

Labiau patyręs programuotojas nesunkiai pastebės, kad aprašytoje programoje yra nemažai blokų, kurių funkcijos vienodos arba labai panašios, kuo galima pasinaudoti mažinant programos blokų skaičių. Tai leistų žymiai sumažinti imitavimo programos apimtį, nes 19-sis ir 29-sis blokai, dubliuojantys 12-jį bloką, yra gana sudėtingi. Nėra paprastas ir 28-sis blokas, dubliuojantis 18-jį bloką, o taip pat ir 26-sis blokas, dubliuojantis 16-jį bloką. Kiti dubliuojantys blokai yra paprastesni, bet ir jie reikalauja vietos kompiuterio atmintyje.

Galimi įvairūs dubliavimo išvengimo klausimo sprendimai. Aprašysime vieną iš įdomesnių, kurį sugalvojo minėtieji trečiojo kursu studentai.

Jo idėja kilo išsiaiškinus, kodėl atsirado dubliavimas.

Pavyzdžiui, 19-sis blokas, dubliuojantis 12-jį bloką, atsirado todėl, kad po 12-jo, 14-jo ir 15-jo blokų, dirbančių su ką tik atvykusiais klientais, tą darbą pabaigus, per 9-jį bloką sugrįžtama į 5-jį bloką, generuojantį naujos klientų partijos atėjimą, o po 19-jo 17-jo blokų, dirbančių su jau aptarnautais klientais bei su jų vietą užėmusiais klientais, perėjusiais iš eilės, grįžtama jau ne į 5-jį, o į 6-jį bloką, iškviečiantį iš BĮG eilinių būsimųjų įvykių. Kitaip tariant, po to, kai iš BĮG buvo iškvieistas antrojo tipo įvykis ir ten daugiau tokių įvykių nebeliko, po antrojo tipo įvykio „apdorojimo“ reikalingas naujo tokio tipo įvykio generavimas ir įrašymas į BĮG, o po to, kai iš BĮG buvo iškvieistas penktojo tipo įvykis, po to įvykio „apdorojimo“ nėra reikalo generuoti naują antrojo tipo įvykį, nes toks įvykis būsimųjų įvykių grandinėje dar tebėra. Reiškia, sistema po penktojo tipo įvykio „apdorojimo“ yra būsenoje, kuri skiriasi nuo būsenos, į kurią ji patenka po antrojo tipo įvykio „apdorojimo“. Įvedę dvejetainį sistemos būsenos indikatorį, kurį pažymėsime „q“, ir loginį bloką, analizuojantį būsenos „q“ reikšmę bei priklausomai nuo to perduodantį valdymą, iš 18-jo bloko valdymą galime perduoti tiesiai į 12-jį bloką, panaikindami jį dubliuojantį sudėtingą 19-jį bloką.

Analogiškai, atsižvelgdami į tai, kad iškvietus iš BĮG aštuntojo tipo įvykį, reiškiantį oficialią pamainos pabaigą, imituojančioji sistema patenka į specifinę būseną, ir įsivedę dvejetainį jos būsenos indikatorį „s“ bei loginį bloką, analizuojantį tą indikatorį ir priklausomai nuo to perduodantį valdymą atitinkama kryptimi, galima panaikinti dubliuojančius 24-jį, 25-jį, 26-jį, 27-jį, 28-jį ir 29-jį blokus.

Tiesa, tokį blokinės schemos supaprastinimą gausime ne visai „už dyką“: teks įsivesti gana paprastus loginius blokėlius 8^{a*} , 19^{a*} , 19^{c*} , analizuojančius indikatorius „s“ ir „q“, bei blokėlį 19^{b*} , atstatantį indikatoriaus „q“ reikšmę. Be to reiks papildyti 4-jo bloko algoritmą, pavedant jam kiekvienos pamainos pradžioje „valyti“ indikatorius „q“ ir „s“, suteikiant jiems pradinės (nulines) reikšmes $s=0$, $q=0$, o 16-sis blokas turės kiekvieną kartą įrašinėti „1“ į indikatorius „q“ kaip ir 20-sis blokas – į indikatorius „s“.

Po tokių pertvarkymų 304 pav. pavaizduota blokinė schema taps tokia, kaip pavaizduota 305 pav.

Šioje schemoje pavaizduoti blokai, turintys numerius, sutampančius su 304 pav. numeriais, realizuoja tuos pačius algoritmus, tik 4-sis, 16-sis ir 20-sis blokai vykdo dar ir nurodytas papildomas funkcijas, kas 305 pav. pavaizduota ženkleliais „+“.

Papildomas loginis blokėlis „ 8^{a*} “ tikrina, ar dar tebesitęsia oficialioji pamaina. Jei $s=0$, tai reiškia, jog pamaina dar tebesitęsia, ir todėl atvykusieji klientai siunčiami į registraciją, o jei $s=1$, tai reiškia, jog iš BĮG jau buvo iškvieistas aštuntojo tipo įvykis ir 20-sis blokas jau pakeitė indikatoriaus s reikšmę į „1“, todėl į iškvieistus iš BĮG po oficialiosios pamainos pabaigos antrojo tipo įvykius jau nebekreipama dėmesio – atvykę po pamainos pabaigos klientai jau nebeaptarnaujami.

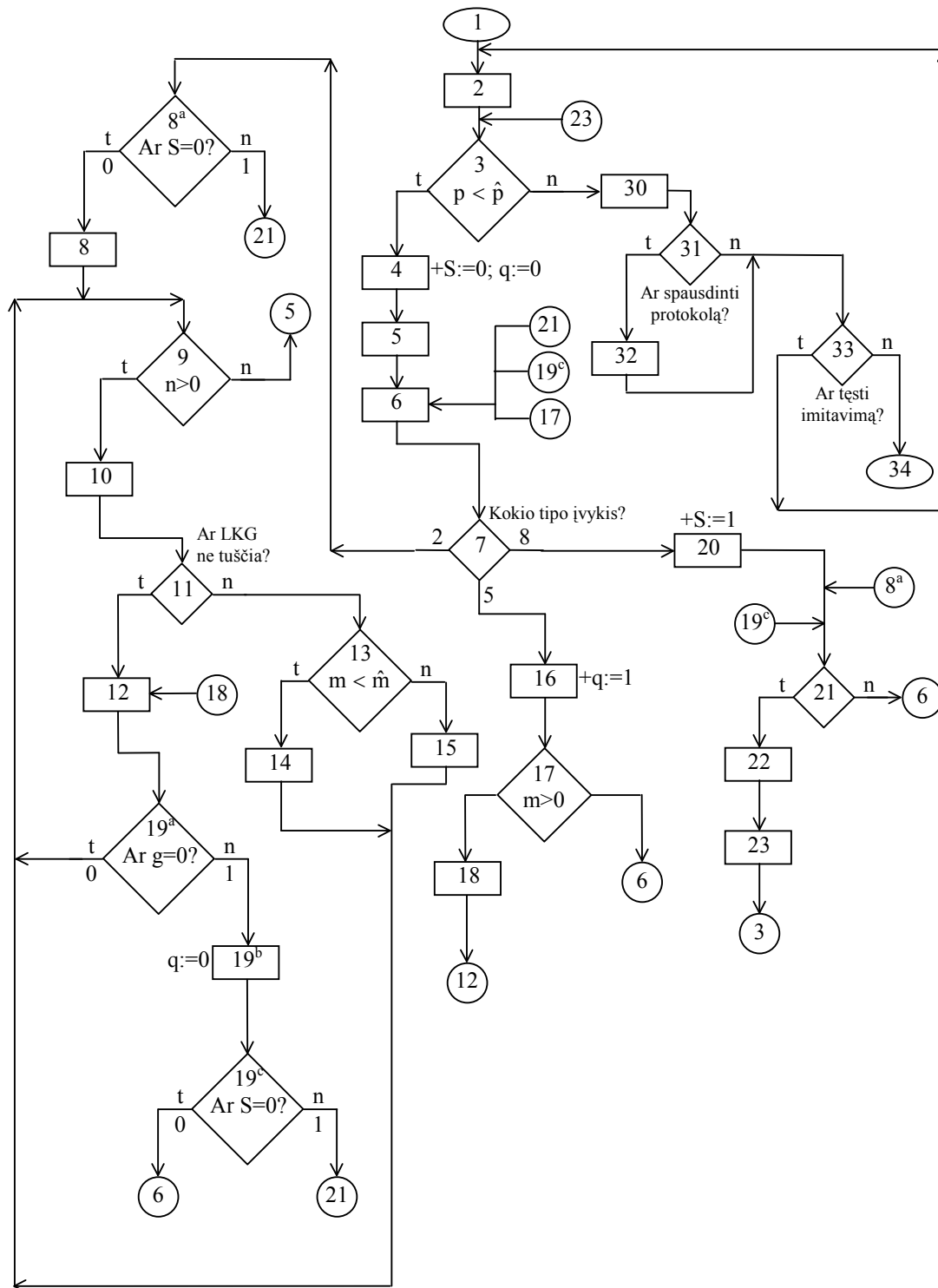
Papildomas loginis blokėlis „ 19^{a*} “ tikrina, kokio tipo įvykis buvo „apdorotas“. Jei $q=0$, tai reiškia, jog klientas į 12-jį bloką pateko iš 11-jo bloko, t. y. jog jis – ką tik atvykęs klientas, ir todėl, perdavęs visus tokius klientus kirpėjams, reikia per 9-jį bloką grįžti į 5-jį bloką ir generuoti naują antrojo tipo įvykį. Kai $q=1$, tai reiškia, jog 12-jame bloke buvo apdorojama informacija po 18-jo bloko, kur prieš tai (dar 16-jame bloke) buvo pakeista „q“ būseną į „1“. Todėl šiuo atveju jau nebetikslinga grįžti į 5-jį bloką, o reikia grįžti į 6-jį bloką, kas ir daroma, prieš tai vėl atstačius „q“ būseną, ką atlieka papildomas „ 19^{b*} “ blokėlis.

Priklausomai nuo būsenos „s“ tas grįžimas į 6-jį bloką yra arba tiesioginis (kai pamaina dar nepasibaigė), ar per 21-jį bloką, tikrinantį ar BĮG jau netuščia, kai pamaina oficialiai jau pasibaigė. Tai ir daro papildomas „ 19^{c*} “ blokėlis.

Čia išnagrinėtose imitavimo programų variantuose imitavimo eigos protokolas bei jo fragmentai spausdinami (ar nespausdinami) programos darbo pabaigoje, todėl iki tos pabaigos įrašai į protokolą kaupiami ir laikomi kompiuterio atmintyje. Tai reikalauja nemažų jos apimčių.

Trūkstant kompiuterio atminties, galima pasielgti kitaip – galima informaciją apie įvykius spausdinti iškart, jos nekaupiant. Kaip jau buvo minėta, kai kurie studentai taip ir darė. Tai galėtų daryti ir išnagrinėti imitavimo programos variantai, papildžius protokolo įrašus formuojančius blokus (žiūr. 304 pav. 4, 8, 12, 14, 16, 15, 18, 20, 22 blokus) tų įrašų spausdinimo komandomis. Tokiu atveju galima būtų išmesti 31-jį ir 32-jį blokus.

Kai kuriuos imitavimo programos blokus (pseudoatsitiktinių skaičių, priklausančių duotiesiems skirstiniams, generatorius, sukauptos statistinės informacijos apdorojimo blokus ir pan.) tikslinga sudaryti kaip standartinius (tipinius) programų modulius ir naudoti jais reikalui esant, kreipiantis į juos kaip į standartines programas.



305 pav.

Tipiniai modeliai ir tipiniai blokai bus gana detalai nagrinėjami antroje šios mokymo priemonės dalyje. Ten studentai bus supažindinti ir su specialia masinio aptarnavimo sistemų modeliavimo sistema GPSS, kuria naudojantis tokios programos kaip čia nagrinėjama kirpyklos funkcionavimo imitavimo sistema sudaromos labai lengvai ir greitai.

Studentų mokymo praktika parodė, jog, prieš užduodant studentams sudaryti gana sudėtingos imitavimo programos algoritmą bei jo blokinę schemą ir pačią programą, naudinga kartu su studentais pradžioje pabandyti „rankiniu būdu“ imituoti kirpyklos funkcionavimo procesą, naudojantis užduotomis sąlygomis ir 101-ja bei 102-ja lentelėmis, stengiantis tą imitavimą vykdyti taip, kaip tai turės daryti kompiuteris.

1. „Rankinio imitavimo“ pradžioje studentai užsirašo, t. y. „įsiveda“ į įsivaizduojamą (virtualinį) kompiuterį, formalijų būsimosios programos parametrų konkrečias faktines reikšmes: $\hat{p}=5$; $k=4$; $f(\tau)=\text{eksp.}$, $\bar{\tau}=5$; $\hat{n}=4$; $p(1)=0,71$, $p(2)=0,23$, $p(3)=0,05$, $p(4)=0,01$; $\hat{r}=3$; $p_1=0,5$, $p_2=0,4$, $p_3=0,1$; $f_1(\tau)=\text{eksp.}$, $\bar{\tau}_1=12$; $f_2(\tau)=\text{eksp.}$, $\bar{\tau}_2=15$; $f_3(\tau)=\text{eksp.}$, $\bar{\tau}_3=25$; $\hat{m}=8$; $t^{(p,p)}=7^{00}$; $t^{(o,p)}=20^{00}$; $p=0$.

2. Įsitikinę, kad šiuo momentu $p < \hat{p}$, t. y., kad pamainų imitavimas dar nepasibaigė, studentai pereina prie pasiruošimo eilinės pamainos imitavimo pradžiai.

3. Pamainos imitavimo pradžioje:

a) didinama vienetu pamainų skaitliuko reikšmė p ir įsitikinama, kad dabar $p=1$, t. y., kad prasideda pirmoji pamaina;

b) į taimerį t įrašoma $t^{(p,p)}$ reikšmė ir suformuojamas pirmojo tipo įrašas į protokolą: „ 7^{00} ; 1 *“;

c) „išvalomi“ skaitliukai n , $N^{(a)}$, $N^{(ap)}$, N_i , $N^{(is)}$, $N^{(s)}$, T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , $T^{(e)}$, m , t. y. į juos įrašomi nuliai;

d) „išvaloma“ BĮG ir KSEG, o į LKG įrašomi visi keturi kirpėjai su savo T_j jų numerių didėjimo tvarka;

e) „kompiuterio atmintyje“ „išskiriama“ vieta, kur bus užrašomi statistinės informacijos apdorojimo rezultatai: $\bar{q}_j^{(p)}$, $\bar{A}^{(p)}$, $\bar{\tau}_p^{(a)}$, $\bar{\tau}_p^{(e)}$, $\bar{m}_p$ ir $\bar{a}^{(p)}$;

f) į „išvalytą“ BĮG įrašoma informacija apie būsimąją oficialiąją pamainos pabaigą: „ 20^{00} ; 8 *“.

4. Pasinaudodami 101-sios lentelės pirmuoju pseudoatsitiktiniu skaičiumi $\xi_1=0,2677$ ir atvirkštinės funkcijos metodu, žinodami jog $\bar{\tau}=5$ min., studentai apskaičiuoja intervalo $\tau^{(a)}$ iki pirmosios klientų grupės atvykimo trukmę $\tau^{(a)} = \bar{\tau} \ln \frac{1}{1-y} \approx 5 \cdot 0,311565 \text{ min.} = 1,557825 \text{ min.} \approx 2 \text{ min.}$

Turėdami $\tau^{(a)}$ reikšmę, studentai apskaičiuoja pirmosios klientų partijos atvykimo momentą $t^{(a)}=t+\tau^{(a)}=7^{00}+0^{02}=7^{02}$ ir įrašo į BĮG įrašą: „ 7^{02} ; 2 *“;

5. Iš BĮG išskviečiama informacija apie eilinį ankstyviausią būsimą įvykį ir to įvykio laikas perrašomas į taimerį. Šiuo atveju išskviečiamas įrašas „ 7^{02} ; 2 *“ ir į taimerį įrašoma $t:=7^{02}$.

6. Analizuodami iš BĮG iškvieštą įrašą, studentai nustato, jog tai – antrojo tipo įvykis, ir pereina prie atėjusių klientų skaičiaus n generavimo.

7. Žinodami, jog $p(1)=0,71$, $p(2)=0,23$, $p(3)=0,05$, $p(4)=0,01$ ir pasinaudodami 101-sios lentelės antruoju pseudoatsitiktiniu skaičiumi $\xi_2=0,0080$, studentai nustato, jog $n=1$, apskaičiuoja $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=0+1=1$ ir suformuoja 2-jo tipo įrašą į protokolą: „ 7^{02} ; 2; $n=1$; $N^{(a)}=1$ *“. Skaičių $n=1$ studentai įrašo į atvykusių klientų skaitliuką n .

8. Kadangi skaitliuko n reikšmė didesnė už 0, tai pereinama prie atvykusių klientų registravimo.

9. Atvykusiam klientui suteikiamas numeris $N_i:=N_i+1=0+1=1$, o atvykusių klientų skaitliuko n reikšmė sumažinama vienetu: $n:=n-1=1-1=0$.

10. Tikrinama LKG ir nustatoma, jog ji – ne tuščia. Todėl pereinama prie atvykusio kliento aptarnavimo.

11. Iš LKG išskviečiamas laisvas kirpėjas, esantis LKG pradžioje. Tai pirmasis kirpėjas ($j=1$). Pasinaudojant tikimybėmis $p_1=0,5$, $p_2=0,4$ ir $p_3=0,1$ ir trečiuoju pseudoatsitiktiniu skaičiumi iš 101-sios lentelės $\xi_3=0,7545$, nustatoma, jog $r=2$, o žinant $r=2$ ir $\bar{\tau}_2=15$ min., bei pasinaudojant $\xi_4=0,3910$ ir atvirkštinės funkcijos metodu apskaičiuojama, jog $\tau_{1,1} = \bar{\tau}_2 \ln \frac{1}{1-y} \approx 15 \cdot 0,495937 \text{ min} \approx 7,4385 \text{ min} \approx 7 \text{ min.}$

Suradę $\tau_{1,1}$, studentai apskaičiuoja pirmojo kliento aptarnavimo baigimo momentą: $t_{1,1}^{(b)}=t+\tau_{1,1}=7^{02}+0^{07}=7^{09}$ ir pirmojo kirpėjo būsimąjį atidirbtąjį laiką: $T_1=T_1+\tau_{1,1}=0+7=7$ (min.). Po to suformuojamas trečiojo tipo įrašas į protokolą: „ 7^{02} ; 3; N_i ; $j=1$; $r=2$; $\tau_{1,1}=7$; $t_{1,1}^{(b)}=7^{09}$; $T_1=7$ *“ bei penktojo tipo įrašas į BĮG: „ 7^{09} ; 5; $N_i=1$; $j=1$ *“ ir pereinama prie patikrinimo, ar jau visi ką tik atvykę klientai užregistruoti.

12. Kadangi skaitliuko n reikšmė jau lygi 0, tai grįžtama prie naujo $\tau^{(a)}$ generavimo.
13. Kadangi 101-je lentelėje randame $\xi_5=0,2135$, ir $\bar{\tau}^{(a)}=5$ min., tai gauname $\tau^{(a)} = \bar{\tau}^{(a)} \ln \frac{1}{1-y} \approx 5 \cdot 0,240162 \text{ min} = 1,20081 \text{ min} \approx 1 \text{ min}$. Todėl $t^{(a)}=t+\tau^{(a)}=7^{02}+0^{01}=7^{03}$ ir į BĮG įrašoma informacija apie būsimąjį antrojo tipo įvykį: „ 7^{03} ; 2 *“. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje jau yra trys įrašai: „ 7^{03} ; 2 * 7^{09} ; 5; $N_i=1$; $j=1$ * 20^{00} ; 8 *“.
14. Iš BĮG išskviečiama informacija apie eilinį būsimąjį įvykį („ 7^{03} ; 2 *“) ir į taimerį įrašoma nauja laiko t reikšmė $t=7^{03}$.
15. Analizuodami ką tik iškviestąjį iš BĮG įvykį, studentai nustato, jog jis – antrojo tipo, ir pereina prie atvykusių klientų skaičiaus n generavimo.
16. Pasinaudodami 101-sios lentelės pseudoatsitiktiniu skaičiumi $\xi_6=0,1000$ ir žinomomis tikimybėmis $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, studentai nustato, jog atvyko $n=1$ klientas, apskaičiuoja $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=1+1=2$ ir suformuoja antrojo tipo įrašą į protokolą: „ 7^{03} ; 2; $n=1$; $N^{(a)}=2$ *“. Skaičius $n=1$ įrašomas į atvykusių, bet dar neregistruotų klientų skaitliuką n .
17. Kadangi skaitliuko n reikšmė $n=1$ didesnė už 0, tai pereinama prie ką tik atvykusių klientų registravimo.
18. Atvykusiam klientui suteikiamas numeris $N_i:=N_i+1=1+1=2$, o atvykusių ir laukiančių registracijos klientų skaitliuko reikšmė n sumažinama 1 ir tampa lygi 0.
19. Tikrinama LKG ir nustatoma, kad ji – ne tuščia: joje dar trys kirpėjai. Todėl pereinama prie ką tik atvykusio ir užregistruoto kliento aptarnavimo pradžios organizavimo.
20. Iš LKG išskviečiamas antrasis kirpėjas. Pasinaudojant 101-sios lentelės pseudoatsitiktiniu skaičiumi $\xi_7=0,0051$ ir tikimybėmis p_1 , p_2 , ir p_3 , nustatoma, jog $r=1$. Todėl $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1=12$ min. ir, kadangi $\xi_8=0,6978$ (žiūr. 101 lentelę) ir $\ln \frac{1}{1-y} = 1,196667$ (žiūr. 102-ją lentelę), tai $\tau_{2,2}=12 \cdot 1,196667 \text{ min} \approx 14,36 \text{ min} \approx 14 \text{ min}$.
- Suradę $\tau_{2,2}$, apskaičiuojame $t_{2,2}^{(b)}=t+\tau_{2,2}=7^{03}+0^{14}=7^{17}$ ir kirpėjo j būsimąjį atidirbtąjį laiką $T_j:T_2:=T_2+\tau_{2,2}=0+14=14$ (min.).
- Po to suformuojame 3-jo tipo įrašą „ 7^{03} ; 3; $N_i=2$; $j=2$; $r=1$; $\tau_{2,2}=14$; $t_{2,2}^{(b)}=7^{17}$; $T_2=14$ *“ į protokolą bei penktojo tipo įrašą „ 7^{17} ; 5; $N_i=2$; $j=2$ *“ į BĮG ir pereiname prie patikrinimo, ar jau visi ką tik atvykę klientai užregistruoti.
21. Kadangi atvykusių, bet dar neregistruotų klientų skaitliuko n reikšmė jau lygi 0, tai grįžtame prie naujo $\tau^{(a)}$ generavimo (t. y. į 304 pav. 5-jį bloką).
22. Suradę 101-je lentelėje $y=\xi_9=0,7624$ ir 102-je lentelėje $\ln \frac{1}{1-y} \approx 1,437167$, apskaičiuojame $\tau^{(a)} = \bar{\tau} \ln \frac{1}{1-y} \approx 5 \cdot 1,437167 \text{ min} \approx 7 \text{ min}$. Todėl naujų atvyksiančių klientų atvykimo laikas $t^{(a)}=t+\tau^{(a)}=7^{03}+0^{07}=7^{10}$. Į BĮG įrašome informaciją apie naują būsimą įvykį: „ 7^{10} ; 2 *“. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje yra jau tokie keturi įrašai: „ 7^{09} ; 5; $N_i=1$; $j=1$ * 7^{10} ; 2 * 7^{17} ; 5; $N_i=2$; $j=2$ * 20^{00} ; 8 *“.
23. Iš BĮG išskviečiame informaciją apie eilinį būsimąjį įvykį: „ 7^{09} ; 5; $N_i=1$; $j=1$ *“ ir į taimerį įrašome naują modeliuojamo laiko t reikšmę $t=7^{09}$.
24. Analizuodami ką tik iškviestąjį iš BĮG informaciją, mes nustatome, jog įvyko penktojo tipo įvykis ir pereiname prie informacijos apie penktąjį įvykį įrašymo į protokolą, t. y. į 16-jį bloką.
25. Apskaičiuojame aptarnautų klientų skaičių $N^{(apt)}:=N^{(apt)}+1=0+1=1$ ir suformuojame penktojo tipo įrašą „ 7^{09} ; 5; $N_i=1$; $j=1$; $N^{(apt)}=1$ *“ į protokolą. Atsilaisvinusį pirmąjį kirpėją grąžiname į LKG. Dabar LKG atrodo taip: „ $j=3$; $T_3=0$ * $j=4$; $T_4=0$ * $j=1$; $T_1=7$ *“.
26. Patikrinę eilės ilgį m ir nustatę, jog eilės nėra ($m=0$), sugrįžtame prie būsimųjų įvykių išskvietimo iš BĮG (t. y. į 304 pav. 6-jį bloką).
27. Išskviečiame iš BĮG informaciją apie eilinį būsimąjį įvykį: „ 7^{10} ; 2 *“. Nustatę naują taimerio reikšmę $t=7^{10}$ ir įsitikinę, jog įvyko antrojo tipo įvykis, pereiname prie atvykusių klientų skaičiaus n generavimo, t. y. į 8-jį bloką.
28. Pasinaudodami 101-ja lentele, randame $\xi_{10}=0,7263$. Kadangi $p(1)<\xi_{10}<p(1)+p(2)$, tai atvykusių klientų skaičius $n=2$. Tą skaičių įrašome į atvykusių dar neregistruotų klientų skaitliuką n ($n:=2$) ir, apskaičiavę naują visų atvykusių klientų skaičiaus $N^{(a)}$ skaitliuko reikšmę $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=2+2=4$, suformuojame antrojo tipo įrašą „ 7^{10} ; 2; $n=2$; $N^{(a)}=4$ *“ į protokolą. Pereiname į devintąjį bloką.
29. Kadangi skaitliuko n reikšmė $n=2$ yra didesnė už 0, tai pereiname prie ką tik atvykusių klientų registravimo 10-jame bloke.

30. Eiliniam atvykusiam klientui suteikiamas numeris $N_i := N_i + 1 = 2 + 1 = 3$, o atvykusių ir laukiančių registracijos klientų skaitliuko reikšmė tampa $n := n - 1 = 2 - 1 = 1$. Pereiname į 11-ąjį bloką.

31. Tikriname LKG ir nustatome, jog ji – ne tuščia: joje dar trys kirpėjai. Todėl pereiname prie ką tik atvykusio ir jau užregistruoto kliento aptarnavimo pradžios organizavimo.

32. Iš LKG iškviečiamas trečiasis kirpėjas. Pasinaudodami 101-sios lentelės pseudoatsitiktiniu skaičiumi $\xi_{11} = 0,6606$, iš to fakto, kad $p_1 < \xi_{11} < p_1 + p_2$, nustatome, kad $r = 2$. Todėl $\bar{\tau} = \bar{\tau}_2 = 15$ min. Kadangi $y = \xi_{12} = 0,1363$ ir $\ln \frac{1}{1-y} \approx 0,1466$, tai $\tau_{3,3} = \bar{\tau}_2 \ln \frac{1}{1-y} \approx 15 \cdot 0,1466$ min. $\approx 2,199$ min. ≈ 2 min. Suradę $\tau_{3,3}$,

apskaičiuojame $t_{3,3}^{(b)} = t + \tau_{3,3} \approx 7^{10} + 0^{02} = 7^{12}$ ir kirpėjo $j = 3$ būsimąjį atidirbtąjį laiką $T_3 := T_3 + \tau_{3,3} = 0 + 2 = 2$ (min.). Dabar galima suformuoti trečiojo tipo įrašą „7¹⁰; 3; N_i=3; j=3; r=2; $\tau_{3,3}=2$; $t_{3,3}^{(b)}=7^{12}$; T₃=2 *“. Į protokolą bei įrašyti į BĮG penktojo tipo įrašą „7¹²; 5; N_i=3; j=3 *“. Grįžtame į 9-jį bloką.

33. Kadangi skaitliuko n reikšmė $n = 1$ yra didesnė už 0, tai reiškia, kad dar ne visi ką tik atvykę klientai yra užregistruoti. Todėl pereiname prie eilinio ką tik atvykusio kliento registravimo 10-jame bloke.

34. Eiliniam atvykusiam klientui suteikiamas numeris $N_i := N_i + 1 = 3 + 1 = 4$, o atvykusių ir laukiančių registracijos klientų skaitliuko reikšmė n tampa $n := n - 1 = 1 - 1 = 0$. Pereiname į 11-jį bloką.

35. Tikriname LKG ir nustatome, jog joje yra dar du kirpėjai. Todėl galima pereiti prie ką tik užregistruoto kliento aptarnavimo pradžios, kas ir įvykdoma 12-jame bloke.

36. Iš LKG iškviečiamas eilinis kirpėjas $j = 4$, $T_4 = 0$. Pasinaudodami 101-sios lentelės pseudoatsitiktiniu skaičiumi $\xi_{13} = 0,9086$, iš to fakto, jog $(p_1 + p_2) < \xi_{13} < (p_1 + p_2 + p_3)$, nustatome, kad $r = 3$. Todėl $\bar{\tau} = \bar{\tau}_3 = 25$ min. Kadangi $y = \xi_{14} = 0,5550$ ir $\ln \frac{1}{1-y} \approx 0,8097$, tai $\tau_{4,4} = \bar{\tau}_3 \ln \frac{1}{1-y} \approx 25 \cdot 0,8097$ min. $\approx 20,2425$ min. ≈ 20 min. Suradę $\tau_{4,4}$, apskaičiuojame $t_{4,4}^{(b)} = t + \tau_{4,4} = 7^{10} + 0^{20} = 7^{30}$ ir kirpėjo $j = 4$ atidirbtą laiką $T_4 := 0 + 20 = 20$. Dabar galima suformuoti ir trečiojo tipo įrašą „7¹⁰; 3; N_i=4; j=4; r=3; $\tau_{4,4}=20$; $t_{4,4}^{(b)}=7^{30}$; T₄=20 *“. Į protokolą ir įrašyti į BĮG penktojo tipo įrašą: „7³⁰; 5; N_i=4; j=4 *“. Grįžtame į 9-jį bloką.

37. Kadangi skaitliuko n reikšmė dabar jau lygi 0, tai grįžtame prie naujos grupės klientų atvykimo laiko generavimo, t. y. į 5-jį bloką.

38. Suradę 101-sios lentelės tęsinyje $y = \xi_{15} = 0,0468$ ir 102-sios lentelės tęsinyje $\ln \frac{1}{1-y} \approx 0,048$,

apskaičiuojame $\tau^{(a)} = 5 \cdot 0,048$ min. $= 0,24$ min. ≈ 0 min. Tai reiškia, jog nauja grupė klientų atvyksta tuoj pat. Todėl tos grupės atvykimo laikas $t^{(a)} = t + \tau^{(a)} = 7^{10} + 0^{00} = 7^{10}$. Šią informaciją, vykdant imitavimą rankiniu būdu, buvo galima nebeįrašinėti į BĮG, o iškart pereiti prie atvykusių klientų skaičiaus n generavimo, tačiau mes, laikydamiesi bendrojo algoritmo, įrašysime į BĮG antrojo tipo įrašą: „7¹⁰; 2 *“. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje jau turėsime tokius įrašus: „7¹⁰; 2 * 7¹²; 5; N_i=3; j=3 * 7¹⁷; 5; N_i=2; j=2 * 7³⁰; 5; N_i=4; j=4 * 20⁰⁰; 8 *“. Pereiname į 6-jį bloką.

39. Iš BĮG iškviečiame informaciją apie eilinį būsimąjį įvykį: „7¹⁰; 2 *“. Imituojant rankiniu būdu, taimerio reikšmės būtų galima ir nekeisti, nes ji išliks ta pati, tačiau mes, laikydamiesi bendrojo algoritmo, įrašysime į taimerį $t := 7^{10}$. Įsitikinę, jog įvyko antrojo tipo įvykis, iš 7-jo bloko pereisime prie atvykusių klientų skaičiaus n generavimo 8-jame bloke.

40. Pasinaudodami 101-sios lentelės tęsiniu, randame, jog $\xi_{16} = 0,3784$. Kadangi $\xi_{16} < p(1)$, tai reiškia, jog $n = 1$. Šią n reikšmę įrašome į atvykusių ir dar neregistruotų klientų skaitliuką ($n := 1$) ir, apskaičiavę naują skaitliuko $N^{(a)}$ reikšmę ($N^{(a)} := N^{(a)} + n = 4 + 1 = 5$), suformuojame antrojo tipo įrašą „7¹⁰; 2; n=1; $N^{(a)}=5$ *“. Į protokolą. Pereiname į 9-jį bloką.

41. Kadangi $n > 0$, tai pereiname į 10-jį bloką prie ką tik atvykusių klientų registravimo ir eiliniam atvykusiam klientui suteikiame numerį: $N_i := N_i + 1 = 4 + 1 = 5$ ir skaitliuko n reikšmę sumažiname vienetu.

42. Tikriname LKG ir nustatome, kad ji – ne tuščia: joje yra dar vienas ir tik vienas – pirmasis – kirpėjas. Todėl galime pereiti prie ką tik atvykusio kliento aptarnavimo pradžios 12-jame bloke.

43. Iš LKG iškviečiamas pirmasis kirpėjas. Pasinaudodami 101-sios lentelės tęsiniu, randame, jog $\xi_{17} = 0,6559$ ir, kadangi $p_1 < \xi_{17} < p_1 + p_2$, nustatome, kad $r = 2$ ir vidutinė aptarnavimo trukmė bus $\bar{\tau}_2 = 15$

min. Kadangi 101-sios lentelės tęsinyje randame $y = \xi_{18} = 0,9141$, tai $\tau_{5,1} = \bar{\tau}_2 \ln \frac{1}{1-y} \approx 15 \cdot 2,4446$ min. ≈ 37

min. Todėl $t_{5,1}^{(b)} = t + \tau_{5,1} = 7^{10} + 0^{37} = 7^{47}$, $T_1 := T_1 + \tau_{5,1} = 7 + 37 = 44$. Dabar galime suformuoti trečiojo tipo įrašą „7¹⁰; 3; N_i=5; j=1; r=2; $\tau_{5,1}=37$; $t_{5,1}^{(b)}=7^{47}$; T₁=44 *“. Į protokolą ir įrašyti į BĮG penktojo tipo įrašą „7⁴⁷; 5; N_i=5; j=1 *“. Po šio įrašymo BĮG turinys atrodys taip: „7¹²; 5; N_i=3; j=3 * 7¹⁷; 5; N_i=2; j=2 * 7³⁰; 5; N_i=4; j=4 * 7⁴⁷; 5; N_i=5; j=1 * 20⁰⁰; 8 *“. Grįžtame į 9-jį bloką.

44. Kadangi dabar n jau lygu 0, tai grįžtame į 5-jį bloką prie naujos grupės klientų atvykimo laiko generavimo.

45. Suradę 101-sios lentelės tęsinyje $y=\xi_{19}=0,4998$, apskaičiuojame $\ln \frac{1}{1-y} \approx 0,6936$ ir

$\tau^{(a)} \approx 5 \cdot 0,6936 \text{ min} \approx 3 \text{ min}$. Todėl $t^{(a)} = t + \tau^{(a)} = 7^{10} + 0^{03} = 7^{13}$. Į BĮG įrašome informaciją apie būsimąjį antrojo tipo įvykį: „ $7^{13}; 2$ “. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje bus jau 6 įrašai: „ $7^{12}; 5; N_i=3; j=3 * 7^{13}; 2 * 7^{17}; 5; N_i=2; j=2 * 7^{30}; 5; N_i=4; j=4 * 7^{47}; 5; N_i=5; j=1 * 20^{00}; 8$ “. Pereiname į 6-jį bloką.

46. Iš BĮG išskviečiame informaciją apie eilinį būsimąjį įvykį ($7^{12}; 5; N_i=3; j=3$) ir į taimerį įrašome naują imituojamo laiko t reikšmę $t=7^{12}$.

47. Kadangi išskviestas iš BĮG įvykis priklauso penktajam tipui, tai iš 7-ojo bloko pereiname prie informacijos apie šį įvykį įrašymo į protokolą, t. y. pereiname į 16-jį bloką.

48. Apskaičiuojame $N^{(apt)} := N^{(apt)} + 1 = 1 + 1 = 2$ ir suformuojame penktojo tipo įrašą „ $7^{12}; 5; N_i=3; j=3; N^{(apt)}=2$ “ į protokolą. Atsilaisvinusį trečiąjį kirpėją grąžiname į buvusią jau tuščią LKG ir pereiname į 17-jį bloką.

49. Patikrinę m ir nustatę, jog $m=0$, sugrįžtame prie būsimąjo įvykio išskvietimo iš BĮG, t. y. sugrįžtama iš 304 pav. pavaizduotos blokinės schemos 17-ojo bloko į jos 6-jį bloką.

