

1.13. EKSPERIMENTAI SU MATEMATINIAIS MODELIAIS IR TŲ EKSPERIMENTŲ TAIKYMAS, SPRENDŽIANT SISTEMOTYROS IR SISTEMŲ PROJEKTAVIMO UŽDAVINIUS. IMITACINIAI MODELIAI IR IMITACINIS MODELIAVIMAS

Mus iš visų pusių supa sistemos, su kuriomis tenka sąveikauti ir kurias tenka nagrinėti. Be to mes, būdami įvairių sistemų elementais, dalyvaujame jų veikloje, projektuojame ir tobuliname tą veiklą, kuriame naujas sistemas. Galų gale mes patys esame sistemos, kurias pažinti, anot Sokrato, yra viena svarbiausių kiekvieno žmogaus pareigų.

Bendraujant su sistemomis, nagrinėjant bei kuriant jas, tenka spręsti įvairių tipų uždavinius [128, 51]. Trumpai apibūdinsiu **keturis tokių uždavinių tipus**.

1.13.1. Sistemotyros, sistemų modeliavimo ir sistemų projektavimo uždavinių tipai. Eksperimentų su matematiniais sistemų modeliais taikymas, sprendžiant tuos uždavinius

Pirmojo tipo uždaviniuose mes, žinodami sistemos įėjimus ir pradinę būseną, bandome nustatyti, kokie bus sistemos išėjimai ir jos naujos būsenos. Tokių uždavinių sprendimas leidžia prognozuoti sistemos elgesį, numatyti mūsų veiksmų bei valdymo sprendimų pasekmes ir todėl yra labai svarbus ir aktualus praktikoje.

Kai mes turime sistemos makromodelį, tai šio tipo uždavinius galime spręsti taip, kaip buvo aprašyta ir parodyta 1.11. skyriuje. Kai turime sistemos mikromodelį, tai, kaip buvo aprašyta 1.11. ir 1.12. skyriuose, galime apskaičiuoti ne tik vidines, bet ir išorines išėjimų ir fazines trajektorijas, taip pat sistemos vidinių elementų įėjimo trajektorijas, stebėti, kaip jos keičiasi, keičiantis sistemos įėjimams, pradinei būsenai bei sistemos struktūrai ir sudėčiai. Todėl gana dažnai, prieš sprendžiant pirmojo tipo uždavinį, tenka išspręsti trečiojo tipo uždavinį – sudaryti nagrinėjamos sistemos matematinį modelį (išorinį ar vidinį).

Žinoma, kaip jau buvo minėta šios mokymo priemonės „Įvade“, šio tipo uždavinius galima spręsti ir neturint sistemos modelių, pasitelkus natūrinius eksperimentus. Tačiau **natūriniai eksperimentai dažnai reikalauja nemažų išlaidų ir laiko, o taip pat, kas svarbiausia, gali būti rizikingi, pavojingi ir net žalingi.** Be to, natūrinių eksperimentų su realiomis sistemomis diapazonas neretai būna siauresnis negu matematinių eksperimentų su sistemų modeliais, nes **matematiniuose modeliuose galima nagrinėti ir tokias būsenas bei tokius įėjimus, kurie praktikoje nepasiekiami.** Todėl **matematiniai eksperimentai, lyginant su natūriniais, turi daug privalumų bei pranašumų.** Tačiau tai nereiškia, jog matematiniai eksperimentai pajėgūs pilnai išstumti natūrinius eksperimentus: kiekvienas matematinis modelis atspindi tik tam tikrą realios sistemos savybių dalį ir tik su tam tikru tikslumu, todėl išvados, išplaukiančios iš matematinių eksperimentų su sistemų modeliais, yra teisingos tik tam tikrose ribose, kurios tuo platesnės, kuo matematinis modelis pilnesnis ir tikslesnis. Kadangi absoliutus modelių pilnumas ir absoliutus jų tikslumas yra nepasiekiami, todėl visuomet lieka reikiamybė tikrinti teorines išvadas praktikoje, **matematinų eksperimentų rezultatus – natūriniais eksperimentais (aktyviais ir pasyviais, t. y. specialiai organizuojamais eksperimentais ir gyvenimo praktika).** **Natūriniai eksperimentai padeda patikrinti ir patikslinti matematinius modelius, dar labiau išplėsti jų taikymo diapazoną.**

Dar plačiau ir efektyviau sistemų modeliai ir matematiniai eksperimentai su jais gali būti taikomi, sprendžiant **antrojo tipo uždavinius**, atvirkštinius **pirmojo tipo uždavinių atžvilgiu: ieškant tokių įėjimo vektorių bei įėjimo trajektorijos taškų koordinačių reikšmių, kurios, esant duotai pradinėi būsenai, užtikrintų norimų išėjimo ir galutinės būsenos vektorių koordinačių reikšmių gavimą**. Tokių uždavinių sprendimas yra reikalingas, ieškant valdymo sprendimų, t. y. norint nustatyti, **kaip reiktų paveikti valdymo objektą (valdomą sistemą), kad gautume norimus rezultatus** – norimą išėjimą ir norimą sistemos būseną.

Kai sistemos matematinis modelis pakankamai paprastas, tai šio tipo uždavinį galima spręsti analiziškai, sprendžiant algebrines, diferencialines, integralines, skirtumines, logines ir t. t. lygtis bei jų sistemas. **Sudėtingesniais atvejais antrojo tipo uždavinio sprendinį tiesiogiai (sprendžiant lygčių sistemas) surasti tampa jau nebeįmanoma ir tenka naudotis matematiniais eksperimentais su sistemos matematiniu modeliu**, stengiantis tuos eksperimentus planuoti taip, kad kuo greičiau artėtų prie ieškomo sprendinio. **Planuojant tokius eksperimentus, vadovaujamasi supaprastintų analogiškų matematinių modelių analiziniais sprendiniais, sukaupia patirtimi ir žiniomis apie tiriamą sistemą bei intuicija**. Atlikdamas eksperimentus, **eksperimentuotojas, nagrinėdamas eksperimentų rezultatus, gali mokytis ir tobulinti eksperimentavimo planą, greitindamas artėjimą prie ieškomo sprendinio procesą, o kartais ir gerindamas ne tik sprendimo procesą, bet ir patį sprendinį**.

Žinoma, ir sprendžiant antrojo tipo uždavinius, galima naudotis natūriniais eksperimentais, tačiau sukaupia patirtis rodo, jog, **sprendžiant tokius uždavinius, matematinių eksperimentų metodas nepalyginamai pranašesnis negu natūrinių eksperimentų metodas**.

Dar ryškiau tas pranašumas pastebimas, sprendžiant **trečiojo tipo uždavinius** – **projektuojant sistemas, kurios duotų norimus išėjimus ir pasiektų norimas būsenas, esant duotiems ar projektuojamiems įėjimams ir duotoms pradinėms būsenoms**. Tokie uždaviniai vadinami **sistemų sintezės (sistemų projektavimo) uždaviniais**, o jei be projektuojamų sistemų sudėties ir struktūros dar ieškomi ir toms sistemoms reikalingi įėjimai ir pradinės būsenos, kurie užtikrintų laukiamų rezultatų (sistemos išėjimų ir galutinių būsenų) gavimą, tai tokius uždavinius kartais vadina **sistemų sintezės plačiąja prasme uždaviniais** [128]. **Pastarieji uždaviniai jungia savyje ir trečiojo ir antrojo tipo uždavinius, o jų sprendimo metu dažnai tenka daug kartų spręsti ir pirmojo tipo uždavinius, t. y. naudoti iteracijų metodu**.

