestose regresijos funkcijų $f^{(j)}(X)$ koeficientų $\theta_{j,0}$ ir $\theta_{j,1}$ įverčių $\hat{\theta}_{j,0}$ ir $\hat{\theta}_{j,1}$ reikšmių apskaičiavimo formulėse keisdami indeksą $j=1, 2, \dots, m$ ir naudodamiesi atitinkamais statistiniais duomenimis, gausime regresijos funkcijų koeficientų įverčius visiems endogeniniams kintamiesiems $y^{(j)}, j=1, 2, \dots, m$.

Kai nagrinėjami ne atsitiktiniai procesai, pasižymintys ergodiškumo savybe, o atsitiktinių dydžių $Y=(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})$ ir $X=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ faktiškųjų reikšmių $Y_i=(y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \dots, y_i^{(m)})$ ir $X_i=(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)})$ aibės, gautos išmatavus n to paties tipo objektų $O_i(i=1, 2, \dots, n)$ charakteristikas X_i ir Y_i , tai tiesinių regresijos funkcijų koeficientų statistinių įverčių apskaičiavimo formulės išvedamos analogiškai.

Kai, pavyzdžiui, $p=m=1$ ir regresijos funkcija yra tiesinė funkcija $f(x)=\theta_0+\theta_1x$, tai koeficientų θ_0 ir θ_1 įverčių $\hat{\theta}_0$ ir $\hat{\theta}_1$ apskaičiavimo formules galime gauti iš ką tik išvestųjų formulių, pakeisdami kintamąjį t indeksu i – atsitiktinės imties elemento

$$\text{numeriu: } \hat{\theta}_1^{(MKM)} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n})(y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_{xx}} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2},$$

$$\hat{\theta}_0^{(MKM)} = \bar{y} - \hat{\theta}_1^{(MKM)} \bar{x} = \bar{y} - \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2} \bar{x}.$$

Iš šių formulių išplaukia vieno argumento tiesinės regresijos funkcijos įvertinys – regresijos funkcijos įverčio apskaičiavimo formulė $\hat{y} = \hat{f}(x) = \hat{\theta}_0^{(MKM)} + \hat{\theta}_1^{(MKM)} x =$

$$= \bar{y} - \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2} \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2} x = \bar{y} + \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2} (x - \bar{x}).$$

Ši formulė – tai empirinės tiesinės regresijos funkcijos grafiko – **regresijos linijos** – formulė.

Kai $X=(x^{(1)}, x^{(2)})$ ir endogeninio kintamojo y regresijos funkcija yra $f(x)=\theta_0+\theta_1x^{(1)}+\theta_2x^{(2)}$, tai tos funkcijos koeficientų $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ įverčių $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ ir $\hat{\theta}_2$ apskaičiavimo uždavinio tikslo funkcija bus

$$Q(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)})^2 \rightarrow \min_{\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2}.$$

Diferencijuodami šią funkciją, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \theta_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)}) (-1) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)}) (-x_i^{(1)}) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_2} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)}) (-x_i^{(2)}) = 0. \end{cases}$$

Pertvarkydami šią tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$ ir $\hat{\theta}_2$ sistemą į standartinę formą, gauname:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \bar{x}^{(1)} + \hat{\theta}_2 \bar{x}^{(2)} = \bar{y} \\ \hat{\theta}_0 \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} + \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)})^2 + \hat{\theta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} x_i^{(2)} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^{(1)}, \\ \hat{\theta}_0 \sum_{i=1}^n x_i^{(2)} + \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} x_i^{(2)} + \hat{\theta}_2 \sum_{i=1}^n (x_i^{(2)})^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^{(2)}. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinį $\hat{\theta}_0 = \frac{D_0}{D}$, $\hat{\theta}_1 = \frac{D_1}{D}$ ir $\hat{\theta}_2 = \frac{D_2}{D}$, kai sistemos determinantas

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)} \\ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{(1)} & \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^{(1)})^2 & \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{(1)} \bar{x}_i^{(2)} \\ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{(2)} & \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{(1)} \bar{x}_i^{(2)} & \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^{(2)})^2 \end{vmatrix} \text{ nėra lygus } 0, \text{ galima apskaičiuoti, naudojantis čia pateiktomis}$$

Kramerio formulėmis, apskaičiavus sistemos determinanto D ir nežinomųjų determinantų D_0 , D_1 ir D_2 reikšmes. Determinantas D_0 gaunamas iš D , pakeičiant pirmąjį pastarojo stulpelį (vektorių $\left(1, \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{(1)}, \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{(2)}\right)^T$) lygčių sistemos laisvųjų narių stulpeliu (vektorium $\left(\bar{y}, \sum_{i=1}^n y_i \bar{x}_i^{(1)}, \sum_{i=1}^n y_i \bar{x}_i^{(2)}\right)^T$).

Determinantas D_1 gaunamas analogiškai, t. y. pakeičiant determinanto D antrąjį stulpelį sistemos laisvųjų narių stulpeliu, o determinantas D_2 – pakeičiant trečiąjį determinanto D stulpelį sistemos laisvųjų narių stulpeliu.

Naudojantis mažiausiųjų kvadratų metodu ir Kramerio formulėmis $\hat{\theta}_k = \frac{D_k}{D}$, kuriose $k=0, 1, 2, \dots, p$, galima apskaičiuoti neapibrėžtųjų koeficientų $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ įverčius $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ ir bendruoju atveju, kai $X=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})$ ir $Y=(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})$.

Ekonometrinio modelio struktūrinėje formoje identifikavimo problemos sprendimą rasti žymiai sunkiau, kai tas modelis nėra identifikuojamas. Kaip sprendžiama problema tokiu atveju, galima pasiskaityti knygoje [182]. Ten skaitytojas ras ne tik **dviejų ir trijų žingsnių mažiausiųjų kvadratų metodų** taikymo teoriją, bet ir konkrečių tų metodų taikymo pavyzdžių. Toje knygoje skaitytojas galės rasti ir **apibendrintojo mažiausiųjų kvadratų metodo** aprašymą.

Apibendrintąjį MKM taiko identifikavimo problemos sprendimui tais atvejais, kai tiesinis ekonometrinis modelis, negali būti priskirtas **klasikinių tiesinių regresinių modelių klasei**, t. y. kai modelio atsitiktiniai regresiniai likučiai $\varepsilon^{(i)}(t)$ netenkina **nekoreliuotumo tarpusavyje** ir **homoskediškumo** (t. y. dispersijų pastovumo) reikalavimų. Ar tiesinis ekonometrinis modelis priklauso klasikinių ar **neklasikinių ekonometrinių modelių klasei**, turi būti išsiaiškinta dar specifikuojant problemos sprendimo metu.

Kai ekonometrinis modelis yra **netiesinis**, jį identifikuojant skaičiavimai tampa sudėtingesni. Tačiau už tokiems atvejams yra sudaryti algoritmai bei kompiuterinės programos. Apie tai bus kalbama šiek tiek vėliau.

Šeštajame ekonometrinio modelio sudarymo proceso etape sprendžiama **modelio verifikavimo problema**. Tos problemos sprendimo metu ieškoma atsakymų į du pagrindinius klausimus:

1) Kaip pavyko išspręsti specifikuojamo, identifikuojamo nustatymo ir identifikavimo problemas, t. y. ar sudarytas ekonometrinis modelis pakankamai adekvačiai aprašo nagrinėjamus reiškinius?

2) Kokį tikslumą turės prognozavimo ir imitavimo rezultatai, naudojantis sudarytuju ekonometrinio modeliu?

Verifikavimo problemos sprendimui pasitelkiama papildoma statistinė informacija, kuri vadinama **egzaminuojančiąja imtimi**. Naudojantis egzogeninių kintamųjų reikšmėmis egzaminuojančioje imtyje ir sudarytuju ekonometrinio modeliu, apskaičiuojamos **modelinės endogeninių kintamųjų reikšmės** ir lyginamos su **realiomis tų kintamųjų reikšmėmis** egzaminuojančioje imtyje. Jei endogeninių kintamųjų reikšmių **likutinės dispersijos** pakankamai mažos, ekonometrinis modelis laikomas pakankamai adekvačiu. Detaliau apie ekonometrinio modelio verifikavimą (tame tarpe ir apie modelio tikslumo bei patikimumo įvertinimą) skaitytojas gali sužinoti jau minėtoje fundamentalioje knygoje [182].

Išsiaiškinę ekonometrikos ir ekonometrinio modelio sąvokas, trumpai apžvelgę jo sudarymo etapus ir juose sprendžiamas problemas, pereisime prie jau išvardintų ekonometrikos sudėtinių dalių apžvalgos.

1.14.12.3.1. Tiesinė regresinė analizė

Regresinę analizę galime laikyti pagrindine sudedamąja ekonometrikos dalimi, nes regresinės analizės paskirtis – regresinių lygčių, matematiškai aprašančių ryšius, egzistuojančius tarp ekonometrinio modelio endogeninių ir egzogeninių kintamųjų, sudarymas ir jų matematinis nagrinėjimas.

Pats žodis „regresija“ pagal savo pirminę prasmę ne visiškai atitinka tai, kuo dabar užsiiminėja regresinė analizė. Šis pavadinimas susiklostė istoriškai, kildamas iš tų darbų, kuriuos kadaise vykdė švedų statistikai, analizuodami statistinius ryšius tarp dviejų požymių: x – tėvo ūgio nuokrypio nuo ūgio vidurkio ir y – suaugusio jo sūnaus ūgio nuokrypio nuo ūgio vidurkio. Statistinių tyrimų metu pasitvirtino natūrali hipotezė, kad egzistuoja teigiama požymio y priklausomybė nuo požymio x , t. y. kad aukštų tėvų sūnūs vidutiniškai taip pat būna aukšti, o mažaūgių tėvų sūnūs dažniausiai būna mažaūgiai. Tačiau kartu su tuo buvo pastebėta ir regresijos (lotyniškai reiškiančios „ėjimą atgal“, „grįžimą“) tendencija: labai aukštų tėvų sūnūs, nors ir būna aukšti, tačiau dažniausiai jau nebe tokie aukšti, kaip jų tėvai, ir atvirkščiai, labai mažo ūgio tėvų sūnūs, būdami mažesni už vidutinius, dažniausiai būna nebe tokie mažaūgiai, kaip jų tėvai. Funkciją, aprašančią šį statistinį dėsningumą, minėtųjų darbų autoriai visai pagrįstai pavadino regresijos funkcija, bet vėliau tas pavadinimas buvo pradėtas vartoti ir visoms kitoms funkcijoms, vaizduojančioms statistinius ryšius tarp požymių, jau nebeatsižvelgiant į tai, ar tos funkcijos vaizduoja regreso ar progreso tendencijas, ar iš viso jokių tendencijų nevaizduoja, o tik matematiškai išreiškia egzistuojančius statistinius ryšius.