50. Iš BĮG išskviečiame informaciją apie eilinį būsimąjį įvykį: „ $7^{13}; 2$ “. Nustatome naują taimerio reikšmę $t=7^{13}$ ir, įsitikinę, jog įvyko antrojo tipo įvykis, pereiname iš 7-ojo bloko prie atvykusių klientų skaičiaus n generavimo, t. y. pereiname į 8-jį bloką.

51. Pasinaudodami 101-sios lentelės tęsinio randame $\xi_{20}=0,0861$. Kadangi $\xi_{20} < p(1)$, tai atvykusių klientų skaičius $n=1$. Tą skaičių įrašome į atvykusių dar neregistruotų klientų skaitliuką $n:=1$. Apskaičiuojame naują skaitliuko $N^{(a)}$ reikšmę: $N^{(a)} := N^{(a)} + n = 5 + 1 = 6$ ir suformuojame antrojo tipo įrašą į protokolą: „ $7^{13}; 2; n=1; N^{(a)}=6$ “. Pereiname į 9-jį bloką.

52. Kadangi $n > 0$, tai pereiname prie atvykusių klientų registravimo 10-jame bloke.

53. Eiliniam atvykusiam klientui suteikiame numerį $N_i := N_i + 1 = 5 + 1 = 6$ ir iš skaitliuko n atimame $1: n := n - 1 = 1 - 1 = 0$. Pereiname į 11-jį bloką.

54. Tikriname LKG ir nustatome, jog joje yra trečiasis kirpėjas. Todėl pereiname prie ką tik atvykusio kliento aptarnavimo pradžios, t. y. pereiname į 12-jį bloką.

55. Iš LKG išskviečiame trečiąjį kirpėją („ $j=3; T_3=2$ “). Pasinaudodami 101-sios lentelės tęsinio randame, jog $\xi_{21}=0,6685$. Kadangi $p_1 < \xi_{21} < (p_1 + p_2)$, tai $r=2$ ir $\tau_{6,3} = 15 \ln \frac{1}{1-y}$. Kadangi

$y=\xi_{22}=0,1416$, tai $\ln \frac{1}{1-y} \approx 0,15266$ ir $\tau_{6,3} \approx 2,2899 \text{ min} \approx 2 \text{ min}$. Todėl $t_{6,3}^{(b)} = t + \tau_{6,3} = 7^{13} + 0^{02} = 7^{15}$,

$T_3 := T_3 + \tau_{6,3} = 2 + 2 = 4$. Suformuojame trečiojo tipo įrašą „ $7^{13}; 3; N_i=6; j=3; r=2; \tau_{6,3}=2; t_{6,3}^{(b)}=7^{15}; T_3=4$ “ į protokolą, o į BĮG įrašome penktojo tipo įrašą „ $7^{15}; 5; N_i=6; j=3$ “. Grįžtame į 9-jį bloką.

56. Kadangi dabar $n=0$, tai grįžtame į 5-jį programos bloką.

57. Suradę 101-sios lentelės tęsinyje $y=\xi_{23}=0,6857$, apskaičiuojame $\ln \frac{1}{1-y} \approx 1,1584$ ir

$\tau^{(a)} \approx 5 \cdot 1,1584 \text{ min} \approx 6 \text{ min}$. Todėl $t^{(a)} = t + \tau^{(a)} = 7^{13} + 0^{06} = 7^{19}$. Į BĮG įrašome „ $7^{19}; 2$ “. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje turime tokius įrašus: „ $7^{15}; 5; N_i=6; j=3 * 7^{17}; 5; N_i=2; j=2 * 7^{19}; 2 * 7^{30}; 5; N_i=4; j=4 * 7^{47}; 5; N_i=5; j=1 * 20^{00}; 8$ “. Pereiname į 6-jį bloką.

58. Iš BĮG išskviečiame informaciją apie artimiausiąjį būsimąjį eilinį įvykį („ $7^{15}; 5; N_i=6; j=3$ “) ir į taimerį įrašome $t=7^{15}$. Pereiname į 7-jį bloką.

59. Kadangi naujasis įvykis priklauso penktajam tipui, tai pereiname į programos 16-jį bloką.

60. Apskaičiuojame $N^{(apt)} := N^{(apt)} + 1 = 2 + 1 = 3$ ir suformuojame penktojo tipo įrašą „ $7^{15}; 5; N_i=6; j=3; N^{(apt)}=3$ “ į protokolą. Pereiname į 17-jį bloką.

61. Nustatę, jog $m=0$, atsilaisvinusį trečiąjį kirpėją grąžiname į LKG ir sugrįžtame į 6-jį bloką, kur vėl išskviečiame informaciją iš BĮG apie artimiausią būsimąjį įvykį: „ $7^{17}; 5; N_i=2; j=2$ “. Į taimerį įrašome $t=7^{17}$ ir, kadangi išskviestas iš BĮG įvykis priklauso penktajam tipui, 7-tasis blokas perduoda valdymą 16-jam blokui.

62. Apskaičiuojame $N^{(apt)} := N^{(apt)} + 1 = 3 + 1 = 4$ ir suformuojame penktojo tipo įrašą: „ $7^{17}; 5; N_i=2; j=2; N^{(apt)}=4$ “ į protokolą. Atsilaisvinusį antrąjį kirpėją grąžiname į LKG ir pereiname į 17-jį bloką.

63. Nustatę, jog $m=0$, sugrįžtame į 6-jį programos bloką ir vėl išskviečiame iš BĮG informaciją apie artimiausią būsimąjį įvykį: „ $7^{19}; 2$ “. Nustatome naują taimerio reikšmę $t=7^{19}$ ir, kadangi įvykis priklauso antrajam tipui, iš 7-ojo bloko pereiname prie atvykusių klientų skaičiaus n generavimo 8-tajame bloke.

64. Pasinaudodami 101-sios lentelės tęsiniu, randame, jog $\xi_{24}=0,5914$. Kadangi $\xi_{24}<p(1)$, tai atvykusių klientų skaičius $n=1$. Tą skaičių įrašome į atvykusių dar neregistruotų klientų skaitliuką n ($n:=1$). Apskaičiuojame naują skaitliuko $N^{(a)}$ reikšmę: $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=6+1=7$ ir suformuojame antrojo tipo įrašą į protokolą: „7¹⁹; 2; $n=1$; $N^{(a)}=7$ *“. Pereiname į 9-jį bloką.

65. Kadangi $n>0$, tai pereiname į 10-jį bloką prie atvykusio kliento registravimo. Eiliniam atvykusiam klientui suteikiame numerį $N_i:=N_i+1=6+1=7$ ir iš skaitliuko n turinio atimame 1 ($n:=n-1=1-1=0$). Pereiname į 11-jį bloką.

66. Nustatę, jog LKG ne tuščia, pereiname į 12-jį bloką prie ką tik atvykusio kliento aptarnavimo pradžios. Iš LKG iškviečiame trečiąjį kirpėją, nes $T_3<T_2$. Pasinaudodami 101-sios lentelės tęsiniu, randame, jog $\xi_{25}=0,2803$ ir nustatome, kad $r=1$. Kadangi $y=\xi_{26}=0,5656$, tai $\tau_{7,3} = 12 \ln \frac{1}{1-y} \approx 12 \cdot 0,8338 \text{ min} \approx 10 \text{ min}$. Todėl $t_{7,3}^{(b)}=t+\tau_{7,3}=7^{19}+0^{10}=7^{29}$, $T_3=T_3+\tau_{7,3}=4+10=14$.

Suformuojame trečiojo tipo įrašą „7¹⁹; 3; $N_i=7$; $j=3$; $r=1$; $\tau_{7,3}=10$; $t_{7,3}^{(b)}=7^{29}$; $T_3=14$ *“ į protokolą, o į BĮG įrašome: „7²⁹; 5; $N_i=7$; $j=3$ *“. Grįžtame į 9-jį programos bloką.

67. Kadangi dabar $n=0$, tai grįžtame į 5-jį programos bloką ir generuojame naujos klientų grupės atvykimo laiką. Gauname $y=\xi_{27}=0,9403$; $\ln \frac{1}{1-y} \approx 2,81836$; $\tau^{(a)}=5 \cdot 2,81836 \text{ min} \approx 14 \text{ min}$;

$t^{(a)}=t+\tau^{(a)}=7^{19}+0^{14}=7^{33}$. Į BĮG įrašome: „7³³; 2 *“. Dabar BĮG turinys tampa toks: „7²⁹; 5; $N_i=7$; $j=3$ * 7³⁰; 5; $N_i=4$; $j=4$ * 7³³; 2 * 7⁴⁷; 5; $N_i=5$; $j=1$ * 20⁰⁰; 8 *“.

68. Iš BĮG iškviečiame: „7²⁹; 5; $N_i=7$; $j=3$ *“ ir į taimerį įrašome $t:=7^{29}$. Per 7-jį bloką pereiname į 16-jį bloką.

69. Į skaitliuką įrašoma nauja $N^{(apt)}$ reikšmė $N^{(apt)}:=N^{(apt)}+1=4+1=5$, o į protokolą įrašomas penktojo tipo įvykis: „7²⁹; 5; $N_i=7$; $j=3$; $N^{(apt)}=5$ *“. Atsilaisvinusį trečiąjį kirpėją grąžiname į LKG. Pereiname į 17-jį bloką.

70. Kadangi $m=0$, tai per 17-jį bloką grįžtame į 6-jį bloką ir iš BĮG iškviečiame įrašą: „7³⁰; 5; $N_i=4$; $j=4$ *“ ir į taimerį įrašome 7³⁰. Pereiname į 7-jį bloką, analizuojantį įvykusio įvykio tipą, o iš jo – į 16-jį bloką.

71. $N^{(apt)}:=N^{(apt)}+1=5+1=6$. Suformuojame įrašą „7³⁰; 5; $N_i=4$; $j=4$; $N^{(apt)}=6$ *“ į protokolą. Atsilaisvinusį ketvirtąjį kirpėją grąžiname į LKG. Pereiname į 17-jį bloką.

72. Kadangi $m=0$, tai grįžtame į 6-jį bloką ir iš BĮG iškviečiame įrašą: „7³³; 2 *“. Todėl į taimerį įrašome 7³³. Pereiname į 7-jį bloką, analizuojantį įvykusio įvykio tipą.

73. Septintasis blokas perduoda valdymą į 8-jį bloką, kuris generuoja atvykusių klientų skaičių n . Kadangi $\xi_{28}=0,8962$ ir $p(1)<\xi_{28}<(p(1)+p(2))$, tai $n=2$. Tą skaičių įrašome į skaitliuką: $n:=2$ ir apskaičiuojame naują $N^{(a)}$ reikšmę: $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=7+2=9$. Į protokolą įrašome: „7³³; 2; $n=2$; $N^{(a)}=9$ *“. Pereiname į 9-jį bloką.

74. Kadangi $n>0$, tai pereiname į 10-jį bloką prie atvykusių klientų registravimo. $N_i:=N_i+1=7+1=8$, $n:=n-1=2-1=1$.

75. Nustatę, jog LKG ne tuščia, iš LKG iškviečiame antrąjį kirpėją, nes $T_2<T_4$. Kadangi $\xi_{29}=0,4952<p_1$, tai $r=1$. Kadangi $\xi_{30}=0,1939$, tai $\tau_{8,2} = 12 \ln \frac{1}{1-0,1939} \approx 12 \cdot 0,2155 \text{ min} \approx 3 \text{ min}$. Todėl

$t_{8,2}^{(b)}=7^{33}+0^{03}=7^{36}$, $T_2:=T_2+\tau_{8,2}=14+3=17$. Į protokolą įrašome: „7³³; 3; $N_i=8$; $j=2$; $r=1$; $\tau_{8,2}=3$; $t_{8,2}^{(b)}=7^{36}$; $T_2=17$ *“, o į BĮG: „7³⁶; 5; $N_i=8$; $j=2$ *“. Grįžtame į 9-jį programos bloką.

76. Kadangi $n=1$, tai pereiname prie dar likusio atvykusio kliento aptarnavimo: $N_i:=N_i+1=8+1=9$. Iš skaitliuko n atimame vienetą: $n:=n-1=1-1=0$ ir pereiname į 11-jį programos bloką.

77. Kadangi LKG ne tuščia, tai pereiname į 12-jį programos bloką. Iškviečiame iš LKG trečiąjį kirpėją. Kadangi $\xi_{31}=0,2598$, tai $r=1$. Kadangi $\xi_{32}=0,6727$, tai $\tau_{9,3} = 12 \ln \frac{1}{1-0,6727} \approx$

$\approx 12 \cdot 1,1170 \text{ min} \approx 13 \text{ min}$. Todėl $t_{9,3}^{(b)}=7^{33}+0^{13}=7^{46}$, $T_3:=T_3+\tau_{9,3}=14+13=27$. Į protokolą įrašoma: „7³³; 3; $N_i=9$; $j=3$; $r=1$; $\tau_{9,3}=13$; $t_{9,3}^{(b)}=7^{46}$; $T_3=27$ *“, o į BĮG: „7⁴⁶; 5; $N_i=9$; $j=3$ *“. Grįžtame į 9-jį programos bloką.

78. Kadangi $n=0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 5-jį bloką, kuriame generuojame naują $\tau^{(a)}$ reikšmę. Kadangi $y=\xi_{33}=0,3074$, tai $\tau^{(a)} = 5 \ln \frac{1}{1-0,3074} \approx 5 \cdot 0,3673 \text{ min} \approx 2 \text{ min}$. Todėl

$t^{(a)}=7^{33}+0^{02}=7^{35}$. Į BĮG įrašome „7³⁵; 2 *“. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje yra tokie įrašai: „7³⁵; 2 * 7³⁶; 5; $N_i=8$; $j=2$ * 7⁴⁶; 5; $N_i=9$; $j=3$ * 7⁴⁷; 5; $N_i=5$; $j=1$ * 20⁰⁰; 8 *“. LKG yra netuščia. Šiuo metu ten yra laisvas ketvirtasis kirpėjas. Pereiname į 6-jį programos bloką.

79. Iš BĮG išskviečiame informaciją apie artimiausiąjį būsimąjį įvykį: „ 7^{35} ; 2 *“. Nustatome naują taimerio reikšmę: $t:=7^{35}$ ir, kadangi įvykęs įvykis priklauso antrajam tipui, tai pereiname į 8-jį programos bloką.

80. Kadangi $\xi_{34}=0,3546$, tai $n=1$. Tą skaičių įrašome į skaitliuką n ($n:=1$). Apskaičiuojame $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=9+1=10$ ir į protokolą įrašome: „ 7^{35} ; 2; $n=1$; $N^{(a)}=10$ *“. Pereiname į 9-jį programos bloką.

81. Kadangi $n>0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 10-jį bloką, kur $N_i:=N_i+1=9+1=10$ ir iš skaitliuko n atimamas vienetas: $n:=n-1=1-1=0$. Pereiname į 11-jį programos bloką.

82. Nustatę, jog LKG ne tuščia, iš LKG išskviečiame ketvirtąjį kirpėją, po ko LKG lieka tuščia.

Kadangi $\xi_{35}=0,9800$, tai $r=3$. Kadangi $\xi_{36}=0,2428$, tai $\tau_{10,4} = 25 \ln \frac{1}{1-0,2428} \approx 25 \cdot 0,2781 \text{ min} \approx 7 \text{ min}$.

Todėl $t_{10,4}^{(b)}=7^{35}+0^{07}=7^{42}$, $T_4:=T_4+\tau_{10,4}=20+7=27$. Į protokolą įrašome: „ 7^{35} ; 3; $N_i=10$; $j=4$; $r=3$; $\tau_{10,4}=7$; $t_{10,4}^{(b)}=7^{42}$; $T_4=27$ *“, o į BĮG: „ 7^{42} ; 5; $N_i=10$; $j=4$ *“. Grįžtame į 9-jį programos bloką.

83. Kadangi $n=0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 5-jį bloką, kuriame generuojame naują $\tau^{(a)}$ reikšmę. Kadangi $y=\xi_{37}=0,7207$, tai $\tau^{(a)} = 5 \ln \frac{1}{1-0,7207} \approx 5 \cdot 1,2754 \text{ min} \approx 6 \text{ min}$. Todėl $t^{(a)}=7^{35}+0^{06}=$

$=7^{41}$. Į BĮG įrašome „ 7^{41} ; 2 *“. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje yra tokie įrašai: „ 7^{36} ; 5; $N_i=8$; $j=2$ * 7^{41} ; 2 * 7^{42} ; 5; $N_i=10$; $j=4$ * 7^{46} ; 5; $N_i=9$; $j=3$ * 7^{47} ; 5; $N_i=5$; $j=1$ * 20^{00} ; 8 *“.

84. Šeštasis programos blokas išskviečia iš BĮG informaciją apie artimiausiąjį būsimąjį įvykį: „ 7^{36} ; 5; $N_i=8$; $j=2$ *“ ir į taimerį įrašo $t:=7^{36}$.

85. Kadangi įvyko penktojo tipo įvykis, tai 7-sis programos blokas perveda valdymą į 16-jį bloką.

86. Apskaičiuojame $N^{(apt)}:=N^{(apt)}+1=6+1=7$ ir įrašome į protokolą: „ 7^{36} ; 5; $N_i=8$; $j=2$; $N^{(apt)}=7$ *“. Antrąjį kirpėją grąžiname į LKG, o valdymą perduodame į 17-jį programos bloką.

87. Kadangi dabartiniu momentu $m=0$, tai grįžtame į 6-jį bloką ir iš BĮG išskviečiame įrašą: „ 7^{41} ; 2 *“. Todėl į taimerį įrašome 7^{41} . Pereiname į 7-jį bloką, analizuojantį įvykusio įvykio tipą.

88. Septintasis blokas perduoda valdymą į 8-jį bloką, kuris generuoja atvykusių klientų skaičių n . Kadangi $\xi_{38}=0,0457$, tai $n=1$. Tą skaičių įrašome į skaitliuką n ($n:=1$). Apskaičiuojame $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=10+1=11$ ir į protokolą įrašome: „ 7^{41} ; 2; $n=1$; $N^{(a)}=11$ *“. Pereiname į 9-ąjį programos bloką.

89. Kadangi $n>0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 10-jį bloką, kur $N_i:=N_i+1=10+1=11$ ir iš skaitliuko n atimamas vienetas: $n:=n-1=1-1=0$. Pereiname į 11-jį programos bloką.

90. Kadangi LKG netuščia tai pereiname į 12-ąjį programos bloką. Išskviečiame iš LKG antrąjį kirpėją (LKG lieka tuščia). Kadangi $\xi_{39}=0,7670$, tai $r=2$. Kadangi $y=\xi_{40}=0,6185$, tai $\tau_{11,2} = 15 \cdot \ln \frac{1}{1-0,6185} \approx 15 \cdot 0,9636 \text{ min} \approx 14 \text{ min}$. Todėl $t_{11,2}^{(b)}=t+\tau_{11,2}=7^{41}+0^{14}=7^{55}$, $T_2:=T_2+\tau_{11,2}=$

$=17+14=31$. Į protokolą įrašomas trečiojo tipo įrašas: „ 7^{41} ; 3; $N_i=11$; $j=2$; $r=2$; $\tau_{11,2}=14$; $t_{11,2}^{(b)}=7^{55}$; $T_2=31$ *“, o į BĮG – penktojo tipo įrašas „ 7^{55} ; 5; $N_i=11$; $j=2$ *“. Grįžtame į 9-tąjį programos bloką.

91. Kadangi $n=0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 5-jį bloką, kuriame generuojame naują $\tau^{(a)}$ reikšmę. Kadangi $y=\xi_{41}=0,0693$, tai $\tau^{(a)} = 5 \ln \frac{1}{1-0,0693} \approx 5 \cdot 0,0718 \text{ min} \approx 0 \text{ min}$. Todėl $t^{(a)}=7^{41}+0^{00}=$

$=7^{41}$. Į BĮG įrašome „ 7^{41} ; 2 *“. Dabar būsimųjų įvykių grandinėje yra tokie įrašai: „ 7^{41} ; 2 * 7^{42} ; 5; $N_i=10$; $j=4$ * 7^{46} ; 5; $N_i=9$; $j=3$ * 7^{47} ; 5; $N_i=5$; $j=1$ * 7^{55} ; 5; $N_i=11$; $j=2$ * 20^{00} ; 8 *“.

92. Šeštasis programos blokas išskviečia iš BĮG informaciją apie artimiausiąjį būsimąjį įvykį: „ 7^{41} ; 2 *“ ir į taimerį įrašo $t:=7^{41}$.

93. Kadangi įvyko antrojo tipo įvykis, tai 7-sis programos blokas perveda valdymą į 8-jį bloką, kuris generuoja atvykusių klientų skaičių n .

94. Kadangi $y=\xi_{42}=0,2752$, tai $n=1$. Tą skaičių įrašome į skaitliuką n ($n:=1$). Apskaičiuojame $N^{(a)}:=N^{(a)}+n=11+1=12$ ir į protokolą įrašome: „ 7^{41} ; 2; $n=1$; $N^{(a)}=12$ *“. Dabar BĮG turinys tampa toks: „ 7^{42} ; 5; $N_i=10$; $j=4$ * 7^{46} ; 5; $N_i=9$; $j=3$ * 7^{47} ; 5; $N_i=5$; $j=1$ * 7^{55} ; 5; $N_i=11$; $j=2$ * 20^{00} ; 8 *“. Pereiname į 9-jį bloką.

95. Kadangi $n>0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 10-jį bloką, kur atvykęs klientas užregistruojamas ($N_i:=N_i+1=11+1=12$) ir iš skaitliuko n atimamas 1 ($n:=n-1=1-1=0$). Pereiname į 11-jį bloką.

96. Kadangi šiuo metu LKG tuščia, tai 11-sis blokas perduoda programos valdymą į 13-jį bloką, kuris tikrina, ar dabartiniu metu eilės ilgis m neviršija maksimalaus eilės ilgio $\hat{m}=8$.

97. Kadangi dabartinis eilės ilgis $m=0$, tai $m < \hat{m}$. Todėl 13-sis blokas perduoda valdymą į 14-jį bloką, kuriame apskaičiuojamas naujas eilės ilgis $m:=m+1=0+1=1$. Į protokolą įrašomas ketvirtojo tipo įvykis: „7⁴¹; 4; N_i=12; m=1 *“. Po to valdymas grąžinamas į 9-jį bloką.

98. Kadangi $n=0$, tai 9-sis blokas perduoda valdymą į 5-jį bloką, kuriame generuojama nauja τ reikšmė, apskaičiuojamas naujos klientų grupės atvykimo laikas ir į BĮG įrašomas antrojo tipo įvykis. Po to valdymas perduodamas į 6-jį bloką ir t. t. ir t. t. iki pamainos pabaigos.

Čia pateiktų skaičiavimų rezultatai buvo surašyti į imitacinio modeliavimo protokolą, kurio pradžia pateikta 103-joje, 104-joje ir 105-joje lentelėse.

„Rankinis imitavimas“ padeda geriau suvokti, kaip vyksta imitacinis modeliavimas kompiuteryje. Po tokio imitavimo seanso studentai jau gana nesunkiai sudaro imitavimo programą ir laisvai eksperimentuoja su ja, keisdami pradinės sąlygas ir imitacinio modelio parametrų reikšmes.

„Rankinio imitavimo“ rezultatais galima pasinaudoti, derinant sudarytą imitavimo programą kompiuteriui bei tikrinant programos darbą.

Todėl laikas, sugaištas imituojant „rankiniu būdu“, pedagogine prasme atsiperka.

Dabar panagrinėsime imitavimo rezultatų statistinio apdorojimo metu rastas **kirpyklos funkcionavimo statistines charakteristikas** (žiūr. 106-ją ir 107-ją lenteles).

106-ojoje lentelėje vaizduojami III kurso studento D. Ruzgo dešimties pamainų (dienų) modeliavimo metu sukauptos informacijos statistinio apdorojimo rezultatai.

106. lentelė

Diena 1.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 93,67 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 96,97 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 88,17 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 90,92 %
 Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 14,03 klientai p/h
 Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 15,81 min.
 Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 22,66 min.
 Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 73,28 %

Diena 2.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 87,30 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 82,34 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 73,28 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 74,74 %
 Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 13,14 klientai p/h
 Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 14,51 min.
 Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 17,92 min.
 Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 73,28 %

Diena 3.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 85,67 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 81,58 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 76,61 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 74,56 %
 Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 15,09 klientai p/h
 Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 12,66 min.
 Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 12,74 min.
 Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 98,29 %

Diena 4.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 86,58 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 86,02 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 82,20 %

Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 75,14 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 16,27 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 12,17 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 13,56 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 90,57 %

Diena 5.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 76,29 %
Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 54,95 %
Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 59,69 %
Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 50,77 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 10,96 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 13,23 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 13,18 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 96,32 %

Diena 6.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 84,41 %
Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 81,66 %
Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 71,72 %
Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 65,93 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 13,24 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 13,76 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 14,22 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 95,24 %

Diena 7.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 82,07 %
Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 81,39 %
Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 85,46 %
Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 72,15 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 13,37 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 14,41 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 12,47 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 92,13 %

Diena 8.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 91,18 %
Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 93,31 %
Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 87,34 %
Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 81,79 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 14,08 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 15,07 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 16,95 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 85,05 %

Diena 9.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 89,92 %
Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 84,20 %
Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 80,65 %
Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 82,56 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 13,98 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 14,48 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 9,58 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 100,00 %

Diena 10.

Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimo procentas: 91,12 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimo procentas: 86,96 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimo procentas: 86,25 %
 Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimo procentas: 87,25 %
 Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia: 13,24 klientai p/h
 Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė: 15,94 min.
 Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas: 21,48 min.
 Vidutinis klientų aptarnavimo procentas: 80,21 %

Studento D. Ruzgo algoritme nebuvo numatyta klientų paskirstymo tarp kirpėjų tvarka, kuri išlygintų kirpėjų apkrovimą, kaip tai daroma algoritme, kurio blokinė schema pavaizduota 304 pav. Jei atėjusį į kirpyklą klientą tuoj pat galėjo aptarnauti keli kirpėjai, tai klientas buvo skiriamas tam kirpėjui, kurio numeris j mažiausias, o ne tam, kuris anksčiausiai baigė aptarnavimą. Todėl kirpėjų apkrovimo lygiai 106-joje lentelėje gana žymiai skiriasi: kuo mažesnis kirpėjo numeris j, tuo jo apkrovimas q_j (kaip taisyklė) didesnis.

Antrasis 106-sios lentelės rezultatų trūkumas – juose nenurodyti dydžiai $\bar{m}^{(p)}$. Reikia pastebėti, kad gauti dydžius $\bar{m}^{(p)}$ nesugebėjo gana nemaža grupė studentų, nes jie nesugebėjo išvesti formulės $\bar{m} = \frac{T^{(e)}}{t^{(f.p)} - t^{(p.p)}}$.

Apibendrinus statistinę informaciją, sukaupią per 10 pamainų modeliavimą, buvo gautos vidurkių reikšmės, parodytos 107-joje lentelėje.

107. lentelė

Rodiklio pavadinimas	Rodiklio reikšmė
Vidutinis kirpėjos Nr.1 apkrovimas $\bar{q}_1$ (procentais)	86,82 %
Vidutinis kirpėjos Nr.2 apkrovimas $\bar{q}_2$ (procentais)	82,94 %
Vidutinis kirpėjos Nr.3 apkrovimas $\bar{q}_3$ (procentais)	79,14 %
Vidutinis kirpėjos Nr.4 apkrovimas $\bar{q}_4$ (procentais)	75,58 %
Vidutinė kirpyklos praleidžiamoji galia $\bar{A}$	13,74 klientai p/h
Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė $\bar{\tau}^{(a)}$	14,20 min.
Vidutinis kliento laukimo eilėje laikas $\bar{\tau}^{(e)}$	15,48 min.
Vidutinis klientų aptarnavimo procentas $\bar{\alpha}$	90,09 %

Gautų vidurkių tikslumas, bendrai paėmus, turėtų priklausyti nuo eksperimentų skaičiaus: kuo didesnis pamainų ir aptarnautų klientų skaičius, tuo tikslesnės turėtų būti vidurkių reikšmės.

Galima patikrinti, ar dešimties pamainų modeliavimas duoda pakankamą eksperimentų skaičių, t. y. ar užtikrina pakankamą vidurkių tikslumą. Palyginsime eksperimentinius (modeliavimo) rezultatus su tais rezultatais, kuriuos galima apskaičiuoti analiziškai. Pavyzdžiui, nesunku analiziškai apskaičiuoti

klientų aptarnavimo trukmės teorinį vidurkį (matematinę viltį) $\bar{\tau}^{(a)} = \sum_{r=1}^{\hat{r}} p_r \bar{\tau}_r = p_1 \bar{\tau}_1 + p_2 \bar{\tau}_2 + p_3 \bar{\tau}_3 =$
 $= 0,5 \cdot 12 \text{ min} + 0,4 \cdot 15 \text{ min} + 0,1 \cdot 25 \text{ min} = 14,5$. Lygindami šią reikšmę su eksperimentine, lygia 14,20 min. (žiūr. 107-ąją lentelę), gauname, jog absoliuti paklaida $\alpha = 0,3 \text{ min.}$, o santykinė paklaida $\delta = \frac{0,3}{14,5} \approx 0,02$,

t. y. apie 2%.

Tai nėra taip jau blogas rezultatas ir todėl galima teigti, kad $\hat{p} = 10$ yra toks imituotų pamainų skaičius, kurio pakanka, kad gautume pakankamai tikslias vidurkių reikšmes.

Analizuodami atskirų pamainų klientų aptarnavimo trukmės vidurkius (žiūr. 106-ąją lentelę), galime pastebėti, jog dauguma jų nelabai nutolsta nuo teorinės reikšmės $\bar{\tau}^{(a)} = 14,5$ (žiūr. antros, septintos ir devintos pamainos modeliavimo rezultatus 106-joje lentelėje), tačiau pasitaiko dienų, kada α ir δ pasiekia ne tokias jau mažas reikšmes (pavyzdžiui, ketvirtąją pamainą gauname $\alpha = 14,5 - 12,7 = 2,33$, $\delta = \frac{2,33}{14,5} \approx 0,16$, t. y. apie 16%, o dešimtąją pamainą $\alpha = 14,5 - 15,94 = -1,44$, $\delta = -\frac{1,44}{14,5} \approx -0,10$, t. y. apie

10%). Todėl galima padaryti išvadą, jog tik vienos pamainos modeliavimas dar negali užtikrinti pakankamai tikslių vidurkių gavimo.

Iš kitos pusės, žinodami, jog $\hat{p}=10$ leido gauti pakankamai tikslias $\bar{\tau}^{(a)}$ reikšmes, galime tikėtis, jog ir kiti vidurkiai, kurių mes analiziškai apskaičiuoti negalime, yra pakankamai tikslūs. Pavyzdžiui, galime tvirtinti, jog kirpyklos su keturiais kirpėjais vidutinė praleidžiamoji galia yra apie 13,47 klientų į valandą. Rasti šį dydį analiziškai tikrai sunku (jei iš viso įmanoma, ypač, jei pasiskirstymai būtų dar sudėtingesni). Panašūs pavyzdžiai vaizdžiai rodo sudėtingų procesų imitacinio modeliavimo pranašumą, lyginant su analiziniais metodais: sudėtingose sistemose, kur analizinių metodų pritaikyti neįmanoma, imitacinio modeliavimo metodais galime gauti mus dominančią informaciją, žinoma, sugaišus pakankamai laiko imitacinių modelių sudarymui ir mašininiam eksperimentams.

Nemaža grupė studentų įvykdė dalį papildomos užduoties ir išnagrinėjo kirpyklos funkcionavimo charakteristikų kitimą, kintant kirpėjų skaičiui. 108-je lentelėje parodyti studento R. Janonio gauti rezultatai, modeliuojant kirpyklos darbą per septynias paras, kai kirpykloje dirba 5 kirpėjai.

108. lentelė

Diena 1.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 56,00 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 53,83 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 42,17 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 36,00 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 32,42 %
 Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 14 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 5 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 16 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 99,46%

Diena 2.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 51,58 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 49,33 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 50,33 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 42,50 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 31,08 %
 Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 13 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 2 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 14 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 100,00 %

Diena 3.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 60,83 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 50,92 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 47,00 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 40,08 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 32,67 %
 Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 14 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 9 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 17 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 98,03 %

Diena 4.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 49,33 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 45,42 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 35,75 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 37,17 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 27,08 %

Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 13 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 4 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 14 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 97,81 %

Diena 5.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 56,42 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 48,83 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 42,08 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 38,83 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 28,92 %
 Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 12 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 3 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 13 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 100,00 %

Diena 6.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 55,33 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 48,42 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 40,08 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 40,08 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 34,92 %
 Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 14 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 6 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 16 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 100,00 %

Diena 7.

Kirpėjos 1. vid. apkrovimo procentas: 56,17 %
 Kirpėjos 2. vid. apkrovimo procentas: 46,58 %
 Kirpėjos 3. vid. apkrovimo procentas: 44,17 %
 Kirpėjos 4. vid. apkrovimo procentas: 40,00 %
 Kirpėjos 5. vid. apkrovimo procentas: 33,33 %
 Kirpyklos kliento aptarnavimo vid. trukmė: 13 min.
 Kirpyklos klientų, patekusių į eilę, vid. laukimo laikas: 6 min.
 Kirpyklos kliento praleistas kirpykloje vid. laikas: 15 min.
 Kirpyklos klientų aptarnavimo vid. procentas: 99,02 %

Lygindami 106-ją ir 108-ją lenteles, randame, jog didėjant kirpėjų skaičiui k nuo 4 iki 5, žymiai sumažėja kirpėjų apkrovimas ir klientų laukimo eilėje trukmė, padidėja klientų aptarnavimo procentas ir, žinoma, nepasikeičia vidutinė kliento aptarnavimo trukmė. Visa tai atitinka tikrovę ir rodo, jog imitacinis modelis atspindi realius procesus.

Sumažinus kirpėjų skaičių k iki 3, charakteristikos keičiasi į priešingą pusę, ką rodo studentės R. Mišeikytės gauti rezultatai (žiūr. 109-ąją lentelę), modeliuojant kirpyklos darbą per 6 pamainas. R. Mišeikytės algoritmas klientus kirpėjams skirstė taip, kad jų apkrovimas būtų beveik lygus, todėl ji savo programoje atskirai neskaičiavo kiekvieno kirpėjo apkrovimą, o surado bendrą visų kirpėjų apkrovimą $\bar{q}$.

109. lentelė

Kirpyklos darbo statistinė charakteristika 1-ją darbo dieną

Pirmas klientas atėjo 7 val. 4 min.
 Iš viso atėjo 191 žmonės.
 Iš jų aptarnauta 160 žmonių.
 Kirpėjų apkrovimas 91,09 %
 Praleidžiamoji galia 12,31 žmonių/valandą.
 Kliento aptarnavimo trukmė 13,32 min.
 Laukimo laikas eilėje 16,43 min.

Laukiančiųjų eilėje ilgis 3,37 žmonių.
Aptarnauta 83,77 % atėjusių klientų.

Kirpyklos darbo statistinė charakteristika 2-ją darbo dieną

Pirmas klientas atėjo 7 val. 1 min.
Iš viso atėjo 185 žmonės.
Iš jų aptarnauta 158 žmonės.
Kirpėjų apkrovimas 94,30 %
Praleidžiamoji galia 12,15 žmonių/valandą.
Kliento aptarnavimo trukmė 13,97 min.
Laukimo laikas eilėje 21,32 min.
Laukiančiųjų eilėje ilgis 4,32 žmonių.
Aptarnauta 85,41 % atėjusių klientų.

Kirpyklos darbo statistinė charakteristika 3-ją darbo dieną

Pirmas klientas atėjo 7 val. 1 min.
Iš viso atėjo 183 žmonės.
Iš jų aptarnauta 172 žmonių.
Kirpėjų apkrovimas 88,99 %
Praleidžiamoji galia 13,23 žmonių/valandą.
Kliento aptarnavimo trukmė 12,07 min.
Laukimo laikas eilėje 12,65 min.
Laukiančiųjų eilėje ilgis 2,79 žmonių.
Aptarnauta 93,99 % atėjusių klientų.

Kirpyklos darbo statistinė charakteristika 4-ją darbo dieną

Pirmas klientas atėjo 7 val. 0 min.
Iš viso atėjo 229 žmonės.
Iš jų aptarnauta 162 žmonės.
Kirpėjų apkrovimas 103,20 %
Praleidžiamoji galia 12,46 žmonių/valandą.
Kliento aptarnavimo trukmė 14,91 min.
Laukimo laikas eilėje 27,78 min.
Laukiančiųjų eilėje ilgis 5,77 žmonių.
Aptarnauta 70,74 % atėjusių klientų.