Trečiojo tipo uždavinių sprendimui galima pasitelkti **automatų abstrakčiosios ir struktūrinės sintezės metodus** [101, 102, 127], **ventilinių ir kombinacinių schemų sintezės metodus** [110], **automatinio reguliavimo ir automatinio bei automatizuoto valdymo sistemų projektavimo metodus** [10, 11, 15, 16, 17, 19, 129, 130], tačiau sudaryti determinuotus trečiojo tipo uždavinių sprendimo algoritmus bei tuos algoritmus realizuojančias ESM programas pavyksta tik, palyginti, nesudėtingais atvejais. **Sudėtingesnės sistemos projektuojamos „dialoginiame režime“, dalinai pasitelkiant aukščiau minėtus metodus, dalinai – konstruktorių sukaupią patirtį ir jų intuiciją, dalinai statistinę informaciją, dalinai – matematinius eksperimentus su eksperimentiniais matematiniais projektuojamų sistemų ir jų dalių modeliais, dalinai – natūrinius eksperimentus su projektuojamų sistemų bei jų dalių laboratoriniais (bandomaisiais) egzemplioriais, su jų fiziniais modeliais**.

Kadangi daugumoje atvejų **matematinį projektuojamos sistemos varianto modelį sukurti ir jį keisti, ieškant tinkamiausio varianto, yra žymiai greičiau, pigiau ir lengviau, negu pagaminti ir rekonstruoti bandomąjį projektuojamos**

sistemos egzempliorių bei su juo eksperimentuoti, tai stengiamasi (ypač paskutiniu laiku vis labiau plintančiose ir sparčiai tobulėjančiose **automatizuoto projektavimo sistemose – APS**) kuo plačiau naudotis matematiniu projektavimu ir matematiniais eksperimentais su projektuojamų sistemų modeliais ir tik baigiamosiose projektavimo stadijose gaminti bandomuosius egzempliorius ir su jais eksperimentuoti.

Sudėtingų sistemų projektavimo metodologija – sudėtingas ir svarbus mokslas bei menas. Tiems klausimams bus išskirtas specialus skyrius antrojoje šios mokymo priemonės dalyje. Kol ta dalis dar neišleista, skaitytojui rekomenduojčiau susipažinti su šių eilučių autoriaus paruošta metodine priemone [16], skirta statistinės informacinės sistemos (SIS) projektavimui ir diegimui.

Prie sistematyroje sprendžiamų trečiojo tipo uždavinių reikia priskirti ir jau veikiančių sistemų **deskriptinių modelių sudarymo uždavinius** (žiūr. 1.4.13. skyrelį). Tokių uždavinių sprendimas ypač aktualus sudėtingų sistemų valdyje, kada valdymo subjektas tampa nebepajėgus fiziškai tiesiogiai bendrauti su sudėtinga sistema ir jos elementais ir nebepajėgus intelektualiai aprėpti visą tą sistemą ir joje egzistuojančius sudėtingus ryšius bei joje vykstančius sudėtingus procesus. **Tuomet tiesioginį bendravimą su sudėtinga sistema valdymo subjektui tenka keisti į bendravimą su valdomos sistemos modeliu**, kuris būdamas vadovo kompiuteryje, yra ir fiziškai lengviau prieinamas ir intelektualiai lengviau aprėpiamas negu sudėtinga reali sistema.

Kaip jau buvo parodyta 1.8. ir 1.9. skyriuose, kelios sistemos, turinčios neizomorfiškas struktūras, gali būti funkcionaliai ekvivalenčios. Todėl, **sprendami trečiajam tipui priklausančius sistemų projektavimo uždavinius, mes galime gauti ne vieną sprendinį, o daug funkcionaliai ekvivalentiškų sistemų, besiskiriančių viena nuo kitos savo struktūromis.** Kartais (kaip jau buvome pastebėję 1.10. skyriuje, sudarydami determinuoto automato mikromodelį, ir kaip matysime 1.16.1.4. skyrelyje) **trečiojo tipo uždavinio sprendiniais gali būti ir kelios funkcionaliai skirtingos sistemos.**

Iš tokios trečiojo tipo uždavinių sprendinių savybės išplaukia **ketvirtojo tipo uždaviniai**, kurių esmė – **sistemų optimizavimas**. Ketvirtojo tipo uždavinio sprendimą, projektuojant naujas sistemas, galima būtų laikyti trečiojo tipo uždavinio sprendimo tęsiniu ir neišskirti į atskirą tipą. Tačiau ketvirtojo tipo uždaviniai gali kilti ir atskirai nuo trečiojo tipo uždavinių, pavyzdžiui, **tobulinant jau egzistuojančias sistemas**, kurių dalis galbūt susiformavo natūralios atrankos keliu, niekam jų sąmoningai neprojektuojant. Todėl, matyt, tikslinga šios rūšies uždavinius išskirti į atskirą uždavinių tipą. Kartais optimizavimo uždaviniai iškyla ir sprendžiant antrojo tipo uždavinius.

Apie optimizavimo uždavinius plačiau kalbėsime specialiai jiems skirtuose šios mokymo priemonės 1.15. skyriuje ir 1.16.1.4. skyrelyje, todėl čia tik pastebėsiu, jog šio tipo uždavinių sprendimui, ypač tais atvejais, kai nepavyksta rasti jau egzistuojančių ar, naudojantis žinomais optimizavimo metodais, sudaryti determinuotą sistemos optimizavimo algoritmą, **gali būti gana efektyviai panaudoti matematiniai eksperimentai su sistemų modeliais.** Tų eksperimentų metu, išbandant įvairius paieškos planus bei hipotezes, ieškoma sprendinio, kuris būtų optimalus ar bent pakankamai artimas optimaliam.

Galimas **kaip išorinis, taip ir vidinis sistemų optimizavimas**, pavyzdžiui, optimalių sistemos išėjimo ir įėjimo vektorių koordinačių reikšmių ir sistemos pradinės būsenos parinkimas, sistemos struktūros ir sudėties optimizavimas ir pan.

Galima taip pat ir jau minėtųjų pirmojo, antrojo ir trečiojo tipo uždavinių **sprendinių paieškos procesų ir sistemų optimizavimo procesų optimizacija**, kuri

irgi priklauso ketvirtajam sistemotyros uždavinių tipui. Tam pačiam tipui priskiriami ir **matematinų eksperimentų su matematiniais modeliais planavimo optimizavimo uždaviniai**.

Matematinų eksperimentų su matematiniais modeliais efektyvumas, sprendžiant sudėtingus ketvirtojo tipo uždavinius, remiasi tuo, jog **matematinų modelių keitimas beveik visada yra žymiai pigesnis ir greitesnis procesas negu realios sistemos rekonstravimas**.