Todėl dabar endogeninio kintamojo y **regresijos funkcija** nuo egzogeninių kintamųjų $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$, kuriuos laikysime vektoriaus – stulpelio $X=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})^T$ – koordinatėmis, **vadinama funkcija $f(X^*)=E(y/X=X^*)$** , aprašanti endogeninio

kintamojo y sąlyginio vidurkio, atitinkančio fiksuotas egzogeninių kintamųjų reikšmes $X=X^*$, priklausomybę nuo vektoriaus X^* .

Egzogeniniai kintamieji – vektoriaus $X=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)})^T$ koordinatės – gali būti ir atsitiktiniai ir neatsitiktiniai dydžiai, nuo kurių priklauso atsitiktinio endogeninio kintamojo y pasiskirstymo dėsnis.

Kadangi endogeninio kintamojo y reikšmė gali priklausyti ne tik nuo vektoriaus X koordinatėjų reikšmių, bet ir nuo kitų išorinių ar/ir vidinių faktorių, tai konkretų vektoriaus X koordinatėjų reikšmių rinkinį $X=(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)})$ gali atitikti ne viena, o kelios šiek tiek skirtingos kintamojo y reikšmės. Šių reikšmių vidurkis ir yra regresijos funkcijos $E_y=(y/X=X_i)=f(X)$ reikšmės $f(X_i)$ įvertis taške $X=X_i$.

Paprastumo dėlei regresijos funkciją $f(X^*)$ dažniausiai žymi $f(X)$, apibrėždami ją kaip sąlyginį matematinį vidurkį $E(y/X)$. Vartojant tokius sutrumpinimus, reikėtų vis dėlto nepamiršti pilno ir griežto regresijos funkcijos apibrėžimo: $f(X^*)=E[y/X=X^*]$, rodančio, kad, apskaičiuojant kintamojo y sąlyginį matematinį vidurkį $E[y/X]$, kintamojo X reikšmė vidurkinimo metu turi išlikti (būti) ta pati.

Įvedę regresijos funkcijos sąvoką, dabar jau galime įvesti ir regresijos lygčių, aprašančių stochastinius ryšius tarp kintamojo y ir kintamojo X , sąvoką: **regresijos**

lygtimis vadinamos lygtys
$$\begin{cases} y(X)=f(X)+\varepsilon(X), \\ E[\varepsilon(X)]=0, \end{cases}$$
 kur $y(X)$ – stochastinė funkcija,

išreiškianti atsitiktinio dydžio y priklausomybę nuo daugiamatės kintamojo X , $f(X)$ – jau minėtoji **regresijos funkcija** $E_y[y/X]$, $\varepsilon(X)$ – nekoreliuotas su $f(X)$ atsitiktinis dydis, vadinamas **regresijos likučiu**.

Regresijos likutis žymimas ne tiesiog ε , o $\varepsilon(X)$ todėl, kad, esant duotoms X reikšmėms X_i , atsitiktinio dydžio y/X_i išsibarstymas savo sąlyginio vidurkio $E_y[y/X_i]=f(X_i)$ atžvilgiu ne būtinai būna vienodas visoms $X=X_i$ reikšmėms. Kitaip tariant, sąlyginės dispersijos $D(y/X)=E_y[(y/X-E_y[y/X])^2]=E[(\varepsilon(X))^2]=D_{\varepsilon(X)}$ skirtingoms $X=X_i$ reikšmėms gali būti skirtingos, nors, žinoma, kartais gali būti ir vienodos. Į tai tenka atsižvelgti, apskaičiuojant sąlyginius dispersijų $D(y/X)=D_{\varepsilon(X)}$ ir dispersijos $D_{\varepsilon}=E[D(y/X)]=\sigma_{\varepsilon}^2$ įverčius $\hat{D}(y/X)=\hat{D}_{\varepsilon(X)}$ ir $\hat{D}_{\varepsilon}=\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$, o taip pat determinacijos koeficiento bei koreliacinio santykio įverčius, su kuo susidursime ir šiame skyrelyje.

Regresijos likučio $\varepsilon(X)$ matematinis vidurkis $E_{\varepsilon}[\varepsilon(X)]$ turi būti lygus 0 todėl, kad $E_{\varepsilon}[\varepsilon(X)]=E[(y/X)-E[y/X]]=E_y[y/X]-E_y[y/X]=0$.

Kadangi, esant fiksuotai X reikšmei, regresijos funkcijos $f(X)=E_y[y/X]$ reikšmė yra pastovus dydis, tai skirtingos regresijos likučio $\varepsilon(X)=y/X-f(X)$ reikšmės, gaunamos esant tai pačiai fiksuotai X reikšmei, nėra koreliuotos su ta pastovia regresijos funkcijos reikšme $f(X)$. Tai nesunku įrodyti ir formaliai: $E_{\varepsilon}[f(X) \cdot \varepsilon(X)]=f(X)E_{\varepsilon}[\varepsilon(X)]=0$.

Todėl, apskaičiuodami atsitiktinio dydžio $y=f(X)+\varepsilon(X)$ dispersiją, galime taikyti formulę $D_y=D_f+D_{\varepsilon}$, t. y. $\sigma_y^2=\sigma_f^2+\sigma_{\varepsilon}^2$, kurioje $\sigma_y^2=E_y[(y-E[y])^2]=E[y^2]-(E[y])^2$, $\sigma_f^2=E_X[(f(X)-E_X[f(X)])^2]=E_X[(f^2(X))-E_X[f(X)]]^2$, $\sigma_{\varepsilon}^2=E_X[D(y/X)]=E_X[D_{\varepsilon(X)}]$.

Pasinaudodami ką tik įvestomis sąvokomis, suformuluosime regresinės analizės tikslą šiek tiek apibūdžiau ir „matematiškiau“ negu tai buvo padaryta šio (1.14.12.3.1-jo) skyrelio pradžioje: **regresinės analizės tikslas – nagrinėjant statistinius ryšius tarp atsitiktinio kintamojo y ir kintamųjų $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)}$, sudarančių vektorių X , rasti tuos ryšius aprašančią determinuotą funkciją $f(X)=E[y/X]$, vadinamą regresijos funkcija, ir įvertinti atsitiktinį dydį $y(X)-f(X)=\varepsilon(X)$, vadinamą regresiniu likučiu.**

Kitaip tariant, taikant regresinę analizę ekonometrikoje, regresinės analizės tikslu tampa ekonometrinio modelio, susidedančio iš regresijos lygčių bei tapatybių, sudarymas, įvertinantis to modelio parametrus – regresijos funkcijos koeficientus, ir to modelio bei jo panaudojimo rezultatų tikslumo nustatymas.

Vertinant regresinio modelio (t. y. ekonometrinio modelio ar ekonometrinio modelio vienos iš sudedamųjų dalių, kai ekonometrinį modelį sudaro regresijos lygčių ir tapatybių sistema) adekvatumą modeliuojamai tikrovei, gana dažnai naudojamosi **determinacijos koeficientu K_d** .

To koeficiento reikšmė rodo, kurią dalį rezultatinio kintamojo y **pilnos dispersijos D_y sudaro regresijos funkcijos $f(X)$ dispersija D_f** .

Atsižvelgdami į tai, kad nepriklausomų dėmenų sumos dispersija lygi tų dėmenų dispersijų sumai, iš regresijos lygties $y(X)=f(X)+\varepsilon(X)$ gauname, jog $D_y=D_f+D_\varepsilon$, iš kur $D_f=D_y-D_\varepsilon$. Todėl $K_d = \frac{D_f}{D_y} = \frac{D_y - D_\varepsilon}{D_y} = 1 - \frac{D_\varepsilon}{D_y}$. **Formulė $K_d = 1 - \frac{D_\varepsilon}{D_y}$**

laikoma formaliu determinacijos koeficiento apibrėžimu.

Iš šios lygybės galime padaryti dvi išvadas: 1) K_d reikšmė gali keistis nuo 0 iki 1: kai regresijos likučio $\varepsilon(X)$ dispersija lygi 0, tai $K_d=1$, o kai $D_y=D_\varepsilon$ (t. y., kai $D_f=0$), tai $K_d=0$; 2) kuo didesnė yra dispersija D_ε , tuo mažesnė yra K_d reikšmė ir atvirkščiai: kuo didesnė K_d reikšmė, tuo mažesnė yra dispersija D_ε , tuo regresijos funkcija $\hat{y} = f(X)$ determinuoja ir adekviau aprašo modeliuojamą realią priklausomybę $y(X)$.

Kai $K_d=1$, t. y., kai $D_\varepsilon=0$, gauname, kad $\varepsilon(X)=\text{const}$, todėl, atsižvelgdami į tai, kad $E[\varepsilon(X)]=0$, gauname, kad $\varepsilon(X)=\text{const}=0$. Tai reiškia, jog $y(X)=f(X)+\varepsilon(X)=f(X)$, t. y., kad regresinis modelis $\hat{y} = f(X)$ yra visiškai adekvatus funkcijai $y(X)$ ir endogeninio kintamojo y priklausomybė nuo egzogeninių kintamųjų vektoriaus X yra determinuota.

Kai $K_d < 1$ ir mažėja, tai $D_\varepsilon > 0$ ir santykis $\frac{D_\varepsilon}{D_y}$ didėja, o todėl mažėja regresinio modelio $f(X)$ adekvatumas funkcijai $y(X)$. Iš viso to išplaukia, kad **determinacijos koeficientas $K_d = \frac{D_f}{D_y} = 1 - \frac{D_\varepsilon}{D_y}$ gali būti laikomas regresinio modelio**

determinuotumo bei adekvatumo rodikliu ir gali būti taikomas ekonometrikoje šeštajame ekonometrinio modelio sudarymo proceso etape, įvertinant modelio kokybę.

Determinacijos koeficiento $K_d(y;X)$ statistinio įverčio $\hat{K}_d(y;X)$ apskaičiavimui taikoma formulė $\hat{K}_d(y;X) = 1 - \frac{\hat{S}_\varepsilon^2}{\hat{S}_y^2}$, kurioje $\hat{S}_\varepsilon^2$ yra regresijos likučio $\varepsilon(X)$ dispersijos $D_\varepsilon=E[D(y/X)]$ statistinis įvertis $\hat{D}_\varepsilon$, o $\hat{S}_y^2$ yra kintamojo y pilnosios dispersijos $D_y=E[(y-Ey)^2]=Ey^2-(Ey)^2$ statistinis įvertis $\hat{D}_y$.