Kirpyklos darbo statistinė charakteristika 5-ją darbo dieną

Pirmas klientas atėjo 7 val. 5 min.
Iš viso atėjo 206 žmonės.
Iš jų aptarnauta 160 žmonių.
Kirpėjų apkrovimas 94,21 %
Praleidžiamoji galia 12,31 žmonių/valandą.
Kliento aptarnavimo trukmė 13,78 min.
Laukimo laikas eilėje 23,45 min.
Laukiančiųjų eilėje ilgis 4,81 žmonių.
Aptarnauta 77,67 % atėjusių klientų.

Kirpyklos darbo statistinė charakteristika 6-ją darbo dieną

Pirmas klientas atėjo 7 val. 2 min.
Iš viso atėjo 238 žmonės.
Iš jų aptarnauta 147 žmonės.
Kirpėjų apkrovimas 99,48 %
Praleidžiamoji galia 11,31 žmonių/valandą.
Kliento aptarnavimo trukmė 15,84 min.
Laukimo laikas eilėje 32,49 min.
Laukiančiųjų eilėje ilgis 6,12 žmonių.
Aptarnauta 61,76 % atėjusių klientų.

Vidutinės kirpyklos darbo statistinės charakteristikos

Vid. pirmas klientas atėjo 7 val. 2 min.
Vid.kirpėjų apkrovimas 95,16 %
Vid.praleidžiamoji galia 12,29 žmonių/valandą.
Vid.kliento aptarnavimo trukmė 13,98 min.
Vid.laukimo laikas eilėje 22,35 min.
Vid.laukiančiųjų eilėje ilgis 4,53 žmonių.
Vid.ap tarnauta 78,89 % atėjusių klientų.

Kadangi R. Mišeikytė modeliavo tik 6 pamainas, tai jos gautos vidutinės kliento aptarnavimo trukmės $\bar{\tau}^{(a)}$ paklaida $\delta \approx 3.5\%$ yra šiek tiek didesnė, negu D. Ruzgo, modeliavusio 10 pamainų. Tačiau ir jos rezultatai yra pakankamai patikimi ir leidžia daryti išvadas apie kirpyklos darbą ir jo pakitimus, keičiantis kirpėjų skaičiui. Reikėtų šalia to pažymėti, jog R. Mišeikytė viena iš pirmųjų sudarė gana universalias imitavimo ir statistinio informacijos apdorojimo programas ir pasirinko gana tobulą imitavimo protokolo formą. Todėl studentui, studijuojančiam statistinio modeliavimo kursą, rekomenduočiau detaliau susipažinti su R. Mišeikytės darbu, o taip pat ir su kitų studentų darbais.

Taip pat parekomenduočiau skaitytojui, jau sudariusiam kirpyklos funkcionavimo imitavimo ir imitavimo metu gautų rezultatų statistinio apdorojimo programas, pakeksperimentuoti su tuo modeliu. Tai leistų, iš vienos pusės, **įsitikinti, kad imitacinis modelis leidžia gauti atsakymus į tuos klausimus, į kuriuos skaitytojas, paprastai, negalėtų iškart (ar iš viso) atsakyti arba galėtų atsakyti ne visada teisingai**, o iš antros pusės – pagilinti imituojamų procesų suvokimą, kas yra irgi labai svarbu, nes atkreipia studentų dėmesį dar į vieną imitacinio modeliavimo taikymo sritį. Pasirodo, kad **eksperimentai (žaidimai) su imitaciniais modeliais gali tapti gana efektyvia tikrovės pažinimo priemone bei geru pagalbininku mokymosi procese**.

Šių teiginių teisingumą jau ne kartą patvirtino mano asmeninė pedagoginė praktika.

Pradžioje aš užduodu studentui, demonstruojančiam man savo sudarytą kirpyklos funkcionavimą imituojančią programą ir tuo atsiskaitančiam už padarytą praktinį darbą, tokius klausimus, į kuriuos jis lengvai randa atsakymus ir be imitacinio modelio. Pavyzdžiui, paklausiu, kurie iš statistinių rodiklių (kirpėjų apkrovimas, kirpyklos praleidžiamoji galia, eilės ilgis ir t. t.) padidėtų, kurie sumažėtų ir kurie liktų beveik nepakitę, jei pasikeistų ateinančių į kirpyklą klientų skaičiaus tikimybės $p(n)$ arba aptarnavimo rūšių pasirinkimo tikybės p_r (sakykim, vietoj buvusių $p(1)=0,71$, $p(2)=0,23$, $p(3)=0,05$, $p(4)=0,01$ pateikiu kitas tų tikimybių reikšmes, na, kad ir $p(1)=0,5$, $p(2)=0,2$, $p(3)=0,1$, $p(4)=0,2$ ir pan.). Studentas truputį pamąstęs, suranda teisingą atsakymą, ir aš jam siūlau, pakeitus imitacinio modelio parametrus, įsitikinti, jog imitacinio, modeliavimo rezultatai patvirtina studento atsakymų teisingumą. Po to, duodu jau sunkesnę klausimą, į kurį jau ne taip paprasta iškart rasti teisingą atsakymą. Atsakydami į tokius klausimus studentai kartais suklysta ir, pasinaudodami imitaciniu modeliu, suranda savo klaidą, o po to suvokia ir jos priežastį. Galų gale užduodu studentui ir tokį klausimą, į kurį daugumoje atvejų jis atsakyti iš viso negali. Pavyzdžiui, paklausiu, kaip pasikeistų kirpyklos darbo rodikliai, jei aptarnavimo trukmė taptų ne eksponentiškai, o normaliai pasiskirsčiusiu atsitiktiniu dydžiu su tokiu tai vidurkiu ir su tokiu tai kvadratinu nuokrypiu. Panašiais atvejais studento intuicija ir loginis mąstymas dažniausiai jau nebesugeba padėti studentui rasti teisingą atsakymą, o imitacinis modelis tokį atsakymą duoda. **Tai leidžia studentui praktiškai pajusti imitacinio modeliavimo naudą**, ir jis su susidomėjimu priima mano pasiūlymą savarankiškai pakeksperimentuoti su savo sudarytu imitaciniu modeliu, kuris, pasirodo, „esąs protingesnis už savo sudarytoją“. Įdomiausia gi tai, kad po serijos įvairių eksperimentų dauguma studentų pradeda ir be imitacinio modelio teisingai atsakinėti į

specialiai pasirinktus gana keblus klausimus. Visa tai leidžia studentams **praktiškai įsitikinti, kad matematiniai eksperimentai su imitaciniais modeliais ne tik padeda priimti teisingesnius sprendimus, bet ir patį eksperimentatorių daro protingesniu, labiau patyrusiu.**

Baigdamas statistinio modeliavimo panaudojimo, imituojant masinio aptarnavimo sistemos funkcionavimą, pavyzdžio nagrinėjimą, norėčiau pažymėti, jog tokios užduoties (ji užduočių sąrašė žymima 1.14.21-ju numeriu) įvykdymas žymiai sukonkretino ir pagilino studentų teorines ir praktines žinias imitacinio statistinio modeliavimo ir matematinių mašininių eksperimentų srityje. Tai gana svarbus ir pageidautinas rezultatas. Todėl šiai užduočiai ir buvo skirta šioje metodinėje priemonėje tiek daug dėmesio ir vietos. Skaitytojui rekomenduočiau ne tik pačiam pakartoti šią užduotį ir palyginti savo rezultatus su kitų studentų gautais rezultatais, bet ir būtinai atlikti šiek tiek sudėtingesnę 1.14.22-ją užduotį, o taip pat ir paeksperimentuoti su sudarytu gamybinio proceso modeliu.

Šių užduočių atlikimo metu būtų tikslinga susipažinti su šios mokymo priemonės antrosios dalies skyriais, ypatingai su Buslenkos agregato sąvoka, o taip pat su GPSS [32, 45, 161].

Tai žymiai palengvintų imitacinių modelių ir imitavimo programų sudarymo procesą, padėtų suvokti prielaidas, leidžiančias galvoti apie **imitacinių modelių kūrimo ir jų panaudojimo procesų struktūrizavimą, formalizavimą ir net automatizavimą.**

Labai svarbu, kad studentas, atlikdamas minėtas užduotis, išmoktų kurti imitacinius modelius ir naudotis jais dialoginiame režime, o taip pat susipažintų su tipinėmis imitacinio modeliavimo sistemomis bei tipiniais statistinių skaičiavimų programų paketais [132, 133, 134, 160, 163, 158, 159].

Po 1.14.21. užduoties atlikimo ir prieš pradedant vykdyti 1.14.22. užduotį tikslinga būtų sugrįžti prie darbo centrų sąveikos modelio bei TPP [113] ir dar kartą panagrinėti tą modelį ir TPP. Tai labai padėtų, atliekant 1.14.22. užduotį, iš vienos pusės, ir giliau suvokti minėtąjį TPP, iš kitos pusės.

Reikėtų pažymėti, kad paprastais atvejais (pavyzdžiui, kai įėjimų srautas yra puasoninis ir sistemoje vykstančių procesų trukmės pasiskirsčiusios eksponentiškai) masinio aptarnavimo sistemų galutinės (pusiausvyrinės) būsenos nustatymo, o kartais – ir fazinės trajektorijos radimo (sudarymo) uždavinius pavyksta išspręsti **analiziniiais masinio aptarnavimo sistemų teorijos metodais**, sprendžiant Čepmeno ir Kolmogorovo lygčių (diferencialinių ir algebrinių) sistemas, apie ką jau buvo kalbėta 1.4.12. skyrelyje.

Norint pasinaudoti tais metodais, sprendžiant mūsų nagrinėjamos kirpyklos funkcionavimo charakteristikų apskaičiavimo uždavinį, jos modelį tektų šiek tiek supaprastinti, suvedant jį į kurį nors standartinį masinio aptarnavimo sistemų teorijos modelį.

Mūsų nagrinėtos kirpyklos įėjimo srautas nėra puasoninis, nes klientai gali ateiti ir ne po vieną. Pakeisime šį srautą puasoniniu, turinčiu tą patį vidutinį intensyvumą λ . Apskaičiuosime to intensyvumo reikšmę, t. y. – apskaičiuosime vidutinį klientų, ateinančių į kirpyklą per laiko vienetą, skaičių:

$$\lambda = \frac{1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4)}{\bar{\tau}} = \frac{1 \cdot 0,71 + 2 \cdot 0,23 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,01}{5} = \frac{1,36}{5} = 0,272 \left(\frac{\text{klientų}}{\text{per minutę}} \right).$$

Eksponentiškai pasiskirsčiusių skirtingų aptarnavimų rūšių trukmių vidutinės trukmės perskaičiuosime į vienos aptarnavimo rūšies vidutinę trukmę $\bar{\tau}^{(a)}$:

$$\bar{\tau}^{(a)} = \bar{\tau}_1^{(a)} p_1 + \bar{\tau}_2^{(a)} p_2 + \bar{\tau}_3^{(a)} p_3 = 12 \text{min} \cdot 0,5 + 15 \text{min} \cdot 0,4 + 25 \text{min} \cdot 0,1 = 14,5 \text{min}.$$

Žinodami $\bar{\tau}^{(a)}$, apskaičiuosime vidutinį skaičių klientų, kuriuos per vieną laiko vienetą (vieną minutę) aptarnautų vienas kirpėjas: $\mu = \frac{1}{\bar{\tau}^{(a)}} = \frac{1}{14,5} = \frac{2}{29} \left(\frac{\text{klientų}}{\text{per minutę}} \right).$

Aptarnautų ir išeinančių iš kirpyklos klientų srauto intensyvumas priklausys nuo to, keli kirpėjai stebimais laiko tarpais bus užimti. Pavyzdžiui, jei kuriuo nors laiko tarpu iš 4 kirpykloje kirpėjų bus užimti tik 2, tai aptarnautų klientų srauto vidutinis intensyvumas tuo laiko tarpu bus lygus $2\mu = \frac{4}{29} \left(\frac{\text{klientų}}{\text{per minutę}} \right)$, o tuo laiko tarpu, kai taps užimti jau 3 kirpėjai – $3\mu = \frac{6}{29} \left(\frac{\text{klientų}}{\text{per minutę}} \right)$.

Kirpyklos būseną tuo ar kitu momentu charakterizuosime klientų skaičiumi j kirpykloje tuo momentu ir žymėsime z_j .

Kadangi kirpykloje dirba 4 kirpėjai ir maksimalus laukiančių aptarnavimo klientų skaičius $\hat{m}$ yra lygus 8, tai galimų sistemos būsenų skaičius yra lygus 13: $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}$.

Norėdami pasinaudoti būsenų z_j tikimybių p_j apskaičiavimui formulėmis, išvestomis 1.4.12. skyrelyje, privalome pradžioje apskaičiuoti perėjimų tikimybes $p_{ij}(t, t+\Delta t)$ ir perėjimų intensyvumus

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Kirpyklos būseną z_j gali keisti dviem būdais: 1) kai į kirpyklą ateina naujas klientas, kirpyklos būseną keičiasi iš z_j į z_{j+1} ; 2) kai kirpėjas baigia aptarnauti klientą ir jis išeina iš kirpyklos, tai kirpyklos būseną keičiasi iš z_j į z_{j-1} .

Perėjimo tikimybė $p_{j,j+1}(t, t+\Delta t)$ yra lygi tikimybei, kad per laiką Δt ateis vienas klientas.

Puasono srautui su vidutiniu intensyvumu λ galioja formulė $p_k(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}$, kurioje $p_k(\Delta t)$ – tikimybė, kad per laiko intervalą Δt įvyks lygiai k puasoninių įvykių.

$$\begin{aligned} \text{Mūsų nagrinėjamu atveju } k=1 \text{ ir todėl } p_{j,j+1}(t, t+\Delta t) &= p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}, \quad \lambda_{j,j+1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{j,j+1}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lambda e^{-\lambda \Delta t} = \lambda. \end{aligned}$$

Matome, jog perėjimų intensyvumas $\lambda_{j,j+1}$ yra pastovus dydis λ , kuris nepriklauso nuo j . Vadinasi, jis yra vienodas visoms būsenoms z_j .

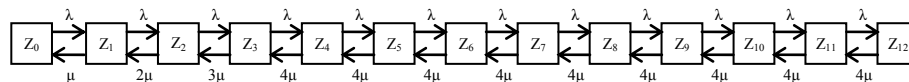
Dabar apskaičiuosime $p_{j,j-1}(t, t+\Delta t)$ ir $\lambda_{j,j-1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{j,j-1}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}$, kai dirba tik vienas kirpėjas.

Analogiškai gauname, jog tuo atveju, kai dirba tik vienas kirpėjas, $p_{j,j-1}(t, t+\Delta t) = \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t}$ ir $\lambda_{j,j-1} = \mu$. Kai dirba m kirpėjų, tai $\lambda_{j,j-1} = m\mu$.

Vadinasi, perėjimų, atsirandančių, kai aptarnautas klientas išeina iš kirpyklos, vidutinis intensyvumas, kai srautas yra puasoninis, priklauso tik nuo pastovaus dydžio μ ir nuo dirbančių kirpėjų skaičiaus m .

Dabar jau galima sudaryti schemą, vadinamą **kirpyklos perėjimų grafu**, vaizduojančią kirpyklos būsenų kitimo intensyvumus.

Ši schema, atsižvelgiant į tai, kad kirpykloje dirba 4 kirpėjai, kurių kiekvienas aptarnauja per laiko vienetą vidutiniškai μ klientų, o klientai į kirpyklą atvyksta po vieną su vidutiniu intensyvumu λ , atrodo taip:



306 pav.

1.4.12. skyrelyje mes gavome Kolmogorovo **diferencialinių lygčių sistemą tolydžioms Markovo grandinėms**:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{i=1, i \neq j}^n P_i(t) \lambda_{ij}(t) - P_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^n \lambda_{ji}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ši sistema rodo, jog sistemos būsenos z_j tikimybės $P_j(t)$ išvestinė $\frac{dP_j(t)}{dt}$ priklauso nuo j būseną z_j vedančių ir iš būsenos z_j išvedančių tikimybinių procesų charakteristikų sumų skirtumo.

Kai sistema pasiekia pusiausvyrinę būseną ir srautai, vedantys į būseną z_j ir iš būsenos z_j , tampa lygūs, išvestinė $\frac{dP_j(t)}{dt}$ tampa lygi 0 ir būsenos z_j tikimybė $P_j(t)$ nebesikeičia. Visos visų būsenų z_j

tikimybės tampa pastoviais dydžiais P_j ir **diferencialinė Kolmogorovo lygčių sistema tampa**

algebrinė:
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n P_i \lambda_{ij} - P_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ji} = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Naudodamiesi šia sistema ir lygybe $\sum_{j=1}^n P_j = 1$, galime apskaičiuoti finalinių tikimybių P_j

reikšmes.

Pritaikysime šias formules kirpyklos būsenoms.

Nagrinėdami 306 pav. pateiktą schemą, matome, jog atveju $j=0$ į būseną z_0 veda tik vienas „srautas“ $P_1\mu$, o iš būsenos z_0 veda „srautas“ $P_0\lambda$. Iš lygybės $P_1\mu - P_0\lambda = 0$ gauname, jog $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0$,

kur $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Nagrinėdami būseną z_1 matome, kad į būseną z_1 veda suma $P_0\lambda + P_22\mu$, o iš būsenos z_1 veda suma $P_1\mu + P_1\lambda$. Todėl gauname lygybę $P_0\lambda + P_22\mu = P_1\mu + P_1\lambda$. Atsižvelgdami į anksčiau gautą lygybę

$P_1\mu = P_0\lambda$, gauname lygybę $P_22\mu = P_1\lambda$, iš kur išplaukia, jog $P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\rho^2}{2} P_0$.

Analogiškai nagrinėdami būseną z_2 gauname, jog $P_3 \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\rho^3}{3!} P_0$.

Nagrinėdami būseną z_3 išvedame formulę $P_4 \frac{\lambda}{4\mu} P_3 = \frac{\rho^4}{4!} P_0$.

Kadangi užimtų kirpėjų skaičius, tapęs lygiu 4, toliau didėjant klientų skaičiui kirpykloje, jau nebegali keistis, tai nagrinėdami būsenas z_4, z_5, z_6 ir t. t. gauname formules: $P_5 = \frac{\lambda}{4\mu} P_4 = \frac{\rho^5}{4!4} P_0$;

$P_6 = \frac{\lambda}{4\mu} P_5 = \frac{\rho^6}{4!4^2} P_0$ ir t. t., t. y. $P_j = \frac{\rho^j}{4!4^{j-4}} P_0$, kai $j=5, 6, \dots, 12$.

Įstatę gautas P_j išraiškas į formulę $\sum_{j=0}^{12} P_j = 1$, išvedame tikimybės P_0 apskaičiavimo formulę:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} + \frac{\rho^4}{24} \left(1 + \frac{\rho}{4} + \frac{\rho^2}{4^2} + \dots + \frac{\rho^7}{4^7} + \frac{\rho^8}{4^8} \right)} = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} + \frac{\rho^4}{24} \cdot \frac{1 - \frac{\rho^9}{4^9}}{1 - \frac{\rho}{4}}}.$$

Kadangi $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,272 \cdot 29}{2} = 3,944$, tai gauname, jog $P_0 \approx 0,009194247$.

Dabar jau galime apskaičiuoti visas kitas finalines tikimybes P_j :

$P_1 = \rho P_0 \approx 0,03626211$; $P_2 = \frac{\rho^2}{2} P_0 \approx 0,071508881$; $P_3 = \frac{\rho^3}{6} P_0 \approx 0,094010342$;

$P_4 = \frac{\rho^4}{24} P_0 \approx 0,092694197$; $P_5 = \frac{\rho}{4} P_4 \approx 0,091396479$; $P_6 = \frac{\rho}{4} P_5 \approx 0,090116928$;

$P_7 = \frac{\rho}{4} P_6 \approx 0,088855291$; $P_8 = \frac{\rho}{4} P_7 \approx 0,087611317$; $P_9 = \frac{\rho}{4} P_8 \approx 0,086384758$;

$P_{10} = \frac{\rho}{4} P_9 \approx 0,085175372$; $P_{11} = \frac{\rho}{4} P_{10} \approx 0,083982917$; $P_{12} = \frac{\rho}{4} P_{11} \approx 0,082807156$.

Žinodami pusiausvyrinės būsenos finalinių tikimybių P_j reikšmes, galime apskaičiuoti įvairias kitas pusiausvyrines kirpyklos funkcionavimo charakteristikas.

Atlikdami tokius apskaičiavimus, naudosimės ta aplinkybe, kad tikimybę P_j galima interpretuoti kaip tą viso kirpyklos darbo laiko pusiausvyrinėje būsenoje dalį, kurią kirpykla būna būsenoje z_j .

Vadinasi, būsenoje z_{12} , kuomet atėję nauji klientai nebepriimami į kirpyklą, nes joje laukiančiųjų aptarnavimo klientų eilė yra jau lygi $\hat{m}=8$, kirpykla, dirbdama jau nusistovėjusiam režime, būna tik šiek tiek daugiau nei 8 % savo darbo laiko. Per tą laiką atėję klientai, kurių vidutinis skaičius bus lygus λTP_{12} , liks neaptarnauti. Lygindami su vidutiniu atėjusiu per laiką T klientų skaičiumi λT , randame neaptarnautų klientų procentą $\frac{\lambda TP_{12}}{\lambda T} \cdot 100\% = P_{12} \cdot 100\% \approx 8,28\%$.

Aptarnautų klientų vidutinis procentas bus lygus $\frac{\lambda T(1-P_{12})}{\lambda T} \cdot 100\% = (1-P_{12}) \cdot 100\% \approx 91,72\%$.

Lygindami šį rezultatą su studento D. Ruzgo gautais 10 pamainų imitavimo rezultatais (žiūr. 107-ją lentelę), matome, jog tie rezultatai pakankamai artimi (rezultatų skirtumas nesudaro net 2 % rezultato).

Pilno sutapimo ir negalėjo būti, nes nagrinėjami šiek tiek skirtingi kirpyklų funkcionavimo modeliai: analizinis modelis yra šiek tiek supaprastinta to modelio, kuriuo buvo naudotasi imitavimo metu, modifikacija, kuri nėra visiškai tapati imitaciniam modeliui.

Apskaičiuosime vidutinę kirpyklos praleidžiamąją galią $\bar{A}$ – vidutinį per laiko vienetą aptarnautų klientų skaičių: $\bar{A} = \frac{\lambda(1-P_{12})T}{T} = \lambda(1-P_{12}) \approx 0,249 \frac{\text{kl.}}{\text{min}} \approx 14,97 \frac{\text{kl.}}{\text{h}}$.

Gautas rezultatas skiriasi nuo D. Ruzgo gauto rezultato jau apie 8 %: supaprastinto analizinio modelio vidutinė praleidžiamoji galia yra šiek tiek didesnė.

Tai, kad analizinis modelis davė šiek tiek didesnę aptarnautų klientų procentą ir didesnę kirpyklos praleidžiamąją galią, turi savo priežastis: 1) analiziniam modelyje nagrinėjamas jau nusistovėjęs kirpyklos funkcionavimo režimas, o imitaciniame modeliavime buvo vidurkinamas visas kirpyklos darbo laikas, į kurį įėjo ir kirpyklos darbo pamainų pradžios, kuomet ne iškart visi kirpėjai tampa užimti ir todėl kirpyklos praleidžiamoji galia būna mažesnė negu vidutinė; 2) imitavimo metu klientai galėjo ateiti ne tolygiai, kaip analiziniam modelyje, o „paketais“ (kartais net po 4), o tai irgi turi įtakos kirpyklos darbo rezultatams.

Apskaičiuosime kirpėjų vidutinius apkrovimus. Analiziniam modelyje pirmojo kirpėjo užimtumo tikimybė yra lygi $1-P_0$, antrojo – $1-P_0-P_1$, trečiojo – $1-P_0-P_1-P_2$, ketvirtojo – $1-P_0-P_1-P_2-P_3$. Todėl pirmojo kirpėjo vidutinis aptarnavimas yra lygus $\frac{(1-P_0)T}{T} \cdot 100\% = (1-P_0) \cdot 100\% \approx 99,08\%$, antrojo – $(1-P_0-P_1) \cdot 100\% \approx 95,45\%$, trečiojo – $(1-P_0-P_1-P_2) \cdot 100\% \approx 88,30\%$, ketvirtojo – $(1-P_0-P_1-P_2-P_3) \times 100\% \approx 78,90\%$.

Lygindami šiuos rezultatus su imitavimo rezultatais, pateiktais 107-joje lentelėje, pastebime, jog analizinis supaprastintas modelis davė šiek tiek didesnius aptarnavimo procentus, kas yra natūralu, nes nusistovėjusiam režime kirpėjų vidutinis apkrovimas yra didesnis negu pamainų pradžiose.

Apskaičiuosime vidutinį klientų eilės ilgį $\bar{r} = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 1 \cdot P_5 + 2 \cdot P_6 + 3 \cdot P_7 + 4 \cdot P_8 + 5 \cdot P_9 + 6 \cdot P_{10} + 7 \cdot P_{11} + 8 \cdot P_{12} \approx 3,08$.

Kadangi studentai vidutinio eilės ilgio neskaičiavo, tai palyginti nėra su ku.

Vidutinė kliento aptarnavimo trukmė yra lygi $\frac{1}{\mu} = \frac{29}{2} = 14,5$ (min). Šis rezultatas yra tikslus aptarnavimo vidutinės trukmės reikšmės įvertis abiem modeliams: ir imitaciniam, ir analiziniam.

Lygindami jį su D. Ruzgo rezultatu, pateiktu 107-joje lentelėje, matome, jog imitavimo paklaida yra apie 2 %. Tokia paklaida, taikant imitacinį modeliavimą, laikoma leistina paklaida.

Vidutinį kliento laukimo eilėje laiką galima apskaičiuoti visų į kirpyklą atėjusių klientų atžvilgiu (pažymėsime jį $\bar{\tau}_1^{(e)}$), visų aptarnautų klientų atžvilgiu (pažymėsime jį $\bar{\tau}_2^{(e)}$) ir klientų stovinčių eilėje, atžvilgiu (pažymėsime jį $\bar{\tau}_3^{(e)}$):

$$\bar{\tau}_1^{(e)} = \frac{\text{visų klientų per laiką } T \text{ prastovėtų eilėje laikų vidutinė suma}}{\text{per laiką } T \text{ atėjusių klientų vidutinis skaičius}} = \frac{\bar{r} \cdot T}{\lambda T} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx 11,33 \text{ (min)}.$$

Apskaičiuojant $\bar{\tau}_2^{(e)}$, trupmenos skaitiklis išliks toks pat, t. y. $\bar{r} \cdot T$, o pasikeis tik vardiklis. Jis taps lygus $\lambda(1-P_{12})T$. Todėl $\bar{\tau}_2^{(e)} = \frac{\bar{r}}{\lambda(1-P_{12})} \approx 12,35$ (min).

Apskaičiuojant $\bar{\tau}_3^{(e)}$, skaitiklis irgi išliks nepakitęs, o vardiklis taps lygus vidutiniam stovėjusiųjų eilėje skaičiui, t. y. skaičiui $\lambda T(1-P_0-P_1-P_2-P_3-P_{12})$, nes į eilę stos tik tie klientai, kurie

atvyks į kirpyklą tuomet, kai ji bus būsenose $z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}$ ir z_{11} . Todėl

$$\bar{\tau}_3^{(e)} = \frac{\bar{r}T}{\lambda T(1-P_0-P_1-P_2-P_3-P_{12})} \approx 16,04 \text{ (min)}.$$

107-joje lentelėje pateiktas stovėjusiųjų eilėje klientų stovėjimo eilėje vidutinis laikas yra 14,48min. ir skiriasi nuo analiziniam modelyje gauto rezultato 0,56 min., t. y. apie 3 %.

Naudojantis analiziniu kirpyklos funkcionavimo modeliu, galima apskaičiuoti ir kai kurias tokias kirpyklos funkcionavimo charakteristikų reikšmes, kurios nebuvo apskaičiuotos, naudojantis imitavimo metu gautais duomenimis. Studentai jų neapskaičiavo ne todėl, kad to nebuvo įmanoma padaryti, o todėl, kad to nereikalavo jiems duota užduotis.

Viena tokių charakteristikų – vidutinis masinio aptarnavimo sistemos užimtų kanalų skaičius (mūsų atveju – vidutinis užimtų kirpėjų skaičius). Jis yra lygus $0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \sum_{i=4}^{12} P_i = P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot (1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3) = 4 - 4P_0 - 3P_1 - 2P_2 - P_3 \approx 3,62$.

Kita tokia charakteristika – vidutinis aptarnauto kliento kirpykloje praleistas laikas, susidedantis iš vidutinės aptarnavimo trukmės, lygios $\frac{1}{\mu}$, ir vidutinio eilėje stovėjimo laiko

$$\bar{\tau}_2^{(e)} = \frac{1}{\mu} + \bar{\tau}_2^{(e)} \approx 14,5 \text{ min} + 12,35 \text{ min} = 26,85 \text{ min}.$$

Palieku skaitytojui palyginti šiuos kirpyklos funkcionavimo charakteristikų vidutinių reikšmių įverčius su analogiškais įverčiais, kuriuos būtų galima gauti, naudojantis to funkcionavimo imitavimo rezultatais ir įsitikinti, kad skirtumai neviršija modelių supaprastinimo ir modeliavimo paklaidų ribų.

Tai, kad įvairiais būdais gauti rezultatai yra pakankamai artimi, sutvirtina mūsų įsitikinimą naudojamų metodų patikimumu.

Naudodamiesi algebrinėmis Kolmogorovo lygtimis, mes galime apskaičiuoti tik finalines sistemos būsenų tikimybes. Norėdami gauti perėjimo proceso iš pradinės į finalinę būseną matematinį aprašymą, turėtume išspręsti sistemos funkcionavimą aprašančią Kolmogorovo diferencialinių lygčių sistemą.

Ją spręsti būtų, žinoma, sudėtingiau negu algebrinių lygčių sistemą, tačiau, ją išsprendę, gautume masinio aptarnavimo sistemos būsenų z_j tikimybes $P_j(t)$, t. y. laiko t funkcijas, vaizduojančias, kaip keistųsi būsenų tikimybės P_j laikui bėgant. Apskaičiuodami $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_j(t)$, galėtume įsitikinti, kad tos ribos yra lygios finalinėms tikimybėms P_j , apskaičiuotoms naudojantis Kolmogorovo algebrinių lygčių sistema.

Pailiustruosiu tai labai paprastu pavyzdžiu masinio aptarnavimo sistemos, turinčios tik vieną aptarnavimo kanalą, kurios įėjimo srautas yra puasoninis srautas, turintis intensyvumą λ , ir išėjimo srautas taip pat puasoninis, turintis intensyvumą μ .

Tokios sistemos pavyzdžiu galėtų būti telefonas – automatas, įrengtas ligoninės skyriuje, kad besigydančys ten pacientai, reikalui esant, galėtų paskambinti savo artimiesiems.

Tarkime, kad automatu naudojamas vidutiniškai kas 10min., o pokalbiai trunka vidutiniškai po 5 min. Vadinas, $\lambda = \frac{1}{10} \left(\frac{\text{klientų}}{\text{per minutę}} \right)$, o $\mu = \frac{1}{5} \left(\frac{\text{klientų}}{\text{per minutę}} \right)$.

Šiuo atveju masinio aptarnavimo sistema turės tik dvi būsenas: $z=z_0$, kai automatas neužimtas ir $z=z_1$, kai automatas užimtas.

Kolmogorovo diferencialinių lygčių sistema šiuo atveju turės tik dvi diferencialines lygtis

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = P_1(t)\mu - P_0(t)\lambda, \\ \frac{dP_1}{dt} = P_0(t)\lambda - P_1(t)\mu. \end{cases}$$

Iš šių dviejų lygčių tik vieną lygtį galima laikyti nepriklausoma, nes $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

Išreikšime $P_1(t)$ per $P_0(t)$ ir pasinaudosime pirmąja diferencialinių lygčių sistemos lygtimi. Gausime bendrąją lygčių sistemos sprendinį:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{dP_0}{dt} = (1 - P_0(t))\mu - P_0(t)\lambda = \mu - (\lambda + \mu)P_0(t); \\ 2) \quad & \frac{dP_0(t)}{\mu - (\lambda + \mu)P_0(t)} = dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \frac{d[\mu - (\lambda + \mu)P_0(t)]}{\mu - (\lambda + \mu)P_0(t)} = -(\lambda + \mu)dt; \\
4) \quad & \int_0^t \frac{d[\mu - (\lambda + \mu)P_0(t)]}{\mu - (\lambda + \mu)P_0(t)} = -(\lambda + \mu) \int_0^t dt; \\
5) \quad & \ln \frac{\mu - (\lambda + \mu)P_0(t)}{\mu - (\lambda + \mu)P_0(0)} = -(\lambda + \mu)t = \ln e^{-(\lambda + \mu)t}; \\
6) \quad & \mu - (\lambda + \mu)P_0(t) = [\mu - (\lambda + \mu)P_0(0)]e^{-(\lambda + \mu)t}; \\
7) \quad & P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} - P_0(0) \right] e^{-(\lambda + \mu)t}; \\
8) \quad & P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} - P_0(0) \right] e^{-(\lambda + \mu)t}.
\end{aligned}$$

Konkretų dalinį sprendinį gausime iš šio bendrojo sprendinio, pasinaudodami pradinėmis sąlygomis.

Tarkime, kad momentu $t=0$ telefonas nebuvo užimtas, t. y., kad $z(0)=z_0$. Tai reiškia, jog $P_0(0)=1$, o $P_1(0)=0$.

Šiuo atveju dalinis sprendinys bus toks:

$$\begin{cases} P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \end{cases}$$

Jei pradinės sąlygos būtų buvusios kitokios, pavyzdžiui, jei automatas momentu $t=t_0$ būtų buvęs užimtas, tai $P_0(0)=0$ ir tuomet dalinis sprendinys būtų buvęs

$$\begin{cases} P_0(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t}. \end{cases}$$

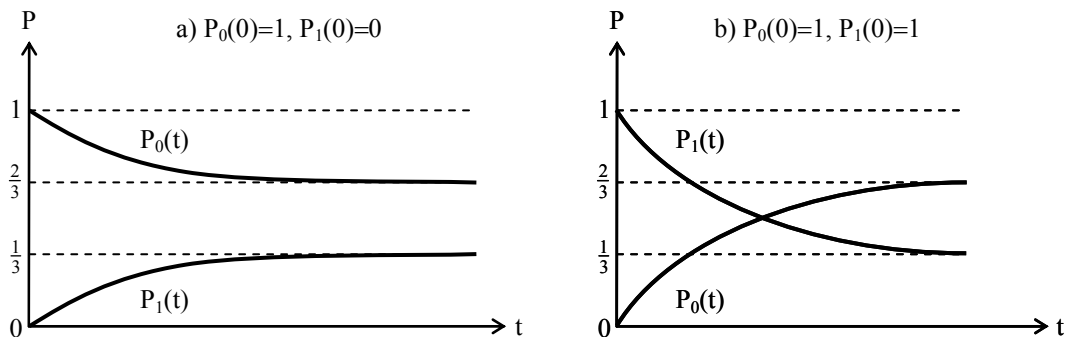
Bet kuriuo atveju $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, nes $\lambda + \mu > 0$ ir $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\lambda + \mu)t} = 0$.

Tą patį rezultatą būtume gavę sprenddami algebrinę Kolmogorovo lygčių sistemą:

$$\begin{cases} P_1\mu - P_0\lambda = 0, \\ P_0\lambda - P_1\mu = 0, \end{cases} \text{ esant sąlygai } P_0 + P_1 = 1, \text{ kur } P_0, P_1 - \text{finalinės būsenų } z_0 \text{ ir } z_1 \text{ tikimybės,}$$

atitinkančios sąlygą $\frac{dP_0(t)}{dt} = 0$, $\frac{dP_1(t)}{dt} = 0$.

Tikimybių $P_0(t)$ ir $P_1(t)$ kitimo grafikai mūsų konkrečiu atveju, kai $\lambda=0,1$ ir $\mu=0,2$, pavaizduoti 307 pav.



307 pav.

Plačiau su masinio aptarnavimo sistemų teorijos metodais bus galima susipažinti antrojoje šios mokymo priemonės dalyje bei šių eilučių autoriaus skaitomame masinio aptarnavimo sistemų teorijos kurse, o taip pat knygoje [47, 173].

Tačiau, nors masinio aptarnavimo sistemų teorija ir turi gana neblogai išvystytą matematinį aparatą, vis dėl to dauguma sudėtingesnių masinio aptarnavimo sistemų funkcionavimo charakteristikų nustatymo uždavinių, ypač, jei masinio aptarnavimo sistemos struktūra yra šiek tiek sudėtingesnė ar joje vykstančius procesus aprašo šiek tiek sudėtingesni jų trukmės tikimybinių tankio pasiskirstymo dėsniai, yra sprendžiami jau ne analiziniais, o statistinio imitacinio modeliavimo metodais, kuriuos taikant analiziniai metodai vaidina tik pagalbinį vaidmenį.