Visa aukščiau išdėstyta trumpa keturių tipų uždavinių ir jų sprendimo metodų apžvalga rodo, jog **eksperimentai su matematiniais sudėtingų sistemų modeliais – perspektyvi mokslo ir technikos vystymosi šaka**. Ši šaka svarbi ne tik praktiniu, bet ir teoriniu atžvilgiu, nes revoliucionizuoja tokio, atrodo, klasikinio ir nusistovėjusio mokslo, kaip matematika, veidą ir vaidmenį. Jei nuo Euklido laikų iki XX a. vidurio į matematiką buvo žiūrima kaip į mokslą, naudojantį grynai dedukcinius metodus, išvedančius matematines teoremas iš vienareikšmiškai suformuluotų aksiomų, ir nesinaudojantį jokiais eksperimentais, tai paskutiniu laiku šis požiūris pradėjo keistis, nes matematiniai eksperimentai tapo galinga mokslinių ir techninių tyrimų priemone. Matematinų eksperimentų metodas tampa ypatingai efektyvus, kai juose panaudojama galinga šiuolaikinė kompiuterinė technika su gerai išvystyta programine įranga. Iš čia išplaukia, jog, ruošiant sistemotyros ir taikomosios matematikos specialistus bei dženeralistus, tikslinga išmokyti juos modeliuoti bei projektuoti sudėtingas sistemas ir eksperimentuoti su tokių sistemų modeliais, naudojantis šiuolaikiniais kompiuteriais. Tai pagrindinis šios mokymo priemonės antrosios dalies tikslas. Todėl šioje dalyje ypatingai daug dėmesio bus skiriama sudėtingų sistemų matematiniam modeliavimui ir projektavimui, čia ką tik išvardintų tipų uždavinių sprendimui. Manau, kad sisteminio modeliavimo ir sisteminio projektavimo pagrindų žinojimas naudingas ir reikalingas ne tik sistemotyriminkams, bet ir daugumai šiuolaikinių specialistų: matematikams, fizikams, kibernetikams, įvairių technikos sričių inžinieriams, ekologams, biologams, ekonomistams, medikams, socialinės srities darbuotojams ir t. t.

1.13.2. Imitacinis modeliavimas ir imitaciniai modeliai

Viena svarbiausių matematinio eksperimentavimo krypčių yra **imitacinis modeliavimas**. Apie imitacinį modeliavimą galima kalbėti kaip plačiąja, taip ir siaurąja prasme.

Imitacinis modeliavimas siaurąja prasme – tai eksperimentavimas su gatavais imitaciniais modeliais. Imitacinis modeliavimas plačiąja prasme – tai ne tik eksperimentai su imitaciniais modeliais, bet ir imitacinių modelių sudarymas, prieš pradėdant eksperimentus su jais, ir tų modelių tobulinimas eksperimentų metu, programinės įrangos, reikalingos imitacinių modelių sudarymui bei eksperimentų su jais automatizavimui, kūrimas.

Kalbant apie imitacinį modeliavimą, reikėtų šiek tiek detaliau ir apibrezčiau aptarti jau ne kartą šioje mokymo priemonėje minėtą **imitacinio modelio** sąvoką, nes vartojantys šią sąvoką neretai suvokia ją nepakankamai apibrezčiai ir todėl – ne visada vienodai, kas tiksliuosiuose moksluose (o matematinė sistemotyra pretenduoja į tokius) nėra pageidautina.

Šioje mokymo priemonėje matematinius **sisteminius modelius** (t. y. sistemų ir procesų išorinius ir vidinius modelius) pagal jų turinį ir sudarymo būdą skirstysime į

dvi grupes, duodami joms sąlyginius pavadinimus – **analiziniai ir imitaciniai modeliai**.

Žodis „sąlyginiai“ čia pavartotas todėl, kad minėtieji pavadinimai ne visada visai tiksliai atspindi savo grupių modelių esmę: iš vienos pusės tuose modeliuose, kuriuos priimta vadinti imitaciniais, neišsiverčiama be formulių, būdingų analiziniams modeliams, ir net stengiamasi jomis kuo plačiau naudotis, iš kitos pusės tuose modeliuose, kuriuos vadinsime analiziniais, kartais gali būti panaudoti ir imitavimo elementai.

Pagrindinis skirtumas tarp analizinių ir imitacinių sisteminių modelių yra tas, kad **analizinių sisteminių modelių esmę sudaro matematinės formulės, išreiškiančios priklausomybę tarp objekto (sistemos) įėjimų, išėjimų ir būsenų vektorių koordinačių reikšmių – išėjimo ir perėjimo funkcijų matematinės išraiškos, o imitacinių sisteminių modelių esmę sudaro algoritmai, kuriais naudodamiesi galime imituoti objekto (sistemos) funkcionavimą, vidines ir išorines fazines, išėjimų bei įėjimų trajektorijas.**

Iš analizinių sisteminių modelių visuomet galima gauti imitacinius modelius, nes, turėdami perėjimo ir išėjimo funkcijas bei žinodami objekto (sistemos) pradinę būseną ir pradines įėjimo trajektorijų atkarpas, mes visuomet galime sudaryti fazinių ir išėjimo trajektorijų pradinių atkarpų apskaičiavimo algoritmus, o kartais – ne tik algoritmiškai, bet ir analiziškai išreikšti išėjimų bei fazinių trajektorijų priklausomybę nuo pradinės būsenos ir įėjimo trajektorijų, apie ką buvo rašoma 1.11. šios mokymo priemonės skyriuje, kuriame buvo pateikta nemažai išėjimų ir fazinių trajektorijų apskaičiavimo pavyzdžių.

Iš imitacinių sisteminių modelių gauti analizinius modelius pavyksta, palyginti, retai, nes **imitaciniai modeliai dažniausiai ir sudaromi kaip tik tais atvejais, kai mums nepavyksta nustatyti ir matematiškai išreikšti priklausomybių tarp įėjimų, išėjimų ir būsenų vektorių koordinačių reikšmių.**

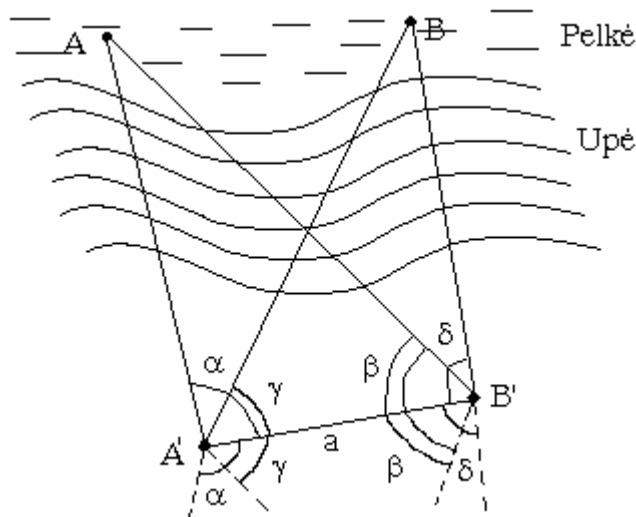
Šioje aplinkybėje glūdi ne tik imitacinių modelių trūkumas, lyginant su analiziniais, bet ir jų pranašumas: **imitacinius modelius galima kurti ir naudoti ten, kur nepavyksta sudaryti analizinių modelių. Mes, net nesugebėdami surasti ir matematiškai išreikšti priklausomybių tarp sudėtingos sistemos daugybės įėjimų, išėjimų ir būsenos vektoriaus koordinačių reikšmių, galime stebėti sistemos bei jos posistemų funkcionavimą ir, pasinaudodami pastebėtais to funkcionavimo dėsningumais, imituoti jį.**