Įverčio $\hat{D}_y = \hat{S}_y^2$ apskaičiavimui taikoma formulė $\hat{S}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)^2$, o įverčio $\hat{D}_y = \hat{S}_\varepsilon^2$ apskaičiavimui galima taikyti vieną iš dviejų žemiau pateikiamų formulų.

Kai regresijos likučio $\varepsilon(X)$ sąlyginės dispersijos $D(y/X)=E_y[(y/X-E_y[y/X])^2]$ nepriklauso nuo X , t. y. kai prie bet kurių X reikšmių kintamojo y išsibarstymas savo sąlyginių vidurkių $E[y/X]$ atžvilgiu yra vienodas arba beveik vienodas, tai įverčio

$\hat{D}_\varepsilon = \hat{s}_\varepsilon^2$ apskaičiavimui galima taikyti formulę $\hat{s}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(X_i))^2$, kurioje $\hat{f}(X_i)$ yra empirinės regresijos funkcijos $\hat{f}(X)$ reikšmė daugiamačiame taške X_i .

Kai sąlyginės dispersijos $D(y/X)$ reikšmės skirtingoms X reikšmėms X_i yra skirtingos, tai tenka taikyti surinktų statistinių duomenų grupavimą vektoriaus X reikšmių atžvilgiu, skaidant vektoriaus X kitimo sritį į dalis, kuriose dispersijos reikšmės yra apytiksliai vienodos, ir skaičiuoti kiekvienoje tokioje dalyje dalinius grupinius vidurkius $\bar{y}_j = \frac{1}{v_j} \sum_{i=1}^{v_j} y_{ji}$, o po to taikyti formulę $\hat{s}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2$,

kurioje k reiškia vektorinio kintamojo X reikšmių kitimo srities dalių skaičių, $j=1, 2, \dots, k$ – tokios dalies numerį, v_j – kintamojo y reikšmių y_{ij} skaičius dalyje j , i -tos reikšmės numerį dalyje j , n – bendrą kintamojo y reikšmių skaičių visoje imtyje, t. y. $n = \sum_{j=1}^k v_j$.

Žinoma, formulę $\hat{K}_d(y, X) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2}$ galima taikyti ir tuo atveju, kai

sąlyginės dispersijos $D(y/X)$ skirtingoms X reikšmėms X_i yra vienodas, todėl šią formulę galima laikyti **bendraja determinacijos koeficiento įverčio $\hat{K}_d(y; X)$ apskaičiavimo formule**.

$$\begin{aligned} \text{Kadangi } \hat{D}_y = \hat{s}_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y}_j + \bar{y}_j - \bar{y})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} [(y_{ji} - \bar{y}_j)(\bar{y}_j - \bar{y})] + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = \\ &= \hat{s}_\varepsilon^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^k (\bar{y}_j - \bar{y}) \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y}_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = \hat{s}_\varepsilon^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^k (\bar{y}_j - \bar{y}) \left(\sum_{i=1}^{v_j} y_{ji} - v_j \bar{y}_j \right) + \hat{s}_f^2 = \\ &= \hat{s}_\varepsilon^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^k (\bar{y}_j - \bar{y}) \left(\sum_{i=1}^{v_j} y_{ji} - v_j \frac{1}{v_j} \sum_{i=1}^n y_{ji} \right) + \hat{s}_f^2 = \hat{s}_\varepsilon^2 + 0 + \hat{s}_f^2, \text{ kur grupinių vidurkių dispersija} \\ \hat{s}_f^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \text{ yra dispersijos } D_f = E[(f(X) - Ey)^2] = E[(E_y[y/X] - Ey)^2] \text{ įvertis } \hat{D}_f, \text{ tai} \\ \hat{s}_\varepsilon^2 &= \hat{s}_y^2 - \hat{s}_f^2. \end{aligned}$$

Atsižvelgdami į tai, gauname dar vieną determinacijos koeficiento $K_d(y; X)$ įverčio $\hat{K}_d(y; X)$ apskaičiavimo formulę: $\hat{K}_d(y; X) = 1 - \frac{\hat{s}_\varepsilon^2}{\hat{s}_y^2} = 1 - \frac{\hat{s}_y^2 - \hat{s}_f^2}{\hat{s}_y^2} = \frac{\hat{s}_f^2}{\hat{s}_y^2} =$

$$= \frac{\sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2}.$$

Kadangi $\hat{s}_f^2$ galima apskaičiuoti ir naudojantis formule $\hat{s}_f^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{f}(X_i) - \bar{y})^2$, tai

$$\hat{K}_d(y; X) \text{ apskaičiavimui galima taikyti taip pat ir formulę } \hat{K}_d(y; X) = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{f}(X_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Ši formulė taikoma, kai sąlyginės dispersijos $D(y/X)$ įverčiai $\hat{D}(y/X)$ yra vienodi ar apytiksliai vienodi.

Determinacijos koeficientas surištas su koreliacinėje analizėje naudojamomis **koreliacinio ryšio tarp kintamųjų kiekybinėmis charakteristikomis** – koreliaciniu santykiu ir koreliacijos koeficientu. Panagrinėsime tą ryšį atveju, kai regresijos funkcija yra tik vieno argumento funkcija $f(x)$.

Koreliacinis santykis $\rho_{y,x}$ tarp rezultatinio atsitiktinio kintamojo $y=y(x)=f(x)+\varepsilon(x)$ ir kintamojo x apibrėžiamas formule $\rho_{y,x}^2 = 1 - E\left[\frac{D_{(y/x)}}{D_y}\right] = 1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$,

sutampančia su formule $\rho_{y,x} = \sqrt{\frac{D_{f(x)}}{D_{y(x)}}}$, o jo įvertis $\hat{\rho}_{y,x}$ formule $\hat{\rho}_{y,x} = \sqrt{\frac{\hat{s}_f^2}{\hat{s}_y^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2}}, \text{ vietoj kurios, kai sąlyginės dispersijos } D(y/X) \text{ yra vienodos visoms}$$

x reikšmėms, galima naudotis formule $\hat{\rho}_{y,x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{f}(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$. Kadangi $K_d = \frac{D_f}{D_y} =$

$$= 1 - \frac{D_\varepsilon}{D_y} = 1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}, \text{ tai gauname, kad } \rho_{y,x} = \sqrt{K_d(y;x)}, \text{ arba } K_d(x;y) = \rho_{y,x}^2.$$

Dėl to, kad $K_d = \rho^2$, determinacijos koeficientą dažnai žymi ne tik K_d , bet ir R^2 , tuo pabrėždami, kad $K_d = R^2 = \rho^2$.

Koreliacijos koeficientas, charakterizuojantis tiesinį koreliacinį ryšį tarp kintamųjų $y(t)$ ir $x(t)$, vadinamas **porinės koreliacijos koeficientu**. Jis yra apibrėžiamas

$$\text{formule } r_{y,x} = \frac{E[(x - Ex)(y - Ey)]}{\sqrt{E(x - Ex)^2(y - Ey)^2}} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{\text{cov}(x,x)\text{cov}(y,y)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11} \cdot \sigma_{22}}} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{D_x \cdot D_y}} =$$

$$= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \text{ o jo statistinis įvertis } \hat{r}_{y,x} - \text{formule}$$

$$\hat{r}_{y,x} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n})(y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n})^2 \cdot (y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n})^2}}.$$

Kovariacijos $\text{cov}(x,y)$, $\text{cov}(x,x)$, $\text{cov}(y,y)$ yra **kovariacinės matricos** $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ elementai: $\text{cov}(x,y)=\sigma_{12}=E[(x-E_x)(y-E_y)]$, $\text{cov}(x,x)=\sigma_{11}=E[(x-E_x)^2]$, $\text{cov}(y,y)=\sigma_{22}=E[(y-E_y)^2]$.

Kovariacija $\text{cov}(x,x)$ vadinama kintamojo x dispersija ir žymima D_x , o kovariacija $\text{cov}(y,y)$ vadinama kintamojo y dispersija D_y . Kvadratinės šaknys iš dispersijų vadinamos **kvadratiniais nuokrypiais**: $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ ir $\sigma_y = \sqrt{D_y}$.

Kvadratinų nuokrypių σ_x ir σ_y statistiniai įverčiai $\hat{\sigma}_x$ ir $\hat{\sigma}_y$, kai imties apimtis n yra pakankamai didelė, apskaičiuojami naudojantis formulėmis $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ir $\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$, kuriose $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ir $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Iš koreliacijos koeficiento $r_{y,x}$ formulės $r_{y,x} = \frac{E[(x-E_x)(y-E_y)]}{\sqrt{E[(x-E_x)^2]E[(y-E_y)^2]}} = \frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sqrt{E[(x-m_x)^2]E[(y-m_y)^2]}} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x \sigma_y}$ išplaukia, jog $r_{y,x}=r_{x,y}$, ko negalima pasakyti apie

korelinę santykį $\rho_{y,x}$, nes tarp korelinių santykių $\rho_{y,x}$ ir $\rho_{x,y}$ bendroju atveju ne tik neegzistuoja lygybės, bet ir, kaip tuo galima įsitikinti, nepavyksta išvesti kokios nors paprastos formulės, išreiškiančios sąryšį tarp šių dviejų charakteristikų, nors ir $\rho_{y,x}$ ir $\rho_{x,y}$ tenkina nelygybes: $0 \leq \rho_{y,x} \leq 1$, $0 \leq \rho_{x,y} \leq 1$.

Pasinaudodami akivaizdžiai teisinga nelygybe $E\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \geq 0$, įrodysime, jog koreliacijos tarp dviejų kintamųjų y ir x koeficiento $r_{y,x}$ reikšmė visada tenkina nelygybes $-1 \leq r_{y,x} \leq 1$.

Kadangi $E\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right] = E\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}\right] \pm 2E\left[\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y}\right] + E\left[\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right] = 2 \pm 2r_{y,x}$, tai gauname, jog $1 \pm r_{y,x} \geq 0$.

Iš nelygybės $1+r_{y,x} \geq 0$ išplaukia, jog $r_{y,x} \geq -1$, o iš nelygybės $1-r_{y,x} \geq 0$ gauname, jog $r_{y,x} \leq 1$. Todėl $-1 \leq r_{y,x} \leq 1$.