Nenorėčiau, kad, perskaitęs šią pastabą, skaitytojas susidarytų nuomonę, jog analizinių masinio aptarnavimo sistemų teorijos metodų žinojimas, sprendžiant masinio aptarnavimo sistemų funkcionavimo charakteristikų įverčių nustatymo bei tokių sistemų projektavimo uždavinius, mažai ką duoda ir todėl galima išsiversti ir be tokių metodų, naudojantis vien tik imitaciniu modeliavimu. Tokia nuomonė būtų neteisinga, nes, pavyzdžiui, „akla“ optimalių sprendinių paieška, naudojantis vien tik imitaciniu modeliavimu, užimtų labai daug laiko ir neretai būtų net nerealizuojama praktiškai. Išankstinis artutinio analizinio modelio sudarymas ir jo analizė, naudojantis matematiniais metodais, leidžia žymiai susiaurinti sprendinio paieškos sritį ir sutaupyti daug kompiuterinio laiko. Todėl ir šiuo atveju pasiteisina vienas pagrindinių bendrasisteminių principų (kurių aprašymui šios mokymo priemonės antroje dalyje bus skirtas atskiras didelis skyrius), teigiantis, jog **tik įvairių metodų sintezė (šiuo atveju imitacinio modeliavimo, matematinės statistikos, masinio aptarnavimo teorijos ir optimizavimo metodų) leidžia rasti efektyviausius sudėtingų problemų sprendimo būdus ir teisingiausius bei patikimiausius sprendinius.**

Su imitacinio modeliavimo taikymo masinio aptarnavimo sistemų funkcionavimo analizėje pavyzdžiais galima susipažinti knygoje [161], skirtoje GPSS aprašymui, o taip pat šių eilučių autoriaus vedamame masinio aptarnavimo sistemų teorijos kurse, kuriame studentai, atlikdami laboratorinius darbus, naudojami studentės N. Zverinkinos ir studento D. Titovo sudarytais specialiais programų paketais „QSS“ ir „Mikro GPSS“, automatizuojančiais masinio aptarnavimo sistemų funkcionavimo imitacinį modeliavimą.

1.14.12. Matematinės ekonomikos ir ekonometriniai modeliai

Žodis „ekonomika“ yra kilęs iš graikiško žodžio „oikonomikē“, reiškiančio ūkininkavimo meną. Dabar tas žodis vartojamas keliomis prasmėmis.

Viena iš to žodžio prasmų reiškia šalies ūkio bei kurios nors jo šakos (pramonės, žemės ūkio, transporto, statybos, prekybos) ar kurio nors mažesnio ūkinio vieneto (ekonominės srities ar rajono, miesto, įmonės) **ūkinę būklę**, kurią apibūdina naudojami **ūkininkavimo būdai ir metodai, jų taikymo rezultatai**, šalies, ūkio šakos, srities, rajono ar **įmonės ūkinė raida bei jos dėsningumai**.

Antroji žodžio „ekonomika“ prasmė gali reikšti **žmonių santykius materialinių gėrybių gamybos, jų paskirstymo, mainų ir vartojimo procese**, tame tarpe ir **nuosavybės santykius**. Ryšium su tuo galima kalbėti apie vergvaldinės santvarkos, feodalizmo, kapitalizmo, socializmo ir pan. ekonomiką, apie įvairias egzistuojančias, egzistavusias bei virtualias **ekonominės formacijas** ir jų ypatumus.

Trečioji žodžio „ekonomika“ prasmė reiškia **mokslą, tiriantį jau minėtuosius ekonominius reiškinius bei ekonominius santykius ir jų dėsningumus**. Priklausomai nuo tų reiškinių bei santykių pasireiškimo sferos ir jų nagrinėjimo aspekto ekonomikos mokslas dalijamas į pramonės, žemės ūkio, prekybos, finansų ir t. t. ekonomiką. Ryšium su tuo galima išskirti ir taip vadinamus **bendruosius, šakinius ir tarpšakinius ekonominius mokslus**.

Tradicinėje mokslų sistemoje, priklausančioje antrojo tipo sistemų klasei, ekonominiai mokslai priskiriami visuomeninių mokslų posistemui ir sudaro tame posistemyje grupę mokslų, kurie tiria visuomenines ekonomines formacijas ir jų raidą, gamybos, pasiskirstymo, mainų bei vartojimo ekonominius reiškinius ir santykius, tuose reiškiniuose ir santykiuose bei jų raidoje pasireiškiančius dėsningumus.

Mes šiame skyrelyje žodį „ekonomika“ vartosime kaip tik šia, trečiąja, prasme, reiškiančia ekonomikos mokslą, ir skirstysime ekonomiką į mikroekonomiką ir makroekonomiką. Kartu nagrinėsime ir jose taikomus **matematinės ekonomikos ir ekonometrinius modelius**, skirstydami juos į mikroekonomikos ir makroekonomikos modelius.

Makroekonomika vadinama ekonomikos mokslo dalis ir ekonominių tyrimų metodas, skirtas bendrųjų visuomeninių ekonominių bei socialinių procesų nagrinėjimui ir siekiantis surasti bei apibendrinti tiems procesams būdingus dėsningumus. Makroekonomika padeda atskleisti visos šalies ekonominį mechanizmą, jos ūkio sektorių ar šakų sąveiką, jų vystymosi perspektyvas, ekonomikos valstybinio reguliavimo alternatyvas, ekonomikos vystymosi optimalius variantus, gamybinių jėgų išsidėstymo, nacionalinių pajamų kūrimo, jų paskirstymo bei pasiskirstymo ir vartojimo ypatumus. Makroekonomika kuria ir analizuoja šalies ūkio bei jo šakų ekonominio augimo ir tarpšakinių balansų modelius, pasitelkdama tam klasikinės matematikos ir ekonometrikos metodus.

Mikroekonomika tiria ekonomiką ir ekonominius procesus pirminių ekonomikos vienetų (atskirų įmonių, atskirų vartotojų, jų santykių rinkoje) aspektu, taikydama lokalių ekonominių tyrimų metodus. Mikroekonomikos metodais naudojamos nagrinėjant pavienių ūkio subjektų (vartotojų, gamintojų, prekybininkų) veiklos efektyvumą, tų subjektų priimamus sprendimus, atskirų prekių ir atskirų paslaugų kainodarą, jų rinką ir kitus reiškinius vykstančius vartojime, gamyboje ir rinkoje.

Ryšium su ekonomikos mokslo ir jo metodologijos skirstymu į mikroekonomiką ir makroekonomiką matematinius ekonomikos reiškinių modelius taip pat priimta skirstyti į mikroekonominis ir makroekonominis. Toks skirstymas yra šiek tiek sąlyginis, nes, pavyzdžiui, kai kuriuos modelius, sudarytus nagrinėjant mikroekonominis reiškinius, galima taikyti ir makroekonomikoje.

Modelius, matematine kalba išreiškiančius priklausomybes, egzistuojančias tarp ekonominius reiškinius charakterizuojančių ekonominių rodiklių, vadinsime **matematinės ekonomikos modeliais**.

Tuos matematinės ekonomikos modelius, kuriose kai kurių jų parametrų (pavyzdžiui, koeficientų, laipsnių rodiklių) reikšmės nustatomos, remiantis statistiniais duomenimis, gautais, atliekant realių ekonominių rodiklių reikšmių matavimus bei ekspertinius vertinimus, vadinsime **ekonometriniais modeliais**.

Matematinės mikroekonomikos modelių nagrinėjimui skiriamas 1.14.12.1. skyrelis, kuris skaidomas į tris dar smulkesnius skyrelius, skiriamus **vartojimo, gamybos ir rinkos modelių** nagrinėjimui. **Matematinės makroekonomikos modeliai** nagrinėjami 1.14.12.2. skyrelyje, kuris skaidomas į keturis dar smulkesnius skyrelius, o **ekonometrija bei ekonometriniai modeliai**, jų sudarymo būdai ir taikymai aptariami 1.14.12.3. skyrelyje, skaidomame į tris skyrelius, kurie savo ruožtu skaidomi dar į smulkesnius skyrelius.

Galima įrašyti 1

2

3

4 eilutes teksto

1.14.12.1. Mikroekonominiai modeliai

Mikroekonomika, kaip jau buvo minėta, yra ekonomikos mokslo dalis, nagrinėjanti **ūkinės veiklos elementarių subjektų – vartotojų ir gamintojų – santykius**, stengdamasi išsiaiškinti, kaip ir kodėl tie subjektai priima tuos ar kitus sprendimus, įtakojančius jų ūkinę veiklą ir tarpusavio santykius, vadinamus rinkos santykiais, kaip rinkoje nusistovi įvairių produktų ir paslaugų kainos ir kaip, remiantis tomis kainomis, pasiskirsto resursai ir produktai.

Mikroekonomiką kartais vadina „**kainų teorija**“, nes vienas pagrindinių mikroekonomikos tikslų yra išsiaiškinti resursų pasiskirstymo tarp įvairių ūkio subjektų mechanizmą. O kainos pastarajame kaip tik ir vaidina pagrindinio indikatorius ir reguliatoriaus vaidmenį.

Mikroekonomika nagrinėja tokius reiškinius, kaip paklausa ir pasiūla ir stengiasi išsiaiškinti, kaip rinkoje kainų pagalba gali nusistovėti ir būti palaikoma pusiausvyra tarp paklausos ir pasiūlos.

Mikroekonominė analizė laikosi prielaidos, kad ūkio subjektai elgiasi racionaliai, t. y. priima tokius sprendimus ir sudaro tokius savo veiklos planus, kurie, atsižvelgiant į esamą situaciją ir egzistuojančius apribojimus (juridinius, finansinius ir pan.), geriausiai atitinka tų subjektų interesus bei iš tų interesų išplaukiančius tikslus.

Antrąją svarbią mikroekonomikos prielaidą sudaro **prielaida, kad egzistuoja laisva rinka**, kurioje ūkio subjektai, naudodamiesi tokia tarpine substancija kaip pinigai, gali laisvai keisti savo produkciją ir paslaugomis toje rinkoje tuo momentu nusistovinčiomis kainomis.

Šios prielaidos nėra labai jau nerealios. Jos daugumoje atvejų atitinka tikrovę, gal tik šiek tiek idealizuotą, nes tikrovėje ne visada ir ne visi ūkio subjektai elgiasi pakankamai racionaliai, nors dauguma jų daugumoje atvejų ir stengiasi tai daryti; ne visur ir ne visada rinka yra pilnai laisva, nes ne visada kainos joje nusistovi laisvės ir teisingos konkurencijos sąlygomis, kadangi egzistuoja įvairūs apribojimai, įvairios subsidijos bei papildomi apmokestinimai, sudaromi sandoriai, leidžiantys palaikyti „monopolines“ kainas, atsiranda įvairūs pokyčiai (naujos technologijos, nauji produktai, bei senųjų produktų pakaitalai, nauji poreikiai), destabilizuojantys benusistovinčią pusiausvyrą ir pan. Sprendžiant praktines mikroekonominės problemas, tenka atsižvelgti ir į šiuos bei kitus panašius nukrypimus nuo minėtųjų prielaidų, tačiau mikroekonomikos teorijoje tos prielaidos vis dėl to laikomos teisingomis. Ir tai nėra kokia tai ypatinga išimtis moksle: juk geometrijoje mes irgi nagrinėjame taškus, neturinčius matmenų, linijas, neturinčias storio ir pan., gaudami vis dėlto teisingas išvadas, kurias galima taikyti ne tik teorijoje, bet ir praktikoje.

Taigi, mikroekonomika teigia, jog **vartotojai, pirkdami rinkoje produktus ir paslaugas, stengiasi vadovautis tokiais vartojimo planais, kurie maksimizuotų nusipirkto produkcijos ir paslaugų naudingumą** (naudingumo efektą) tam konkrečiam pirkėjui, kuris visa tai rinkoje perka. Vadovaujantis šia prielaida ir sudaromi mikroekonomikoje vartotojo ir jo veiklos modeliai (**naudingumo funkcijos** ir t. t.), kuriama **vartojimo teorija**, aprašanti vartotojų „ekonominį elgesį“.

Kurdama **gamybinės veiklos motyvacinius modelius**, mikroekonomika vadovaujasi prielaida, kad **gamybininkai susidaro sau tokius gamybinius planus, kurie, atsižvelgiant į esamą situaciją ir iš jos išplaukiančius apribojimus, maksimizuotų jų pelną ar gamybos rentabilumą, ar kitokią naudą, gaunamą realizuojant gamybinio proceso metu pagamintą produkciją** (prekes, paslaugas).

Gamybinio proceso mikroekonominiam aprašymui naudojamos taip vadinamos **gamybinės funkcijos, kaštų funkcijos, izokvantės, izokostės**, įvedamos tokios

sąvokos kaip **darbo našumas, gamybinis pajėgumas, produktyvumas** ir t. t.

Kurdama **rinkos modelius** („voratinklinį“, bendrosios pusiausvyros, dvisektorinį), mikroekonomika įsiveda tokias funkcijas kaip **paklausos funkcija** ir **pasiūlos funkcija**, o taip pat naudojami funkcijomis, aprašančiomis vartojimą ir gamybą. **Mikroekonominė rinkos teorija** parodo, kaip gamintojai ir vartotojai, siekdami anksčiau išvardintų savo tikslų, **laisvoje rinkoje priversti eiti į kompromisą, kuris, būdamas ir kurį laiką išlikdamas abipusiai naudingas, suderina tam tikra prasme priešingus vartotojų ir gamintojų interesus ir veda prie ekonominės pusiausvyros, nustatančios ir palaikančios atitinkamas proporcijas vartojime ir gamyboje bei atitinkamus produkcijos ir paslaugų kainų lygius.**

Šiame skyrelyje mes susipažinsime su pačiais paprasčiausiais **mikroekonominiais modeliais, aprašančiais vartojimą, gamybą ir rinką.**

1.14.12.1.1. Vartojimo modeliavimas

Paprastumo ir grafinio vaizdumo dėlei nagrinėsime **dviproductinę vartojimo sistemą**, t. y. priimsime prielaidą, kad vartotojams reikalinga tik dviejų rūšių produkcija. Pirmojo produkto suvartotą kiekį žymėsime Y_1 , o antrojo – Y_2 .

Grupuoju ir agreguoju vartojimo poreikius ir jų tenkinimui skirtą produkciją, kartais pavyksta ir realias situacijas aprašyti naudojantis dviproductinės vartojimo sistemos modeliu.

Pavyzdžiui, nagrinėjant namų ūkių vartojimą ir vertinant vartojimo apimtį pinigais vienetais, pirmuoju produktu Y_1 , galima laikyti agreguotą produktą, apimančią visus maisto produktus, o antruoju, t. y. Y_2 – prekes, skirtas aprangai, namų apyvokai bei kitų reikmių tenkinimui.

Nagrinėjant tuos pačius namų ūkius šiek tiek kitu aspektu, pirmuoju produktu Y_1 galima laikyti buitines prekes bei paslaugas, o antruoju Y_2 – kultūrines prekes ir paslaugas.

Labiau detalizuojant vartojimą, tenka naudotis sudėtingesniais **daugiaproductinės vartojimo sistemos modeliais**. Tokių modelių nagrinėjimui grafinės priemonės jau nebetinka. Tačiau ir tokiems modeliams galima taikyti sąvokas, idėjas, metodus ir algoritmus, analogiškus tiems, kurie taikomi dviproductinės vartojimo sistemos analizėje. Žinoma, tokiais atvejais matematiniai metodai tampa gremėzdiškesni, tačiau, pasitelkus kompiuterinę techniką ir jos programinę įrangą, su išskylančiais techniniais sunkumais dažnai pavyksta susidoroti.

Grįšime prie dviproductinės sistemos ir joje vartojamų produktų.

Vartotojas perka tuos produktus todėl, kad jie jam naudingi, t. y. duoda tam tikrą naudą. Gaunamos naudos dydžio išmatavimas – gana sudėtingas dalykas, tuo labiau, kad skirtingi subjektai skirtingose situacijose vieno ir to paties produkto naudingumą gali įvertinti skirtingai. Tačiau vis dėlto subjektas, turėdamas du skirtingus produktus, visuomet gali pasakyti, kuris iš jų šiuo metu jam naudingesnis (arba kai kuriais atvejais teigti, kad jam abiejų produktų naudingumai šiuo metu yra vienodi).

Produktų bei jų rinkinių naudingumo palyginimui mikroekonomikoje naudojamos **vienodo naudingumo kreivės**, kurios gali būti dviejų tipų.

Dviejų produktų naudingumo palyginimui vienodo naudingumo kreivė gali būti sudaroma taip. Imami kokie nors pirmojo produkto kiekiai $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, \dots, Y_1^{(i)}, \dots, Y_1^{(n)}$ ir parenkami atitinkami antrojo produkto kiekiai $Y_2^{(1)}, Y_2^{(2)}, \dots, Y_2^{(i)}, \dots, Y_2^{(n)}$ taip, kad vartotojas laikytų antrojo produkto kiekį $Y_2^{(i)}$ lygiai taip pat naudingu kaip ir atitinkamas pirmojo produkto kiekis $Y_1^{(i)}$. Laikydami skaičių poras $(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)})$, $(Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)})$, ..., $(Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)})$, ..., $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})$ dekartinėmis plokštumos (Y_1, Y_2) taškų koordinatėmis ir sujungdami tuos taškus kreive, gausime dviejų produktų vienodo naudingumo kreivę, kurią vadinsime **pirmojo tipo vienodo naudingumo kreive**.

Trimatėje erdvėje analogiškai galima sudaryti trijų produktų vienodo naudingumo kreivę, n-matėje – n produktų vienodo naudingumo kreivę, priklausančias pirmajam tipui.

Galima lyginti ne tik vieno produkto tam tikro kiekio naudingumą su kito produkto atitinkamo kiekio naudingumu, bet ir rinkinių, sudarytų iš kelių produktų, bendrąjį naudingumą. Toks metodas yra universalesnis už ką tik aprašytąjį, nes leidžia lyginti ir „matuoti“ naudingumą ne tik tų produktų, kurie gali būti ekvivalenčiai pakeičiami vienas kitu, bet ir rinkinių, sudarytų iš bet kurių produktų, naudingumus.

Dviproduktinėje vartojimo sistemoje, kurią mes čia nagrinėsime, lyginsime rinkinius, sudarytus iš dviejų minėtųjų produktų skirtingų kiekių. Pradžioje paimsime kokį nors kiekį $Y_1^{(1)}$ pirmojo produkto ir kokį nors kiekį $Y_2^{(1)}$ antrojo produkto, kurio naudingumas, skirtingai nuo ką tik nagrinėtojo pirmojo tipo vienodo naudingumo kreivės atvejo, dabar gali ir nesutapti su $Y_1^{(1)}$ naudingumu, nes mes dabar vertinsime ne kiekvieno produkto naudingumą atskirai, o viso rinkinio $(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)})$ bendrąjį naudingumą.

Dabar šiek tiek pakeisime pirmojo produkto kiekį. Tarkime, paimsime kiekį $Y_1^{(2)}$, nelygų $Y_1^{(1)}$, ir parinksime tokį antrojo produkto kiekį $Y_2^{(2)}$, kad bendrasis rinkinio $(Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)})$ naudingumas liktų lygus buvusiam bendrajam rinkinio $(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)})$ naudingumui. Analogiškai, keisdami pirmojo produkto kiekį ir pasirinkdami atitinkamą antrojo produkto kiekį, sudarysime ir rinkinius $(Y_1^{(3)}, Y_2^{(3)})$, ..., $(Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)})$, ..., $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})$, turinčius tarpusavyje vienodus bendruosius naudingumus. Rinkinių naudingumo matuotoju bus pats vartotojas, kuriam siūloma iš kelių rinkinių pasirinkti tą, kuris jam atrodo naudingiausias. **Rinkiniai laikomi tam vartotojui vienodai naudingais, kai vartotojas jau nebepajėgia išskirti naudingiausio rinkinio bei išrikiuoti jam pateiktų rinkinių jų naudingumo didėjimo ar mažėjimo tvarka, nes visų rinkinių naudingumai jam atrodo vienodi.**

Laikydami dydžius $Y_1^{(i)}$ ir $Y_2^{(i)}$ dekartinėmis plokštumos taškų i koordinatinėmis, atidėsime plokštumoje taškus $(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)})$, $(Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)})$, ..., $(Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)})$, ..., $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})$ ir sujungsime juos kreive.

Gautąją kreivę vadinsime **antrojo tipo vienodo naudingumo kreive**. Ši kreivė skirsis nuo anksčiau sudarytos pirmojo tipo vienodo naudingumo kreivės tuo, kad pirmojoje kreivėje jos taškų koordinatės sudaro skaičiai, vaizduojantys pirmojo ir antrojo produktų kiekius, turinčius duotajam vartotojui vienodą naudingumą, tačiau skirtingi tos kreivės taškai vaizduoja rinkinius, turinčius skirtingą bendrąjį kiekvieno rinkinio naudingumą, o antrojoje kreivėje visuose jos taškuose bendrieji rinkinių naudingumai yra vienodi, nors atskirų produktų naudingumai kiekviename rinkinyje nėra būtinai vienodi ir net negali būti vienodi, išskyrus galbūt vieną tašką, kuris galėtų egzistuoti tuo atveju, kai produktai galėtų turėti naudingumus, vartojant juos atskirai, ir tame taške tie naudingumai būtų vienodi. Tuomet taškas priklausytų ir pirmojo tipo vienodo naudingumo kreivei, t. y. būtų abiejų tipų vienodo naudingumo kreivių susikirtimo tašku.

Antrojo tipo vienodo naudingumo kreivę galima būtų pavadinti „izonaude“, panašiai, kaip meteorologai, jungdami Žemės paviršiaus taškus, kuriuose duotuoju momentu atmosferos slėgis yra vienodas, gautas linijas vadina izobaromis, o linijas, kurių taškuose temperatūra vienoda – izotermomis. Žinoma, antrojo tipo vienodo naudingumo kreivę būtų galima pavadinti ir „ekvinaude“, panašiai kaip, vaizduojant elektrinio potencialo pasiskirstymą elektrostatiiniame lauke, brėžiamos

linijos, vadinamos ekvipotencialėmis.

Kadangi temperatūros bei slėgiai skirtinguose Žemės paviršiaus taškuose gali būti ir vienodi, ir skirtingi, tai gauname visą šeimą izotermų ir izobarų. Elektrostatinį lauką plokštumoje vaizduoja ekvipotencialių šeima, ir trimatėje erdvėje – ekvipotencialiųjų paviršių šeima. Kiekviename iš tokių paviršių visuose jo taškuose elektrinis potencialas yra vienodas, o skirtinguose ekvipotencialiuose paviršiuose – skirtingas. Analogiškas šeimas sudaro ir „izonaudės“, gaunamos nagrinėjant dviproduktes vartojimo sistemas, bei „ekvinaudiniai“ paviršiai, gaunami nagrinėjant triproduktes vartojimo sistemas. Nesunku įrodyti, kad nei izokreivės, nei izopaviršiai negali kirstis, nes vieną tašką tuo pačiu metu negali charakterizuoti kelios skirtingos temperatūros, keli skirtingi slėgiai, keli skirtingi potencialai ar keli skirtingi naudos lygiai.

Izonaudžių metodas gana plačiai taikomas ne tik dėl jau minėto universalumo, bet dar ir todėl, kad analizuojant izonaudžių šeimas gana paprasta nustatyti, nuo ko ir kaip keičiasi produktų rinkinių naudingumas, pastebėti kur ir kada naudingumas keičiasi greičiau ar lėčiau.

Kiekvienai antrojo tipo vienodo naudingumo kreivei („izonaudei“), gautai empiriniu būdu, galima priskirti atitinkamą vartojimo naudos lygį, kurį galima pavadinti **naudos indeksu** (arba tiesiog **naudos dydžiu**). Jis visuose vienos „izonaudės“ taškuose bus pastovus. Turėdami izonaudės taškų koordinates, galime pabandyti sudaryti tokią tų koordinačių funkciją, kurios reikšmė, įstačius į ją bet kurio „izonaudės“ taško koordinates, būtų visur ta pati ar beveik ta pati ir apytikriai lygi tą „izonaudę“ atitinkančiam naudos indeksui (naudos dydžiui).

Tokios funkcijos plačiai naudojamos **matematinėje ekonomikoje** ir vadinamos **naudingumo funkcijomis** (arba kartais dar ir naudingumo indeksais). Egzistuoja keli tokių **funkcijų matematiniai modeliai**.

Kai dviproductinėje vartojimo sistemoje vieno produkto kiekį nors kiekį pilnai galima pakeisti kito produkto atitinkamu kiekiu, paliekant bendrąją produktų rinkinio naudą nepakitusia, ir kai tokiuose pakeitimuose keičiamų produktų kiekių santykis išlieka pastovus, tai tuomet gauname **tiesinę adityvinę tų produktų naudingumo funkciją** $U = a_1 Y_1 + a_2 Y_2$, kur U – vienetų naudingumo funkcijos reikšmė, Y_1 ir Y_2 – tos funkcijos argumentų reikšmės – pirmojo ir antrojo produkto kiekiai, o a_1 ir a_2 – pastovūs teigiami koeficientai, charakterizuojantys abiejų rūšių produktų vienetų naudingumus.

Kad išsiaiškintume tų koeficientų esmę, pakeisime pirmojo ir antrojo produktų kiekius rinkinyje tokiais dydžiais ΔY_1 ir ΔY_2 , kad bendras rinkinio naudingumas nepasikeistų.

Keisdami pirmojo produkto kiekį, gausime rinkinio naudingumo pokytį $\Delta_1 U = a_1(Y_1 + \Delta Y_1) + a_2 Y_2 - a_1 Y_1 - a_2 Y_2 = a_1 \Delta Y_1$.

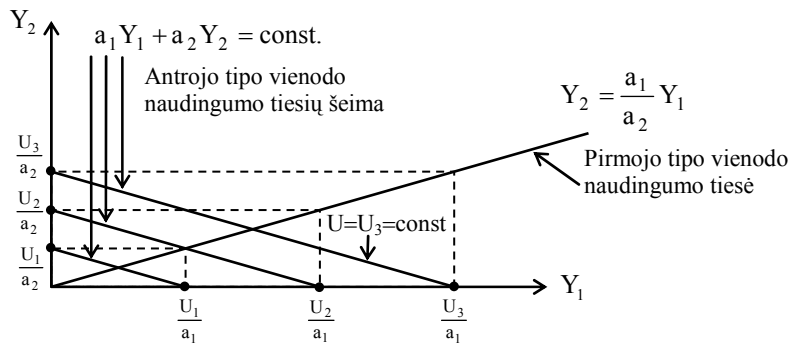
Keisdami antrojo produkto kiekį, gausime rinkinio naudingumo pokytį $\Delta_2 U = a_1 Y_1 + a_2(Y_2 + \Delta Y_2) - a_1 Y_1 - a_2 Y_2 = a_2 \Delta Y_2$.

Pareikalausime, kad $\Delta_1 U + \Delta_2 U = 0$, t. y. kad abu pakeitimai kompensuotų vienas kitą. Tuomet gausime, kad $a_1 \Delta Y_1 = -a_2 \Delta Y_2$, iš kur išplaukia, jog $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{\Delta Y_2}{\Delta Y_1}$. Iš šios

lygybės matome, kad, esant tiesinei naudingumo funkcijai, vienas kitą kompensuojantys produktų kiekių pokyčiai privalo turėti priešingus ženklus (jei vieno produkto kiekį sumažinome, tai kito produkto kiekį reikia padidinti), ir kad koeficientai a_i , būdami atvirkščiai proporcingi pokyčių ΔY_i absoliučioms reikšmėms, charakterizuoja produktų

naudingumo „svorius“ rinkinyje: kuo didesnis yra a_i , tuo mažiau reikia produkto i , kad padengtumė kito produkto kiekio sumažėjimą.

Tiesinę naudingumo funkciją atitinkančios antrojo tipo vienodo naudingumo kreivės yra tiesės $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = \text{const}$. atkarpos, t. y. kiekvieną pastovią naudingumo funkcijos $U = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = \text{const}$ reikšmę atitinka tam tikra „izonaudė“. Kadangi a_1 ir a_2 yra konstantos, tai visos šio tipo „izonaudės“ yra tarpusavyje lygiagrečios tiesės (tiksliau, tiesių atkarpos, priklausančios pirmajam, t. y., teigiamam, koordinatinių sistemos kvadrantui). Trys izonaudės $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = Y_1 + 3,6 Y_2 = \text{const}$ pavaizduotos 308 pav.



308 pav.

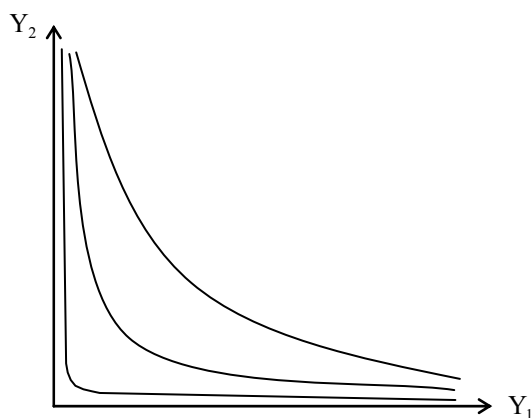
Kadangi šiuo atveju produktų naudingumas tiesiogiai proporcingas jų kiekiui ir koeficientai a_i yra lygūs produkto i kiekio vienetą atitinkančiam „naudingumo vienetų“ skaičiui, tai, žinodami antrojo tipo vienodo naudingumo tieses (arba koeficientus a_1 ir a_2 , kas yra tas pats), **mes galime sudaryti ir pirmojo tipo vienodo naudingumo kreivę**, kuri šiuo atveju taip pat bus tiesė (žiūr. 308 pav.). Tą tiesę nesunku sudaryti grafiškai, kaip tai parodyta 308 pav. Jos lygtis išplaukia iš lygybės $a_2 Y_2^* = a_1 Y_1^*$, kuri gaunama iš lygybės $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = U = \text{const}$, priėmus vieną kartą, kad $Y_1 = 0$, ir kitą kartą, kad $Y_2 = 0$, paliekant nepakeistą U reikšmę, lygią U^* , kurią didinant atitinkamai didėja Y_1^* ir Y_2^* reikšmės.

Reikia pažymėti, kad ne visiems produktų rinkiniams tinka tiesinė adityvinė tų rinkinių naudingumo funkcijos forma. Ji tinka tik tuo atveju, kai produktų naudingumai yra tiesiogiai proporcingi produktų kiekiams ir kai tie produktai būti pilnai pakeisti vienas kitu, keičiant vieno produkto kiekius atitinkamais kito produkto kiekiais. Tokių produktų pavyzdžiais galėtų būti kava ir arbata, miltai ir kruopos, apelsinai ir mandarinai.

Miroekonomikoje vietoj ką tik aprašytosios tiesinės adityvinės naudingumo funkcijos žymiai dažniau naudojamosi multiplikatyvine tokios funkcijos forma, kuri vadinama **neoklasikine naudingumo funkcija**. Jos matematinė išraiška yra $U = Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2}$, kurioje α_1 ir α_2 – teigiami dydžiai, kurių suma neviršija 1, t. y. $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.*

Neoklasikinę naudingumo funkciją atitinkančios antrojo tipo vienodo naudingumo kreivės („izonaudės“) $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = \text{const}$, (arba $\alpha_1 \ln Y_1 + \alpha_2 \ln Y_2 = \text{const}$, kas yra tas pats, nes konstantos logaritmas taip pat yra konstanta) pavaizduotos 309 pav.

* Apribojimas $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ įvedamas todėl, kad vartojimo naudingumas, didėjant vartojimui auga ne greičiau (o dažniausiai – lėčiau) negu auga suvartotų produktų kiekiai.



309 pav.

Neoklasikinė naudingumo funkcija yra tolydi kiek nori kartų diferencijuojama funkcija, tenkinanti sąlygas $\frac{\partial U}{\partial Y_i} > 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial Y_i^2} < 0$, $i=1, 2$.

$$\text{Tai nesunku įrodyti. Pavyzdžiui, kai } i=1, \text{ tai gauname } \frac{\partial U}{\partial Y_1} = \alpha_1 Y_1^{\alpha_1-1} Y_2^{\alpha_2} = \\ = \alpha_1 \frac{Y_2^{\alpha_2}}{Y_1^{1-\alpha_1}} = \frac{\alpha_1 U}{Y_1} > 0, \frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} = \alpha_1(\alpha_1-1) \cdot Y_1^{\alpha_1-2} \cdot Y_2^{\alpha_2} = -\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)Y_2^{\alpha_2}}{Y_1^{2-\alpha_1}} = -\frac{1-\alpha_1}{Y_1^2} \alpha_1 U < 0.$$

Analogiškai įrodoma, jog $\frac{\partial U}{\partial Y_1} > 0$ ir $\frac{\partial^2 U}{\partial Y_2^2} < 0$.

Dydį $\frac{\partial U}{\partial Y_i}$ vadina **marginaliniu naudingumu** (marginal utility), nes jis rodo naudingumo indekso U didėjimo greitį, didėjant produkto i kiekiui taške Y_i , kai kito produkto kiekis išlieka pastovus ir atspindi to greičio kitimą, keičiantis produkto i kiekiui Y_i .

Iš nelygybės $\frac{\partial^2 U}{\partial Y_i^2} < 0$ išplaukia, kad tuo atveju, kai produktų rinkinių naudingumas išreiškiamas neoklasikine naudingumo funkcija, tai produktų **marginalinis naudingumas yra mažėjanti funkcija**, t. y. didinant Y_i , indekso U didėjimo greitis mažėja.

Marginalinis naudingumas – gana svarbi **naudingumo teorijos** (o tuo pačiu – ir **vartojimo teorijos**) sąvoka, nes jos vaidmuo toje teorijoje analogiškas greičio sąvokos vaidmeniui mechanikoje.

Neoklasikinė naudingumo funkcija matematinėje ekonomikoje gana plačiai vartojama kaip tik dėl to, kad iš jos formulės išplaukia **marginalinio naudingumo mažėjimas, kas atitinka subjektyvų naudingumo suvokimą, susiformavusį gyvenimo praktikoje**.

Pavyzdžiui, žmogus, suvalgydamas vieną kotletą, gauna tam tikrą naudą. Ta nauda padidėja, kai žmogus suvalgo dar ir antrą kotletą, tačiau šiek tiek mažiau negu dvigubai. Didinant suvalgytų kotletų skaičių, tos naudos didėjimas vis mažėja, artėdamas prie 0, o suvalgius per daug kotletų vietoj naudos galima gauti net žalą.

Antra svarbi vartojimo teorijos sąvoka yra marginalinis keitimo santykis MRS (marginal rate of substitution), dažnai vadinamas pirmojo produkto pakeitimo antruoju marginaline norma, arba tiesiog **marginaline pakeitimo norma**. Ji apskaičiuojama,

naudojantis formule $MRS = -\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{U=\text{const.}}$.

Kadangi vienos ir tos pačios izonaudės taškuose $U=f(Y_1, Y_2)=\text{const.}$, tai gauname, jog $dU = \frac{\partial U}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial U}{\partial Y_2} dY_2 = 0$, iš kur išplaukia, kad $\frac{dY_2}{dY_1} = -\frac{\partial U / \partial Y_1}{\partial U / \partial Y_2}$, o

tai reiškia, jog $MRS = \frac{\partial U / \partial Y_1}{\partial U / \partial Y_2}$, t. y. jog **MRS yra marginalinių naudingumų**

santykis, rodantis kiek kartų taške (Y_1, Y_2) pirmasis produktas (to produkto kiekio marginalinis padidėjimas tam tikru labai mažu vienetu) vartotojui yra naudingesnis už antrąjį produktą (to produkto kiekio marginalinį padidėjimą tokiu pačiu vienetu).

Žinodami MRS, mes galime nustatyti, kaip reikia keisti vieno produkto vartojimo kiekį, keičiantis kito produkto suvartojimo kiekiui, kad bendras suvartotų produktų naudingumas išliktų pastovus.

Pasinaudodami neoklasikine naudingumo funkcija $U = Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2}$, apskaičiuosime MRS:

$$1) \frac{\partial U}{\partial Y_1} = \alpha_1 Y_1^{\alpha_1-1} Y_2^{\alpha_2} = \alpha_1 \frac{Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2}}{Y_1} = \alpha_1 \frac{U}{Y_1},$$

$$2) \frac{\partial U}{\partial Y_2} = \alpha_2 Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2-1} = \alpha_2 \frac{Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2}}{Y_2} = \alpha_2 \frac{U}{Y_2},$$

$$3) MRS = \frac{\partial U / \partial Y_1}{\partial U / \partial Y_2} = \frac{\alpha_1 U \cdot Y_2}{Y_1 \cdot \alpha_2 U} = \frac{\alpha_1 Y_2}{\alpha_2 Y_1}.$$

Tą pačią MRS išraišką galėjome gauti ir naudodamiesi formule $MRS = -\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{U=\text{const.}}$, nes, kai $U=\text{const.}$, tai ir $\ln U = \alpha_1 \ln Y_1 + \alpha_2 \ln Y_2 = \text{const.}$, iš kur

išplaukia, jog $\frac{\alpha_1}{Y_1} dY_1 + \frac{\alpha_2}{Y_2} dY_2 = 0$. Tuomet gauname, jog $-\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{U=\text{const.}} = \frac{\alpha_1 Y_2}{Y_1 \alpha_2} =$

$=\varphi(Y_1, Y_2)$.