Pavyzdžiui, mes dabar dar nepajėgūs (ir neaišku, ar kada nors pajėgsime) analiziškai išreikšti visas priklausomybes tarp daugybės faktorių, nuo kurių priklauso didelės įmonės, administracinio rajono, miesto bei valstybės funkcionavimas, ir sudaryti tokių didelių ir sudėtingų sistemų detalius analizinius modelius, tačiau jau egzistuoja nemažai imitacinių modelių, leidžiančių imituoti tose sistemose vykstančius procesus ir vykdyti matematinius eksperimentus, ieškant tose sistemose išskylančių problemų sprendimo. Tokių modelių kūrimui ir panaudojimui kaip tik ir skirta antroji šios mokymo priemonės dalis.

Skirtumą tarp problemų sprendimo, naudojantis analiziniais metodais ir imitacinio modeliavimo metodais, galima pailiustruoti tokiu paprastu pavyzdžiu.

Tarkime, jog mums reikia nustatyti atstumą tarp dviejų taškų A ir B, esančių pelkėje už upės, kur patekti ir tiesiogiai išmatuoti tą atstumą mes, šiuo metu būdami kitame upės krante, dabar negalime (žiūr. 288 pav.).

Turėdami ruletę ir teodolitą, mes galime šioje upės pusėje, kur dabar esame, pasirinkti bazinę atkarpą A'B' ir išmatuoti jos ilgį $|A'B'|=a$ bei kampų $\angle AA'B'=\alpha$, $\angle A'B'A=\beta$, $\angle BA'B'=\gamma$ ir $\angle BA'B'=\delta$ (žiūr. 288 pav.) dydžius.



288 pav.

Žinodami dydžius a , α , β , γ ir δ , mes galime **analiziškai išreikšti atkarpos AB ilgio $|AB| = x$ priklausomybę nuo jų** formulėmis

$$x = a \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2(\gamma + \delta)} - 2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + \delta)} \cos(\delta - \beta)}, \text{ arba}$$

$$x = a \sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2(\gamma + \delta)} - 2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \delta}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + \delta)} \cos(\alpha - \gamma)} \quad \text{ir apskaičiuoti}$$

dydžio x reikšmę. Pasinaudodami abiem formulėmis, galėsime įvertinti kampų dydžio matavimo paklaidas ir galbūt net šiek tiek patikslinti galutinį rezultatą – apskaičiuotą atkarpos AB ilgį.

Tai bus **analizinis** šio uždavinio sprendimas.

Tačiau galime pasielgti ir kitaip. Pavyzdžiui, nenorėdami ar nesugebėdami išsivesti dydžio x priklausomybės nuo a , α , β , γ ir δ formulę, mes galime toje kranto pusėje, kur dabar esame, atidėti nuo atkarpos $A'B'$ į kitą pusę nuo upės (ši pusė mums prieinama) kampus α , β , γ ir δ ir, suradę atitinkamų tiesių susikirtimo taškus A'' ir B'' (288 pav. tie taškai nepavaizduoti ir turėtų būti į apačią nuo atkarpos $A'B'$), **išmatuoti atkarpos AB analogo – atkarpos $A''B''$ – ilgį**, kuris ir bus ieškomas dydis x arba pakankamai artimas jam (atkarpų ir kampų matavimo bei atidėjimo paklaidų ribose).

Tai bus **uždavinio sprendimas imitacinio modeliavimo būdu**, kuris skiriasi nuo analizinio tuo, jog mes vietoje to, kad ieškotume priklausomybių tarp nagrinėjamų dydžių x , a , α , β , γ bei δ ir, naudodamiesi jomis, apskaičiuotume ieškomą dydį x , **suimituojame mums prieinamame upės krante mus dominančią situaciją**, esančią mums nepasiekiamame upės krante, ir **išmatuojame (įvertiname) imitavimo metu gautą rezultatą**, atitinkantį mūsų ieškomo nežinomojo x reikšmę.

Čia pateiktas pavyzdys yra **fizinio imitavimo** pavyzdys, nes mes, spręsdami uždavinį, sukūrėme mus dominančios situacijos **fizinį imitacinį modelį** – atidėjome mus dominančios atkarpos analogą $A''B''$ „fizinėje erdvėje“ – mums prieinamoje pievelėje šiame upės krante.

Kitas fizinio imitavimo ir eksperimentų su fiziniu imitaciniu modeliu pavyzdys – eksperimentai su įvairių formų kūnais aerodinamiame vamzdyje, kuriame **mus dominančių kūnų formas imituoja aerodinamiame vamzdyje išbandomų objektų formos, o mus dominančių kūnų judėjimą ore ir ryšium su tuo atsirandančias aerodinamines jėgas imituoja aerodinamiu vamzdžiu pučiamo**

oro judėjimas ir oro srauto poveikis į vamzdyje patalpintus objektus – realių nagrinėjamų objektų fizinius modelius. Kai bandomųjų objektų formos yra sudėtingos, išmatuoti tų poveikių charakteristikas yra žymiai paprasčiau, negu jas net apytiksliai apskaičiuoti.

Tačiau galima kurti ne tik fizinius, bet ir **matematinis imitacinius modelius, operuojant ne „fizinėje“, o „matematinėje erdvėje“** (žiūr. 1 pav. šios mokymo priemonės „Įvade“). Ir tai yra net žymiai patogiau ir greičiau, nes **patį imitavimo algoritmą galima suprogramuoti ir realizuoti kompiuteryje.**

Tokių matematinį imitacinį modelį mes kursime šios mokymo priemonės 1.14. skyriuje, imituodami kirpyklos veiklą, o vėliau (antrojoje šios mokymo priemonės dalyje) nagrinėsime įvairias imitacinio modeliavimo sistemas: Foresterio dinamines sistemas (FDS) ir tokių sistemų imitacinių modelių kūrimo bei eksperimentavimo su tais modeliais kompiuterinę sistemą Powersim, Buslenkos agregatyvines sistemas (BAS), masinio aptarnavimo sistemų funkcionavimo imitavimo modelių kūrimo ir eksperimentavimo sistemą GPSS ir pan.

Ypač plačiai matematiniai imitaciniai modeliai ir imitacinio modeliavimo metodai taikomi nagrinėjant stochastines sistemas ir stochastinius procesus, apie ką bus detaliau kalbama antrojoje šios mokymo priemonės dalyje, o taip pat ir 1.14. pirmosios dalies skyriuje.