Kai $\frac{x-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{y-m_y}{\sigma_y} = 0$, t. y. kai tarp kintamųjų y ir x egzistuoja tiesinė funkcinė priklausomybė $y = m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)$ arba $y = m_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)$, tai gauname lygybę $1 \pm r_{y,x} = 0$, iš kurios išplaukia, jog atveju, kai $y = m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)$, t. y. atveju, kai kintamojo y priklausomybė nuo x yra mažėjanti tiesinė funkcija, koreliacijos koeficientas yra neigiamas ir lygus $r_{y,x} = -1$, o atveju, kai $y = m_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)$, t. y., kai

kintamojo x reikšmei didėjant ir kintamojo y reikšmė tiesiškai didėja, koreliacijos koeficiento $r_{y,x}$ reikšmė yra lygi 1.

$$\text{Kadangi } E\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right] = 2(1 \pm r_{y,x}), \text{ tai iš šios lygybės išplaukia, jog}$$

tuo atveju, kai $r_{y,x}=-1$, galioja lygybė $\frac{x-m_x}{\sigma_x} + \frac{y-m_y}{\sigma_y} = 0$, t. y. lygybė $y = m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$, o tuo atveju, kai $r_{y,x}=1$, galioja lygybė $y = m_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$.

Vadinasi, tarp koreliacijos koeficiento absoliučios reikšmės, lygių 1, ir kintamųjų y ir x tiesinės funkcinės priklausomybės egzistuoja abipusis vienareikšmis ryšys: jei $|r_{y,x}|=1$, tai y ir x surišti tiesine funkcine nepriklausomybe, o jei y ir x surišti tiesine funkcine priklausomybe, tai $|r_{y,x}|=1$. Pažymėtina ir tai, kad koreliacijos koeficiento ženklas sutampa su tiesinės funkcijos priklausomybės ženklu:

kai $r_{y,x}=1$, tai $y = m_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$, o kai $r_{y,x}=-1$, tai $y = m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$. Kadangi abiem šiais atvejais $|r_{y,x}|=1$, tai endogeninio kintamojo y tiesinę funkcinę priklausomybę nuo egzogeninio kintamojo x galima išreikšti viena formule:

$$y = m_y + r_{y,x} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x).$$

Kadangi $r_{y,x} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x \sigma_y}$, tai iš šios formulės gauname formulę $y = m_y + \frac{\sigma_{y,x}}{\sigma_x^2}(x - m_x)$. Ši formulė yra izomorfiška tiesinės regresijos funkcijos $f(x) = E(y/x)$

įvertiniui $\hat{f}(x) = \hat{\theta}_0^{(MKM)} + \hat{\theta}_1^{(MKM)}x = \bar{y} + \frac{\hat{\sigma}_{y,x}}{\hat{\sigma}_x^2}(x - \bar{x})$, kurį mes jau esame gavę, taikydami mažiausiųjų kvadratų metodą tiesinės regresijos funkcijos koeficientų θ_0 ir θ_1 įverčių optimalių reikšmių nustatymui. Todėl formulės $y = m_y + r_{y,x} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) + \varepsilon(x) =$

$= m_y + \frac{\sigma_{y,x}}{\sigma_x^2}(x - m_x) + \varepsilon(x)$ ir $\hat{y} = \bar{y} + \hat{r}_{y,x} \frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x}(x - \bar{x}) + \varepsilon(x) = \bar{y} + \frac{\hat{\sigma}_{y,x}}{\hat{\sigma}_x^2}(x - \bar{x}) + \varepsilon(x)$ gali

būti taikomos, kai endogeninio kintamojo y , priklausančio nuo vieno egzogeninio kintamojo x , regresijos funkcija yra ar gali būti tiesinė, ne tik tuo atveju, kai $|r_{y,x}|=1$, bet ir esant kitoms $r_{y,x}$ bei jo įverčio $\hat{r}_{y,x}$ reikšmėms, o koeficiento θ_1 įverčio $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$ apskaičiavimui regresijos funkcijos formulėje $y = \theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon(x)$ galima taikyti formulę

$$\hat{\theta}_1^{(MKM)} = \hat{r}_{y,x} \frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x}.$$

Kaip jau buvo įrodyta, tais atvejais, kai $|r_{y,x}|=1$, kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x yra funkcinė, t. y. determinuota. Todėl tokiais atvejais $\varepsilon(x)=0$, iš kur išplaukia, jog tokiais atvejais koreliacinis santykis $\rho_{y,x}=1$, nes $D_\varepsilon=0$. Kadangi determinacijos koeficientas $K_d(y;x) = \rho_{y,x}^2$, tai tokiais atvejais ir $K_d(y;x)=1$.

Tačiau iš lygybės $\rho_{y,x}=1$, reiškiančios, jog kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x yra funkcinė, dar neišplaukia, jog tokiu atveju ir $|r_{y,x}|$ būtinai bus lygus vienetui, nes funkcinė priklausomybė gali būti ne tik tiesinė, bet ir netiesinė.

Pavyzdžiui, kai $y=x^2$ ir atsitiktinio dydžio x skirstinys yra eksponentinis, turintis tikimybinių skirstinių $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai } x \geq 0 \\ 0, & \text{kai } x < 0, \end{cases}$ priklausantį nuo parametro $\lambda > 0$, reiškiančio tą eksponentinį skirstinį

atitinkančio puasoninio įvykių srauto vidutinį intensyvumą, tai koreliacinis santykis $\rho_{y,x}$ yra lygus 1, nes $D_\varepsilon=0$, tačiau koreliacinis koeficientas $r_{y,x} = \frac{E[(y-Ey)(x-Ex)]}{\sqrt{D_y \cdot D_x}} = \frac{E[y \cdot x] - Ey \cdot Ex}{\sqrt{[Ey^2 - (Ey)^2] \cdot [Ex^2 - (Ex)^2]}} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} < 1, \text{ kadangi šiuo atveju } Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}, \quad Ey = Ex^2 = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$Eyx = Ex^3 = \lambda \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x}dx = \frac{3!}{\lambda^3}, \quad Ey^2 = Ex^4 = \lambda \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\lambda x}dx = \frac{4!}{\lambda^4} \text{ ir } r_{y,x} = \frac{\frac{3!}{\lambda^3} - \frac{2}{\lambda^2} \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{4!}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4}\right) \left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Įrodysiu, jog koreliacijos koeficiento $r_{y,x}$ reikšmė negali būti didesnė už koreliacinio santykio $\rho_{y,x}$ reikšmę, t. y., įrodysiu, jog predikatas $r_{y,x}^2 \leq \rho_{y,x}^2$ yra visada teisingas:

$$1) Ey = E[f(x) + \varepsilon(x)] = E[f(x)] + E[\varepsilon(x)] = E[f(x)];$$

2) kadangi $E_\varepsilon[\varepsilon(x)] = 0$, tai kiekvienai fiksuotai kintamojo x reikšmei x_i galioja lygybė $E_\varepsilon[x_i \varepsilon(x_i)] = 0$, nes $E_\varepsilon[x_i \varepsilon(x_i)] = x_i E_\varepsilon[\varepsilon(x_i)] = 0$; todėl ir bendruoju atveju, t. y. kiekvienai kintamojo x reikšmei, galioja lygybė $E_\varepsilon[x \varepsilon(x)] = 0$;

$$3) \sigma_{y,x} = \text{cov}(y, x) = E[(y - Ey)(x - Ex)] = Eyx - Ey \cdot Ex = E[f(x)x + x\varepsilon(x)] - E[f(x)x + \varepsilon(x)] \cdot Ex = E[f(x)x] + E[x\varepsilon(x)] - E[f(x)] \cdot Ex = E[f(x)x] - E[f(x)]Ex = \text{cov}(f(x), x) = \sigma_{f(x),x};$$

$$4) r_{y,x}^2 = \frac{(\sigma_{y,x})^2}{\sigma_y^2 \sigma_x^2} = \frac{(\sigma_{f(x),x})^2}{\sigma_y^2 \sigma_x^2} = \frac{\sigma_{f(x)}^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{(\sigma_{f(x),x})^2}{\sigma_{f(x)}^2 \cdot \sigma_x^2} = \rho_{y,x}^2 \cdot r_{f(x),x}^2;$$

5) Koreliacijos tarp $f(x)$ ir x koeficientas, kaip ir kiekvienas koreliacijos koeficientas, tenkina apribojimus $-1 \leq r_{f(x),x} \leq 1$, todėl $r_{f(x),x}^2 \leq 1$ ir $r_{y,x}^2 = \rho_{y,x}^2 \cdot r_{f(x),x}^2 \leq \rho_{y,x}^2$, ką ir reikėjo įrodyti.

Kai kintamojo y regresijos funkcija $E[y/x] = f(x)$ yra tiesinė funkcija $f(x) = \theta_0 + \theta_1 x$, tai koreliacijos koeficiento $r_{f(x),x}$ kvadratas yra lygus vienetui, nes

$$r_{f(x),x}^2 = \frac{(E[f(x)x] - E[f(x)]Ex)^2}{D_{f(x)} \cdot D_x} = \frac{(E[\theta_0 x + \theta_1 x^2] - E[\theta_0 + \theta_1 x]Ex)^2}{(E[(f(x))^2] - (E[f(x)])^2) \cdot (Ex^2 - (Ex)^2)} =$$

$$= \frac{(\theta_0 Ex + \theta_1 Ex^2 - \theta_0 Ex - \theta_1 (Ex)^2)^2}{(E[\theta_0^2 + \theta_1^2 x^2 + 2\theta_0 \theta_1 x] - \theta_0^2 - \theta_1^2 (Ex)^2 - 2\theta_0 \theta_1 Ex) \cdot (Ex^2 - (Ex)^2)} =$$

$$= \frac{(\theta_1 [Ex^2 - (Ex)^2])^2}{[\theta_1^2 (Ex^2 - (Ex)^2) (Ex^2 - (Ex)^2)]} = \frac{\theta_1^2 (Dx)^2}{\theta_1^2 (Dx)^2} = 1.$$

Todėl tuo atveju, kai regresijos funkcija $E[y/x] = f(x)$ yra tiesinė funkcija, tai $r_{y,x}^2 = \rho_{y,x}^2$. Vadinasi, porinės koreliacijos koeficiento $r_{y,x}$ absoliuti reikšmė gali būti lygi koreliaciniam santykiui $\rho_{y,x}$ ne tik tada, kai tarp kintamųjų y ir x egzistuoja tiesinė funkcinė nepriklausomybė ir $\rho_{y,x}^2 = r_{y,x}^2 = 1$, bet ir tuomet kai $y = \theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon(x)$, t. y., kai regresijos funkcija yra tiesinė ir $D_\varepsilon > 0$. Tuomet $r_{y,x}^2 = \rho_{y,x}^2 < 1$.