Iš čia ką tik išvestos neoklasikinės naudingumo teorijos formulės išplaukia, jog produktų naudingumo santykis $\frac{\partial U / \partial Y_1}{\partial U / \partial Y_2}$ rinkiniuose (Y_1, Y_2) , kurių naudingumas turi

išlikti pastovus, nėra pastovus dydis: **keičiantis vienos komponentės kiekiui, kitos komponentės kiekio kompensuojantis pokytis yra toks, kad keičiasi ir pati pakeitimo norma MRS**. Nesunku įsitikinti, kad egzistuoja ne tik marginalinio naudingumo, bet ir **MRS mažėjimo dėsnis**, t. y., kad didėjant pirmojo produkto kiekiui Y_1 , jo vieneto pakeitimui reikia vis mažiau antrojo produkto arba, kitaip tariant, **didėjant pirmojo produkto kiekiui Y_1 , jo naudingumas, lyginant su antrojo produkto naudingumu, mažėja**. Įrodysiu tai dar ir kitu būdu, darančiu šią išvadą dar akivaizdesne.

Iš formulės $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U = \text{const}$ išplaukia, jog $Y_2 = \frac{U^{\frac{1}{\alpha_2}}}{Y_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}$. Įstatę šią Y_2

išraišką į $MRS = \frac{\alpha_1 Y_2}{\alpha_2 Y_1}$, gauname, kad $MRS = \frac{\alpha_1 U^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\alpha_2 Y_1^{1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}} = \frac{\text{const}}{Y_1^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}}}$. Kadangi $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} > 1$,

tai, didinant Y_1 , MRS mažės ir mažės greičiau nei proporcingai.

Analogiškai galima įrodyti, jog didinant antrojo produkto kiekį rinkinyje, turinčiame pastovų bendrąjį naudingumą, to produkto naudingumas, lyginant su pirmojo produkto naudingumu irgi mažėja.

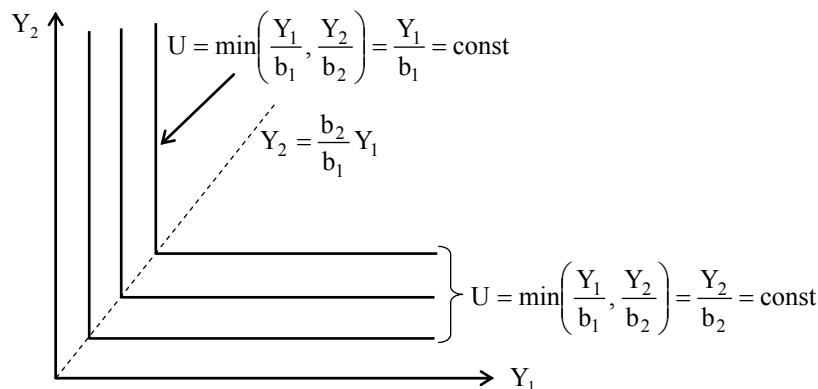
Kartais produktų rinkiniuose egzistuoja **ne tik vieno produkto pakeitimo kitu produktu galimybė**, kaip tai matėme, nagrinėdami kavą ir arbatą, bet **ir vieno produkto papildymo kitu reikiamybė**, kaip, pavyzdžiui, arbatos ir cukraus atveju: vartojant daugiau arbatos, reikia daugiau ir cukraus. Kitas pavyzdys: mėsa ir druska.

Tokiais atvejais dviejų produktų rinkinio naudingumo funkciją galima aprašyti nelygybių sistema $\left\{ \left(U \leq \frac{Y_1}{b_1} \right), \left(U \leq \frac{Y_2}{b_2} \right) \right\}$ arba, kas yra tas pats, viena lygybe

$$U = \min \left(\frac{Y_1}{b_1}, \frac{Y_2}{b_2} \right).$$

Kartais ką tik čia pateiktoji nelygybių sistema yra pateikiama jai ekvivalenčioje formoje $\begin{cases} Y_1 \geq b_1 U \\ Y_2 \geq b_2 U \end{cases}$.

Tokią naudingumo funkciją atitinkančias tris „izonaudes“ vaizduoja 310 pav.



310 pav.

Šios antrojo tipo vienodo naudingumo „kreivės“ (laužtės) sudaromos taip. Pradžioje duotoms b_1 ir b_2 reikšmėms pasirenkamos Y_1 ir Y_2 reikšmės taip, kad $\frac{Y_1}{b_1} = \frac{Y_2}{b_2}$. Tuomet gauname, jog $U = \frac{Y_1}{b_1} = \frac{Y_2}{b_2}$, o tai reiškia, kad mūsų pasirinktasis

taškas (Y_1, Y_2) guli ant tiesės $Y_2 = \frac{b_2}{b_1} Y_1$. Tai „kampinis“ mūsų brėžiamos

„izonaudės“ taškas, o tiesė $Y_2 = \frac{b_2}{b_1} Y_1$ yra visos izonaudžių šeimos, giminingos mūsų

brėžiamai izonaudei, „kampinių“ taškų geometrinė vieta. Jei dabar, nekeisdami Y_2 , didinsime Y_1 , t. y., jei slinksime nuo „kampinio“ taško horizontalia kryptimi, tai naudingumas $U = \min\left(\frac{Y_1}{b_1}, \frac{Y_2}{b_2}\right)$ nesikeis, išlikdamas lygus $\frac{Y_2}{b_2}$, o tai reiškia, jog iš

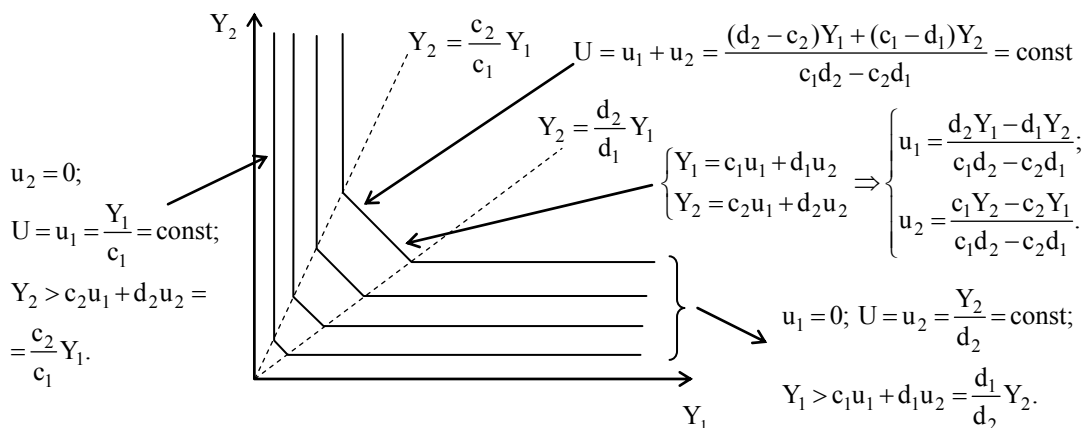
pasirinktojo „kampinio“ taško išeinantis horizontalus spindulys priklauso vienai ir tai pačiai „izonaudei“. Jei, išeidami iš to paties „kampinio“ taško, didintume Y_2 , nekeisdami Y_1 , tai, naudingumo funkcijos reikšmė U taip pat nesikeistų, išlikdama lygi $\frac{Y_1}{b_1}$. O tai reiškia, jog iš „kampinio“ taško išeinantis vertikalus spindulys taip pat

priklauso tai pačiai „izonaudei“, kaip ir pasirinktasis „kampinis“ taškas.

Kai **produktai vienoje srityse vienas kitą papildo, o tam tikroje srityje gali vienas kitą pakeisti**, tai naudingumo funkciją galima išreikšti tokia lygybių ir

nelygybių sistema:
$$\begin{cases} U = u_1 + u_2, \\ Y_1 \geq c_1 u_1 + d_1 u_2, \\ Y_2 \geq c_2 u_1 + d_2 u_2. \end{cases}$$
 Nesunku įrodyti, kad tokia **mišraus tipo**

naudingumo funkciją atitiks tokios antrojo tipo vienodo naudingumo „kreivės“ („izonaudės“), kokios yra pavaizduotos 311 pav. Šis paveikslėlis vaizduoja atvejį, kai $(c_2:c_1) > (d_2:d_1)$. Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti pavaizduoti šio tipo izonaudžių šeimą atveju $(c_2:c_1) < (d_2:d_1)$ ir įsitikinti, jog atveju $(c_2:c_1) = (d_2:d_1)$ 311 pav. tampa 310 pav.



311 pav.

Atitinkamai pasirinkus koeficientų c_1 , d_1 , c_2 ir d_2 reikšmes iš mišraus tipo naudingumo funkcijos galima gauti kaip tos funkcijos dalinius atvejus ne tik funkciją

$$U = \min\left(\frac{Y_1}{b_1}, \frac{Y_2}{b_2}\right),$$

bet ir tiesinę adityvinę naudingumo funkciją $U = a_1 Y_1 + a_2 Y_2$.

Reikia pažymėti, kad ir neoklasikinė naudingumo funkcija priklauso mišriajam tipui, tačiau jos „izonaudės“ skiriasi nuo 311 pav. pavaizduotų „izonaudžių“ tuo, kad yra tolydžios kreivės, tenkinančios marginalinio naudingumo tolydaus mažėjimo hipotezės reikalavimus.

Kiekviename neoklasikinės izonaudės taške vienas produktas dalinai gali būti pakeistas kitu ir dalinai gali būti papildytas kitu, tačiau ši savybė įvairiuose neoklasikinės izonaudės taškuose pasireiškia nevienodai: centriniuose izonaudžių taškuose stipriau pasireiškia pakeitimo savybė, o izonaudžių galuose – papildymo savybė.

Čia aprašytų tipų naudingumo funkcijos $U=f(Y_1, Y_2)$ grafiškai galėtų būti pavaizduotos **paviršiais trimatėje erdvėje (y_1, y_2, u)** , izomorfiškais paviršiams $z=f(x, y)$ trimatėje erdvėje (x, y, z) . Paviršių $U=f(Y_1, Y_2)$ taškų (Y_1, Y_2, U) atstumai nuo plokštumos (Y_1, Y_2) , t. y. nuo plokštumos $U=0$, kurią galima būtų laikyti horizontalios plokštumos (x, y) , t. y. plokštumos $z=0$, analogu, vaizduotų rinkinių (Y_1, Y_2) naudingumą U , o **tų paviršių linijų, jungiančių paviršių taškus, turinčius vienodą naudingumą ir todėl vienodą atstumą nuo plokštumos (Y_1, Y_2) , projekcijos į tą plokštumą kaip tik ir būtų iznaudės $U=\text{const}$** , t. y. antrojo tipo vienodo naudingumo kreivės.

Pavyzdžiui, adityvinę tiesinę naudingumo funkciją $U=a_1Y_1+a_2Y_2$, apibrėžtą plokštumos (Y_1, Y_2) pirmajame kvadrante $0 \leq Y_1 \leq +\infty$, $0 \leq Y_2 \leq +\infty$ (nors, žinoma, interpretuojant žalingumą kaip neigiamą naudingumą, funkciją $U=f(Y_1, Y_2)$ galima būtų apibrėžti ir visoje plokštumoje (Y_1, Y_2) , t. y. $-\infty < Y_1 < +\infty$, $-\infty < Y_2 < +\infty$), vaizduotų plokštumos $U=a_1Y_1+a_2Y_2$ trimatėje erdvėje (Y_1, Y_2, U) dalis, atitinkanti tą kvadrantą. Plokštuma $U=a_1Y_1+a_2Y_2$ kirstųsi su plokštuma (Y_1, Y_2) (t. y. su plokštuma $U=0$) tiese $a_1Y_1+a_2Y_2=0$, sudarydama su ta plokštuma kampą $\varphi = \arctg \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Minėtoji plokštumos $U=a_1Y_1+a_2Y_2$ dalis, atitinkanti pirmąjį kvadrantą, kai koeficientai a_1 ir a_2 būtų teigiami, kiltų į viršų, t. y. kintamojo U didėjimo link, minėtoju kampu φ , pradedant nuo taško $(Y_1=0, Y_2=0, U=0)$ ir kirstųsi su „šoninėmis“ plokštumomis (Y_1, U) ir (Y_2, U) (t. y. su plokštumomis $Y_2=0$ ir $Y_1=0$) tiesėmis $U=a_1Y_1$ ir $U=a_2Y_2$, taip pat kylančiomis aukštyn nuo pradinio taško $(Y_1=0, Y_2=0, U=0)$. Plokštumos $U=a_1Y_1+a_2Y_2$ taškų (Y_1^*, Y_2^*, U^*) atstumai nuo plokštumos $U=0$ (t. y. nuo plokštumos (Y_1, Y_2)) vaizduotų rinkinių (Y_1^*, Y_2^*) naudingumą $U^* = a_1Y_1^* + a_2Y_2^*$. Paviršiaus $U=a_1Y_1+a_2Y_2$ linijos, jungiančios to paviršiaus taškus, vienodai nutolusius nuo plokštumos $U=0$, būtų tiesių atkarpos, o tų atkarpų projekcijos į plokštumą $U=0$ būtų izonaudės $a_1Y_1+a_2Y_2=U=\text{const}$. **Izонаудžių vaizdavimo metodas kaip tik tuo ir naudingas, kad leidžia pereiti iš trimatės erdvės į dvimatę, kuri gana patogi grafiniam vaizdavimui.**

Juk skirtingą kreivumą skirtingose vietose turintį eksponentinį paviršių, vaizduojantį neoklasikinę naudingumo funkciją $U = Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2}$, ir linijas tame paviršiuje analizuoti žymiai sudėtingiau negu linijų, jungiančių tų paviršių taškus, turinčius vienodą naudingumą, projekcijų į plokštumą $U=0$ šeimą – izonaudžių $U=c=\text{const}$ šeimą, sudarytą eilei skirtingų konstantos c reikšmių. Kad skaitytojas įsitikintų šių mano žodžių teisingumu, siūlau jam pabandyti paanalizuoti paviršius, vaizduojančius naudingumo funkciją $U = \min\left(\frac{Y_1}{b_1}, \frac{Y_2}{b_2}\right)$ bei mišraus tipo naudingumo funkciją. Juk net įsivaizduoti (t. y.

„pamatyti“ savo vaizduotėje ir nupiešti) tuos paviršius nėra jau taip paprasta, jei bandytume tai padaryti, turėdami tik tų funkcijų analizinius modelius ir neturėdami tas funkcijas vaizduojančių izonaudžių šeimų. Turėdami izonaudžių šeimas, mes jau žymiai lengviau galime įsivaizduoti ir tas funkcijas vaizduojančius paviršius bei analizuoti rinkinio naudingumo kitimą, keičiantis jo komponentėms – koordinatėms Y_1 ir Y_2 reikšmėms.

Šiame skyrelyje mes spręsimė vartojimo optimizavimo uždavinį, naudodamiesi **izonaudžių ir biudžetinės tiesės metodu**, atlikdami visus veiksmus plokštumoje. Kai skaitytojas susipažins su šio uždavinio sprendimo būdais, rekomenduočiau jums sugrįžti prie šio sakinio ir pabandyti įsivaizduoti, kaip vartojimo optimizavimo uždavinys turėtų būti sprendžiamas trimatėje erdvėje. Dar sudėtingiau atrodytų gamybos planavimo optimizavimo uždavinio sprendimas, kurio metodus nagrinėsime 1.14.12.1.1. skyrelyje. Todėl ir tenka sudarinėti izonaudes, izokvantes bei izokostes ir jų šeimas, grupuoti vartojamus gaminius ir paslaugas, jungiant į **agreguotus produktus ir tokiu būdu** mažinant nagrinėjimų erdvių matavimų skaičių.

Tuo čia mes ir baigsime naudingumo funkcijų bei jų matematinių modelių apžvalgą, parekomenduodami skaitytojui, susidomėjusiam šia tema, jau anksčiau minėtąją Dž. von Noimano ir O. Morgenšterno knygą [49], o taip pat knygą [174], skirtą lošimų teorijai, kurioje pateiktos **naudingumo teorijos aksiomos**. Pereisime prie vartojimo optimizavimo uždavinių.

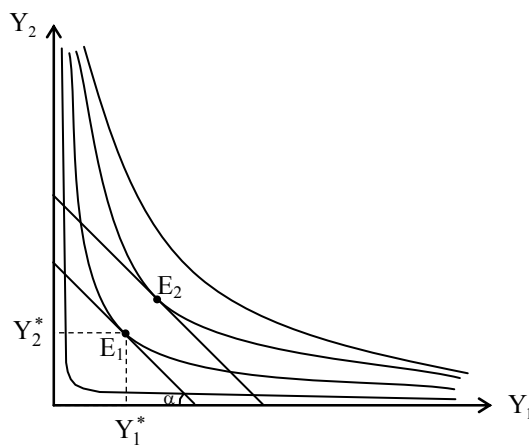
Suvartojamų produktų kiekiai priklauso ne tik nuo vartotojų poreikių bei vartojamų produktų naudingumo vartotojui, bet ir nuo vartotojo finansinių galimybių, t. y. nuo vartotojo pajamų ir nuo vartojamų produktų (prekių, paslaugų) kainų.

Šios aplinkybės matematiniam aprašymui mikroekonomikoje įsivedama **biudžetinės tiesės**, modeliuojančios vartotojo finansines galimybes, sąvoka. Biudžetinės tiesės lygtis dviproduktinėje sistemoje atrodo taip: $p_1Y_1+p_2Y_2=IN$, kur p_1 –

pirmojo produkto vieneto kaina, p_2 – antrojo produkto vieneto kaina, IN – vartotojo individualios pajamos, skirtos vartojimui.

Pasinaudodami neoklasikinę vartojimo funkciją vaizduojančiomis antrojo tipo vienodo naudingumo kreivėmis ir vartotojo biudžetine tiese, mes galime surasti tam vartotojui **optimalų vartojimo planą** (Y_1^*, Y_2^*), t. y. tokius pirmojo ir antrojo produkto kiekius Y_1^* ir Y_2^* , kurie, kainuodami vartojimui išskirtą sumą IN , gali duoti vartotojui maksimalią naudą, lyginant su visais kitais produktų rinkiniais, kuriuos vartotojas galėtų įsigyti už minėtąją sumą.

Optimalaus vartojimo plano radimo algoritmą iliustruoja 312 pav., kuriame pavaizduotos keturios kreivės yra antrojo tipo vienodo naudingumo kreivės („izonaudės“), atitinkančios neoklasikinę naudingumo funkciją, o dvi tiesės – biudžetinės tiesės, atitinkančios duotąsias produktų kainas p_1 ir p_2 bei skirtingas dviejų vartotojų pajamas IN_1 ir IN_2 , skirtas vartojimo produktų įsigijimui.



312 pav.

Taško E_1 , kuriame biudžetinė tiesė $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN_1$ liečiasi su atitinkama antrojo tipo vienodo naudingumo kreive $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U_1^* = \text{const.}$, koordinatės $Y_1^{(E_1)} = Y_1^*$, $Y_2^{(E_1)} = Y_2^*$ kaip tik ir yra vektoriaus $Y^* = (Y_1^*, Y_2^*)$, vaizduojančio optimalų vartojimo planą, koordinatės, nes $U_1^* = (Y_1^*)^{\alpha_1} \cdot (Y_2^*)^{\alpha_2}$ yra maksimali produktų rinkinio (Y_1, Y_2) , kurį galima įsigyti už sumą IN_1 , nauda. Tai nesunku įrodyti, analizuojant 312 pav. Įrodysime tai.

Nagrinėdami neoklasikinę naudingumo funkciją $U = Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2}$, buvome nustatę, jog $\frac{\partial U}{\partial Y_1} > 0$ ir $\frac{\partial U}{\partial Y_2} > 0$. Todėl, judėdami plokštuma Y_1 o Y_2 į viršų ir į dešinę, mes pereisime prie antrojo tipo vienodo naudingumo kreivių, atitinkančių vis didesnę naudingumo indekso reikšmę. Visos „izonaudės“, kurios kirs biudžetinę tiesę, turės mažesnę U reikšmę už naudingumo indekso reikšmę U_1^* . Dar didesnę U reikšmę turės „izonaudžių“, esančių virš „izonaudės“ $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U_1^* = \text{const.}$, taškai, tačiau tos izonaudės jau neturės bendrų taškų su biudžetine tiese, nes visi tų „izonaudžių“ taškai bus virš jos. Tai reiškia, kad visi tuos taškus atitinkantys rinkiniai (Y_1, Y_2) kainuos jau daugiau negu turima suma IN_1 , o rinkinio $(Y_1^{(E_1)}, Y_2^{(E_1)})$ naudingumo indeksas U_1^* bus didesnis už bet kurio kito rinkinio (Y_1, Y_2) , kurį galima nusipirkti už sumą IN_1 , naudingumo indeksą U . Analogiškai galėtume surasti optimalų vartojimo planą, atitinkantį tašką E_2 , kai pajamos, skirtos vartojimui, būtų lygios IN_2 , kur $IN_2 > IN_1$.

Taško E_1 koordinatės $Y_1^{(E_1)} = Y_1^*$ ir $Y_2^{(E_2)} = Y_2^*$ galima rasti ne tik grafiškai, bet ir analiziškai.

Taške E_1 „izonaudės“ $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U_1^* = \text{const.}$ liestinės kampinis koeficientas $\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{U=U_1^*=\text{const}}$ turi sutapti su biudžetinės tiesės $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN_1 = \text{const}$ kampiniu koeficientu $\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{IN_1=\text{const.}}$.

Rasime „izonaudės“ U_1^* liestinės kampinį koeficientą. Kadangi $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U_1^* = \text{const.}$, tai ir $\alpha_1 \ln Y_1 + \alpha_2 \ln Y_2 = \ln U_1^* = \text{const.}$

Todėl $d \ln U_1^* = \frac{\partial \ln U_1^*}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial \ln U_1^*}{\partial Y_2} dY_2 = 0$, t. y. $\frac{\alpha_1}{Y_1} dY_1 + \frac{\alpha_2}{Y_2} dY_2 = 0$, iš kur išplaukia, jog $\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{U=U_1^*=\text{const.}} = -\frac{\alpha_1 Y_2}{Y_1 \alpha_2} = -\text{MRS}$.

Rasime biudžetinės tiesės $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN_1 = \text{const.}$ kampinį koeficientą. Kadangi $IN = \text{const.}$, tai $d(IN) = d(p_1 Y_1 + p_2 Y_2) = \frac{\partial(p_1 Y_1 + p_2 Y_2)}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial(p_1 Y_1 + p_2 Y_2)}{\partial Y_2} dY_2 = p_1 dY_1 + p_2 dY_2 = 0$, iš kur išplaukia, jog $\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)_{IN=\text{const.}} = -\frac{p_1}{p_2}$.

Biudžetinės tiesės kampinį koeficientą buvo galima gauti ir žymiai paprasčiau, išreiškiant Y_2 per Y_1 , t. y. iš lygybės $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN_1$ gaunant lygybę $Y_2 = -\frac{p_1}{p_2} Y_1 + \frac{IN_1}{p_2}$.

Žinodami, kad „izonaudės“ liestinės ir biudžetinės tiesės kampiniai koeficientai turi būti lygūs, gauname pirmąją lygtį, reikalingą Y_1^* ir Y_2^* apskaičiavimui:

$$-\frac{\alpha_1 Y_2}{Y_1 \alpha_2} = -\frac{p_1}{p_2}; \quad Y_2 = \frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} Y_1. \quad \text{Ši lygtis rodo, kad visi „izonaudžių“ ir}$$

biudžetinių tiesių lietimosi taškai išsidėstę vienoje tiesėje $Y_2 = \frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} Y_1$.

Antrąją lygtį gausime, atsižvelgdami į tai, kad taškas E_1 priklauso biudžetinei tiesei, todėl turi tenkinti lygybę $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN_1$, iš kurios išplaukia, jog $Y_2^* = -\frac{p_1}{p_2} Y_1^* + \frac{IN_1}{p_2}$.

Spręsdami šią dviejų tiesinių lygčių sistemą, gauname, kad $Y_1^* = \frac{(IN_1) \alpha_1}{p_1 (\alpha_1 + \alpha_2)}$, $Y_2^* = \frac{(IN_1) \alpha_2}{p_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}$. Įstatę Y_1^* ir Y_2^* į naudingumo funkciją, gauname jos optimalią

reikšmę $U_1^* = \left(\frac{IN_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2}$, atitinkančią duotąsias išlaidas IN_1 .

Iš formulės $U = \left(\frac{IN}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2}$, vaizduojančios produktų rinkinio (Y_1^*, Y_2^*) optimalaus naudingumo U^* priklausomybę nuo išlaidų IN , išleistų tam rinkiniui įsigyti, išplaukia formulė $\frac{dU^*}{dIN} = (\alpha_1 + \alpha_2)^{1-\alpha_1-\alpha_2} IN^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2}$. Ji rodo, jog naudingumas U^* , didinant IN , kai $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, didėja lėtėjančiu tempu, t. y., kad to didėjimo pagreitis $\frac{d^2U^*}{dIN^2}$ tuomet yra neigiamas dydis. Ši išvada atitinka tai, ką stebime gyvenimo praktikoje. Atveju $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ turėtume $U^* = IN \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2}$ ir naudingumo U^* didėjimo greitis $\frac{dU^*}{dIN} = \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2}$ nepriklausytų nuo IN .

312 pav. galima panaudoti ir kito uždavinio, kuris atsiranda, kuomet duotajam naudingumo indeksui U^* ieškoma minimali suma IN , reikalinga atitinkamo produktų rinkinio (Y_1^*, Y_2^*) pirkimui, sprendimo iliustravimui.

Tuomet, sprendami lygčių sistemą
$$\begin{cases} Y_2 = \frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} Y_1, \\ Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U^*, \end{cases}$$
 kurią išsprendę gautume

$$\begin{cases} Y_1^* = \left[U^* \cdot \left(\frac{p_2 \alpha_1}{p_1 \alpha_2} \right)^{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}, \\ Y_2^* = \left[U^* \cdot \left(\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} \right)^{\alpha_1} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}. \end{cases}$$

Istatę surastas Y_1^* ir Y_2^* reikšmes į biudžetinės tiesės lygtį, gautume, jog

$$(IN)^* = p_1 Y_1^* + p_2 Y_2^* = (U^*)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left[p_1 \left(\frac{p_2 \alpha_1}{p_1 \alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} + p_2 \left(\frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right] =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)^{\alpha_1 + \alpha_2} \sqrt[\alpha_1 + \alpha_2]{U^* \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2}}. \text{ Tai minimali suma, kurią reikėtų skirti vartojimui, norint pasiekti duotąją vartojimo naudingumo indekso reikšmę } U^*.$$

Keičiantis kainoms p_1 ir p_2 bei vartotojų pajamoms IN , keičiasi ir optimalūs vartojimo planai (Y_1^*, Y_2^*) , tačiau ir šiuo atveju visi tuos optimalius planus vaizduojantys taškai (Y_1^*, Y_2^*) priklausys vienai tiesei $Y_2 = \frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} Y_1$, vadinamai **optimalių planų tiese**.

Nesunku įrodyti, jog toje tiesėje $MRS = \frac{p_1}{p_2}$. Vadinasi, optimalių planų tiesės taškuose pirmojo produkto vienetas, kainuojantis p_1 , turi tokį patį naudingumą kaip

$\frac{p_1}{p_2}$ vienetų antrojo produkto, kuriovieneto kaina lygi p_2 . Todėl optimumo taškuose pakeitimas tampa lygiavertis ne tik naudingumo, bet ir kainos atžvilgiu.

Tikrovėje individų vartojimo planai retai kada būna tiksliai optimalūs, nes vartotojai nežino tokių vienodo naudingumo kreivių, kurios pakankamai tiksliai atspindėtų vartotojų poreikius bei vartojamų produktų naudingumą konkrečiam vartotojui. Be to atskiras vartotojas nėra pilnai determinuotas ekonominės veiklos subjektas, nes į atskiro vartotojo vartojimą gana stipriai veikia atsitiktiniai faktoriai. Todėl galima teigti, kad tikrovėje apytikriai optimalūs yra tik vartojimo planų vidurkiai, nusistovintys ilgaiui, esant stabiliai ekonominei būsenai.

Mikroekonomikoje priimama prielaida, kad vartojimo planų vidurkiai yra pakankamai artimi optimaliems planams (Y_1^*, Y_2^*) , o pastarieji yra kainų p_1 ir p_2 bei vartotojų pajamų IN funkcijos $Y_1^* = D_1(p_1, p_2, IN)$ ir $Y_2^* = D_2(p_1, p_2, IN)$. Tos funkcijos vadinamos **namų ūkio paklausos funkcijomis**, nes mikroekonomikoje pagrindiniais vartotojais laikomi namų ūkiai (Household).

Namų ūkių paklausos funkcijas grafiškai vaizduoja **kreivės „pajamos – vartojimas“ ir „kainos – vartojimas“**.

Pirmoji kreivė rodo, kaip, esant fiksuotoms kainoms, keičiasi vartojimo lygis (kiekis), keičiantis pajamoms, t. y., kaip jis auga pajamoms didėjant.

Antroji kreivė rodo, kaip, esant fiksuotoms pajamoms, keičiantis kainoms, keičiasi vartojimas, t. y., kaip jis mažėja kainoms didėjant.

Panašiai, kaip buvo surasta **optimali vartojimo strategija** neoklasikinės vartojimo naudingumo funkcijos atveju, tokią strategiją galima surasti ir kitų vartojimo naudingumo funkcijų atveju. Palieku tai pačiam skaitytojui, čia apsiribodamas tik pačių tokių strategijų pateikimu.

Kai vartojami produktai gali pilnai pakeisti vienas kitą, t. y., kai vartojimo naudingumo funkcija yra $U = a_1 Y_1 + a_2 Y_2$, tai optimali vartojimo strategija yra tokia: tikslinga vartoti tą ir tik tą produktą $i=i^*$, kurio naudingumo koeficiento a_i ir to produkto vieneto kainos p_i santykis $\frac{a_i}{p_i}$ yra pats

didžiausias. Vartojimo optimalaus naudingumo U^* priklausomybė nuo pajamų, skirtų vartojimui, dydžio IN, tuomet būtų $U^* = \frac{a_{i^*}}{p_{i^*}} IN = IN \max_i \left(\frac{a_i}{p_i} \right)$.

Kai vartojimo produktai vienas kitą papildo, t. y., kai vartojimo naudingumo funkcija yra $U = \min_i \left(\frac{Y_i}{b_i} \right)$, tai optimalią vartojimo strategiją vaizduoja optimalių planų tiesės $Y_2 = \left(\frac{b_2}{b_1} \right) Y_1$ ir biudžetinės tiesės $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN$ susikirtimo taškas. Todėl optimalūs vartojimo kiekiai yra $Y_1^* = \frac{IN b_1}{p_1 b_1 + p_2 b_2}$, $Y_2^* = \frac{IN b_2}{p_1 b_1 + p_2 b_2}$, o optimalus naudingumas $U^* = \frac{IN}{p_1 b_1 + p_2 b_2}$.

Kai vartojimo naudingumo funkcija yra mišraus tipo naudingumo funkcija, tai egzistuoja dvi optimalių planų tiesės: $Y_2 = \frac{c_2}{c_1} Y_1$ ir $Y_2 = \frac{d_2}{d_1} Y_1$. Kai produkcijos kainų santykis $\frac{p_1}{p_2}$ yra didesnis už santykį $\frac{d_2 - c_2}{c_1 - d_1}$, tai optimalų vartojimo planą vaizduoja biudžetinės tiesės $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN$ susikirtimo

taškas su ta optimalių planų tiese, kurios kampinis koeficientas yra didesnis. Todėl, kai $\frac{c_2}{c_1} > \frac{d_2}{d_1}$, tai

$$Y_1^* = \frac{IN c_1}{p_1 c_1 + p_2 c_2}, \quad Y_2^* = \frac{IN c_2}{p_1 c_1 + p_2 c_2} \quad \text{ir} \quad U^* = \frac{IN}{p_1 c_1 + p_2 c_2}, \quad \text{o kai} \quad \frac{d_2}{d_1} > \frac{c_2}{c_1}, \quad \text{tai} \quad Y_1^* = \frac{IN d_1}{p_1 d_1 + p_2 d_2},$$

$$Y_2^* = \frac{IN d_2}{p_1 d_1 + p_2 d_2}, \quad U^* = \frac{IN}{p_1 d_1 + p_2 d_2}.$$

Kai kainų santykis $\frac{p_1}{p_2}$ yra mažesnis už santykį $\frac{d_2 - c_2}{c_1 - d_1}$, tai optimalų vartojimo planą vaizduoja biudžetinės tiesės susikirtimo taškas su ta optimalių planų tiese, kurios kampinis koeficientas yra mažesnis. Todėl, kai $\frac{c_2}{c_1} > \frac{d_2}{d_1}$, tai $Y_1^* = \frac{IN d_1}{p_1 d_1 + p_2 d_2}$, $Y_2^* = \frac{IN d_2}{p_1 d_1 + p_2 d_2}$, $U^* = \frac{IN}{p_1 d_1 + p_2 d_2}$, o kai $\frac{c_1}{c_2} < \frac{d_1}{d_2}$, tai $Y_1^* = \frac{IN c_1}{p_1 c_1 + p_2 c_2}$, $Y_2^* = \frac{IN c_2}{p_1 c_1 + p_2 c_2}$, $U^* = \frac{IN}{p_1 c_1 + p_2 c_2}$.

Kai kainų santykis $\frac{p_1}{p_2}$ yra lygus santykiui $\frac{d_2 - c_2}{c_1 - d_1}$, tai biudžetinė tiesė tampa lygiagrečiai zonavandės atkarpai, jungiančiai tos tiesės susikirtimo taškus su optimalių planų tiesėmis, t. y. taškus, turinčius koordinatas $Y_1 = \frac{IN c_1}{p_1 c_1 + p_2 c_2}$, $Y_2 = \frac{IN c_2}{p_1 c_1 + p_2 c_2}$, ir $Y_1 = \frac{IN d_1}{p_1 d_1 + p_2 d_2}$, $Y_2 = \frac{IN d_2}{p_1 d_1 + p_2 d_2}$. Tuomet kiekvienas tos atkarpos taškas tampa optimaliu vartojimo tašku, charakterizuojamu tuo pačiu vartojimo naudingumu $U^* = \frac{IN}{|c_1 d_2 - c_2 d_1|}$.

Kai $\frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}$, tai abi optimalių planų tiesės susilieja į vieną, ir mišraus tipo naudingumo funkcija tampa funkcija $U^* = \min_i \left(\frac{Y_i}{b_i} \right)$, t. y., vienas kitą papildančių produktų rinkinio naudingumo funkcija.

Kai keičiant koeficientų c_i ir d_i reikšmes į ribines leistinas jų reikšmes, optimalių planų tiesės $Y_2 = \frac{c_2}{c_1} Y_1$ ir $Y_2 = \frac{d_2}{d_1} Y_1$, tampa abscisų ir ordinačių ašimis, tai mišraus tipo naudingumo funkcija tampa tiesine adityvine pilnai vienas kitą pakeičiančių produktų rinkimo naudingumo funkcija $U = a_1 Y_1 + a_2 Y_2$.

Tai reiškia, **jog funkcijas $U = a_1 Y_1 + a_2 Y_2$ ir $U = \min_i \left(\frac{Y_i}{b_i} \right)$ galima laikyti mišraus tipo naudingumo funkcijos daliniais atvejais.** Apie tai jau buvo rašyta, nagrinėjant tų tipų funkcijas.

Priimdami, kad koeficientai c_i ir d_i yra tolydžiai kintantys dydžiai ir keičiasi taip, kad santykis $\frac{d_2 - c_2}{c_1 - d_1}$ keičiasi nuo $-\infty$ iki $+\infty$, **iš mišraus tipo naudingumo funkcijos gautume neoklasikinės naudingumo funkcijos fragmentus, kaip pastarosios ribinius atvejus.**

Baigdamas 1.14.12.1.1. skyrelį, pažymėsiu, kad šiuolaikinėje mikroekonominėje literatūroje dažnai laikomasi tradicijos žymėti funkcijas ir ekonominius rodiklius jų angliško pavadinimų pirmosiomis raidėmis. Todėl paklausos funkcijos dažnai žymimos raide D (nuo angliško žodžio „Demand“ – „paklausa“), pasiūlos funkcijos – raide S (nuo žodžio „Supply“ – „pasiūla“), vartojimo išlaidų funkcijos – raide C (nuo žodžio „Consumption“ – „vartojimas“), kainos – P („Prices“), investicijos – raide I (nuo žodžio „Investment“ – „investicijos“), pajamos – raidėmis IN (nuo žodžio „Income“ – „pajamos“), marginalinis pakeitimo santykis – MRS („Marginal rate of substitution“), bendras vidinis produktas – GDP („Gross domestic product“) ir t. t.