Imitacinis modeliavimas gali būti naudojamas ne tik kaip sistemų analizės, bet ir kaip jų veiklos optimizavimo priemonė, todėl galima kalbėti ne tik apie **analizinius sisteminius modelius** bei apie **analizinius optimizacinius modelius**, bet ir apie **optimizavimo uždavinių sprendimą analiziniais metodais bei imitacinio modeliavimo priemonėmis.** Apie tai bus rašoma 1.15. skyriuje ir antrojoje šios mokymo priemonės dalyje.

Imitaciniai sistemų modeliai gali būti **vidiniai** ir **išoriniai**. Išoriniais imitaciniais sistemų modeliais dažnai vadinami ir vidiniai imitaciniai modeliai, kai pastarieji naudojami išorinių modelių vaidmenyje (žiūr. 1.12. skyrių).

Eksperimentai su imitaciniais modeliais taip pat gali būti išoriniai ir vidiniai, ir mišrūs. Jei eksperimentuojant su imitaciniu modeliu (nesvarbu, ar vidiniu, ar išoriniu) keičiamos tik kai kurios išorinės modelio charakteristikos, pavyzdžiui, modelio įėjimų trajektorijos, ir žiūrima, kaip tai atsiliepia į kitas išorines jo charakteristikas, tai toks eksperimentas vadinamas išoriniu. Jei eksperimentuojant su vidiniu imitaciniu modeliu keičiama modelio struktūra ir/ar sudėtis, tai tokie eksperimentai vadinami vidiniais. Mišriuose eksperimentuose keičiamos kaip išorinės, taip ir vidinės modelio charakteristikos.

Kaip ir analiziniai sisteminiai modeliai, imitaciniai modeliai gali būti deskriptiniai ir normatyviniai.

Deskriptiniai imitaciniai modeliai imituoja realiai egzistuojančių sistemų funkcionavimą ir naudojami kaip tokių sistemų veiklos analizės priemonė.

Normatyviniai imitaciniai modeliai imituoja projektuojamų bei suprojektuotų, bet dar nesukurtų sistemų būsimą funkcionavimą ir naudojami naujų sistemų bei procesų projektavime, sukurtų projektų tikrinime, jau turimų sistemų tobulinime.

Jau egzistuojančių sistemų bei procesų tobulinime ir projektų optimizavime gali būti naudojami ir normatyviniai, ir deskriptiniai imitaciniai modeliai, svariai papildantys analizinių optimizacinių ir analizinių sisteminių modelių bei analizinių optimizavimo metodų (algoritmų) taikymą.

Imitaciniai modeliai kartais gali būti ir **grynai matematiniai**, tačiau tai būna retai. Dažniausiai imitaciniai modeliai būna **informaciniai** – analizinių matematinių ir

informacinių modelių siaurąją prasmę bei fizinių modelių junginiai, o taip pat **algoritminiai modeliai**.

Imitacinį modeliavimą ir jo metu gautų rezultatų interpretavimą labai palengvina ir pagyvina **multimedia** priemonių vartojimas, leidžiantis paversti imitacinį modeliavimą (eksperimentavimą su imitaciniu modeliu) savo rūšies **kompiuteriniu žaidimu**. Juk **kompiuteriniai žaidimai irgi imituoja įvairias virtualias situacijas**, kurias stebėdamas, žaidėjas priima sprendinius ir stengiasi valdyti žaidimo eigą, eksperimentuodamas su žaidimo imitaciniu modeliu, t. y. sąveikaudamas su tuo modeliu per žaidėjui patogų interfeisą.

Kompiuterinių žaidimų ir dialogo su kompiuterine sistema idėja naudojama ne tik žaidimuose, bet ir rimtuose matematiniuose bei inžinieriniuose tyrimuose.

Pavyzdžiui, daug lengviau ir patogiau dirbti su projektuojamojo lėktuvo imitaciniu modeliu, imituojančiu lėktuvo išbandymus įvairiuose skrydžio režimuose, kai eksperimentuotojas mato displėjaus ekrane įvairius viražus darantį bei į įvairias avarines situacijas patenkančią lėktuvą (t. y. imituojamo lėktuvo kompiuterinį vaizdą), o to imitacinio modelio valdymui gali naudotis displėjaus ekrane vaizduojamu lėktuvo valdymo pultu.

Gal tik nedaugeliui skaitytojų teko paeksperimentuoti su lėktuvo išbandymų imitaciniu modeliu, tačiau daugumai, matyt, teko naudotis tokio pat tipo imitaciniu modeliu, imituojančiu realų kalkuliatorių, t. y. kompiuterio displėjaus ekrane vaizduojamu virtualiu kalkuliatorium, su kuriuo, naudojantis „pele“, galima atlikti įvairias aritmetines ir kitas operacijas lygiai taip pat, kaip ir su realiu kalkuliatoriumi.

Skirtumas čia tik imitacinių modelių paskirtyje: pirmasis skirtas lėktuvo projekto išbandymui, o antrasis – kalkuliatoriaus modeliavimui, leidžiančiam vartotojui **naudotis virtualiu kalkuliatorium vietoj realaus**, t. y. bendrauti su kompiuteriu, vykdančiu matematinės operacijas, ne tiesiogiai, o **per virtualinę aplinką** – virtualinį kalkuliatorių – kalkuliatoriaus imitacinį modelį, turintį **grafinį interfeisą** su vartotoju – kalkuliatoriaus atvaizdą displėjaus ekrane, to virtualinio kalkuliatoriaus klavišus – piktogramas, imituojančias realius klavišus ir jų veikimą.

Labai dažnai imitaciniai modeliai vartojami **dalykiniuose žaidimuose**, kuriuose **žmonės imituoja įvairių pareigūnų veiklą** (tame tarpe gali imituoti ir savo veiklą) [131], kurią matematiškai aprašyti yra sunku ar net neįmanoma. Tokiais atvejais dalykiniuose žaidimuose **sujungiamas matematinis ir fizinis imitavimas**: kompiuteris pagal iš anksto sudarytą imitacinio modeliavimo programą **imituoja įvairias situacijas**, o dalykiniame žaidime dalyvaujantys žmonės, analizuodami tas situacijas, **imituoja atitinkamų sprendinių priėmimo procesus**, įvesdami į kompiuterį atitinkamą informaciją, kurią apdorojęs kompiuteris **imituoja priimto sprendinio pasekmes**.

Plačiau apie imitacinį modeliavimą galima pasiskaityti knygose [132, 133, 134, 135, 136, 32].

1.13.3. Eksperimentų su matematiniais modeliais taikymas hipotezių tikrinime

Nagrinėdami fizinius, ekonominius, ekologinius bei socialinius procesus sudėtingai organizuotose sistemose, galime pastebėti tas ar kitas priklausomybes bei dėsningumus, tačiau **dėl tų sistemų sudėtingumo ne visuomet iškart sugebame surasti bei suprasti sistemoje veikiančius vidinius mechanizmus, suvokti pastebėtų dėsningumų bei priklausomybių priežastis ir sudaryti pakankamai**

adekvačius tikrovei sistemos ir joje vykstančių procesų **analizinius kauzalius modelius**.