Kai $r_{y,x}^2 < \rho_{y,x}^2 = 1$, tai tarp kintamųjų y ir x egzistuoja funkcinė priklausomybė, tačiau ta priklausomybė nėra tiesinė.

Skirtumą $\rho_{y,x}^2 - r_{y,x}^2 = \rho_{y,x}^2 - \rho_{y,x}^2 \cdot r_{f(x),x}^2 = \rho_{y,x}^2 (1 - r_{f(x),x}^2)$ galima panaudoti kintamojo y priklausomybės nuo kintamojo x netiesiškumo vertinimui: kuo mažesnis porinis koreliacinis koeficientas tarp regresijos funkcijos $f(x)$ ir kintamojo x , tuo didesnis yra skirtumas tarp $\rho_{y,x}^2$ ir $r_{y,x}^2$, tuo kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x labiau skiriasi nuo tiesinės priklausomybės ir regresijos funkcija $f(x)$ labiau skiriasi nuo tiesinės funkcijos.

Kai $E[y/x] = a = \text{const}$ ir $D(y/x) > 0$ bei $Dx > 0$, tai $y = a + \varepsilon(x)$. Tuomet $Dy = E[D(y/x)] = D\varepsilon > 0$ ir $\rho_{y,x}^2 = 0$. Kadangi, kaip jau buvo įrodyta, predikatas $\rho_{y,x}^2 \geq r_{y,x}^2$ visada yra teisingas, tai šiuo atveju koreliacijos koeficientas $r_{y,x}$ turėtų būti lygus 0.

Taip iš tikrųjų ir yra, nes $r_{y,x} = \frac{Eyx - Ey \cdot Ex}{\sqrt{Dy \cdot Dx}} = \frac{E[(a + \varepsilon(x))x] - E[(a + \varepsilon(x))] \cdot Ex}{\sqrt{D\varepsilon \cdot Dx}} = \frac{Eax + E[\varepsilon(x)x] - aEx}{\sqrt{D\varepsilon \cdot Dx}} = \frac{aEx + 0 - aEx}{\sqrt{D\varepsilon \cdot Dx}} = 0$. Akivaizdu, jog galioja ir atvirkštinė

priklausomybė: kai $\rho_{y,x} = 0$, tai $Dy = D\varepsilon$ ir $y = a + \varepsilon(x)$. Čia $a = \text{const.}$, kuri gali būti lygi bet kuriam skaičiui, tame tarpe ir 0.

Tačiau visada teisinga yra tik vienas pusė implikacija ($\rho_{y,x} = 0 \rightarrow r_{y,x} = 0$), nes koreliacijos koeficientas $r_{y,x}$ kartais gali būti lygus 0 ir tada, kai koreliacijos santykis $\rho_{y,x}$ yra didesnis už 0. Taip atsitinka, pavyzdžiui, tada, kai endogeninio kintamojo regresijos funkcija $y = f(X) = E[y/x]$ priklauso nuo tokio vektoriaus X , kuri sudaro atsitiktiniai kintamieji, nesutampantys su kintamuoju x , o atsitiktiniai kintamieji y ir x nėra tarpusavyje koreliuoti. Tada $Dx > 0$, $Dy > D\varepsilon > 0$ ir $\sigma_{y,x} = Eyx - Ey \cdot Ex = Ey \cdot Ex - Ey \cdot Ex = 0$ ir todėl $r_{y,x} = 0$, o $\rho_{y,x}^2 = 1 - \frac{D\varepsilon}{Dy} \neq 0$.

Kai atsitiktinis endogeninis kintamasis y priklauso nuo kelių kintamųjų, sudarančių vektorių X , tai tiesinio koreliacinio ryšio tarp kintamojo y ir vektoriaus X vertinimui įsivedamos **daugialypės koreliacijos koeficientas $R_{y,X}$** . Šį koeficientą galima interpretuoti kaip porinės koreliacijos koeficientą tarp y ir to kintamojo tiesinės regresijos funkcijos $f(X) = E[y/x] = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \dots + \theta_p x^{(p)}$, t. y. galima daugialypės koreliacijos koeficientą $R_{y,X}$ apibrėžti lygybę $R_{y,X} = r_{y,f(x)}$, kurioje $f(x) = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \dots + \theta_p x^{(p)}$.

Šiam apibrėžimui ekvivalentiškas yra ir toks koeficiento $R_{y,X}$ apibrėžimas: daugialypės koreliacijos koeficientas $R_{y,X}$ yra porinės koreliacijos koeficientas tarp kintamojo y ir tokios kintamųjų $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ sudarančių vektorių X , tiesinės kombinacijos $a_0 + a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \dots + a_p x^{(p)}$, kuri atitinka šios porinės koreliacijos koeficiento maksimalią reikšmę.

Daugialypės koreliacijos koeficientą $R_{y,X}$ galima išreikšti per paprastus porinės koreliacijos koeficientus tarp kintamųjų $y, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$.

Pažymėsime kintamąjį y indeksu 0, o kintamuosius $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ – indeksais 1, 2, ..., p. Apskaičiuosime visų šių kintamųjų galimų porų porinės koreliacijos koeficientų reikšmes ir sudarysime $(p+1) \times (p+1)$ – matę **koreliacinę matricą**:

$$\begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0p} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p0} & r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0p} \\ r_{01} & 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{0p} & r_{1p} & r_{2p} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Apskaičiuosime tas matricas determinantą $|R|$ ir jos elemento r_{00} adjunktą R_{00} .

Galima įrodyti, jog $R_{y,X}^2 = 1 - \frac{|R|}{R_{00}}$.

Šia formule naudojamosi apskaičiuojam koeficiento $R_{y,X}$ įvertį $\hat{R}_{y,X}$:

$\hat{R}_{y,X} = 1 - \frac{|R|}{\hat{R}_{00}}$. Šioje formulėje $|\hat{R}|$ yra matricos, sudarytos iš porinės koreliacijos

koeficientų įverčių, determinantas, $\hat{R}_{00}$ – adjunkto R_{00} įvertis.

Galima įrodyti, kad tuo atveju, kai kintamieji y , $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(p)}$ priklauso daugialypiam normaliam skirstiniui, kintamojo y regresijos funkcija yra tiesinė ir daugialypės koreliacijos koeficiento $R_{y,X}$ kvadratas $R_{y,X}^2$ yra lygus determinacijos koeficientui $K_d(y,X)$ ir koreliacinio santykio $\rho_{y,X}$ kvadratui $\rho_{y,X}^2$. Todėl tokiu atveju daugialypės koreliacijos koeficiento $R_{y,X}$ įverčio $\hat{R}_{y,X}$ apskaičiavimas leidžia įvertinti determinacijos koeficientą dar iki regresijos funkcijos sudarymo.

Lygybė $R_{y,X}^2 = \rho_{y,X}^2 = K_d(y,X)$ galioja ir tuo atveju, kai kintamojo y regresijos funkcija $f(X) = E[y/X]$ yra tiesinė, t. y., kai $y = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \dots + \theta_p x^{(p)} + \varepsilon(X)$. Šiuo atveju kintamųjų y , $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(p)}$ daugiamačio skirstinio normalumas nėra būtinas, tačiau šiuo atveju įverčio $\hat{R}_{y,X}^2$ panaudojimas determinacijos koeficiento $K_d(y,X)$ vertinimui yra rizikingas, nes juo pakankamai patikimai naudotis galima tik tada, kada daugiamačio kintamųjų y , $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(p)}$ skirstinys yra normalus, arba tada, kada kintamojo y regresijos funkcija yra **tikrai tiesinė**. Net nedideli nukrypimai nuo tiesiškumo gali taip stipriai iškreipti rezultatą, kad iš jo išplaukiančios išvados taptų nepatikimos ar net neteisingos.

Todėl dažniau naudojamosi determinacijos koeficiento statistiniu įverčiu

$$\hat{K}_d(y,X) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2}, \text{ apie kurį jau rašėme.}$$

Naudojantis formule $K_d(y,X) = \rho_{y,X}^2 = \frac{D_f}{D_y}$, galima sudaryti dar vieną $K_d(y,X)$ ir

$\rho_{y,X}^2$ įverčių $\hat{K}_d(y,X)$ ir $\hat{\rho}_{y,X}^2$ apskaičiavimo algoritmą, dalinant vektoriaus X kitimo sritį į k dalių, nustatant į kiekvieną tokią dalį j ($j=1, 2, \dots, k$) patekusių kintamojo y reikšmių y_{ji} skaičius v_j , apskaičiuojant kiekvienai daliai j dalinį kintamojo y vidurkį

$\bar{y}_j = \frac{1}{v_j} \sum_{i=1}^{v_j} y_{ji}$ ir tų vidurkių dispersijos – grupinės dispersijos – įvertį

$$\hat{s}_{y(x)}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2.$$

Laikydami $\hat{S}_{y(X)}^2$ dispersijos D_f įverčiu $\hat{D}_f$, galime apskaičiuoti determinacijos koeficiento ir koreliacinio santykio kvadrato įvertį $\hat{K}_d(y; X) = \hat{\rho}_{y,x}^2 = \frac{\hat{S}_{y(X)}^2}{\hat{S}_y^2} =$

$$= \frac{\sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2}.$$

Determinacijos koeficiento įvertis $\hat{K}_d = \hat{R}^2 = \frac{\hat{D}_f}{\hat{D}_y} = \hat{\rho}_{y,x}^2$, vartojamas kaip regresinio modelio adekvatumo matas, turi trūkumą: to koeficiento didelės reikšmės gali atsirasti ne tik todėl, kad regresinis modelis yra pakankamai adekvatus, bet ir dėl to, kad stebėjimų skaičius n kartais gali būti mažas. Panašų trūkumą turi ir dispersijos formulė. Todėl dispersijos ir determinacijos koeficiento įverčių formulės, kai n – nedidelis skaičius, yra koreguojamos: vietoj formulės $\hat{D}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ naudojamos **pakoreguota formulė** $\hat{D}_y^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ (t. y. $D_y^* = \frac{n}{n-1} \hat{D}_y$), o vietoj formulės

$$\hat{R}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k v_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{j=1}^k v_j \left(\frac{1}{v_j} \sum_{i=1}^{v_j} y_{ji} - \bar{y} \right)^2}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{v_j} (y_{ji} - \bar{y})^2}$$

naudojamosi **pakoreguota formulė**

$\hat{R}^{*2} = 1 - \frac{n-1}{n-(p+1)} (1 - \hat{R}^2)$, kurioje $p+1$ – matricos X stulpelių skaičius, t. y. regresijos funkcijos $f(X)$ koeficientų skaičius, įskaitant ir koeficientą $\hat{\theta}_0$.