1.14.12.1.2. Gamybos mikroekonominis modeliavimas

Gamybinė veikla mikroekonominiu požiūriu yra procesas, kurio metu gamintojai (įmonės ir individualūs gamintojai) vartoja įvairius resursus (medžiagas, energiją, darbo jėgą, įrenginius ir t. t.) ir gamina orientuotą į rinką produkciją (prekes, paslaugas).

Mikroekonominėje gamybos teorijoje priimama, kad gamybos procesą galima aprašyti **gamybinėmis funkcijomis $Y_i = F_i(X_1, X_2)$** , kur Y_i – pagamintos

produkcijos i kiekis, X_1 , X_2 – resurso (1) ir (2) kiekiai, kurie reikalingi produkto i gamybai. Resurso sąvoka gana dažnai vartojama apibendrinta prasme. Makroekonomikoje, pavyzdžiui, resursu X_2 laikomas kapitalas (kapitaliniai įdėjimai) K , o resursu X_1 – darbo jėga (darbo jėgos sąnaudos) L .

Paprastumo dėlei nagrinėsime dviproduktinę dviresursinę sistemą, kurioje $i=1, 2$ ir kurioje vykstanti gamybos procesą aprašo dvi gamybinės funkcijos $Y_1=F_1(X_1, X_2)$ ir $Y_2=F_2(X_1, X_2)$.

Fiksuosime Y_i reikšmę ir rasime visus tokius plokštumos $X_1 \times X_2$ taškus (X_1, X_2) , kurių koordinatų reikšmės įstatę į gamybinę funkciją $Y_i=F_i(X_1, X_2)$ gausime tą fiksuotą Y_i reikšmę. Tokius taškus (X_1, X_2) jungianti linija mikroekonomikoje vadinama **izokvante** („vienodo kiekio linija“). Izokvantės lygtis yra $F_i(X_1, X_2)=Y_i=\text{const}$. Jos forma priklauso nuo gamybinės funkcijos $F_i(X_1, X_2)$ tipo.

Mikroekonomikoje dažniausiai taikomi 4 tipai gamybinių funkcijų ir jas atitinkančių izokvančių.

1. Tiesinė gamybinė funkcija (gamybinė funkcija su pilnu resursų pakeičiamumu) $Y_i=a_{1,i}X_1+a_{2,i}X_2$ (arba tiesiog $Y=a_1X_1+a_2X_2$).

2. Gamybinė funkcija su pilnu resursų papildomumu $Y_i=\min\left(\frac{X_1}{b_{1,i}}, \frac{X_2}{b_{2,i}}\right)$

(arba tiesiog $Y=\min\left(\frac{X_1}{b_1}, \frac{X_2}{b_2}\right)$).

3. Mišraus tipo gamybinė funkcija $Y_i=y_{1,i}+y_{2,i}$, kurioje $y_{1,i}$ ir $y_{2,i}$ tenkina nelygybes: $X_1 \geq a_{1,i} \cdot y_{1,i} + b_{1,i} \cdot y_{2,i}$, $X_2 \geq a_{2,i} \cdot y_{1,i} + b_{2,i} \cdot y_{2,i}$ (arba tiesiog $Y=y_1+y_2$, kur $a_1y_1+b_1y_2 \leq X_1$, $a_2y_1+b_2y_2 \leq X_2$).

4. Neoklasikinė gamybinė funkcija $Y = X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2}$, kur $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, o jų suma, a_1+a_2 gali būti mažesnė už 1, lygi 1 ar net didesnė už 1.

Kaip matome, tipinių gamybinių funkcijų formos sutampa su mūsų jau išnagrinėtų tipinių naudingumo funkcijų formomis. Todėl sutampa ir formaliosios analogiškų funkcijų savybės, o izokvantės atitinka antrojo tipo vienodo naudingumo kreives („izonaudes“).

Mikroekonominėje gamybos teorijoje dažniausiai naudojamos neoklasikinė gamybinės funkcijos forma ir analogiškai, kaip vartojimo teorijoje buvo įvestos produktų marginalinio naudingumo ir marginalinės pakeitimo normos (pakeitimo santykio) MRS sąvokos, įvedamos **resurso j panaudojimo gamyboje marginalinio**

produktyvumo $\frac{\partial Y}{\partial X_j} = \frac{\partial F}{\partial X_j}$ **ir marginalinės pakeitimo normos (pakeitimo santykio) MRS gamyboje sąvokos.**

Neoklasikinių gamybos funkcijų klasei priklauso ir ekonomikoje gana plačiai vartojama **dviejų reikšmių Kobo ir Duglaso gamybinė funkcija** $Y = A X_1^a \cdot X_2^{1-a} = A \cdot L^a \cdot K^{1-a}$, kur $0 < a < 1$ ir $A > 0$ yra konstantos, nustatomos ekonometriniais metodais.

Šioje funkcijoje, kurią dar 20-aisiais XX a. metais sudarė ekonomistas Duglas, kartu su matematiku Kobu, išnagrinėję JAV apdirbamosios pramonės statistinius duomenis, Y yra gamybos indeksas, charakterizuojantis pagamintos produkcijos kiekį (vertę), $X_1=L$ – samdomos darbo jėgos indeksas, $X_2=K$ – kapitalinių įdėjimų į gamybą indeksas.

Marginalinis produktyvumas $\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{\partial Y}{\partial L}$ mikroekonomikoje ir

makroekonomikoje vadinamas **marginaliniu darbo našumu**, nes santykis $\frac{\partial Y}{\partial L}$ vaizduoja pagamintos produkcijos kiekio (jos suminės vertės) didėjimo greitį didėjant gamybos procese užimtos darbo jėgos dydžiui (darbuotojų skaičiui, išlaidoms darbo užmokesčiui).

Kai pagamintos produkcijos kiekis Y įvertinamas pinigais kaip ir kapitaliniai įdėjimai K , tai marginalinis produktyvumas $\frac{\partial Y}{\partial X_2} = \frac{\partial Y}{\partial K}$ vadinamas **marginaliniu**

kapitalinių įdėjimų į gamybą rentabilumu.*

Labiau detalizuotuose skaičiavimuose taikoma ir **trijų veiksmų Kobo ir Duglaso gamybos funkcijos formulė** $Y = aL^\alpha K^\beta M^\gamma$, kurioje L reiškia darbo jėgą, K – kapitalą, M – žaliavas bei medžiagas. Kai laipsnių rodiklių α , β ir γ suma lygi 1, tai ši formulė vaizduoja gamybos funkciją, turinčią pastovią fondogražą, kai $\alpha + \beta + \gamma < 1$ – funkciją turinčią mažėjančią fondogražą, o kai $\alpha + \beta + \gamma > 1$ – didėjančią fondogražą.

Naudodamiesi dviejų veiksmų Kobo ir Duglaso gamybine funkcija, apskaičiuosime marginalinius produktyvumus ir MRS:

$$1) \frac{\partial Y}{\partial L} = aAL^{a-1}K^{1-a} = aA\left(\frac{K}{L}\right)^{1-a}; \quad 2) \frac{\partial Y}{\partial K} = (1-a)AL^aK^{-a} = (1-a)A\left(\frac{L}{K}\right)^a;$$

$$3) MRS = -\frac{dK}{dL}\bigg|_{y=\text{const}} = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{K}{L}.$$

Kadangi, kai $0 < a < 1$ ir $A > 0$, tai $\frac{\partial Y}{\partial L} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial K} > 0$, todėl, didinant kapitalinius įdėjimus ir samdomos darbo jėgos apimtį, pagamintos produkcijos kiekis didėja.

Tačiau to didėjimo tempai mažėja, nes $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -a(1-a)AL^aK^{-a-1} = -\frac{a(1-a)A}{K}\left(\frac{L}{K}\right)^a < 0$,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -a(1-a)AL^{a-2}K^{1-a} = -\frac{a(1-a)A}{L}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-a} < 0.$$

Tai atitinka realioje ekonomikoje stebimus reiškinius. Taip pat galima įrodyti, kad šiuo atveju (t. y., kai $a_1 + a_2 \leq 1$) mažėja ir marginalinis resursų pakeitimo santykis

$$MRS = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{K}{L}, \text{ t. y. kad gamybos marginalinio darbo našumo santykis su}$$

marginaliniu kapitalinių įdėjimų į gamybą rentabilumu, didinant L , mažėja.

Įmonės, sudarydamos savo gamybinius planus (Y_1, X_1, X_2), vadovaujasi, kaip jau buvo minėta 1.14.12.1. skyrelyje, **pelno bei gamybos rentabilumo maksimizavimo principais**.

Pažymėsime p, q_1 ir q_2 produkcijos ir resursų kainas. Tuomet pirmojo tipo **optimaliu gamybiniu planu** (Y_1^*, X_1^*, X_2^*) bus gamybinis planas (Y_1, X_1, X_2), maksimizuojantis **pelno funkciją** $\Pi = pY - q_1X_1 - q_2X_2$ ar, bendresniu atveju,

* Naudosimės ir **vidutinio gamybos rentabilumo** R sąvoka, vadindami vidutiniu gamybos rentabilumu gaunamo pelno Π ir gamybos išlaidų (gamybos kaštų) C santykį $\frac{\Pi}{C}$.

$\Pi = pY - q_1X_1 - q_2X_2 - C_0$, tenkinant **apribojimus**, išplaukiančius iš gamybinės funkcijos $Y = F(X_1, X_2)$ bei iš tos situacijos, kurioje turės vykti gamyba.

Išstatę į pelno funkciją gamybinę funkciją, gauname optimizavimo uždavinio matematinį modelį (tikslą funkciją ir apribojimą) $\Pi = pF(X_1, X_2) - q_1X_1 - q_2X_2 \rightarrow \max_{X_1, X_2}$, kai $q_1X_1 + q_2X_2 \leq C$, ar $\Pi = pF(X_1, X_2) - q_1X_1 - q_2X_2 - C_0 \rightarrow \max_{X_1, X_2}$, kai $q_1X_1 + q_2X_2 + C_0 \leq C$, kur C ir C_0 – duotieji dydžiai. Čia C – gamybinėms išlaidoms padengti išskirtoji suma, o C_0 – pastovioji gamybinių išlaidų dalis, nepriklausanti nuo gaminamos produkcijos kiekio (administracinės išlaidos, išlaidos apšvietimui, patalpų šildymui, švaros palaikymui ir pan.).

Rasime funkcijos $\Pi(X_1, X_2)$ ekstremumo tašką – lygčių sistemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial X_1} = p \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_1} - q_1 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_2} = p \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_2} - q_2 = 0 \end{cases} \text{ sprendinį.}$$

Palieku skaitytojai įsitikinti, jog tuo atveju, kai $F(X_1, X_2) = X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2}$, kur $a_1 > 0$,

$$a_2 > 0, a_1 + a_2 < 1, \text{ jakobinas } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} \end{vmatrix} \text{ yra teigiamas dydis, o } \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} \text{ ir } \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2}$$

yra neigiami dydžiai, iš kur išplaukia kad funkcija $\Pi(X_1, X_2)$ turi ekstremumo tašką ir tas taškas – funkcijos $\Pi(X_1, X_2)$ maksimumo taškas.

$$\text{Ekstremumo taške galioja lygybės } \begin{cases} q_1 = p \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_1} = p \frac{\partial Y}{\partial X_1}, \\ q_2 = p \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_2} = p \frac{\partial Y}{\partial X_2}, \end{cases} \text{ t. y. gauname,}$$

kad ekstremumo taške, kuris vaizduoja optimalų gamybos planą, **resursų kainos yra proporcingos marginaliems tų resursų produktyvumams**. Tai irgi atitinka tikrovę, nes, kuo didesnis resurso marginalinis produktyvumas, tuo didesnę kainą sutiks už jį mokėti tą resursą perkantis gamintojas.

Iš šių formulių išplaukia, jog ekstremumo taškuose galioja lygybė

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial X_1}}{\frac{\partial Y}{\partial X_2}} = \text{MRS}, \text{ kas atitinka analogišką formulę } \frac{p_1}{p_2} = \text{MRS}, \text{ išvedamą}$$

vartojimo teorijoje.

Naudodamiesi neoklasikine gamybine funkcija $Y = X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2}$, gauname, jog

$$\frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_1} = a_1 X_1^{a_1-1} \cdot X_2^{a_2}, \quad \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_2} = a_2 X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2-1}, \text{ iš kur išplaukia, kad optimumo}$$

$$\text{taške } \text{MRS} = \frac{a_1 X_1^{a_1-1} \cdot X_2^{a_2}}{a_2 X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2-1}} = \frac{a_1 X_2}{a_2 X_1}. \text{ Todėl } \left(-\frac{a_1 X_2}{a_2 X_1} \right) = \left(-\frac{q_1}{q_2} \right) \text{ yra izokvantės } X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} =$$

$= Y = \text{const}$ liestinės, optimumo taške sutampančios su **izokostę** $q_1X_1 + q_2X_2 = C = \text{const}$ vaizduojančia tiese, kampinis koeficientas. Iš šios formulės išplaukia, jog

$$X_2^* = \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1} X_1^*.$$

Gavome formules, analogiškas formulėms $MRS = \frac{\alpha_1 Y_2}{\alpha_2 Y_1}$ ir $Y_2 = \frac{p_1 \alpha_2}{p_2 \alpha_1} Y_1$, kurias buvome išvedę 1.14.12.1.1. skyrelyje, nagrinėdami vartojimą ir jo optimizavimą.

Kadangi $\frac{\partial \Pi}{\partial X_1} > 0$ ir $\frac{\partial \Pi}{\partial X_2} > 0$, tai pelnas Π , didėjant X_1 ir X_2 didėja. Todėl optimumo taške bus sunaudoti visi resursai ir apsiribojimo nelygybės $q_1 X_1 + q_2 X_2 \leq C$ bei $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 \leq C$ taps lygybėmis $q_1 X_1 + q_2 X_2 = C$ ir $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C$.

Įstatę formulę $X_2^* = \frac{q_1 a_2}{q_2 a_1} X_1^*$ į formulę $q_1 X_1 + q_2 X_2 = C$, išreiškiančią apribojimą,

kurį privalome tenkinti, gauname, jog $X_1^* = \frac{a_1 C}{q_1(a_1 + a_2)}$, $X_2^* = \frac{a_2 C}{q_2(a_1 + a_2)}$,

$Y^* = \left(\frac{C}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$. Jei būtume pasinaudoję bendresne apribojimo

formule, tai būtume gavę jog $X_1^* = \frac{a_1(C - C_0)}{q_1(a_1 + a_2)}$, $X_2^* = \frac{a_2(C - C_0)}{q_2(a_1 + a_2)}$,

$$Y^* = \left(\frac{C - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$$

Tą patį rezultatą būtume gavę ir naudodamiesi Lagranžo metodu sąlyginio ekstremumo radimui.

Rasime Lagranžo funkcijos $\Lambda(X_1, X_2) = \Pi(X_1, X_2) + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C)$ ekstremumo tašką (X_1^*, X_2^*) ir įsitikinsime, kad tuo atveju, kai $a_1 + a_2 < 1$, toks taškas tikrai egzistuoja ir yra funkcijos $\Pi(X_1, X_2) = pY - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 = pX_1^{a_1} X_2^{a_2} - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0$ maksimumo taškas.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_1} = p \frac{\partial Y}{\partial X_1} - q_1 + \lambda q_1 = p \frac{a_1 Y}{X_1} - q_1 + \lambda q_1 = 0, \\ \frac{\partial \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_2} = p \frac{a_2 Y}{X_2} - q_2 + \lambda q_2 = 0. \end{cases}$$

Iš šių lygybių išplaukia, jog $X_1^* = \frac{p a_1 Y^*}{q_1(1 - \lambda)}$, $X_2^* = \frac{p a_2 Y^*}{q_2(1 - \lambda)}$. Įstatę šias reikšmes į lygybę $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C$, išreiškiančią apribojimą, kurį turime tenkinti, siekdami maksimalaus pelno, gauname $\frac{p Y^*}{1 - \lambda} (a_1 + a_2) = C - C_0$, iš kur išplaukia, jog $1 - \lambda = \frac{p Y^* (a_1 + a_2)}{C - C_0}$.

Todėl $X_1^* = \frac{a_1(C - C_0)}{q_1(a_1 + a_2)}$, $X_2^* = \frac{a_2(C - C_0)}{q_2(a_1 + a_2)}$. Tai sutampa su anksčiau gautais rezultatais.

Kai $C_0 = 0$ ir todėl $C = q_1 X_1 + q_2 X_2$, tai $X_1^* = \frac{a_1 C}{q_1(a_1 + a_2)}$, $X_2^* = \frac{a_2 C}{q_2(a_1 + a_2)}$, kas irgi sutampa su anksčiau gautais rezultatais.

Įrodysime, jog taške (X_1^*, X_2^*) pelno funkcija $\Pi(X_1, X_2)$ pasiekia maksimumą.

$$\frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_1^2} = \frac{p a_1 (a_1 - 1) Y}{X_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_2^2} = \frac{p a_2 (a_2 - 1) Y}{X_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_2 \partial X_1} =$$

$$= \frac{p a_1 a_2 Y}{X_1 X_2}.$$

Apskaičiuosime jakobiano reikšmę:

$$J = \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_2^2} - \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \cdot \frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_2 \partial X_1} = \frac{p^2 a_1 a_2 (a_1 - 1)(a_2 - 1) Y^2}{X_1^2 X_2^2} - \frac{p^2 a_1^2 a_2^2 Y^2}{X_1^2 X_2^2} = \frac{p^2 Y^2}{X_1^2 X_2^2} a_1 a_2 [(a_1 - 1)(a_2 - 1) - a_1 a_2] = \frac{p^2 Y^2}{X_1^2 X_2^2} a_1 a_2 (1 - a_1 - a_2).$$

Kai $a_1 + a_2 < 1$, tai $J > 0$, nes $a_1 > 0$ ir $a_2 > 0$. Vadinas, taškas (X_1^*, X_2^*) tuo atveju – tikrai ekstremumo taškas.

Kadangi $\frac{\partial^2 \Lambda(X_1, X_2)}{\partial X_1^2} = \frac{p a_1 (a_1 - 1) Y}{X_1^2} < 0$, nes $p > 0$, $a_1 > 0$, $Y > 0$, $a_1 - 1 < 0$, tai ekstremumo taškas – maksimumo taškas.

$$\text{Maksimali gamybos apimtys } Y \text{ reikšmė yra } Y^* = (X_1^*)^{a_1} (X_2^*)^{a_2} = \left(\frac{C - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2},$$

$$\text{o maksimali pelno } \Pi \text{ reikšmė yra } \Pi^* = p Y^* - q_1 X_1^* - q_2 X_2^* - C_0 = p \left(\frac{C - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} - \frac{a_1 (C - C_0)}{a_1 + a_2} - \frac{a_2 (C - C_0)}{a_1 + a_2} - C_0 = p \left(\frac{C - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} - C.$$

Kai gamyba aprašoma Kobo ir Duglaso gamybinėmis funkcijomis, tai panašiai, kaip tai darėme 1.14.12.1.1. skyrelyje, nesunku įsitikinti, kad optimalaus gamybos plano taškai išsidėstę tiesėje $X_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{1-a}{a} X_1$ ir yra šios tiesės susikirtimo taškai su

$$\text{tiesėmis } q_1 X_1 + q_2 X_2 = C. \text{ Keičiantis } C \text{ reikšmėms, optimalaus plano taškai } X_1^* = \frac{aC}{q_1},$$

$$X_2^* = \frac{1-a}{q_2} C \text{ slenka tiesė } X_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{1-a}{a} X_1, \text{ vadinama } \textbf{optimalių gamybos planų} \\ \textbf{tiesė}.$$

$$\text{Tuomet gauname, kad } MRS = \frac{a}{1-a} \frac{X_2}{X_1} = \frac{a}{1-a} \frac{K}{L} \text{ ir } X_2^* = \frac{1-a}{a} \frac{q_1}{q_2} X_1^*, \text{ t. y.}$$

$$K^* = \frac{1-a}{a} \frac{q_1}{q_2} L^*. \text{ Iš šių formulų išplaukia, jog panaudotų resursų kiekiai ekstremumo}$$

taške yra atvirkščiai proporcingi jų kainoms q_1 ir q_2 .

Analogiškai, kaip buvo įrodyta 1.14.12.1.1. skyrelyje, kad biudžetinės tiesės $p_1 Y_1 + p_2 Y_2 = IN = \text{const}$ lietimosi su „izonaude“ $Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2} = U = \text{const}$ taško koordinatės

$$Y_1^* = \frac{\alpha_1}{p_1} \frac{IN}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad Y_2^* = \frac{\alpha_2}{p_2} \frac{IN}{\alpha_1 + \alpha_2} \text{ vaizduoja optimalų vartotojo planą,}$$

charakterizuojamą maksimalia vartojimo naudingumo indekso U reikšme

$$U^* = \left(\frac{IN}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2}, \text{ kurią galima pasiekti, turint vartojimui skirtą}$$

sumą IN , galima įrodyti, kad izokostės $q_1 X_1 + q_2 X_2 = C = \text{const}$ lietimosi su atitinkama

$$\text{izokvante } A X_1^a \cdot X_2^{1-a} = Y = \text{const} \text{ taško koordinatės } X_1^* = \frac{a}{q_1} C, \quad X_2^* = \frac{1-a}{q_2} C$$

vaizduoja optimalų pelno maksimumo atžvilgiu gamybos planą, charakterizuojamą pagamintos produkcijos kiekiu $Y^* = A(X_1^*)^a \cdot (X_2^*)^{1-a} = A\left(\frac{a}{q_1}C\right)^a \cdot \left(\frac{1-a}{q_2}C\right)^{1-a} = AC\left(\frac{a}{q_1}\right)^a \cdot \left(\frac{1-a}{q_2}\right)^{1-a}$ ir maksimaliu pelnu $\Pi^* = \Pi(X_1^*, X_2^*) = pY^* - q_1X_1^* - q_2X_2^* = C\left[Ap\left(\frac{a}{q_1}\right)^a \cdot \left(\frac{1-a}{q_2}\right)^{1-a} - \frac{a}{q_1} \cdot q_1 - \frac{1-a}{q_2} \cdot q_2\right] = C \cdot \left[Ap\left(\frac{a}{q_1}\right)^a \cdot \left(\frac{1-a}{q_2}\right)^{1-a} - 1\right]$, kuri galima gauti, išleidus visą gamybos resursams skirtą sumą C .

Kai **gamybos kaštų funkcija** $C(X_1, X_2)$ yra $C(X_1, X_2) = q_1X_1 + q_2X_2 + C_0$, tai tą funkciją atitinkanti izokostė yra tiesė $q_1X_1 + q_2X_2 + C_0 = C = \text{const}$. Tuomet optimalų planą vaizduoja taškas $X_1^* = \frac{a}{q_1}(C - C_0)$, $X_2^* = \frac{1-a}{q_2}(C - C_0)$. Visi tie taškai išsidėstę toje

pačioje optimalių gamybos planų tiesėje $X_2 = \frac{q_2}{q_1} \frac{1-a}{a} X_1$.

Gamybinę funkciją $Y = F(X_1, X_2)$ galima traktuoti ir kaip „**trumpalaikę**“, ir kaip „**ilgalaikę**“ gamybinę funkciją.

„Trumpalaikė gamybinė funkcija“ aprašo **gamybinį ciklą**, prasidedantį tuo momentu, kuomet įmonė, jau turėdama visus reikalingus gamybai faktorius su duotomis ir nekintančiomis charakteristikomis, pradeda gamybą, panaudodama tuos faktorius, ir pasibaigiantį tuo momentu, kai įmonė su pagaminta produkcija išsina į rinką. **Nagrinėjant gamybinę funkciją kaip „trumpalaikę“, laikoma, kad resursų panaudojimo normos, gaminant produkcijos vienetą, o taip pat resursų bei produkcijos kainos nesikeičia.** Gamybos plano sudarymas tokiu atveju vadinamas **operatyviniu planavimu**.

Gamybinės funkcijos nagrinėjimo kaip „trumpalaikės“ funkcijos pavyzdžiu gali būti mūsų kė tik spręstasis gamybos operatyvaus optimalaus plano (X_1^*, X_2^*, Y^*) nustatymo uždavinys, kurį spręsdami mes naudojome gamybinę funkciją $Y = F(X_1, X_2) = AX_1^a X_2^{1-a}$ ir gamybos kaštų funkciją $C = C(X_1, X_2) = q_1X_1 + q_2X_2$ bei $C = q_1X_1 + q_2X_2 + C_0$, laikydami gamybos modelio parametrus A , a , C_0 , q_1 ir q_2 pastoviais dydžiais.

„Ilgalaikė gamybinė funkcija“ yra ta pati gamybinė funkcija, tačiau taikoma žymiai ilgesniam periodui, t. y. tokiam periodui, per kurį gali būti priimti ir įgyvendinti gamybos ir jos valdymo patobulinimo sprendimai bei gali įvykti reikšmingi gamybai aplinkos pasikeitimai. **Nagrinėjant gamybinę funkciją kaip ilgalaikę funkciją, visi gamybos faktoriai yra laikomi (arba gali būti laikomi) kintamais dydžiais**, nes priimama prielaida, jog, reikalui esant, gali būti priimti gamybos valdymo sprendimai, keičiantys ne tik X_1 bei X_2 , bet ir kitus į gamybinio proceso matematinį modelį įeinančius dydžius, o kai kurie to modelio parametrai per pakankamai ilgą laiką, būdami gamybos proceso atžvilgiu egzogeniniais kintamaisiais, pakeičia savo reikšmes dėl išorinių priežasčių. Todėl gamybinę funkciją $Y = AX_1^a X_2^{1-a}$ (arba $Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2}$) bei gamybos kaštų funkciją $C = q_1X_1 + q_2X_2$ (arba $C = q_1X_1 + q_2X_2 + C_0$), laikant tas funkcijas „ilgalaikėmis“, reikia laikyti ne tik funkcijomis $Y = F(X_1, X_2)$ ir $C = C(X_1, X_2)$, bet ir funkcijomis $Y = F(X_1, X_2, A, a)$ (arba $Y = F(X_1, X_2, a_0, a_1, a_2)$), $C = C(X_1, X_2, q_1, q_2)$ (arba $C = C(X_1, X_2, q_1, q_2, C_0)$). Kai gaminama ne viena

produkcijos rūšis, o kelios, tai, sprendžiant **einamojo ir perspektyvinio gamybos planavimo** uždavinius, tenka atsižvelgti ir į produkcijos kainas p_i , kurios, sprendžiant gamybos operatyvinio planavimo uždavinius, laikomos pastoviais, o sprendžiant įmonės veiklos perspektyvinio (strateginio) planavimo uždavinius, kintamais dydžiais.

Gamybos kaštų C įvertinimui mikroekonomikoje naudojamosi tokiais rodikliais kaip **vidutiniai gamybos kaštai $(AC) = \frac{C}{Y}$** ir **marginaliniai gamybos**

kaštai $(MC) = \frac{dC}{dY}$, kur žymėjimai (AC) ir (MC) yra angliškų terminų „average cost“ ir „marginal cost“ santrumpos.

Apskaičiuosime (AC) ir (MC) tam atvejui, kai gamybinė funkcija yra $Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2}$, gamybos kaštų funkcija yra $C = q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0$ ir gamybos planavimas yra optimalus pelno maksimizavimo atžvilgiu.

$$\begin{aligned} (AC) &= \frac{C}{Y^*} = \frac{C}{a_0 (X_1^*)^{a_1} (X_2^*)^{a_2}} = \frac{C}{a_0 \left[\frac{a_1(C-C_0)}{q_1(a_1+a_2)} \right]^{a_1} \left[\frac{a_2(C-C_0)}{q_2(a_1+a_2)} \right]^{a_2}} = \\ &= \frac{C}{a_0 \left(\frac{C-C_0}{a_1+a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}}. \end{aligned}$$

Rasime (AC) priklausomybę nuo pagamintos produkcijos kiekio $Y=Y^*$ = $= a_0 (X_1^*)^{a_1} (X_2^*)^{a_2} = a_0 \left(\frac{C-C_0}{a_1+a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$, eliminuodami iš (AC) formulės kintamąjį C , t. y. išreikšdami C per optimalią kintamojo Y reikšmę Y^* , nes kai nagrinėjame ilgalaikį gamybinės įmonės planavimą, tai gamybos kaštai C laikomi kintamu dydžiu, kurį galima ir reikalinga optimizuoti.

$$\begin{aligned} \frac{C-C_0}{a_1+a_2} &= \left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}}, \text{ iš kur} \\ C &= (a_1+a_2) \cdot \left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} + C_0. \\ \text{Tuomet } (AC) &= \frac{C}{Y^*} = \frac{(a_1+a_2) \cdot \left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} + C_0}{Y^*}. \end{aligned}$$

Išvestoji formulė rodo, kaip keičiasi vidutiniai gamybos kaštai (AC) , keičiantis gamybos apimčiai Y^* .

Jei būtume pasinaudoję Kobo ir Duglaso gamybine funkcija $Y = a_0 X_1^a X_2^{1-a}$, tai

$$\text{būtume gavę jog } a_1=a, a_2=1-a, a_1+a_2=1 \text{ ir } (AC) = \frac{\left(\frac{q_1}{a} \right)^a \left(\frac{q_2}{1-a} \right)^{1-a}}{a_0} + \frac{C_0}{Y^*}, \text{ iš kur matyti,}$$

kaip mažėtų (AC) , didėjant Y^* . Šiuo atveju vidutinių gamybos kaštų funkcija (AC) neturėtų baigtinio minimumo taško. Tos funkcijos minimali reikšmė būtų riba, prie kurios ji artėtų didėjant Y^* .

Norėdami apskaičiuoti $(MC) = \frac{dC}{dY}$, turime surasti dC ir dY .

Iš formulės $Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2}$ gauname $\ln Y = \ln a_0 + a_1 \ln X_1 + a_2 \ln X_2$, iš kur išplaukia $\frac{dY}{Y} = \frac{a_1}{X_1} dX_1 + \frac{a_2}{X_2} dX_2$. Kadangi mes nagrinėjame optimalaus gamybos planavimo

atvejį, tai $X_1 = X_1^* = \frac{a_1(C - C_0)}{q_1(a_1 + a_2)}$ ir $X_2 = X_2^* = \frac{a_2(C - C_0)}{q_2(a_1 + a_2)}$, $dX_1 = \frac{a_1}{q_1(a_1 + a_2)} dC$,
 $dX_2 = \frac{a_2}{q_2(a_1 + a_2)} dC$.

Todėl $dY = Y \cdot \left(\frac{a_1}{X_1} dX_1 + \frac{a_2}{X_2} dX_2 \right) = Y^* \cdot \left[\frac{a_1 q_1 (a_1 + a_2)}{a_1 (C - C_0)} \cdot \frac{a_1}{q_1 (a_1 + a_2)} dC + \right.$
 $\left. + \frac{a_2 q_2 (a_1 + a_2)}{a_2 (C - C_0)} \cdot \frac{a_2}{q_2 (a_1 + a_2)} dC \right] = Y^* \frac{a_1 + a_2}{C - C_0} dC$ ir $(MC) = \frac{dC}{dY} = \frac{C - C_0}{Y^* (a_1 + a_2)}$.

Norėdami rasti marginalinių gamybos kaštų (MC) priklausomybę tik nuo Y^* , eliminuosime $C - C_0$, pasinaudodami (AC) apskaičiavimo metu išvesta formule

$$\frac{C - C_0}{a_1 + a_2} = \left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}}.$$

$$\text{Gauname, jog } (MC) = \frac{\left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}}}{Y^*} = \left(\frac{q_1^{a_1} q_2^{a_2}}{a_0 a_1^{a_1} a_2^{a_2}} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \cdot (Y^*)^{\frac{1}{a_1 + a_2} - 1}.$$

Jei gamybinė funkcija būtų buvusi Kobo ir Duglaso funkcija, tai tuo atveju būtume gavę, jog $(MC) = \frac{q_1^a q_2^{(1-a)}}{a_0 a_1^a (1-a)^{1-a}} = \frac{1}{a_0} \left(\frac{q_1}{a} \right)^a \left(\frac{q_2}{1-a} \right)^{1-a} = \text{const.}$, t. y., jog (MC) nepriklauso nuo Y^* .

Kai $0 < a_1 + a_2 < 1$, tai $Y^{\frac{1}{a_1 + a_2} - 1} = Y^d$, kur $d > 0$, nes $d = \frac{1 - (a_1 + a_2)}{a_1 + a_2}$, iš kur

išplaukia, kad, didėjant Y^* , (MC) turi didėti.

Plokštumoje (Y^*, C) galima pavaizduoti (AC) ir (MC) priklausomybę nuo Y^* grafiškai, t. y. galima nubrėžti kreives

$$C_1 = (AC) = \frac{(a_1 + a_2) \cdot \left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} + C_0}{Y^*} \text{ ir}$$

$$C_2 = (MC) = \frac{\left(\frac{Y^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}}}{Y^*}.$$

Toliau žymėjimų supaprastinimo dėlei Y^* žymėsime tiesiog Y .

Pirmoji kreivė (AC grafikas), kai $a_1 + a_2 < 1$, turi minimumo tašką. Rasime jį.

$$\frac{d(AC)}{dY} = (a_1 + a_2) \cdot B \cdot \left(\frac{1}{a_1 + a_2} - 1 \right) \cdot Y^{\frac{1}{a_1 + a_2} - 2} - C_0 Y^{-2}, \text{ kur}$$

$$B = \frac{1}{a_0^{a_1+a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}}.$$

Kai $(a_1 + a_2)B \frac{1-a_1-a_2}{a_1+a_2} Y^{\frac{1}{a_1+a_2}} = C_0$, tai $\frac{d(AC)}{dY} = 0$, t. y. pirmoji kreivė pasiekia ekstremumo tašką.

$$\begin{aligned} \text{Koordinatė } Y \text{ tame taške yra } Y &= \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \cdot \frac{1}{B^{a_1+a_2}} = \\ &= \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} a_0 \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}. \\ \frac{d^2(AC)}{dY^2} &= \left[(1-a_1-a_2)BY^{\frac{1}{a_1+a_2}} \left(\frac{1}{a_1+a_2} - 2 \right) + 2C_0 \right] \cdot Y^{-3}. \end{aligned}$$

Ekstremumo taške $(1-a_1-a_2)BY^{\frac{1}{a_1+a_2}} = C_0$, todėl ekstremumo taške $\frac{d^2(AC)}{dY^2} = C_0 \cdot \left[\frac{1}{a_1+a_2} - 2 + 2 \right] \cdot Y^{-3} = \frac{C_0}{(a_1+a_2)Y^3} > 0$, nes $C_0 > 0$, $Y > 0$, $0 < a_1+a_2 < 1$.

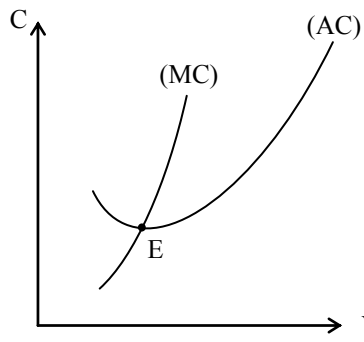
Tai reiškia, jog funkcija $(AC)=AC(Y)$ taške $Y = a_0 \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$ pasiekia minimumą ir yra lygi

$$\begin{aligned} (AC)^* &= \frac{(a_1+a_2) \frac{C_0}{1-a_1-a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} + C_0}{a_0 \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}} = \\ &= \frac{(a_1+a_2) \frac{C_0}{1-a_1-a_2} + C_0}{a_0 C_0^{a_1+a_2}} (1-a_1-a_2)^{a_1+a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} = \\ &= C_0^{1-a_1-a_2} \frac{\frac{a_1+a_2}{1-a_1-a_2} + 1}{a_0} (1-a_1-a_2)^{a_1+a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} = \\ &= \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{1-a_1-a_2} \frac{1}{a_0} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2}. \end{aligned}$$

Antroji kreivė (MC grafikas) ekstremumo taškų neturi, nes kai $0 < a_1+a_2 < 1$, tai (MC) tolydžiai didėja, didėjant Y.