Tokiais atvejais sudėtingą sistemą galima tirti, kaupiant ir apdorojant **statistinę informaciją**, nustatant koreliacinius ir regresinius ryšius bei kuriant **statistinius modelius**. Ekonomikoje tokie modeliai vadinami **ekonometriniais**. Apie juos bus kalbama šios mokymo priemonės 1.14.12. skyrelyje. **Statistinė informacija ir statistiniai modeliai** – labai svarbus informacijos, reikalingos sistemos pažinimui bei supratimui, šaltinis, **padedantis tyrėjui susiorientuoti, į ką pirmoje eilėje reikėtų atkreipti dėmesį**, kokius klausimus iškelti, kokius papildomus tyrimus atlikti.

Bet **statistinės priklausomybės**, nors ir atkreipia į save tyrėjo dėmesį, tiesiogiai **dar neatskleidžia priežastinių ryšių** ir jau minėtų vidinių mechanizmų, kurių dėka tie ryšiai bei priklausomybės atsiranda. **Statistinių tyrimų rezultatai iškelia žymiai daugiau klausimų negu duoda atsakymų**. Naujų klausimų iškėlimas nėra blogas dalykas, bet, kad gautume atsakymus į tuos klausimus, reikalingi papildomi statistiniai tyrimai, o kartais – net aktyvūs natūriniai eksperimentai, kas ne visada įmanoma, beveik visada reikalauja nemažai papildomų lėšų ir laiko, neretai – rizikos, apie ką jau buvo kalbėta ankstesniuose skyreliuose.

Statistinius tyrimus galima ir tikslinga papildyti sudėtingų sistemų imitacinio modeliavimo ir gautų rezultatų sisteminės analizės metodais, sintezuojant juos į **statistinio imitacinio modeliavimo ir sisteminės statistinės analizės metodus**. Šie metodai leidžia didelę dalį sistemos tyrimui reikalingų natūrinių eksperimentų pakeisti matematiniais eksperimentais su imitaciniais modeliais, o kartais ir visai išvengti aktyvių natūrinių eksperimentų, apsiribojant jau sukaupta bei papildomai kaupiama statistine informacija, kurią generuoja pats gyvenimas bei imitaciniai modeliai. Apie tai bus rašoma šios mokymo priemonės 1.14. skyriuje, skirtame statistiniam modeliavimui.

Sisteminės analizės metodų taikyme šiuo atveju galime išskirti šiuos **etapus**:

1) pastebėtų dėsningumų bei statistinių priklausomybių **loginė kauzalinė analizė**, tuos dėsningumus bei priklausomybes paaiškinančių **hipotezių paieška** ir tokių **hipotezių formulavimas**;

2) suformuluotų **hipotezių sisteminė ir loginė analizė**, logiškai neprieštaringų nagrinėjamos sistemos ir joje vykstančių procesų **hipotetinių koncepcinių modelių variantų konstravimas**;

3) **matematinų (tame tarpe ir imitacinių) modelių**, atitinkančių sukonstruotus koncepcinių modelių variantus, **kūrimas** ir jų programinis realizavimas;

4) **papildomos statistinės informacijos**, reikalingos sukurtų modelių identifikavimui bei **hipotezių patikrinimui, rinkimas** bei paruošimas;

5) **eksperimentavimas su matematiniais modeliais**, geriausių hipotetinių variantų atrinkimas, **hipotezių patikslinimas** ir imitacinio sistemos modelio **tobulinimas**;

6) nagrinėjamos sistemos ir joje vykstančių procesų **evoliucijos prognozavimas**, naudojantis patikslinta hipoteze ir matematiniu modeliu, imituojančiu nagrinėjamos sistemos funkcionavimą;

7) **prognozių palyginimas** su realia įvykių eiga, **hipotezių patvirtinimas bei patobulinimas** arba iškeltų hipotezių paneigimas bei naujų hipotezių paieška, t. y. grįžimas į pirmąjį etapą.

Išvardintų etapų bei jų ciklą metu palaipsniui formuojasi ne tik kauzalinis sistemos modelis, joje veikiančių mechanizmų bei priežastinių ryšių suvokimas, bet ir sukuriamas gana efektyvus sistemoje vykstančių procesų prognozavimo bei valdymo instrumentas, nes sudarytą ir patikslintą sistemos matematinį (tame tarpe

ir imitacij) modeli galima taikyti priimamų valdymo sprendinių pasekmių prognozavimui bei geresnių tų sprendinių variantų atrinkimui.

Toki imitacinių matematinių modeli panaudojimą žymiai palengvina specialiūs programinio serviso sistemos, reikalingos eksperimentavimui su imitaciniu modeliu dialogo su kompiuteriu režime, sukūrimas ir įdiegimas. Yra ir tokių imitacinio modeliavimo sistemų, kurios **automatizuoja ne tik eksperimentavimą su imitaciniais modeliais, bet ir pačių modelių kūrimą.**

Išsakytas mintis apie imitacinio modeliavimo taikymą hipotezių tikrinime pailiustruosiu labai paprastu **imitacinio modeliavimo taikymo hipotezių tikrinime pavyzdžiu**, paimtu iš elementaraus fizikos kurso, kur, atrodo, viskas turėtų būti visiškai aišku. Ir jei net čia imitacinis modeliavimas leidžia surasti kai ką naujo, tai tuo labiau jis naudingas, nagrinėjant sudėtingas ekonomines, organizacines, ekologines ir pan. sistemas [137]. Vertinga ir ryšium su tuo kilusi diskusija.

Daugelyje fizikos vadovėlių nagrinėjamas uždavinys apie nesuspaudžiamo idealaus („saus“) skysčio išteklėjimo greitį v iš indo, turinčio skerspjūvio plotą S , per angą indo dugne, turinčią skerspjūvio plotą σ , kai to skysčio paviršiaus nuotolis nuo angos lygus skysčio paviršiaus nuotoliui h nuo indo dugno ir pats skystis inde iki angos atidarymo nejudėjo.

Priėmus hipotezę, kad „sausas“ skystis, neturėdamas klampumo ir trinties, tik išteka pro angą, bet pačiame inde ir toliau nejudą, išvedama formulė $v = \sqrt{2gh}$, kur g – kūno laisvo kritimo Žemės traukos lauke prie Žemės paviršiaus beorėje erdvėje pagreitis.

Tokią skysčio išteklėjimo greitį v formulę esame gavę ir mes 1.4.4. skyrelyje.

Tačiau kai kuriuose fizikos vadovėliuose (pavyzdžiui, kad ir tokiam populiariame kaip «Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения». Издание третье, переработанное. Москва: «Мир», 1978) ši formulė „patikslinama“: **priimama hipotezė, kad „sausas“ skystis ne tik išteka, bet ir pačiame inde juda**, po to, naudojantis skysčio nesuspaudžiamumo savybe, apskaičiuojamas to judėjimo inde greitis $v_1 = v \frac{\sigma}{S}$, kur v – skysčio išteklėjimo greitis, ir, naudojantis

Bernulio formulė $\rho gh + \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}$, išvedama to greičio formulė $v = \left(1 - \frac{\sigma^2}{S^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2gh}$.