Kadangi statistiniuose tyrimuose imčių apimties n yra ribotos ir matavimai atliekami su paklaidomis, tai apskaičiuoti koeficientų bei dispersijų įverčiai gali šiek tiek skirtis ir dažniausiai skiriasi nuo tikrųjų tų koeficientų ir dispersijų reikšmių.

Į tą aplinkybę tenka atsižvelgti, darant išvadas, išplaukiančias iš statistinių tyrimų metu gautų rezultatų. Todėl, sudarant ekonometrinius modelius ir juos taikant, tenka vertinti gautų įverčių tikslumą ir patikimumą, nustatinėti koeficientų ir dispersijų tikrųjų reikšmių patekimo į pasirinktus intervalus tikimybes bei pasirinktas patikimumo tikimybes atitinkančių pasikliautiniųjų intervalų ribas, tikrinti įvairias hipotezes. Skaitytojams, norintiems susipažinti su šių procedūrų atlikimo metodais, galima rekomenduoti jau minėtąją knygą [182] bei taikomosios matematinės statistikos vadovėlius.

Po regresinės analizės pradmenų apžvalgos jau galime pereiti prie konkrečių regresinės analizės pavyzdžių, t. y. prie konkrečių ekonometrinių modelių sudarymo.

1.14.12.3.1.1. Regresinės analizės taikymo pavyzdys: javų derlingumo priklausomybės nuo tręšimo lygio ir dirvos apdirbimo statistinis tyrimas

Tarkime, jog turime iš $n=20$ rajonų surinktus tų rajonų ūkių charakterizuojančius statistinius duomenis apie tręšimo lygį x_i (t. y. apie trąšų kiekį tonomis, vidutiniškai tenkantį 1 ha pasėlių ploto) ir apie javų derlingumą y_i (cnt/ha), kur $i=1, 2, \dots, 20$ (žiūr. 115-ją lentelę).

115. lentelė

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,32	0,59	0,30	0,43	0,39	0,32	0,42	0,21	0,20	1,37
y_i	9,7	8,4	9,0	9,9	9,6	8,6	12,5	7,6	6,9	13,5

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	0,73	0,25	0,39	0,82	0,13	0,09	0,20	0,43	0,73	0,99
y_i	9,7	10,7	12,1	9,7	7,0	7,2	8,2	8,4	13,1	8,7

Nagrinėdami turimus statistinius duomenis, galime pastebėti, kad daugumoje atvejų galima išvėlyti teigiamą jėvų derlingumo ir tręšimo lygio koreliaciją. Kad statistiškai įvertintume ryšį tarp tręšimo lygio ir derlingumo, apskaičiuosime koreliacijos koeficiento įvertį $\hat{r}_{y,x}$, naudodamiesi formule

$$\frac{\sum_{i=1}^{20} [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}}, \text{ ir sudarysime regresijos funkcijos įvertinį } \hat{y}(x) = \hat{f}(x), \text{ ieškodami jos}$$

tiesinėje formoje $\hat{y}(x) = \hat{f}(x) + \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$, kur, kaip jau esame nustatę anksčiau,

$$\hat{\theta}_1^{(MKM)} = \frac{\sum_{i=1}^{20} [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \text{ ir } \hat{\theta}_0^{(MKM)} = \bar{y} - \hat{\theta}_1^{(MKM)} \bar{x}.$$

Koeficientų θ_1 , θ_0 , ir $r_{x,y}$ įverčių $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_0$ ir $\hat{r}_{y,x}$ apskaičiavimui reikalingus duomenis pateiksime 116-je lentelėje.

116. lentelė

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	0,32	9,7	-0,1455	0,175	0,02117025	0,030625	-0,0254625
2	0,59	8,4	0,1245	-1,125	0,01550025	1,265625	-0,1400625
3	0,30	9,0	-0,1655	-0,525	0,02739025	0,275625	0,0868875
4	0,43	9,9	-0,0355	0,375	0,00126025	0,140625	-0,0133125
5	0,39	9,6	-0,0755	0,075	0,00570025	0,005625	-0,0056625
6	0,32	8,6	-0,1455	-0,925	0,02117025	0,855625	0,1345875
7	0,42	12,5	-0,0455	2,975	0,00207025	8,850625	-0,1353625
8	0,21	7,6	-0,2555	-1,925	0,06528025	3,705625	0,4918375
9	0,20	6,9	-0,2655	-2,625	0,07049025	6,890625	0,6969375
10	1,37	13,5	0,9045	3,975	0,81812025	15,800625	3,5953875
11	0,73	9,7	0,2645	0,175	0,06996025	0,030625	0,0462875
12	0,25	10,7	-0,2155	1,175	0,04644025	1,380625	-0,2532125
13	0,39	12,1	-0,0755	2,575	0,00570025	6,630625	-0,1944125
14	0,82	9,7	0,3545	0,175	0,12566025	0,030625	0,0620375
15	0,13	7,0	-0,3355	-2,525	0,11256025	6,375625	0,8471375
16	0,09	7,2	-0,3755	-2,325	0,14100025	5,405625	0,8730375
17	0,20	8,2	-0,2655	-1,325	0,07049025	1,755625	0,3517875
18	0,43	8,4	-0,0355	-1,125	0,00126025	1,265625	0,0399375
19	0,73	13,1	0,2645	3,575	0,06996025	12,780625	0,9455875
20	0,99	8,7	0,5245	-0,825	0,27510025	0,680625	-0,4327125
Σ	9,31	190,5	0	0	1,966295	74,1575	6,97125
$\frac{\Sigma}{n}$	0,4655	9,525	0	0	0,09831475	3,707875	0,3485625

Pasinaudodami $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$ ir $\hat{\theta}_0^{(MKM)}$ apskaičiavimo formulėmis bei 116-osios lentelės rezultatais, gauname, jog $\hat{\theta}_1^{(MKM)} \approx \frac{6,97125}{1,9663} \approx 3,54537 \approx 3,545$, $\hat{\theta}_0^{(MKM)} \approx 9,525 - \hat{\theta}_1^{(MKM)} \cdot 0,4655 \approx 9,525 - 1,650 = 7,875$,

$$\hat{r}_{y,x} \approx \frac{6,97125}{\sqrt{1,9663 \cdot 74,1575}} \approx 0,577309601 \approx 0,577 \approx 0,58.$$

Gavome regresijos funkcijos įvertinį $\hat{f}(x) \approx 7,875 + 3,545x$, kuris rodo, kaip vidutiniškai didėja derlingumas y , didinant tręšimo normą x . Koreliacijos koeficientas $r_{y,x}$ taip pat rodo, jog egzistuoja teigiamas tiesinis koreliacinis ryšys tarp y ir x .

Įvertinsime gautų rezultatų adekvatumą nagrinėjamam reiškiniui, apskaičiuodami dispersijas D_y , D_x , D_f , D_e , o taip pat determinacijos koeficientą $K_d(y, x)$, pasinaudodami skaičiavimų rezultatais, pateiktais 116-oje lentelėje.

$$\hat{D}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \approx 3,708, \quad \hat{D}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx 0,09833. \text{ Kadangi } n=20 \text{ dar nėra didelis}$$

skaičius, tai tikslinga naudotis pakoreguotomis formulėmis $\hat{D}_y^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \approx 3,9030$,

$$\hat{D}_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx 0,1035. \text{ Iš formulės } \hat{f}(x) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x \text{ gauname, jog } \hat{D}_f = \hat{\theta}_1^2 \hat{D}_x, \text{ iš kur}$$

išplaukia, jog $\hat{D}_f \approx (3,545)^2 0,1035 \approx 1,3005$. Tokią pat $\hat{D}_f^*$ reikšmę būtume gavę ir naudodamiesi

$$\text{formule } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{f}(x_i) - \bar{y})^2. \text{ Iš formulės } y(x) = f(x) + \varepsilon(x) \text{ gauname, jog } D_y = D_f + D_e, \text{ iš kur } \hat{D}_e^* = \hat{D}_y^* -$$

$-\hat{D}_f^* \approx 3,9030 - 1,3008 = 2,6022$. Kaip matome, gavome gana didelę dispersiją D_e , sudarančią apie du trečdalius visos dispersijos D_y . Tai rodo, kad modelis nėra pakankamai adekvatus. Tą pačią išvadą

$$\text{padarytume ir paskaičiavę determinacijos koeficiento įvertį } \hat{K}_d(y, x) = \frac{\hat{D}_f^*}{\hat{D}_y^*} \approx \frac{1,3008}{3,9030} \approx 0,3332 \approx 0,333.$$

Jei pakoreguotume K_d reikšmę, pasinaudodami formule $(R^*)^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(p+1)}(1-R^2)$, tai gautume

$$\hat{K}_d^* = 1 - \frac{20-1}{20-(1+1)}(1-\hat{K}_d) \approx 1 - \frac{19}{18}(1-0,333) \approx 0,296, \text{ t. y. dar mažesnę determinacijos koeficiento}$$

įverčio reikšmę.

Didelę dispersijos D_e reikšmę ir mažą determinacijos koeficiento reikšmę šiuo atveju galima paaiškinti tuo, kad javų derlingumas priklauso ne tik nuo tręšimo lygio, bet ir nuo daugelio kitų faktorių. Vienu tokių faktorių gali būti ir dirvos paruošimo kokybė, o taip pat ir derliaus nuėmimas laiku, neleidžiant grūdams išbyrėti iš varpų, ir eilė kitų faktorių. Žinoma, javų derlingumui didelę įtaką turi ir meteorologinės sąlygos, kuriomis augo ir brendo javai, tačiau šiuo atveju visuose tirtuose ūkiuose meteorologinės sąlygos buvo vienodos.

Pabandysime padidinti regresijos funkcijos argumentų skaičių, įvesdami papildomą kintamąjį – ūkyje esančios dirvos apdirbimui skirtos technikos skaičių, tenkantį 100 ha, pažymėdami tą papildomą kintamąjį $x^{(2)}$, o trąšų kiekiui, tenkančiam hektarui pasėlių ploto, palikdami žymėjimą $x^{(1)}$.