Rasime (AC) ir (MC) grafikų susikirtimo tašką, sprenddami lygtį $\frac{(a_1+a_2)BY^{\frac{1}{a_1+a_2}} + C_0}{Y} = \frac{BY^{\frac{1}{a_1+a_2}}}{Y}$, iš kurios gauname, jog $Y = \left[\frac{C_0}{B(1-a_1-a_2)} \right]^{a_1+a_2}$,

t. y. kreivių $(AC)=AC(Y)$ ir $(MC)=MC(Y)$ susikirtimo taškas sutampa su vidutinių gamybos kaštų (AC) grafiko minimumo tašku. Tai pavaizduota 313 pav., kuris atitinka



313 pav.

gamybinę funkciją $Y = X_1^{0,15} X_2^{0,2}$ ir gamybos kaštų funkciją $C = 6X_1 + 4X_2 + 6$, t. y. atveji, kai $a_0 = 1$, $a_1 = 0,15$, $a_2 = 0,20$, $q_1 = 6$, $q_2 = 4$, $C_0 = 6$.

Nesunku apskaičiuoti, kad susikirtimo taško E koordinatės yra $Y_E = \left(\frac{3}{13}\right)^{0,35} \sqrt[5]{2}$, $(AC)_E = (MC)_E =$
 $Y^* = 10 \left(\frac{12}{13}\right)^{0,65} \sqrt{2}$.

Išvedę pagrindines gamybą charakterizuojančias mikroekonomikos sąvokas ir jų žymenis, sistemiškai paanalizuosime gamybos planavimo optimizavimo uždavinius ir jų sprendimo metodus, taikydami įvairius **optimizavimo kriterijus** (ne tik pelno maksimumo, bet ir gamybos vidutinio rentabilumo maksimumo) ir atsižvelgdami į galimus **apribojimus, atsirandančius dėl paklausos ar turimų gamybos kaštų ribotumo**, bei į kitas aplinkybes (pavyzdžiui į tai, ar $a_1 + a_2 < 1$, ar $a_1 + a_2 \geq 1$).

Maksimizuojant gaunamą pelną, galimos dvi skirtingos gamybos plano optimizavimo situacijos:

1) kai gamybos kaštai $C = q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0$ nėra ribojami koku nors iš anksto nustatytu jau turimų kaštų dydžiu C_T , t. y., kai gamybos apimtis ribojančiu faktoriumi gali tapti tik produkcijos vartotojų paklausa Y_V ;

2) kai gamybos kaštai yra iš anksto ribojami ir negali viršyti turimos sumos C_T .

Išnagrinėsime abi šias situacijas, laikydami, jog gamybinė funkcija yra neoklasikinė funkcija $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$. Pradėsime nuo pirmosios situacijos.

Ieškodami optimalaus gamybos plano, maksimizuojančio pelną Π pirmojoje situacijoje, pradžioje išspręsimė optimizavimo uždavinį, atitinkantį tą atvejį, kai produkcijos paklausa Y_V yra tokia didelė, jog į jos ribotumą galima neatsižvelgti.

Tuomet optimizavimo uždavinio tikslo funkcija neturės jokių apribojimų ir atrodys taip:

$$\Pi(X_1, X_2) = pY - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 = X_1^{a_1} X_2^{a_2} - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 \rightarrow \max_{X_1, X_2}.$$

Šios tikslo funkcijos ekstremumo taško koordinatėms reikšmės $X_1 = X_1^*$, $X_2 = X_2^*$, tuo atveju, kai toks ekstremumo taškas egzistuoja, privalo tenkinti lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial X_1} = p \frac{a_1 Y}{X_1} - q_1 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_2} = p \frac{a_2 Y}{X_2} - q_2 = 0, \end{cases} \quad \text{kurią spęsdami gauname, jog } X_1^* = p \frac{a_1}{q_1} Y^*, \quad X_2^* = p \frac{a_2}{q_2} Y^*.$$

$$\text{Kadangi } \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1^2} = p \frac{a_1(a_1-1)}{X_1^2} Y, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2^2} = p \frac{a_2(a_2-1)}{X_2^2} Y, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2 \partial X_1} =$$

$$= p \frac{a_1 a_2}{X_1 X_2} Y, \text{ tai čia nagrinėjamos lygčių sistemos jakobinas } J = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2$$

$$\text{ekstremumo taške } (X_1^*, X_2^*) \text{ bus lygus } p \frac{a_1 a_2 (Y^*)^2}{(X_1^*)^2 (X_2^*)^2} [(a_1-1)(a_2-1) - a_1 a_2] =$$

$$= p \frac{a_1 a_2 (Y^*)^2}{(X_1^*)^2 (X_2^*)^2} (Y^*)^2 (1 - a_1 - a_2).$$

Kadangi produkcijos kaina p yra teigiamas dydis ir gamybos efektyvumo rodikliai a_1 ir a_2 – taip pat teigiami dydžiai, tai jakobianas J bus teigiamas tuo ir tik tuo atveju, kai rodiklių a_1 ir a_2 suma bus mažesnė už 1. Tuomet tikrai egzistuos funkcijos $\Pi(X_1, X_2)$ ekstremumo taškas, turintis baigtines koordinačių X_1 ir X_2 reikšmes X_1^* ir X_2^* .

Išnagrinėsime šį atvejį, t. y. atvejį, kai $a_1 + a_2 < 1$.

Kadangi koeficientai a_1 ir a_2 šiuo atveju tenkina nelygybes $0 < a_1 < 1$, $0 < a_2 < 1$, tai išvestinės $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1^2} = p \frac{a_1(a_1 - 1)}{X_1^2} Y$ ir $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2^2} = p \frac{a_2(a_2 - 1)}{X_2^2} Y$ yra neigiami dydžiai. Todėl

taškas $\left(X_1^* = p \frac{a_1}{q_1} Y^*, X_2^* = p \frac{a_2}{q_2} Y^* \right)$ yra gamybos pelno funkcijos $\Pi(X_1, X_2) = p X_1^{a_1} X_2^{a_2} - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0$ maksimumo taškas.

Šio taško koordinačių reikšmės X_1^* ir X_2^* , kol kas išreikštas per mūsų dar neapskaičiuotą optimalią gamybos apimtį Y reikšmę Y^* , galima galutinai apskaičiuoti pasinaudojant lygybe $Y^* = (X_1^*)^{a_1} (X_2^*)^{a_2}$, t. y. lygybe

$$Y^* = (p Y^*)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}.$$

Iš šios lygybės išplaukia, jog $Y^* = \left[p^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}}$, todėl

$$X_1^* = p \frac{a_1}{q_1} Y^* = \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{1 - a_2} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}}, \quad X_2^* = p \frac{a_2}{q_2} Y^* = \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{1 - a_1} \right]^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}}.$$

Kai planuojamas produkcijos kiekis $Y^* = \left[p^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}}$ nėra

didesnis už vartojimo paklausą Y_v , tai čia apskaičiuotos Y^* , X_1^* ir X_2^* reikšmės charakterizuoja realų gamybos planą, leidžiantį pasiekti **pelno Π absoliutų maksimumą Π^*** .

To pelno dydį Π^* , taip pat šio pelno pasiekimui reikalingus gamybos kaštus C^* galima apskaičiuoti naudojantis formulėmis:

$$\begin{aligned} 1) \quad C^* &= q_1 X_1^* + q_2 X_2^* + C_0 = \\ &= p^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}} \left[q_1 \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{\frac{1 - a_2}{1 - a_1 - a_2}} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{\frac{a_2}{1 - a_1 - a_2}} + q_2 \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{\frac{1 - a_1}{1 - a_1 - a_2}} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{\frac{a_1}{1 - a_1 - a_2}} \right] + C_0 = \\ &= p^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}} \left\{ a_1 \left[\left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}} + a_2 \left[\left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1 - a_1 - a_2}} \right\} + C_0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} (a_1 + a_2) + C_0 = (a_1 + a_2)pY^* + C_0; \\
&2) \Pi^* = pY^* - C^* = \\
&= p \left[p^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} - (a_1 + a_2) \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} - C_0 = \\
&= (1 - a_1 - a_2) \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} - C_0 = (1 - a_1 - a_2)pY^* - C_0.
\end{aligned}$$

Galima apskaičiuoti ir gamybos rentabilumo R bei vidutinių gamybos kaštų (vieno gaminamos produkcijos vieneto vidutinės savikainos) (AC) reikšmes R^* ir $(AC)^*$, atitinkančias pelno absoliutųjį maksimumą:

$$3) R^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = \frac{(1 - a_1 - a_2)pY^* - C_0}{(a_1 + a_2)pY^* + C_0} = \frac{1 - a_1 - a_2 - B}{a_1 + a_2 + B} = \frac{1}{a_1 + a_2 + B} - 1, \text{ kur}$$

$$B = \frac{C_0}{pY^*} = C_0 \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2-1}};$$

$$4) (AC)^* = \frac{C^*}{Y^*} = \frac{(a_1 + a_2)pY^* + C_0}{Y^*} = p(a_1 + a_2 + B).$$

Šioje situacijoje išvestos X_1, X_2, Y, C, Π, R ir (AC) reikšmių $X_1^*, X_2^*, Y^*, C^*, \Pi^*, (AC)^*$, atitinkančių absoliutųjį gamybos pelno Π maksimumą Π^* , apskaičiavimo formulės, išreiškiančios $X_1^*, X_2^*, Y^*, C^*, \Pi^*$ ir $(AC)^*$ per produkcijos gamybos ir jos pardavimo rodiklius $a_1, a_2, q_1, q_2, C_0, p$, gali būti taikomos tik tada, kai tenkinamos sąlygos: 1) gamybos funkcija yra neoklasikinė funkcija $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$, kurios rodikliai tenkina nelygybę $a_1 + a_2 < 1$ (nes tik tuomet egzistuoja baigtinis absoliutus pelno maksimumas); 2) gamybos kaštus C mes galime nustatyti patys, pasirinkdami tokius, kad būtų gautas didžiausias galimas pelnas; 3) pagamintinos produkcijos kiekis

$$Y^* = \left[p^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \text{ nėra didesnis už produkcijos paklausą } Y_V.$$

$$\text{Kai } Y^* = \left[p^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} > Y_V, \text{ tai optimalia } Y \text{ reikšme, atitinkančia}$$

jau ne absoliutų, o sąlyginį pelno Π maksimumą, mes galime laikyti Y_V .

Kadangi optimalios X_1 ir X_2 reikšmės privalo priklausyti **optimalių planų tiesei** $X_2 = \frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} X_1$, tai optimalias X_1 ir X_2 reikšmes šiuo atveju galime surasti

$$\text{pasinaudodami lygybe } Y^{(opt)} = Y^V = (X_1^{(opt)})^{a_1} (X_2^{(opt)})^{a_2} = (X_1^{(opt)})^{a_1+a_2} \left(\frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} \right)^{a_2}. \text{ Iš šių}$$

lygybių išplaukia, jog $X_1^{(opt)} = \left[Y_V \left(\frac{a_1 q_2}{q_1 a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$, $X_2^{(opt)} = \left[Y_V \left(\frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} \right)^{a_1} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$.

Tokias pačias optimalias reikšmes pelno Π sąlyginio maksimumo taške taip pat būtume gavę, sprenddami pelno sąlyginio maksimumo radimo uždavinį **Lagranžo funkcijos maksimizavimo metodu**:

1) $\Lambda(X_1, X_2) = \Pi(X_1, X_2) + \lambda(Y - Y_V) = pY - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 + \lambda(Y - Y_V) \rightarrow \max_{X_1, X_2}$, kai

pagamintos produkcijos kiekis $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$ pelno sąlyginio maksimumo taške turi tapti lygus tos produkcijos paklausai Y_V ;

2)
$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = p \frac{a_1 Y}{X_1} - q_1 + \lambda \frac{a_1 Y}{X_1} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} = p \frac{a_2 Y}{X_2} - q_2 + \lambda \frac{a_2 Y}{X_2} = 0; \end{cases}$$

3) $X_1^{**} = (p + \lambda) \frac{a_1}{q_1} Y^{**}$, $X_2^{**} = (p + \lambda) \frac{a_2}{q_2} Y^{**}$;

4) $Y^{**} = Y_V = (X_1^{**})^{a_1} (X_2^{**})^{a_2} = (p + \lambda)^{a_1+a_2} (Y^{**})^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} =$
 $= (p + \lambda)^{a_1+a_2} (Y_V)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$;

5) $p + \lambda = \left[Y_V^{1-a_1-a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$;

6) $X_1^{**} = \frac{a_1}{q_1} (p + \lambda) Y_V = Y_V \frac{a_1}{q_1} \left[Y_V^{1-a_1-a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} = \left[Y_V \left(\frac{a_1 q_2}{q_1 a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$,

$X_2^{**} = \left[Y_V \left(\frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} \right)^{a_1} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$.

Lygindami šį rezultatą su rezultatu, gautu taikant optimalių planų tiesės metodą, matome, jog rezultatai sutampa.

Nesunku įsitikinti, jog ekstremumo taške (X_1^{**}, X_2^{**}) tuo atveju, kai $a_1 + a_2 < 1$,

jakobianas $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2$ yra teigiamas, o išvestinė $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1^2}$ – neigiamas dydis,

t. y. funkcijos $\Lambda(X_1, X_2)$ ekstremumas tikrai egzistuoja ir taške (X_1^{**}, X_2^{**}) funkcijos $\Lambda(X_1, X_2)$ ir $\Pi(X_1, X_2)$ tikrai pasiekia maksimumą, kuris funkcijai $\Pi(X_1, X_2)$ yra sąlyginis maksimumas, tenkinantis savybę $Y^{**} = Y_V$. Šį darbą palieku skaitytojui, nes tas darbas visiškai analogiškas tam, kurį atlikome ieškodami besąlyginio maksimumo.

Suradę X_1^{**} , X_2^{**} ir žinodami, jog $Y^{**} = Y_V$ galime apskaičiuoti gamybos kaštų C , pelno Π , gamybos rentabilumo R ir vidutinių gamybos kaštų reikšmes pelno sąlyginio maksimumo taške (X_1^{**}, X_2^{**}) :

$$\begin{aligned}
1) \quad C^{**} &= q_1 X_1^* + q_2 X_2^* + C_0 = q_1 \left[Y_V q_1^{-a_2} \left(\frac{a_1 q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + q_2 \left[Y_V q_2^{-a_1} \left(\frac{a_2 q_1}{a_1} \right)^{a_1} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + \\
&+ C_0 = (a_1 + a_2) \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + C_0; \\
2) \quad \Pi^{**} &= p Y_V - C^{**} = p Y_V - (a_1 + a_2) \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} - C_0; \\
3) \quad R^{**} &= \frac{\Pi^{**}}{C^{**}} = \frac{p Y_V}{C^{**}} - 1 = \frac{p}{(a_1 + a_2) \left[Y_V^{1-a_1-a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + \frac{C_0}{Y_V}} - 1; \\
4) \quad (AC)^{**} &= \frac{C^{**}}{Y_V} = \frac{(a_1 + a_2) \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + C_0}{Y_V} = \\
&= (a_1 + a_2) \left[Y_V^{1-a_1-a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + \frac{C_0}{Y_V}.
\end{aligned}$$

Čia išvestos formulės taikomos apskaičiuojant gamybos plano rodiklius, kai siekiama gauti sąlyginį pelno maksimumą pirmojoje situacijoje esant nedidelei produkcijos paklausai, neleidžiančiai siekti pelno absoliutaus maksimumo.

Nors šias formules išvedant (įrodant maksimumo taško egzistavimą) buvo naudotasi sąlyga $a_1 + a_2 < 1$, tačiau jos gali būti taikomos ir atvejais, kai $a_1 + a_2 \geq 1$. Tai paaiškinama tą aplinkybę, jog šias formules buvo galima išvesti, taikant optimalių planų tiesės metodą, kuris, kaip tai galima pastebėti analizuojant 312 pav., gali būti taikomas esant bet kurioms teigiamoms a_1 ir a_2 reikšmėms.

Optimalaus gamybos plano apskaičiavimą pirmojoje situacijoje pailustruosiu konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, jog gamybinė funkcija yra $Y = X_1^{0.2} X_2^{0.3}$, pagamintos produkcijos kaina $p = 1200$ vienetų (litų, dolerių, eurų ir pan.), gamybos kaštai nėra ribojami. Juos galima apskaičiuoti naudojantis formule $C = 20X_1 + 30X_2 + 5000$.

Rekomenduoju skaitytojui išspręsti šį optimalaus gamybos plano sudarymo uždavinį tiesiogiai, t. y. sudarant tikslo funkciją ir ją diferencijuojant, o iš čia pateiksiu skaičiavimų rezultatus, naudodamasis šiame skyrelyje išvestomis formulėmis.

$$\begin{aligned}
Y^* &= \left[p^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} = \left[1200^{0.5} \left(\frac{0.2}{20} \right)^{0.2} \left(\frac{0.3}{30} \right)^{0.3} \right]^2 = \left[1200^{0.5} \left(\frac{1}{100} \right)^{0.5} \right]^2 = 12, \\
X_1^* &= \frac{p a_1 Y^*}{q_1} = \frac{1200 \cdot 0.2 \cdot 12}{20} = 144, \quad X_2^* = \frac{p a_2 Y^*}{q_2} = \frac{1200 \cdot 0.3 \cdot 12}{30} = 144, \quad C^* = q_1 X_1^* + q_2 X_2^* + C_0 = \\
&= 20 \cdot 144 + 30 \cdot 144 + 5000 = 50 \cdot 144 + 5000 = 7200 + 5000 = 12200, \quad \Pi^* = p Y^* - C^* = 1200 \cdot 12 - 12200 = 2200, \\
R^* &= \frac{\Pi^*}{C^*} = \frac{2200}{12200} = \frac{11}{61} \approx 0,18, \quad (AC)^* = \frac{C^*}{Y^*} = \frac{12200}{12} = \frac{6100}{6} \approx 1016,7.
\end{aligned}$$

Nesunku įsitikinti, jog tuos pačius rezultatus būtume gavę, naudodamiesi formulėmis

$$X_1^* = \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{1-a_2} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}}, \quad X_2^* = \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{1-a_1} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}}, \quad C^* = (a_1 + a_2) \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} + C_0, \\ R^* = \frac{(1-a_1-a_2)pY^* - C_0}{(a_1 + a_2)pY^* + C_0}, \quad (AC)^* = \frac{(a_1 + a_2)pY^* + C_0}{Y^*}.$$

Kai $Y^*=12$ nėra daugiau už produkcijos paklausą Y_V , tai mūsų rastas sprendinys $X_1^*=X_2^*=144$, $Y^*=12$ gali būti realizuotas tikrovėje. Todėl jį galima laikyti optimaliu gamybos planu, leidžiančiu gauti maksimalų galima pelną $\Pi=2200$ pinigų vienetų.

Realizuojant šį planą būtų išleista $C^*=12200$ pinigų vienetų ir gauta $pY^*=1200 \cdot 12=14400$ pinigų vienetų pajamų.

Gamybą charakterizuotų jos rentabilumas $R^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = \frac{2200}{12200} = \frac{11}{61} \approx 0,18$ ir vidutiniai gamybos

kaštai $(AC)^* = \frac{C^*}{Y^*} = \frac{12200}{12} = \frac{3050}{3} \approx 1016,7$. Kitaip tariant, vieno produkcijos vieneto savikaina būtų $\frac{3050}{3} \approx 1016,7$ ir kiekvieno tokio vieneto pardavimas duotų $p-(AC)^*=1200-1016,7 \approx 183,3$ pinigų vienetų pelno.

Tačiau, jei pasirodytų, kad surastoji Y reikšmė $Y^*=12$ yra didesne už produkcijos paklausą Y_V , tai toks „optimalus planas“ jau negalėtų būti realizuotas.

Pavyzdžiui, jei pasirodytų, jog $Y_V=10$, tai tokiu atveju gautume, jog $Y^{(opt)}=Y_V=10$,

$$X_1^{(opt)} = \left[Y_V \left(\frac{a_1 q_2}{q_1 a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} = 100, \quad X_2^{(opt)} = \left[Y_V \left(\frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} \right)^{a_1} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} = 100.$$

Šį gamybos planą charakterizuotų gamybos kaštai $C=q_1 X_1^{(opt)} + q_2 X_2^{(opt)} + C_0=20 \cdot 100 + 30 \cdot 100 + 5000=10000$, pelnas $\Pi=pY^{(opt)}-C=1200 \cdot 10-10000=2000$, gamybos rentabilumas $R = \frac{\Pi}{C} = \frac{2000}{10000} = 0,2$,

vidutiniai gamybos kaštai $(AC) = \frac{C}{Y} = \frac{10000}{10} = 1000$.

Sumažėjus pagamintos ir parduotos produkcijos kiekiui, pelnas Π sumažėjo nuo 2200 iki 2000 pinigų vienetų, tačiau šiuo atveju gamybos rentabilumas R ne tik nesumažėjo, bet net dar ir padidėjo nuo $\frac{11}{61}$ iki 0,2. Sumažėjo ir pagamintos produkcijos vieneto savikaina (vidutiniai gamybos kaštai (AC)) nuo $\sim 1016,7$ iki 1000. Vadinas, pagerėjo gana svarbūs gamybos ekonominį efektyvumą charakterizuojantys rodikliai. Šiek tiek vėliau bus parodyta, jog šiuo konkrečiu atveju tie rodikliai pasiekė savo optimalias reikšmes.

Šis čia pastebėtas įdomus reiškinytis iliustruoja tą svarbų faktą, kad, **maksimizuojant gamybos pelną, nebūtinai (t. y. ne visada) pasiekiamas maksimalus gamybos rentabilumas, kad pelno maksimizavimas ir gamybos rentabilumo maksimizavimas yra du skirtingi gamybos optimizavimo tikslai, kad pelno maksimumas ir gamybos rentabilumo maksimumas yra du skirtingi gamybos plano optimalumo kriterijai.**

Pelno maksimumo kriterijum tikslinga vadovautis tada, kada galima nesiskaityti su gamybai skiriamų kaštų C bei gamybai reikalingų resursų ribotumu, pavyzdžiui, mūsų nagrinėjamoje pirmoje situacijoje, t. y. situacijoje, kada pinigų turime daugiau nei galimybių juos pelningai investuoti.

Kai gamybai skiriami kaštai C ar turimi gamybai reikalingi resursai yra riboti, tai tikslingiau yra vadovautis gamybos rentabilumo maksimizavimo kriterijum, nes, vadovaudamiesi tuo kriterijum, mes efektyviau panaudosime turimus kaštus ir turimus resursus. Kitaip tariant, šiuo kriterijum tikslinga

vadovautis, kai pinigų ir kitų resursų turime mažiau negu galėtume juos pelningai panaudoti. Antrojo kriterijaus taikymo pavyzdžius pateiksiu nagrinėdamas antrąją iš aukščiau įvardintų situacijų, o dabar pratęsiu pirmosios situacijos nagrinėjimą, pereidamas prie atvejo, kada $a_1 + a_2 \geq 1$.

Taikydamas pelno maksimumo kriterijų ir laikydamas, kad gamybos kaštai C gali tapti neribotai dideli, išspręsiu gamybos plano optimizavimo uždavinį, panašų į ką tik išspęstąjį ir besiskiriantį nuo pastarojo tik tuo, kad neoklasikinės gamybinės funkcijos rodiklių a_1 ir a_2 suma, jų reikšmėms padvigubėjus, tapo lygi 1, dėl ko gamybinė funkcija tapo Kobo ir Duglaso funkcija.

$$\text{Šiuo atveju lygčių sistemos} \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial X_1} = \frac{p a_1 Y}{X_1} - q_1 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_2} = \frac{p a_2 Y}{X_2} - q_2 = 0 \end{cases} \text{ jakobianas } \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 =$$

$$= \frac{p a_1 a_2 Y^2}{X_1^2 X_2^2} (1 - a_1 - a_2) \text{ bus lygus } 0 \text{ ir tai reikš, jog šiuo atveju funkcija } \Pi(X_1, X_2) \text{ neturi baigtinio}$$

ekstremumo taško.

Nesunku įsitikinti, jog šiuo atveju pelno funkcija $\Pi(X_1, X_2) = pY - C = pX_1^{a_1} X_2^{a_2} - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 = 1200 X_1^{0.4} X_2^{0.6} - 20 X_1 - 30 X_2 - 5000$, didėjant X_1 ir X_2 (ir tuo pačiu didėjant Y), monotoniškai ir neribotai didėja, t. y. **pelnas Π didėdamas artėja prie $+\infty$, kai X_1 ir X_2 artėja prie $+\infty$.**

Kadangi optimalių planų tiesė $X_2 = \frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} X_1$ ir šiuo atveju bus tiesė $X_1 = X_2$, tai gamybinė funkcija optimalaus planavimo atveju bus funkcija $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2} = X_1^{a_1 + a_2} = X_1^{0.4 + 0.6} = X_1$, o pelno funkcija $\Pi(X_1, X_2) = pY - C = 1200X - (20 + 30)X - 5000 = 1150X - 5000$ taip pat bus tiesinė argumento X funkcija, tiesiškai didėjanti, didėjant X .

Esant mažoms gamybos apimtims (pavyzdžiui, dėl resursų bei gamybai skiriamų kaštų C stokos ar dėl mažos vartojimo paklausos) pelnas galėtų tapti ne tik labai mažas, bet ir pavirsti nuostoliu, tačiau didėjant gamybos ir pardavimo apimtims pelnas didėtų, artėdamas prie $+\infty$, kai $Y = X \rightarrow +\infty$.

Pavyzdžiui, jei $Y = X$ būtų lygūs 4, tai išlaidos būtų lygios $C = 20X_1 + 30X_2 + 5000 = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 30 + 5000 = 5200$, o pajamos pX būtų lygis tik 4800. Vadinasi, būtų gautas 400 piniginių vienetų nuostolis. Vidutiniai gamybos kaštai (AC) (produkcijos vieneto savikaina) $\frac{C}{Y} = \frac{5200}{4} = 1300$ viršytų gaminio kainą $p = 1200$ ir kiekvienas gaminyje atneštų įmonei 100 piniginių vienetų dydžio nuostolius.

Tačiau, padidėjus gamybos apimčiai Y iki 5, gamyba jau taptų pelninga, nes kiekvienas gaminyje duotų jau $p - (AC) = 1200 - \frac{20 \cdot 5 + 30 \cdot 5 + 5000}{5} = 1200 - 1050 = 150$ piniginių vienetų pelno.

Didinant $Y = X$, gaminio savikaina $\frac{20X + 30X + 5000}{X} = 50 + \frac{5000}{X}$ mažėtų, artėdama prie 50, kai $X \rightarrow \infty$, todėl vieno produkcijos vieneto duodamas pelnas didėtų, artėdamas prie 1150, kai $X \rightarrow \infty$. Didėtų ir gamybos rentabilumas $R = \frac{\Pi}{C} = \frac{pY - C}{C} = p \frac{Y}{C} - 1 = 1200 \frac{X}{50X + 5000} - 1 = \frac{1200}{50 + \frac{5000}{X}} - 1$, artėdamas prie

$R = 23$, kai $X \rightarrow \infty$.

Pelno ir gamybos rentabilumo didėjimas bei produkcijos savikainos mažėjimas, didėjant gamybos apimtims, dar ryškiau pasireikštų tuo atveju, kai gamybos efektyvumo rodiklių a_1 ir a_2 suma taptų didesnė už 1.

Pavyzdžiui, jei a_1 taptų lygus 0,6, o a_2 taptų lygus 0,9, tai optimalių planų tiesė $X_2 = \frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} X_1$, nesikeičiant q_1 ir q_2 reikšmėms, išliktų ta pati, t. y. tiesė $X_2 = X_1$, o gamybinė funkcija $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$ tokiu atveju taptų funkcija $Y = X_1^{0.6} X_2^{0.9} = X^{1.5}$, kur $X = X_1 = X_2$.

Pelno funkcija $\Pi(X_1, X_2) = pY - (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0) = 1200 X^{1.5} - (20X + 30X + 500) = = X(1200 X^{0.5} - 50) - 5000$ dar sparčiau artėtų prie $+\infty$.

Šiuo atveju produkcijos vieneto savikaina $(AC)^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = \frac{50X + 5000}{X^{1,5}} = \frac{50\left(1 + \frac{100}{X}\right)}{X^{0,5}}$, didėjant X , vis mažėtų, artėdama prie 0, o gamybos rentabilumas $R^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = \frac{1200X^{1,5} - 50X - 5000}{50X + 5000} = \frac{24X^{0,5}}{1 + \frac{100}{X}} - 1$

artėtų prie $+\infty$.

Šie – ribiniai – rezultatai neatrodo realūs ir tai rodo, jog neoklasikinis gamybos modelis, nors ir atspindi kai kurias svarbias realaus gamybinio proceso savybes, yra dar nepakankamai tobulas. Tačiau juo, kaip rodo realių gamybinių procesų tyrimai, sudarant Kobo ir Duglaso gamybinę funkciją, kuriai būdinga, kad $a_1 + a_2 = 1$, galima naudotis, darant kai kurias svarbias išvadas.

Pirmoji išvada. Kai $a_1 + a_2 \geq 1$, tai **gamybininkams labai aktualu „užkariauti“ kiek galimą didesnę rinkos dalį** ir jie tam, kaip rodo gyvenimo praktika, negaili nei lėšų, nei pastangų ir neretai konkurencinėje kovoje peržengia įstatymais nustatytas leistinum ribas.

Antroji išvada. Konkurencinėje kovoje dėl rinkų kovojančiųjų galimybės nėra lygios: didesnę pranašumą turi didelės įmonės, kurias valdo stambusis kapitalas, nes, **gaminant produkciją didesniais kiekiais, jos savikaina mažėja**. Tai išplaukia ne tik iš čia ką tik atliktų skaičiavimų, naudojantis neoklasikine gamybine funkcija, bet ir iš to paprasto visiem gerai žinomo fakto, jog gaminant produkciją didesniais kiekiais mažėja netiesioginių gamybos išlaidų (administravimo, aptarnavimo ir t. t.) dalis, tenkanti vienam gaminamos produkcijos vienetui, ir tai mažina to vieneto savikainą.

Svarbu pažymėti dar ir tai, kad **stambiojo kapitalo įmonių pranašumas prieš mažesnes įmones, didėjant stambiųjų įmonių gamybos apimtims, dar labiau didėja ir tai neišvengiamai veda prie rinkos monopolizavimo, t. y. prie būsenos, kuomet, sužlugdžius konkurentus, sužlugdoma ir pati konkurencija**. O tuomet laimėję konkurencinę kovą monopolistai gali pradėti diktuoti kainas.

Valstybinės ir tarpvalstybinės ekonominio reguliavimo institucijos, siekiamos užkirsti kelią **rinkos monopolizavimui**, būna priverstos imtis specialių priemonių: įvedinėti **progresyvinius pelno mokesčius**, priiminėti įstatymus, draudžiančius naudotis **dempingu** bei **karteliniais susitarimais** tarp stambiųjų įmonių dėl kainų ir pan., tačiau šios pastangos ne visada duoda teigiamą efektą, nes stambusis kapitalas, pasinaudodamas tuo, kad gamybos apimčių didinimas leidžia mažinti kainas, o tai naudinga vartotojams – būsimiems politikų rinkėjams, bei įvairiais lobistiniais ir korupciniais ryšiais, sugeba išsaugoti ir išnaudoti savo pranašumus, o neretai dar ir padidinti juos. Visuomenėje, kurioje pinigai – didžiausia vertybė, dideli pinigai tampa svarbiausiu ir efektyviausiu valdymo įrankiu, o galu gale – ir „valdymo subjektu“: **pinigai pradeda valdyti žmones**. Pinigų valdžiai ir žiaurios konkurencijos „taisyklėms“ priversti paklusti net ir stambiojo kapitalo atstovai: jei koks nors net ir labai stambus verslininkas, vedamas humanistinių paskatų, pabandytų nepaklusti toms „taisyklėms“ ir, sutramdęs savo godumą, pradėtų elgtis žmoniškiau, jis pralaimėtų konkurencinėje kovoje. Todėl net stambieji kapitalistai finansinio kapitalizmo sistemoje nėra laisvi. Juos irgi valdo pinigai.

Vidutinės ir smulkiosios įmonės tokioje nelygioje konkurencinėje kovoje sugeba išlikti tik dėl savo „lankstumo“, sugebėjimo greičiau prisitaikyti prie kintančių vartojimo poreikių, sugebėjimo surasti ir net susikurti sau „ekonominės nišas“, kuriose jos bent kurį laiką galėtų egzistuoti savo išradingumo ar taupumo bei darbo intensyvavimo dėka.

Trečioji išvada. Ta aplinkybė, kad didėjant gamybos apimtims mažėja gaminamos produkcijos savikaina, **ekonomikos požiūriui yra teigiamas reiškinys**, nes leidžia atpiginti gaminamą produkciją, ir tik visuomenėje, kuri organizuota individų konkurencijos pagrindais, gali turėti ne tik teigiamų, bet ir neigiamų pasekmių. **Visuomenėje, organizuotoje individų kooperacijos pagrindais, ši aplinkybė galėtų būti panaudota visos visuomenės gerovės kėlimui ir turėtų tik teigiamų pasekmių.**

Į šią išvadą aš norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį todėl, kad, sugriuvus Sovietų Sąjungai, kurioje buvo bandoma prievartiniu būdu kurti kooperacinę visuomenę, kai kurie įtakingi kapitalistinės visuomenės sluoksniai, būdami egoistiškai suinteresuoti dabar jiems naudingo status quo išsaugojimu, stengiasi šią išvadą sąmoningai nutylėti ir įtvirtinti visuomenėje įsitikinimą, jog egzistuoja tik vienintelis kelias, vedantis žmoniją progreso link – individų konkurencinės kovos kelias, o visi kiti galimi keliai – tai arba keliai į stagnaciją, arba į pavojingus utopistinius eksperimentus, negalinčius visuomenei duoti nieko, išskyrus prievartą, nusikaltimus ir nusivylimą. Sutapatinant stalinistinį bolševizmą su socializmu, bandoma diskredituoti net elementarias socialdemokratinės idėjas, o kapitalizmo ydas pateikti kaip neišvengiamą būtinybę.

O juk **niekas neįrodė, kad „kooperacinė visuomenė“ – būtina prievartinė visuomenė. Juk tikroji kooperacija – ne baudžiavinis lažas, o savanoriškas pastangų sujungimas, savitarpio pagalba siekiant bendro visiems naudingo ir visiems pageidautino rezultato.** Tokioje visuomenėje nebūtų tokios įtampas, kuria sukuria konkurencinė kova, diktuojanči savo – kartais net antihumaniškas –

sąlygas visiems – ne tik dirbantiems, bet ir darbdaviams. **Gali būti, kad kooperacinėje visuomenėje judėjimo pirmyn tempas šiek tiek sulėtėtų, tačiau ar būtina, kad žmogus visą laiką jaustų žūtbutinės kovos už savo išlikimą įtampą ir nuolat skubėtų kuo daugiau ir kuo greičiau pagaminti ir kuo daugiau bei kuo greičiau suvartoti. Gal tuomet mes racionaliau naudotume turimus gana ribotus resursus ir galėtume humaniškiau, geranoriškiau ir pagarbiau elgtis vieni su kitais bei su mus supančia gamta.**

Žinoma, ir tokioje visuomenėje problemų netrūktų, nes vietoj dabar paplitusio piktnaudžiavimo jėga galėtų atsirasti norinčių piktnaudžiauti kitų visuomenės narių gerumu, tačiau šis piktnaudžiavimas vargu ar galėtų įgyti tokias pavojingas išraiškas kaip piktnaudžiavimas jėga, įgyjantis ne tik individualaus, bet ir masinio teroro formas, tokias kaip karai, genocidas ir pan.

Tas kelias, kuriuo dabar eina mūsų planetos visuomenė – ne pats geriausias kelias. Žmonija turi teisę ir privalo ieškoti geresnių kelių, kuriuose būtų daugiau išminties ir geranoriškumo. Bandymai užgniaužti tokių kelių paieškas, yra ne tik netoliaregiška veikla, neturinti ilgalaikės perspektyvos, bet ir **nusikaltimas prieš žmoniją**. Tačiau dabartinėje visuomenėje, kurioje viešpatauja finansinis kapitalizmas, šis nusikaltimas ne tik toleruojamas, bet net nelaikomas nusikaltimu. Gana dažnai gana neigiamai žiūrima į finansinio kapitalizmo kritiką bei į geresnės santvarkos paieškas.

Antrojoje situacijoje, charakterizuojamoje tuo, kad **gamybos kaštai C yra riboti ir negali viršyti turimos sumos C_T , pelno maksimizavimo uždavinys** sprendžiamas šiek tiek sudėtingiau negu pirmojoje situacijoje, kurioje tokio apribojimo nebuvo.

Kai $a_1 + a_2 < 1$, tai šio uždavinio sprendimas susideda iš **dvių etapų**.