Patikrinsime šią (antrąją) hipotezę, kurią kai kurie fizikos ir hidromechanikos vadovėliai laiko tikslesne negu pirmoji. Tokiam patikrinimui pasinaudosime imitacinio modeliavimo metodu.

Tarkime, jog skysčio stulpo aukštis inde iki momento $t=0$ prieš angos atidarymą buvo lygus $h(0)=H$. Kadangi tuo metu skystis tikrai nejudėjo, tai jo kinetinė energija buvo lygi 0, ir visą jo mechaninę energiją sudarė potencinė energija $W^{(p)}(0)=0,5/gSH^2$, kur ρ – skysčio tankis.

Tarkime, jog momentu $t=t_0=0$ anga indo dugne buvo atidaryta ir per labai trumpą laiko intervalą Δt išteko labai mažas skysčio tūris $\Delta V = \sigma^* \bar{v} \Delta t$, kur $\bar{v}$ – vidutinis tame laiko intervale Δt skysčio išteklėjimo iš indo greitis $\bar{v} = \bar{v}(0, 0 + \Delta t)$, o $\sigma^* = \varepsilon \cdot \sigma$, kur ε – ištekančio skysčio čiurkšlės skerspjūvio ploto suspaudimo koeficientas, kuris priklauso nuo kampo, susidarančio tarp ištekančio skysčio čiurkšlės simetrijos ašies ir indo sienelių, gali keistis nuo 0,5 iki 1 (žiūr. [138, 139, 140, 141]), σ – angos indo dugne skerspjūvio plotas. Kad skysčio čiurkšlė ištekdama tikrai susiaurėja, nesunku įsitikinti, stebint vandens išteklėjimą iš atidaryto krano. Apie to susiaurėjimo priežastis bus pasakojama šiame skyrelyje šiek tiek vėliau.

Per tą mažą laiko intervalą Δt skysčio stulpo aukštis inde sumažės mažu dydžiu $|\Delta h| > 0$, kuri surasime naudodamiesi idealaus skysčio nesuspaudžiamumo dėsniu $|\Delta h| \cdot S = \sigma^* \cdot \bar{v} \cdot \Delta t$, iš kurio išplaukia, jog $|\Delta h| = \sigma^* \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \cdot S^{-1}$. Ryšium su tuo sumažės skysčio masė inde nuo M_1 iki $M_2 = M_1 - \Delta M_1 = \rho(S(H - |\Delta h|))$ ir likusio inde skysčio potencinė energija, kurios sumažėjimas bus lygus $\Delta W^{(p)} = W^{(p)}(0) - W^{(p)}(\Delta t) = 0,5/Sg[H^2 - (H - |\Delta h|)^2] = 0,5/Sg(2H - |\Delta h|) \cdot |\Delta h|$.

Jei vadovautumės pirmąją hipoteze ir energijos tvermės dėsniu, tai šis potencinės energijos sumažėjimas turėtų virsti ištekusio skysčio kinetine energija $0,5 \cdot \Delta M_1 \cdot v^2 = 0,5 \cdot \rho \cdot \sigma^* \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \cdot v^2 = 0,5 \cdot \rho \cdot |\Delta h| \cdot S \cdot v^2$, iš kur, artindami Δt prie 0, gautume $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(0, \Delta t) = v$ ir formulę $v = \sqrt{2gH}$.

Jei vadovautumės antrąja hipoteze, tai gautume, jog iš minėtojo potencinės energijos sumažėjimo per laiko intervalą Δt turėtų atsirasti ne tik ištekęsio skysčio kinetinė energija $0,5 \cdot |\Delta h| \cdot S \cdot v^2$, bet ir likusio inde ir jame judančio skysčio kinetinė energija $\frac{M_2 v_1^2}{2} = \frac{S(H-|\Delta h|)}{2} v^2 \cdot \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2$, kuri laiko atkarpai Δt artėjant prie 0, artėtų ne prie 0, o didėtų, artėdama prie pastovaus teigiamo dydžio, lygaus $\frac{1}{2} \cdot g \cdot S \cdot H^2 \cdot \left(\frac{S}{\sigma^*}\right)^2 - 1$, kas **prieštarauja energijos tvermės dėsniui**. Juk, esant mažai Δt reikšmei ir jai artėjant

prie 0, skysčio kinetinės energijos atsiradimo šaltinis, būdamas lygus $\Delta W^{(p)} = 0,5/Sg(2H-|\Delta h|) \cdot |\Delta h|$, būtų mažas dydis, artėjantis prie 0, kai tuo tarpu esančio inde skysčio kinetinė energija, jei skystis inde judėtų, būtų teigiamas didėjantis dydis, t. y. kai $H \gg 0$, tai to skysčio kinetinė energija turėtų būti gana didelis dydis, lyg ir atsirandantis „iš nieko“. Tą „iš nieko“ atsirandanti idealaus skysčio, esančio inde, kinetinė energija didėtų, ne tik didėjant H , kas yra natūralu, bet ir σ artėjant prie S , virsdama be galo dideliu dydžiu, kai $\sigma=S$, kas yra niekaip nepaaiškinama ir prieštarauja praktikai bei logikai.

Taigi, priėmę hipotezę, kad teisinga iki tol stovėjusio idealaus skysčio ištekejimo iš indo greičio v „patikslintoji“ formulė $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}}$ ir kad idealus skystis inde, jam ištekant iš indo, irgi pradeda

judėti ir juda greičiu, lygiu skysčio lygio slūgimo inde greičiui, mes gauname prieštarą energijos tvermės dėsniui. Tai verčia suabejoti antrosios hipotezės teisingumu.

Šią hipotezę apie iki tol stovėjusio inde idealaus skysčio pajudėjimą, jam pradėjus tekėti iš indo, ir tolimesnio jo judėjimo inde greičiu, lygiu jo lygio **slūgimo greičiui**, skysčiui toliau ištekant, galima būtų bandyti gelbėti, atsisakant mano čia kritikuojamos idealaus skysčio ištekejimo iš indo,

kuriame tas skystis anksčiau stovėjo, „patikslintos“ greičio formulės $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}}$.

Tuomet, naudodamiesi energijos tvermės dėsniu, gautume, kad pradinis skysčio ištekejimo iš indo greitis būtų lygus 0 ir tik vėliau, palaipsniui didėdamas, skysčio ištekejimo greitis pasiektų maksimalų dydį. Tai prieštarauja eksperimentų su skysčiais, kurių savybės artimos idealaus skysčio savybėms, rezultatams, nes tokie skysčiai išteka mažėjančiu greičiu.

Įrodysiu tą prieštarą, t. y. įrodysiu, kad iš energijos tvermės dėsno ir hipotezės apie ištekančio nesuspaudžiamo idealaus skysčio judėjimą inde greičiu, lygiu jo slūgimo greičiui, išplaukia, jog pradinis skysčio ištekejimo greitis turėtų būti lygus 0 ir tik po to, didėjant Δt , turėtų palaipsniui didėti.