Statistinius duomenis, pateiktus 115-oje lentelėje, papildysime duomenimis, paimtais iš tiriamųjų rajonų $i=1, 2, \dots, 20$ ir pateikiamais 117-oje lentelėje.

117. lentelė

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i^{(2)}$	2,05	0,46	2,46	6,44	2,16	2,69	0,73	0,42	0,49	3,02

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_i^{(2)}$	3,19	3,30	11,51	2,26	0,60	0,30	1,44	0,05	0,03	0,17

Dabar regresijos funkcijos ieškosime formoje $f(x)=\theta_0+\theta_1x^{(1)}+\theta_2x^{(2)}$ ir, naudodamiesi mažiausiųjų kvadratų metodu, minimizuosime funkciją $\hat{Q}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)=\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)})^2$.

Diferencijuodami funkciją $\hat{Q}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, gausime **normaliųjų lygčių sistemą**

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{\theta}_0} = 0, \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{\theta}_1} = 0, \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{\theta}_2} = 0, \end{cases} \text{ kuri šiuo atveju atrodys taip: } \begin{cases} \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)}) \cdot x_i^{(1)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)}) \cdot x_i^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Šią lygčių sistemą galima pertvarkyti į koeficientų θ_0 , θ_1 ir θ_2 įverčių $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$ ir $\hat{\theta}_2$ radimui

$$\text{patogesnę sistemą } \begin{cases} 20\hat{\theta}_0 = \sum_{i=1}^{20} y_i - \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^{20} x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 \sum_{i=1}^{20} x_i^{(2)}, \\ \sum_{i=1}^{20} y_i x_i^{(1)} - \hat{\theta}_0 \sum_{i=1}^{20} x_i^{(1)} - \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^{20} (x_i^{(1)})^2 - \hat{\theta}_2 \sum_{i=1}^{20} x_i^{(1)} x_i^{(2)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{20} y_i x_i^{(2)} - \hat{\theta}_0 \sum_{i=1}^{20} x_i^{(2)} - \hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^{20} x_i^{(1)} x_i^{(2)} - \hat{\theta}_2 \sum_{i=1}^{20} (x_i^{(2)})^2 = 0. \end{cases}$$

Kadangi $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$ ir y_i reikšmės mums yra žinomos, tai, atlikę atitinkamų sumų paskaičiavimus, gausime 3-jų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą, kurią išsprendę, rasime koeficientų θ_0 , θ_1 ir θ_2 įverčių $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$ ir $\hat{\theta}_2$ reikšmes $\hat{\theta}_0^{(MKM)} \approx 7,29$, $\hat{\theta}_1^{(MKM)} \approx 3,47$ ir $\hat{\theta}_2^{(MKM)} \approx 0,28$, t. y. gausime regresijos funkcijos įvertinį $f(x^{(1)}, x^{(2)}) \approx 7,29 + 3,47x^{(1)} + 0,28x^{(2)}$.

Koeficientų θ_0 , θ_1 ir θ_2 įverčių $\hat{\theta}_0^{(MKM)}$, $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$ ir $\hat{\theta}_2^{(MKM)}$ reikšmes galima buvo rasti ir naudojantis matricų algebra.

Funkciją $Q(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p) = Q(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \hat{\theta}_2 x_i^{(2)} - \dots - \hat{\theta}_p x_i^{(p)})^2$ galima užrašyti matricinėje formoje $Q(\hat{\theta}) = (Y - X\hat{\theta})^T (Y - X\hat{\theta}) = Y^T Y - 2\hat{\theta}^T X^T Y + \hat{\theta}^T X^T X \hat{\theta}$. Taikydami mažiausiųjų kvadratų metodą gauname matricinę lygtį $\frac{\partial Q(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = -2X^T Y + 2X^T X \hat{\theta} = 0_{p+1}$, t. y. lygtį

$X^T X \hat{\theta} = X^T Y$, kurią sprendami gauname regresijos lygties koeficientų vektoriaus – stulpelio $\hat{\theta}^{(MKM)} = (\hat{\theta}_0^{(MKM)}, \hat{\theta}_1^{(MKM)}, \dots, \hat{\theta}_p^{(MKM)})^T$ apskaičiavimo formulę $\hat{\theta}^{(MKM)} = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

Iš šios formulės išplaukia vektoriaus $\hat{\theta}^{(MKM)}$ apskaičiavimo algoritmas: 1) statistinių duomenų matricą X , turinčią n eilučių ir $p+1$ stulpelį, kurioje „nulinis“ stulpelis sudarytas iš elementų $x_i^{(0)} \equiv 1$, transformuojame į matricą X^T , turinčią $p+1$ eilutę ir n stulpelių; 2) matricą X^T sudauginame su matrica X ir gauname kvadratinę matricą $X^T X$, turinčią $(p+1) \times (p+1)$ matavimų, sudarytą iš elementų $a_{ks} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} x_i^{(s)}$; 3) naudodamiesi atvirkštinės matricos elementų apskaičiavimo formule

$a_{ij}^{(-1)} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{D}$, gauname matricą $(X^T X)^{-1}$, atvirkštinę matricai $X^T X$; 4) ketvirtajame algoritmo

žingsnyje gautąją kvadratinę matricą $(X^T X)^{-1}$, turinčią $(p+1) \times (p+1)$ elementų $a_{ks}^{(-1)}$, sudauginame su pirmajame algoritmo žingsnyje gauta matrica X^T , turinčia $p+1$ eilutę ir n stulpelių, ir tokiu būdu gauname matricą $(X^T X)^{-1} X^T$, turinčią $p+1$ eilutę ir n stulpelių; 5) penktajame algoritmo žingsnyje, gautąją matricą $(X^T X)^{-1} X^T$ sudauginame su matrica Y , turinčia n eilučių ir m stulpelių, ir tokiu būdu gauname koeficientų $\hat{\theta}$ matricą $(X^T X)^{-1} X^T Y$, turinčią $p+1$ eilutę ir m stulpelių.

Mūsų nagrinėjamame pavyzdyje reikia sudaryti tik vieną regresijos lygtį, todėl $m=1$ ir matrica Y turi tik vieną stulpelį, t. y. matrica Y šiuo atveju yra vektorius – stulpelis $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Todėl ir $\theta=(X^T X)^{-1} X^T Y$ yra vektorius – stulpelis $\hat{\theta}^{(MKM)} = (\hat{\theta}_0^{(MKM)}, \hat{\theta}_1^{(MKM)}, \hat{\theta}_2^{(MKM)}, \dots, \hat{\theta}_p^{(MKM)})^T$.

Kadangi matricų daugybos operacija yra asociatyvi, tai ketvirtajame algoritmo žingsnyje galima buvo vietoj matricų $(X^T X)^{-1}$ ir X^T daugybos dauginti matricas X^T ir Y , gaunant matricą $X^T Y$, turinčią $p+1$ eilutę ir m stulpelių (arba vektorių – stulpelį $X^T Y$, turintį $p+1$ koordinatę), o po to (jau penktajame algoritmo žingsnyje) sudauginti trečiajame algoritmo žingsnyje gautą atvirkštinę matricą $(X^T X)^{-1}$ su matrica (arba vektoriumi – stulpeliu) $X^T Y$, gaunant matricą (arba vektorių) $\hat{\theta}^{(MKM)}$.

Rekomenduoju skaitytojui išbandyti čia aprašytąjį matricinį algoritmą jau mūsų surastų koeficientų θ_0 ir θ_1 įverčių $\hat{\theta}_0^{(MKM)}$ ir $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$ apskaičiavimui, kai $n=20$ ir $p=1$, taip pat koeficientų θ_0 , θ_1 ir θ_2 įverčių $\hat{\theta}_0^{(MKM)}$, $\hat{\theta}_1^{(MKM)}$ ir $\hat{\theta}_2^{(MKM)}$ apskaičiavimui ką tik nagrinėtuju atveju, kai mes sprendėme regresijos funkcijos koeficientų apskaičiavimo uždavinį, pasinaudodami papildoma informacija apie ūkiuose naudojamą žemės apdirbimo techniką. Tai padės skaitytojui priprasti prie **matricinės algebros panaudojimo, kurios matematinis aparatas leidžia ekonometrikos uždavinių ir jų sprendinio algoritmų aprašymą padaryti žymiai kompaktiškesnį**, panašiai kaip tenzorių algebros panaudojimas žymiai supaprastina perėjimus iš vienos koordinatės sistemos į kitą bei įtampų deformuojamoje terpėje nagrinėjimą. **Plėtojant sistematyros matematinę kalbą, tikslinga pasinaudoti visu tuo, kas jau sukurta įvairiuose moksluose ir ypačingai – matematikoje**, nes, kaip jau buvo minėta 1.6.4.13. ir 1.13.3. skyreliuose, **matematikos dėsniai yra bendrasisteminiai dėsniai, o matematinė kalba – matematinės sistematyros formaliosios kalbos branduolys**.

Grįšime prie nagrinėjamo ekonometrinio modelio. Nesunku įsitikinti, kad regresinis modelis $\hat{f}(x^{(1)}, x^{(2)}) \approx 7,29 + 3,47x^{(1)} + 0,28x^{(2)}$ jau adekvačiau aprašo javų derlingumo y statistinę priklausomybę nuo derlingumą įtakančių faktorių. Paskaičiavę pakoreguotą determinacijos koeficientą, šiuo atveju gautume, jog $(\hat{R}^*)^2 \approx 0,422$, t. y. jau didesnis negu tuo atveju, kai regresijos funkcija turėjo tik vieną argumentą ir determinacijos koeficiento įvertis $(\hat{R}^*)^2$ buvo lygus $\approx 0,296$.

Norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį į tą aplinkybę, kad **regresijos funkcijos argumentų skaičiaus didinimas ne būtinai (t. y. ne visada) didina regresinio modelio adekvatumą modeliuojamam reiškiniui**.

Knygoje [182], iš kurios buvo paimti mūsų skaičiavimams reikalingi statistiniai duomenys, tarp eilės įvairių pavyzdžių yra pateikta ir regresijos funkcija, aprašanti javų derlingumo y priklausomybę net nuo penkių faktorių: 1) tręšimo lygio $x^{(1)}$; 2) dirvos apdirbimo technikos vienetų šimtui hektarų dirvos vidutinio skaičiaus $x^{(2)}$; 3) derliaus nuėmimui skirtų kombainų, tenkančių 100 ha, vidutinio skaičiaus $x^{(3)}$; 4) traktorių vidutinio skaičiaus $x^{(4)}$ ūkyje kiekvienam 100 ha dirbamos žemės; 5) chemikalų, skirtų kovai su piktžolėmis ir kenkėjais kiekio $x^{(5)}$, tenkančio kiekvienam pasėliui hektarui. Regresijos funkcijos koeficientų reikšmės buvo apskaičiuotos naudojantis statistiniais duomenimis, pateiktais 118-oje lentelėje.