Pirmajame etape sprendžiamas pelno maksimizavimo uždavinys pirmojoje situacijoje, t. y. neatsižvelgiant į gamybos kaštų ribotumą, ir to sprendimo metu

$$\text{apskaičiuota optimali gamybos kaštų reikšmė } C^* = (a_1 + a_2) \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} + C_0$$

lyginama su antrojoje situacijoje duota suma C_T .

Kai $C_T \geq C^*$, t. y. kai turimų gamybai skirtų kaštų pakanka, kad būtų pasiektas

$$\text{absoliutus pelno maksimumas } \Pi^* = pY^* - C^* = (1 - a_1 - a_2) \left[p \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} - C_0, \text{ tai}$$

pelno maksimizavimo uždavinio antrojoje situacijoje sprendinys sutampa su panašaus uždavinio sprendiniu pirmojoje situacijoje. Šiuo atveju gamybai sunaudojama tik suma C^* , o suma $C_T - C^*$ lieka nesunaudota. Antrojo etapo tokiu atveju nebereikia.

Kai pasirodo, jog $C_T < C^*$, tai atveju $a_1 + a_2 < 1$ pelno maksimizavimo uždavinio sprendimui reikia **antrojo etapo**, t. y. reikia spręsti **pelno sąlyginio maksimumo**, esant apribojimui $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C_T$, radimo uždavinį, sudarant **Lagranžo funkciją** $\Lambda(X_1, X_2) = \Pi(X_1, X_2) + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T) = pY - (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0) + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T) \rightarrow \max_{X_1, X_2}$.

$$\text{Spręsdami lygčių sistemą } \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{p a_1 Y}{X_1} - q_1 + \lambda q_1 = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} = \frac{p a_2 Y}{X_2} - q_2 + \lambda q_2 = 0, \end{cases} \text{ surandame ekstremumo}$$

$$\text{taško koordinates } X_1^{**} = p \frac{a_1 Y^{**}}{q_1 (1 - \lambda)}, \quad X_2^{**} = p \frac{a_2 Y^{**}}{q_2 (1 - \lambda)}.$$

$$\text{Įstatę jas į lygtį } q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C_T, \text{ randame jog } \frac{p Y^{**}}{1 - \lambda} = \frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2}, \text{ iš kur}$$

$$\text{išplaukia, jog } X_1^{**} = \frac{a_1(C_T - C_0)}{q_1(a_1 + a_2)}, X_2^{**} = \frac{a_2(C_T - C_0)}{q_2(a_1 + a_2)} \text{ ir } Y^{**} = \left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}.$$

Žinodami X_1^{**} , X_2^{**} , Y^{**} , surandame sąlyginį pelno $\Pi(X_1, X_2)$ maksimumą

$$\Pi^{**} = pY^{**} - C^T = p \left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} - C^T \text{ ir atitinkamas gamybos rentabilumo}$$

$$R \text{ ir vidutinių gamybos kaštų reikšmės: } R^{**} = \frac{\Pi^{**}}{C^{**}} = p \frac{Y^{**}}{C^T} - 1 \text{ ir } (AC)^{**} = \frac{C^T}{Y^{**}} = \\ = C^T \left(\frac{a_1 + a_2}{C_T - C_0} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2}.$$

Antrajame šio uždavinio sprendimo etape vietoj Lagranžo funkcijos metodo buvo galima pasinaudoti optimalių planų tiesės susikirtimo su izokoste taško radimo metodu. Būtume gavę tą patį rezultatą.

Kai $a_1 + a_2 \geq 1$, tai bent kuri duotoji baigtinė suma C_T bus visada mažesnė už tą begalinę sumą C^* , kuri būtų reikalinga, kad būtų pasiektas absoliutus pelno maksimumas pirmojoje situacijoje, nes šiuo atveju pelno funkcija $\Pi(X_1, X_2)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija ir neturi baigtinio maksimumo taško. Todėl šiuo atveju, sprendžiant pelno maksimizavimo uždavinį antrojoje situacijoje, pirmasis etapas – pelno maksimumo pirmojoje situacijoje taško (X_1^*, X_2^*) paieškos etapas – tampa nebereikalingas ir iškart sprendžiamas antrojo etapo uždavinys, kurio sprendinio formules esu ką tik išvedęs.

Pailiustruosiu pelno maksimizavimo uždavinio sprendimą antrojoje situacijoje konkrečiais pavyzdžiais.

Tarkime, jog $a_1=0,2$, $a_2=0,3$, $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$, $p=1200$, $C_T=14800$, $C_0=5000$, $q_1=20$, $q_2=30$.

Kadangi $a_1 + a_2 = 0,2 + 0,3 = 0,5 < 1$, tai pradžioje reikėtų išspręsti pirmojo etapo uždavinį, pelno $\Pi(X_1, X_2)$ absoliutaus maksimumo taško (X_1^*, X_2^*) ir tą tašką atitinkančių gamybos kaštų C^* apskaičiavimo uždavinį.

Tą uždavinį mes jau esame išsprendę, nagrinėdami pirmąją situaciją. Buvome nustatę, jog $C^*=12200$, $\Pi^*=2200$, $R^* \approx 0,18$, $(AC)^* \approx 1016,7$.

Kadangi šiuo atveju $C^* < C_T = 14800$, tai pirmajame etape rastas optimalus sprendinys yra ir pelno maksimizavimo antrojoje situacijoje uždavinio sprendinys. Todėl šiuo atveju antrasis etapas yra jau nebereikalingas.

Jei mes nebūtume atlikę pirmojo etapo ir būtume iškart pradėję ieškoti pelno sąlyginio maksimumo, maksimizuodami Lagranžo funkciją $\Lambda(X_1, X_2) = \Pi(X_1, X_2) + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T) =$

$$= pY - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T), \text{ tai būtume gavę, jog } X_1^{**} = \frac{a_1(C_T - C_0)}{q_1(a_1 + a_2)} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 14800 - 5000}{20 \cdot 0,5} = 196, \quad X_2^{**} = \frac{0,3 \cdot 14800 - 5000}{30 \cdot 0,5} = 196, \quad Y^{**} = (X_1^{**})^{a_1} (X_2^{**})^{a_2} = 14, \quad C^{**} = q_1 X_1^{**} +$$

$$+ q_2 X_2^{**} + C_0 = (a_1 + a_2) \frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} + C_0 = C_T = 14800, \quad \Pi^{**} = pY^{**} - C^{**} = 1200 \cdot 14 - 14800 = 2000, \quad R^{**} = \frac{\Pi^{**}}{C^{**}} =$$

$$= \frac{2000}{14800} = \frac{5}{37} \approx 0,135, \quad (AC)^{**} = \frac{C^{**}}{Y^{**}} = \frac{14800}{14} = \frac{7400}{7} \approx 1057.$$

Lygindami C^* , Π^* , R^* , $(AC)^*$ su C^{**} , Π^{**} , R^{**} , $(AC)^{**}$, matome, kad, išleisdami gamybai daugiau lėšų $C^{**} = C_T = 14800$ negu $C^* = 12200$, mes gautume mažesnę pelną ir mažesnę gamybos rentabilumą bei didesnes vidutines išlaidas, nes $\Pi^* > \Pi^{**}$, $R^* > R^{**}$, $(AC)^* < (AC)^{**}$.

Vadinasi, šiuo atveju neapsimoka sunaudoti visus turimus gamybai skirtus kaštus $C_T = 14800$. Naudingiau yra išleisti tik $C^* = 12200$ piniginių vienetų, sutaupant $C_T - C^* = 2600$ piniginių vienetų ir

gaunant didesnę pelną, t. y. papildomai išlošiant dar $\Pi^* - \Pi^{**} = 2200 - 2000 = 200$ piniginių vienetų. Bendras išlošis šiuo atveju būtų lygus $C^{**} - C^* + \Pi^* - \Pi^{**} = 2600 + 200 = 2800$ piniginių vienetų.

Šis pavyzdėlis rodo, kodėl atveju $a_1 + a_2 < 1$, sprendžiant pelno maksimizavimo uždavinį antroje situacijoje, pradžioje būtina palyginti C^* ir C_T ir tik šiuo atveju, kai $C^* < C_T$, spręsti antrojo etapo uždavinį.

Pavyzdžiui, jei būtų duota, jog $C_T = 9050$, tai, palyginę šią sumą su $C^* = 12200$, būtume nustatę, kad turimų kaštų C_T , skirtų gamybai, nepakanka, jog būtų pasiektas absoliutus pelno maksimumas $\Pi^* = 2200$. Tuomet tektų spręsti antrojo etapo uždavinį, ieškant sąlyginio maksimumo, t. y. maksimizuojant Lagranžo funkciją $\Lambda(X_1, X_2) = \Pi(X_1, X_2) + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T) = pY - q_1 X_1 - q_2 X_2 - C_0 + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T) = 1200Y - 20X_1 - 30X_2 - 5000 + \lambda(20X_1 - 30X_2 - 5000 - 9050)$.

Sprendami šį uždavinį, būtume suradę, jog $X_1^{**} = X_2^{**} = 81$, $Y^{**} = 9$, $\Pi^{**} = pY^{**} - C_T = 1200 \cdot 9 - 9050 = 1750$, $R^{**} = \frac{\Pi^{**}}{C^{**}} = \frac{1750}{9050} = \frac{35}{181} \approx 0,1935$, $(AC)^{**} = \frac{C^{**}}{Y^{**}} = \frac{9050}{9} \approx 1005,6$.

Šis gamybos planas leistų gauti maksimalų pelną, kurį buvo galima gauti, turint $C_T = 9050$ piniginių vienetų, skirtų gamybai. Jis būtų mažesnis nei absoliutus pelno maksimumas $\Pi^* = 2200$, tačiau turimų lėšų panaudojimo rentabilumas šiuo atveju būtų net šiek tiek didesnis nei pasiekus absoliutų pelno maksimumą ($R^* \approx 0,18$, o $R^{**} \approx 0,193$). Būtų mažesnė ir produkcijos vieneto savikaina ($(AC)^* \approx 1016,7$, $(AC)^{**} \approx 1005,6$).

Kai $a_1 + a_2 \geq 1$, tai kaip jau buvo minėta, sprendžiant pelno maksimizavimo uždavinį antroje situacijoje, pirmasis etapas tampa nebereikalingas ir iškart ieškomas sąlyginis pelno maksimumas, maksimizuojant Lagranžo funkciją ar naudojantis optimaliu planų tiesės susikirtimo su izokoste taško radimo metodu.

Pavyzdžiui, kai $a_1 = 0,4$, $a_2 = 0,6$, $q_1 = 20$, $q_2 = 30$, $p = 1200$, $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$, $C_0 = 5000$, $C_T = 14800$, tai, išsprendę pelno $\Pi(X_1, X_2)$ sąlyginio maksimumo radimo uždavinį, gautume, jog $X_1^{**} = X_2^{**} = Y^{**} = 196$, $C^{**} = C_T = 14800$, $\Pi^{**} = 220400$, $R^{**} = \frac{551}{37} \approx 14,89$, $(AC)^{**} = \frac{3700}{49} \approx 75,51$.

Tuo ir baigsiu abiejų pelno maksimizavimo situacijų ir joje sprendžiamų optimizavimo uždavinių nagrinėjimą.

Pereisiu prie **gamybos rentabilumo maksimizavimo uždavinio**, apie kurį jau buvo užsiminta, nagrinėjant pelno maksimizavimo uždavinius.

Kai $a_1 + a_2 \geq 1$, tai ir gamybos pelnas $\Pi(X_1, X_2)$, ir gamybos rentabilumas $R(X_1, X_2)$ neturi ekstremumo taško, nes visą laiką monotoniškai didėja, didinant gamybos apimtį Y .

Todėl šiuo atveju optimali gamybos planavimo strategija yra labai paprasta: tikslinga didinti gamybos ir jos produkcijos pardavimo apimtį iki sąlyginio maksimumo, kuris priklauso nuo gamybai skiriamų turimų lėšų C_T ir nuo vartotojų paklausos Y_V . Optimali gamybos apimtis $Y^{(opt)}$ šiuo atveju yra lygi $\min(Y^{**}, Y_V) =$

$$= \min \left[\left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}, Y_V \right], \text{ t. y. minimumui iš to, kiek produkcijos galima}$$

pagaminti, skiriant gamybai turimą sumą C_T , ir kiek jos galima parduoti, atsižvelgiant į tai, jog paklausa yra Y_V .

$$\text{Apskaičiavę } Y^{(opt)} = \min \left[\left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}, Y_V \right], \text{ galime apskaičiuoti}$$

$$\text{visas kitas optimalaus gamybos plano charakteristikas: } X_1^{(opt)} = \left[Y^{(opt)} \left(\frac{a_1 q_2}{q_1 a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}},$$

$$X_2^{(opt)} = \left[Y^{(opt)} \left(\frac{a_2 q_1}{q_2 a_1} \right)^{a_1} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}, \quad C^{(opt)} = (a_1 + a_2) \left[Y^{(opt)} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + C_0,$$

$$\Pi^{(opt)} = pY^{(opt)} - C^{(opt)}, \quad R^{(opt)} = \frac{\Pi^{(opt)}}{C^{(opt)}} = p \frac{Y^{(opt)}}{C^{(opt)}} - 1, \quad (AC)^{(opt)} = \frac{C^{(opt)}}{Y^{(opt)}} =$$

$$= (a_1 + a_2) \left[\left(Y^{(opt)} \right)^{1-a_1-a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} + \frac{C_0}{Y^{(opt)}}.$$

Šiek tiek sudėtingiau sprendžiamas gamybos rentabilumo maksimizavimo uždavinys, kai $a_1 + a_2 < 1$.

Nagrinėdami tikslo funkciją $R(X_1, X_2) \rightarrow \max$, pastebime, jog gamybos rentabilumo $R(X_1, X_2) = \frac{\Pi(X_1, X_2)}{C(X_1, X_2)} = \frac{pY - C}{C} = p \frac{Y}{C} - 1$ maksimumo paiešką galima

suvesti į $(AC) = \frac{C}{Y}$ minimumo paiešką, t. y. į funkcijos $\frac{q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0}{X_1^{a_1} X_2^{a_2}}$ minimumo,

tenkinančio sąlygą $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 \leq C_T$ paiešką.

Šio uždavinio sprendimo procesą tikslinga suskirstyti į du etapus.

Pirmajame etape surandame besąlyginę funkcijos $(AC) = \frac{q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0}{X_1^{a_1} X_2^{a_2}}$

minimumą, sprendami lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial(AC)}{\partial X_1} = \frac{q_1 X_1^{a_1-1} X_2^{a_2} - (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0) a_1 X_1^{a_1-2} X_2^{a_2}}{(X_1^{a_1} X_2^{a_2})^2} = \frac{q_1 X_1 - a_1 (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{X_1 \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2}} = \\ = \frac{(1-a_1) q_1 X_1 - a_1 q_2 X_2 - a_1 C_0}{X_1 (X_1^{a_1} X_2^{a_2})} = 0, \\ \frac{\partial(AC)}{\partial X_2} = \frac{q_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-1} - (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0) a_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-2}}{(X_1^{a_1} X_2^{a_2})^2} = \\ = \frac{q_2 X_2 - a_2 (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{X_2 \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2}} = \frac{(1-a_2) q_2 X_2 - a_2 q_1 X_1 - a_2 C_0}{X_2 (X_1^{a_1} X_2^{a_2})} = 0. \end{cases}$$

Kadangi čia gautų trupmenų vardikliai realiose gamybos planavimo optimizavimo uždaviniuose yra baigtiniai teigiami skaičiai, tai šia lygčių sistemą

galima suvesti į tiesinių lygčių sistemą: $\begin{cases} (1-a_1) q_1 X_1 - a_1 (q_2 X_2 + C_0) = 0, \\ (1-a_2) q_2 X_2 - a_2 (q_1 X_1 + C_0) = 0. \end{cases}$

Šios sistemos determinantas yra $D = (1-a_1-a_2) q_1 q_2$. Jis yra teigiamas dydis, kai $a_1 + a_2 < 1$, todėl šiuo atveju tikrai egzistuoja vienintelis tos sistemos sprendinys

$X_1^* = \frac{D_{X_1}}{D} = \frac{a_1 C_0}{q_1 (1-a_1-a_2)}, \quad X_2^* = \frac{D_{X_2}}{D} = \frac{a_2 C_0}{q_2 (1-a_1-a_2)}$. Šį sprendinį atitinka optimali Y

reikšmė $Y^* = \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$, atitinkama gamybos kaštų C reikšmė

$C^* = q_1 X_1^* + q_2 X_2^* + C_0 = \frac{C_0}{1-a_1-a_2} (a_1 + a_2) + C_0 = \frac{C_0}{1-a_1-a_2}$, pelno Π reikšmė $\Pi^* = pY^* - C^* =$

$$= p \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} - \frac{C_0}{1-a_1-a_2}, \text{ maksimali gamybos rentabilumo } R \text{ reikšmė}$$

$$R^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = p \frac{Y^*}{C^*} - 1 \text{ ir minimali vidutinių gamybos kaštų (AC) reikšmė } (AC)^* = \frac{C^*}{Y^*} =$$

$$= \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{1-a_1-a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2}.$$

Kad R^* yra tiksliai maksimali R reikšmė ir kad $(AC)^*$ yra tiksliai minimali (AC) reikšmė, galima įsitikinti apskaičiavus jakobianą $J = \frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial^2(AC)}{\partial X_2^2} -$

$$- \left(\frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 \text{ ir išvestinės } \frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1^2} \text{ reikšmes. Rekomenduoju skaitytojui atlikti tokius}$$

$$\text{paskaičiavimus ir įsitikinti, jog taške } (X_1^*, X_2^*) = \left(\frac{a_1 C_0}{q_1(1-a_1-a_2)}, \frac{a_2 C_0}{q_2(1-a_1-a_2)} \right)$$

jakobianas J yra teigiamas dydis, nes $a_1+a_2 < 1$, o išvestinės $\frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1^2}$ reikšmė tame taške

taip pat yra teigiama, vadinasi taške (X_1^*, X_2^*) išlaidos $(AC)^*$ yra tikrai minimalios.

Išsprendę pirmojo etapo uždavinį – vidutinių išlaidų (AC) absoliutaus minimumo ir rentabilumo R absoliutaus maksimumo taško $\left(X_1^* = \frac{a_1 C_0}{q_1(1-a_1-a_2)}, \right.$

$$\left. X_2^* = \frac{a_2 C_0}{q_2(1-a_1-a_2)} \right)$$
 radimo uždavinį ir suradę tą tašką atitinkančius gamybos kaštus

$$C^* = \frac{C_0}{1-a_1-a_2}, \text{ tuos kaštus lyginame su turimais kaštais } C_T.$$

$$\text{Kai } C_T \geq C^* = \frac{C_0}{1-a_1-a_2}, \text{ t. y., kai turimų kaštų } C_T \text{ pakanka, kad būtų}$$

$$\text{pagamintas produkcijos kiekis } Y^* = \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}, \text{ atitinkantis}$$

maksimalų gamybos rentabilumą $R^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = p \frac{Y^*}{C^*} - 1$, o kartu ir minimalią produkcijos

$$\text{vieneto savikainą } (AC)^* = \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{1-a_1-a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2}, \text{ tai antrojo skaičiavimų etapo}$$

jau nebeprireikia, nes surastas rentabilumo absoliutaus maksimumo taškas

$$\left(X_1^* = \frac{a_1 C_0}{q_1(1-a_1-a_2)}, X_2^* = \frac{a_2 C_0}{q_2(1-a_1-a_2)} \right) \text{ jau yra mūsų sprendžiamo uždavinio}$$

sprendinys, tenkinantis sąlyga, reikalaujančia, kad gamybos kaštai C neviršytų turimos sumos C_T .

Tiesa, kad toks gamybos planas būtų praktiškai realizuojamas, būtina, jog

$$Y^* = \left(\frac{C_0}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} \text{ neviršytų } Y_V.$$

Kai ši sąlyga netenkinama, tai net ir tuo atveju, kai tenkinama sąlyga $C_T \geq C_0^*$, reikalingas antrasis gamybos rentabilumo maksimizavimo uždavinio sprendimo etapas. Šio etapo metu ieškomas sąlyginis gamybos rentabilumo maksimumas, o kartu ir produkcijos vieneto savikainos sąlyginis minimumas, priimant, jog $Y^{(opt)} = Y_V$ ir minimizuojant Lagranžo funkciją $\Lambda(X_1, X_2) = \frac{C}{Y} + \lambda(Y - Y_V) = \frac{q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0}{X_1^{a_1} X_2^{a_2}} + \lambda(X_1^{a_1} X_2^{a_2} - Y_V)$, t. y. sprendžiant lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{q_1 X_1^{a_1-1} X_2^{a_2} - a_1 X_1^{a_1-1} X_2^{a_2} (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{(X_1^{a_1} X_2^{a_2})^2} + \lambda a_1 X_1^{a_1-1} X_2^{a_2} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} = \frac{q_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-1} - a_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-1} (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{(X_1^{a_1} X_2^{a_2})^2} + \lambda a_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-1} = 0, \text{ kai } X_1^{a_1} X_2^{a_2} = Y_V. \end{cases}$$

Pasinaudodami šia lygybe, gautąją lygčių sistemą galime užrašyti paprastesnėje formoje:

$$\begin{cases} \frac{q_1 Y_V - a_1 (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0) \frac{Y_V}{X_1}}{(Y_V)^2} + a_1 \lambda \frac{Y_V}{X_1} = \frac{q_1 X_1 - a_1 (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{Y_V \cdot X_1} + a_1 \lambda \frac{Y_V}{X_1} = \\ = \frac{(1-a_1)q_1 X_1 - a_1 q_2 X_2 - a_1 (C_0 - \lambda Y_V^2)}{Y_V \cdot X_1} = 0, \\ \frac{q_2 Y_V - a_2 (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0) \frac{Y_V}{X_2}}{(Y_V)^2} + a_2 \lambda \frac{Y_V}{X_2} = \frac{(1-a_2)q_2 X_2 - a_2 q_1 X_1 - a_2 (C_0 - \lambda Y_V^2)}{Y_V \cdot X_2} = 0. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinys yra tiesinės lygčių sistemos $\begin{cases} (1-a_1)q_1 X_1 - a_1 q_2 X_2 = a_1 (C_0 - \lambda Y_V^2), \\ -a_2 q_1 X_1 + (1-a_2)q_2 X_2 = a_2 (C_0 - \lambda Y_V^2) \end{cases}$ sprendinys.

Ši sistema, kai $a_1 + a_2 < 1$, turi vienintelį sprendinį, nes jos determinantas $D = q_1 q_2 (1-a_1)(1-a_2) - a_1 a_2 q_1 q_2 = q_1 q_2 (1-a_1-a_2+a_1 a_2-a_1 a_2) = (1-a_1-a_2)q_1 q_2 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Kadangi } D_{X_1} &= a_1 (C_0 - \lambda Y_V^2) (1-a_2) q_2 + a_2 (C_0 - \lambda Y_V^2) a_1 q_2 = a_1 q_2 (C_0 - \lambda Y_V^2) (1-a_2+a_2) = \\ &= a_1 q_2 (C_0 - \lambda Y_V^2) \text{ ir } D_{X_2} = (1-a_1) q_1 a_2 (C_0 - \lambda Y_V^2) + a_2 q_1 a_1 (C_0 - \lambda Y_V^2) = \\ &= a_2 q_1 (C_0 - \lambda Y_V^2) (1-a_1+a_1) = a_2 q_1 (C_0 - \lambda Y_V^2), \text{ tai } X_1^{**} = \frac{D_{X_1}}{D} = \frac{a_1 (C_0 - \lambda Y_V^2)}{q_1 (1-a_1-a_2)}, \end{aligned}$$

$$X_2^{**} = \frac{D_{X_2}}{D} = \frac{a_2 (C_0 - \lambda Y_V^2)}{q_2 (1-a_1-a_2)}.$$

Įstatydami šias kintamųjų X_1 ir X_2 reikšmes į lygybę $Y^{**} = Y_V = (X_1^{**})^{a_1} (X_2^{**})^{a_2}$, gauname, jog $\left(\frac{C_0 - \lambda Y_V^2}{1-a_1-a_2} \right)^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} = Y_V$.

Iš šios lygybės išvedame, jog $\frac{C_0 - \lambda Y_V^2}{1 - a_1 - a_2} = \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}}$, kuo

pasinaudodami gauname, kad $X_1^{**} = \frac{a_1}{q_1} \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} = \left[Y_V \left(\frac{a_1 \cdot q_2}{q_1 a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}}$,

$$X_2^{**} = \frac{a_2}{q_2} \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} = \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{q_2} \right)^{a_1} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}}.$$

Žinodami X_1 , X_2 ir Y reikšmes X_1^{**} , X_2^{**} , Y_V , atitinkančias produkcijos vieneto savikainos (AC) sąlyginį minimumą, kai $Y = Y_V$, mes jau galime apskaičiuoti ir atitinkamas gamybos kaštų C , pelno Π , gamybos rentabilumo R ir produkcijos vieneto savikainos (AC) reikšmes C^{**} , Π^{**} , R^{**} ir $(AC)^{**}$:

$$1) C^{**} = q_1 X_1^{**} + q_2 X_2^{**} + C_0 = Y_V^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \left[q_1 \left(\frac{a_1 \cdot q_2}{q_1 a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} + q_2 \left(\frac{q_1 \cdot a_2}{a_1 q_2} \right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \right] + C_0 =$$

$$= \left[Y_V q_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} q_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \left[\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \right] + C_0 = \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} (a_1 + a_2) + C_0;$$

$$2) \Pi^{**} = p Y^{**} - C^{**} = p Y_V - (a_1 + a_2) \left[Y_V \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} - C_0;$$

$$3) R^{**} = \frac{\Pi^{**}}{C^{**}} = p \frac{Y_V}{C^{**}} - 1 = \frac{p}{(a_1 + a_2) \left[Y_V^{1 - a_1 - a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} + \frac{C_0}{Y_V}} - 1;$$

$$4) (AC)^{**} = \frac{C^{**}}{Y^{**}} = \frac{C^{**}}{Y_V} = (a_1 + a_2) \left[Y_V^{1 - a_1 - a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2} \right]^{\frac{1}{a_1 + a_2}} + \frac{C_0}{Y_V}.$$

Rekomenduočiau skaitytojui apskaičiuoti Lagranžo funkcijos $\Lambda(X_1, X_2) = \frac{q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0}{X_1^{a_1} X_2^{a_2}} + \lambda (X_1^{a_1} X_2^{a_2} - Y_V)$ jakobiano $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2$ bei išvestinės

$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1^2}$ reikšmes taške $X_1 = X_1^{**}$, $X_2 = X_2^{**}$ ir įrodyti, jog šis taškas yra gamybos

rentabilumo sąlyginio maksimumo taškas, tenkinantis sąlygą $Y = Y_V$.

Antrasis gamybos rentabilumo maksimizavimo uždavinio sprendimo etapas reikalingas ir tada, kada, atlikus pirmąjį šio uždavinio sprendimo etapą ir apskaičiavus gamybos kaštų C reikšmę $C^* = \frac{C_0}{1 - a_1 - a_2}$, vaizduojančią gamybos kaštus, reikalingus

norint pagaminti tiek produkcijos, kad būtų pasiektas absoliutus gamybos rentabilumo

maksimumas, paaiškėja, jog turimų kaštų C_T nepakanka tam tikslui pasiekti, nes $C_T < \frac{C_0}{1-a_1-a_2}$.

Tuomet tenka ieškoti gamybos vidutinių kaštų (AC) sąlyginio minimumo taško, minimizuojant Lagranžo funkciją $\Lambda(X_1, X_2) = \frac{C}{Y} + \lambda(C - C_T) = \frac{q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0}{X_1^{a_1} X_2^{a_2}} + \lambda(q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 - C_T)$, kai X_1 ir X_2 privalo tenkinti sąlygą $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C_T$.

Diferencijuodami funkciją $\Lambda(X_1, X_2)$ gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{q_1 X_1^{a_1-1} X_2^{a_2} - a_1 X_1^{a_1-1} X_2^{a_2} (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{(X_1^{a_1} X_2^{a_2})^2} + \lambda q_1 = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} = \frac{q_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-1} - a_2 X_1^{a_1} X_2^{a_2-1} (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{(X_1^{a_1} X_2^{a_2})^2} + \lambda q_2 = 0. \end{cases}$$

Pertvarkydami šios sistemos pirmąją lygtį ir naudodamiesi lygybėmis $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C_T$ ir $X_1^{a_1} X_2^{a_2} = Y$, gauname, jog $\frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{q_1 X_1 - a_1 (q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0)}{X_1 \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2}} + \lambda q_1 = \frac{q_1 X_1 - a_1 C_T + \lambda q_1 X_1 Y}{X_1 Y} = 0$.

Analogiškai gauname, jog $\frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} = \frac{q_2 X_2 - a_2 C_T + \lambda q_2 X_2 Y}{X_2 Y} = 0$.

Iš pirmosios lygties išvedame, jog $X_1 = \frac{a_1 C_T}{q_1 (1 + \lambda Y)}$, o iš antrosios, jog $X_2 = \frac{a_2 C_T}{q_2 (1 + \lambda Y)}$.

Istatę šias reikšmes į lygybę $q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0 = C_T$ randame, jog $\frac{C_T}{1 + \lambda Y} (a_1 + a_2) = C_T - C_0$, iš kur išplaukia, jog $\frac{C_T}{1 + \lambda Y} = \frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2}$. Todėl $X_1^{**} = \frac{a_1 (C_T - C_0)}{q_1 (a_1 + a_2)}$, $X_2^{**} = \frac{a_2 (C_T - C_0)}{q_2 (a_1 + a_2)}$, $Y^{**} = (X_1^{**})^{a_1} (X_2^{**})^{a_2} = \left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}$.

Nesunku įsitikinti, kad taške (X_1^{**}, X_2^{**}) , kai $a_1 + a_2 < 1$, jakobianas $J = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2$ ir išvestinė $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X_1^2}$ yra teigiami dydžiai, o tai įrodo, jog taške (X_1^{**}, X_2^{**}) vidutiniai gamybos kaštai (AC) pasiekia sąlyginį minimumą, o gamybos rentabilumas R – sąlyginį maksimumą.

Apskaičiuosime (AC) ir R reikšmes (AC)^{**} ir R^{**} tame taške:

$$1) (AC)^{**} = \frac{C^{**}}{Y^{**}} = \frac{C_T}{\left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2}} = C_T \left(\frac{a_1 + a_2}{C_T - C_0} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{q_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{q_2}{a_2} \right)^{a_2};$$

$$2) R^{**} = \frac{\Pi^{**}}{C^{**}} = \frac{p Y^{**} - C_T}{C_T} = p \frac{Y^{**}}{C_T} - 1 = \frac{p}{C_T} \left(\frac{C_T - C_0}{a_1 + a_2} \right)^{a_1 + a_2} \left(\frac{a_1}{q_1} \right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{q_2} \right)^{a_2} - 1.$$

Suradus gamybos rentabilumo sąlyginio ar besąlyginio maksimumo tašką ir apskaičiavus pagamintos produkcijos kiekį Y tame taške, būtina patikrinti, ar ta reikšmė tenkina sąlygą $Y \leq Y_V$, t. y. ar visą pagamintą produkciją įmanoma parduoti.

Kai ši sąlyga netenkinama, gamybos planą reikia perskaičiuoti, priimant, jog $Y \leq Y_V$, pavyzdžiui, jog $Y^{(opt)} \leq Y_V$, ir surandant naują sąlyginį gamybos rentabilumo maksimumą.

Kadangi tokius skaičiavimus šiame skyrelyje jau atlikinėjome (ir ne vieną kartą), tai čia jų nebekartosiu. Apsiribosiu tik keliais konkrečiais gamybos rentabilumo maksimizavimo pavyzdžiais, manau, padėsiančiais skaitytojui pilniau išsiaiškinti, kaip tai daroma.

Sudarysime gamybos planą, kurį realizuojant pasiekiamas vidutinių gamybos kaštų (AC) absoliutus minimumas, o kartu ir gamybos rentabilumo absoliutus maksimumas, kai gamybos procesas aprašomas neoklasikine funkcija $Y = X_1^{a_1} X_2^{a_2}$ ir tokiomis to proceso rodiklių reikšmėmis: $a_1=0,2$, $a_2=0,3$, $q_1=20$, $q_2=30$, $p=1200$, $C_0=5000$.

Optimizavimo uždavinio tikslo funkcija šiuo atveju bus funkcija

$$(AC) = \frac{C}{Y} = \frac{q_1 X_1 + q_2 X_2 + C_0}{X_1^{a_1} X_2^{a_2}} = \frac{20X_1 + 30X_2 + 5000}{X_1^{0,2} X_2^{0,3}} \rightarrow \min_{X_1, X_2}.$$

Diferencijuodami šią funkciją gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial(AC)}{\partial X_1} = \frac{20X_1^{0,2} X_2^{0,3} - 0,2X_1^{-0,8} X_2^{0,3} (20X_1 + 30X_2 + 5000)}{(X_1^{0,2} X_2^{0,3})^2} = \frac{16X_1 - 6X_2 - 1000}{X_1^{1,2} X_2^{0,3}} = 0, \\ \frac{\partial(AC)}{\partial X_2} = \frac{30X_1^{0,2} X_2^{0,3} - 0,3X_1^{0,2} X_2^{-0,7} (20X_1 + 30X_2 + 5000)}{(X_1^{0,2} X_2^{0,3})^2} = \frac{-6X_1 + 21X_2 - 1500}{X_1^{0,2} X_2^{1,3}} = 0. \end{cases}$$

Šios lygčių sistemos sprendinį rasime, išsprendę tiesinių lygčių sistemą $\begin{cases} 16X_1 - 6X_2 = 1000, \\ -6X_1 + 21X_2 = 1500, \end{cases}$

kurios determinantas $D = 16 \cdot 21 - 6 \cdot 6 = 300 > 0$, o nežinomųjų determinantai yra $D_{X_1} = 1000 \cdot 21 + 6 \cdot 1500 = 30000$, $D_{X_2} = 16 \cdot 1500 + 6 \cdot 1000 = 30000$.

$$\text{Todėl } X_1^* = \frac{D_{X_1}}{D} = \frac{30000}{300} = 100, \quad X_2^* = \frac{D_{X_2}}{D} = \frac{30000}{300} = 100.$$

$$\begin{aligned} \text{Taške } (X_1^* = 100, X_2^* = 100) \text{ išvestinė } \frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1^2} &= \frac{16X_1^{1,2} X_2^{0,3} - 1,2X_1^{0,2} X_2^{0,3} (16X_1 - 6X_2 - 1000)}{(X_1^{1,2} X_2^{0,3})^2} = \\ &= \frac{16X_1 - 1,2(16X_1 - 6X_2 - 1000)}{X_1^{2,2} X_2^{0,3}} \text{ yra lygi } \frac{1600}{100^{2,5}} = \frac{1600}{10^5} = \frac{16}{1000} > 0, \text{ o jakobianas } \frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial^2(AC)}{\partial X_2^2} - \\ &- \left(\frac{\partial^2(AC)}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 = \frac{16}{10^3} \cdot \frac{21}{10^3} - \left(\frac{6}{10^3} \right)^2 = \frac{3}{10^4} > 0. \text{ Todėl tame taške funkcija } (AC) = \frac{C}{Y} \end{aligned}$$

pasiekia absoliutų minimumą, o funkcija $R = \frac{\Pi}{C} = p \frac{Y}{C} - 1$ – absoliutų maksimumą.

Suradę X_1 ir X_2 reikšmes $X_1^* = 100$, $X_2^* = 100$, galime apskaičiuoti kitų gamybą charakterizuojančių rodiklių Y , C , Π , R ir (AC) reikšmes Y^* , C^* , Π^* , R^* ir (AC)*:

$$\begin{aligned} 1) \quad Y^* &= (X_1^*)^{a_1} (X_2^*)^{a_2} = 100^{0,5} = 10; \quad 2) \quad C^* = q_1 X_1^* + q_2 X_2^* + C_0 = 20 \cdot 100 + 30 \cdot 100 + 5000 = 10000; \\ 3) \quad \Pi^* &= p Y^* - C^* = 1200 \cdot 10 - 10000 = 2000; \quad 4) \quad R^* = \frac{\Pi^*}{C^*} = \frac{2000}{10000} = 0,2; \quad 5) \quad (AC)^* = \frac{C^*}{Y^*} = \frac{10000}{10} = 1000. \end{aligned}$$

Išsprendami šį uždavinį, mes įvykdėme šiame skyrelyje duotą pažadą įrodyti, jog taškas $(X_1^* = 100, X_2^* = 100)$ yra čia nagrinėto gamybinio proceso rentabilumo absoliutaus maksimumo, o kartu ir vieno produkcijos vieneto vidutinės savikainos (AC) absoliutaus minimumo taškas, nesutampantis su šio gamybinio proceso duodamo pelno Π absoliutaus maksimumo tašku $X_1 = 144$, $X_2 = 144$.