118. lentelė

Rajono numeris j	Derlingumas y_i (cnt/ha)	Tręšimo lygis $x_i^{(1)}$ (tonų/ha)	Aprūpinimo dirvos apdirbimo technika lygis $x_i^{(2)}$ (vnt/100ha)	Kombainų kiekis $x_i^{(3)}$ (vnt/100ha)	Traktorių kiekis $x_i^{(4)}$ (vnt/100ha)	Chemikalų panaudojimo lygis $x_i^{(5)}$ (cnt/ha)
1	9,70	0,32	2,05	0,26	1,59	0,14
2	8,40	0,59	0,46	0,28	0,34	0,66
3	9,00	0,30	2,46	0,31	2,53	0,31
4	9,90	0,43	6,44	0,40	4,63	0,59
5	9,60	0,39	2,16	0,26	2,16	0,16
6	8,60	0,32	2,69	0,30	2,16	0,17
7	12,50	0,42	0,73	0,29	0,68	0,23
8	7,60	0,21	0,42	0,26	0,35	0,08
9	6,90	0,20	0,49	0,24	0,52	0,08
10	13,50	1,37	3,02	0,31	3,42	0,73
11	9,70	0,73	3,19	0,30	1,78	0,17
12	10,70	0,25	3,30	0,32	2,40	0,14
13	12,10	0,39	11,51	0,40	9,36	0,38

14	9,70	0,82	2,26	0,28	1,72	0,17
15	7,00	0,13	0,60	0,29	0,59	0,35
16	7,20	0,09	0,30	0,26	0,28	0,15
17	8,20	0,20	1,44	0,29	1,64	0,08
18	8,40	0,43	0,05	0,22	0,09	0,20
19	13,10	0,73	0,03	0,25	0,08	0,20
20	8,70	0,99	0,17	0,26	1,36	0,42

Po šių statistinių duomenų apdorojimo minėtosios knygos autoriai gauna regresijos funkcijos įvertinį $\hat{y}(x) = \hat{f}(x) = \hat{f}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}) \approx 3,515 + 4,475x^{(1)} + 0,110x^{(2)} + 15,542x^{(3)} - 0,006x^{(4)} - 2,932x^{(5)}$, kurio koeficientų apskaičiavimo vidutinės kvadratinės paklaidos pasirodė gana didelės. Pavyzdžiui, koeficiento θ_0 apskaičiavimo vidutinis kvadratinis nuokrypis pasirodė esąs $\hat{s}_0 \approx 5,41$, t. y. net didesnis už to koeficiento įverčio reikšmę $\hat{\theta}_0 \approx 3,515$. Taip pat didesnius už pačių koeficientų įverčių reikšmes vidutinius kvadratinus nuokrypius turi ir koeficientai $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$ ir $\hat{\theta}_5$ ($\hat{\theta}_2 \approx 0,110$, $\hat{s}_2 \approx 0,85$; $\hat{\theta}_3 \approx 15,542$, $\hat{s}_3 \approx 21,59$; $\hat{\theta}_4 \approx -0,006$, $\hat{s}_4 \approx 0,60$; $\hat{\theta}_5 \approx -2,932$, $\hat{s}_5 \approx 3,09$). Tik koeficiento θ_1 apskaičiuotoji įverčio reikšmė $\hat{\theta}_1 \approx 4,475$ yra beveik tris kartus didesnė už savo galimą vidutinį kvadratinį nuokrypį $\hat{s}_1 \approx 1,54$. Nenuostabu, kad regresijos likučio dispersijos įvertis, kuris šiuo atveju yra lygus apie 2,59, yra didesnis už $\hat{D}_e \approx 2,26$, kuris buvo gautas atvejui, kai $p=2$, ir beveik lygus dispersijos D_e įverčiui $\hat{D}_e \approx 2,60$, kai buvo nagrinėta regresijos funkcija, turinti tik vieną argumentą. Didelį nepasitikejimą kelia ir žymiai didesnė už visų kitų koeficientų reikšmes koeficiento θ_3 įverčio reikšmė $\hat{\theta}_3 = 15,542$ su už save pačią didesne paklaida. Tokią didelę reikšmę koeficientas θ_3 galėtų turėti tik tada, kai, nuimant derlių nuo labai didelių plotų, dėl kombainų stokos derliaus nuėmimo laikas taip užsitęstų, kad didžioji dalis grūdų suspėtų iš varpų išblykti į dirvą. Sovietų Sąjungos stepėse neretai taip atsitikdavo, ir ta aplinkybė galėtų pateisinti tokią didelę koeficiento θ_3 įverčio reikšmę, tačiau mūsų negali tenkinti tokios didelės koeficientų reikšmių paklaidos ir modelio tikslumo pablogėjimas, padidėjus regresijos funkcijos argumentų skaičiui, kai tuo tarpu regresijos funkcijos $\hat{f}(x^{(1)}, x^{(2)}) \approx 7,29 + 3,47x^{(1)} + 0,28x^{(2)}$ koeficientų paklaidos buvo žymiai mažesnės už koeficientų įverčių reikšmes ($\hat{s}_0 \approx 0,66$, $\hat{s}_1 \approx 1,07$ ir $\hat{s}_2 \approx 0,13$) ir už modelio, kai $p=5$, koeficientų paklaidas.

Tokio, atrodytų, paradoksalaus reiškinių priežastis – nekorektiškas regresijos funkcijos prediktorių (argumentų) pasirinkimas: pasirodo, jog, sudarant regresijos funkciją, turinčią argumentus $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ ir $x^{(5)}$, nebuvo atsižvelgta į **multikolinearumo reiškinį**, t. y. į tai, kad kai kurie prediktoriai nėra nepriklausomi, o yra gana stipriai surišti vienas su kitu. Tai nesunku pastebėti, nagrinėjant porinės koreliacijos koeficientų įverčių matricą, gautą apdorojant 118-osios lentelės statistinius duomenis ir pateiktą 119-joje lentelėje.

119. lentelė

\	y	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
y	1,00	0,58	0,40	0,37	0,43	0,33
$x^{(1)}$	0,58	1,00	0,03	0,03	0,11	0,57
$x^{(2)}$	0,40	0,03	1,00	0,88	0,98	0,28
$x^{(3)}$	0,37	0,03	0,88	1,00	0,85	0,46
$x^{(4)}$	0,43	0,11	0,98	0,85	1,00	0,34
$x^{(5)}$	0,33	0,57	0,28	0,46	0,34	1,00

Kaip matome, šioje lentelėje, kintamieji $x^{(2)}$ ir $x^{(4)}$, t. y. žemės apdirbimo technikos vienetų skaičius 100 ha ir traktorių skaičius ūkyje, labai stipriai koreliuoti ir negali būti laikomi nepriklausomais kintamaisiais. Negali būti laikomi nepriklausomais kintamaisiais ir kintamųjų pora $x^{(2)}$ ir $x^{(3)}$, kur $x^{(3)}$ – kombainų skaičius 100 ha, o taip pat kintamieji $x^{(3)}$ ir $x^{(4)}$.

Priklausomybė tarp pasirinktųjų paaiškinančiųjų kintamųjų, nagrinėjant prediktorių poveikį į paaiškinamąjį kintamąjį y, pasireiškia taip, lyg tas poveikis būtų dubliuojamas, ir sukuria iškreiptą vaizdą apie to poveikio reikšmę. Todėl, sudarant ekonometrinius modelius, būtina eliminuoti po vieną iš kiekvienos poros stipriai koreliuotų prediktorių arba pakeisti visą porą vienu agreguotu faktorium, paliekant regresijos funkcijos argumentų sąrašą tik

nepriklausomus bei silpnai koreliuotus faktorius. Mūsų nagrinėtame pavyzdyje porinės koreliacijos koeficientas tarp prediktorių $x^{(1)}$ ir $x^{(2)}$ yra $\approx 0,03$, t. y. pakankamai mažas. Todėl jie ir buvo palikti kaip regresijos funkcijos argumentai. Su $x^{(1)}$ silpnai koreliuotas ir kintamasis $x^{(3)}$, tačiau $x^{(3)}$ gana stipriai koreliuotas su prediktorium $x^{(2)}$. Kadangi kintamasis $x^{(1)}$ palyginti silpnai koreliuotas su kintamuoju $x^{(3)}$, tai, žinoma, galima buvo pabandyti sudaryti regresijos funkciją $f(x^{(1)}, x^{(3)})$ ir palyginti ją su $f(x^{(1)}, x^{(2)})$. Palieku šį bandymą skaitytojui, rekomenduodamas būtinai rasti laiko tokios hipotezės patikrinimui ir atitinkamų išvadų padarymui.

Iš to, kas buvo pasakyta apie multikolinearumo pavojų, išplaukia išvada apie dar vieną **koreliacinės analizės reikalingumo regresinėje analizėje (taigi ir ekonometrikoje)** atvejį. Tai dar kartą patvirtina 1.14.12.3. skyrelio pradžioje minėto teiginio apie koreliacinės analizės vaidmenį ekonometrikoje teisingumą.

Stengiantis išvengti prediktorių kolinearumo, reikia nepamiršti ir antrosios šios problemos pusės: **sudarant regresijos funkciją, reikia stengtis įtraukti į prediktorių sąrašą visus reikšmingus nepriklausomus (silpnai koreliuotus) faktorius.** Kai neatsižvelgiama į kai kuriuos reikšmingus faktorius, ekonometrinis modelis negali būti kokybiškas. Tai ir iliustravo šio (1.14.12.3.1.1.) skyrelio pradžioje sudarytas regresijos funkcijos įvertinys $\hat{f}(x^{(1)}) \approx 7,875 + 3,545x$, pasižymintis dar nepakankamu adekvatumu nagrinėjamam reiškiniui kaip tik dėl šios priežasties.

Šio skyrelio pavyzdžiai kaip tik ir buvo parinkti taip, kad **ne tik iliustruotų regresijos funkcijos koeficientų apskaičiavimo algoritmą, bet ir parodytų kai kuriuos specifinius sunkumus, su kuriais susiduriama, sudarant ekonometrinių modelių.**

Šio tikslo siekiama ir nagrinėjant kitus ekonometrinių modelių sudarymo pavyzdžius.