Angos atidarymo momentu $t=0$ idealus skystis inde turės tik potencinę energiją, kuri bus lygi $W^{(p)}(0) = \frac{SH^2g}{2}$. Praėjus mažam laiko intervalui Δt po angos atidarymo, skysčio lygis inde nuslūgs ir taps lygus $h(0+\Delta t) = H-|\Delta h|$, kur $|\Delta h|$ – mažas dydis. Pro angą indo dugne per laiką Δt suspės iškelti $|\Delta h| \cdot S$ tūrio vienetų nesuspaudžiamo skysčio. Tarkime, kad intervalo Δt pabaigoje tas ištekęs skystis

turės greitį $v(0+\Delta t) = v$ ir todėl turės kinetinę energiją $\frac{|\Delta h|Sv^2}{2}$. Priėmę hipotezę, kad idealus skystis

inde juda greičiu $\frac{\sigma^*}{S} v$, gautume, kad per laiką Δt likusi inde skysčio masė $S(H-|\Delta h|)$ turės įgyti

kinetinę energiją $\frac{S(H-|\Delta h|)(\sigma^*)^2}{2S^2} v^2$. Atsižvelgdami, į tai, kad intervalo Δt pabaigoje likusio inde

skysčio potencinė energija taps lygi $W^{(p)}(0+\Delta t) = \frac{S(H-|\Delta h|)^2g}{2}$, o taip pat į tai, kad idealiame skystyje dėl trinties nebuvimo skystis neatlieka jokio darbo, gautume tokį energijos balansą, išplaukiantį

iš energijos tvermės dėsno: $\frac{SH^2g}{2} = \frac{S(H-|\Delta h|)^2g}{2} + \frac{S(H-|\Delta h|)(\sigma^*)^2}{2} v^2 + \frac{S|\Delta h|}{2} v^2$. Todėl

ištekančio skysčio greitis, praėjus Δt laiko vienetų nuo angos atidarymo pradžios, turėtų būti lygus

$$v(0+\Delta t) = \frac{\sqrt{H^2 g - (H - |\Delta h|)^2 g}}{\sqrt{(H - |\Delta h|) \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2 + |\Delta h|}} = \frac{\sqrt{(2H - |\Delta h|)g |\Delta h|}}{\sqrt{H \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2\right] |\Delta h|}}.$$

Nesunku įsitikinti, kad kai $\Delta t \rightarrow 0$, tai ir $|\Delta h| \rightarrow 0$, iš kur išplauktų, jog, ką tik atidarius angą, ištekančio skysčio greitis turėtų būti lygus $v(0)=0$, ką ir reikėjo įrodyti kaip išvadą, išplaukiančią iš antrosios hipotezės, kurią gina mano oponentai ir kurią aš bandau paneigti.

Kad įvertintume, kaip didėtų ištekančio skysčio greitis pačioje išteklėjimo pradžioje, jei būtų teisinga hipotezė apie idealaus skysčio pajudėjimą ir judėjimą inde greičiu, sutampančiu su skysčio slūgimo greičiu, panagrinėsime atvejį, kai $\sigma=S$. Tuomet $\sigma^*=\sigma$, nes tuomet $\varepsilon=1$ ir $\frac{\sigma^*}{S}=1$, iš kur

gautume, jog $v(0+\Delta t) = \sqrt{\frac{(2H - |\Delta h|)g |\Delta h|}{H}}$. Kai, praėjus kokiam tai laiko tarpui $\Delta_1 t$, skysčio lygis inde

nuslūgtų labai mažu dydžiu, pavyzdžiui, $|\Delta_1 h| = 10^{-6} H$, tai gautume, $v(0+\Delta_1 t) = 10^{-3} \sqrt{(2 - 10^{-6}) H g}$, o kai, praėjus šiek tiek didesniai laiko tarpui $\Delta_2 t$, skysčio lygis inde nuslūgtų, pavyzdžiui, dydžiu $|\Delta_2 h| = 10^{-4} H$, tai gautume, $v(0+\Delta_2 t) = 10^{-2} \sqrt{(2 - 10^{-4}) H g}$. Kaip matome, galiojant antrajai hipotezei ir didėjant labai mažam dydžiui Δt bei mažėjant skysčio aukščiui h , ištekančio skysčio greitis $v(0+\Delta t)$ turėtų palaipsniui didėti.

Taigi, **priėmę, kad antroji hipotezė ir „patikslintoji“ idealaus skysčio išteklėjimo greičio formulė $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}}$ yra teisingos, gauname prieštarą energijos tvermės dėsniui, o priėmę vien**

tik antrąją hipotezę ir atmesdami formulę $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}}$, gauname prieštarą eksperimentų su

skysčiais, artimais idealiams, rezultatams.

Tai rodo, jog **antroji hipotezė ne tik nepatiksina rezultato, gaunamo vadovaujantis pirmąja hipoteze, bet iš viso negali būti teisinga, kai iki tol inde stovėjęs skystis yra idealus**, t. y. kai jis neturi klampumo ir trinties, atsirandančių veikiant sankabos jėgoms tarp realaus skysčio dalelių bei tarp tų dalelių ir indo sienelių. Idealiame skystyje pagal jo apibrėžimą tokių sankabos jėgų būti negali, ir jo molekulės, nei būdamos rimtyje, nei judėdamos, nesulimpa viena su kita. Todėl **idealus skysčio molekulės gali tik stumti viena kitą, bet negali traukti viena kitos savo judėjimo linkme**. Idealus skysčio tėkmės linijos gali atsirasti tik molekulių judėjimo inercijos dėka, o ne dėl sankabos tarp jų.

Apibendrinami šio fizikinio pavyzdžio nagrinėjimo rezultatus, galime padaryti išvadą, jog **matematinis modeliavimas leidžia pagrįstai atmesti plačiai paplitusią hipotezę apie idealaus skysčio, prieš tai stovėjusio inde, pajudėjimą ir judėjimą, skysčiui ištekančiam iš indo pro angą dugne**. Tai reiškia, jog idealiam skysčiui ištekančiam iš indo, kuriame jis iki tol stovėjo, pats skystis inde neturėtų judėti, o turėtų tik slūgti jo lygis, tame inde esančiam skysčiui neįgyjant kinetinės energijos.

Patikrinti šią hipotezę natūriniais eksperimentais ne taip jau paprasta, nes realūs skysčiai skiriasi nuo idealių: jiems būdingas ir klampumas, ir trintis. Tačiau egzistuoja realūs skysčiai, kurių savybės gana artimos hipotetinėms idealaus skysčio savybėms. Tokiu skysčiu, pavyzdžiui, gali tapti helis, kai jo temperatūra priartėja prie absoliutaus nulio ir skystas helis įgyja supertekamumo savybę. **Kai kurie eksperimentai su tokiu heliu patvirtina mano ginamą hipotezę, kad idealus skystis gali slūgti, neįgydamas kinetinės energijos, bent jau neprieštarauja jai**. Pavyzdžiui, kai helio temperatūra tampa žemesnė nei 2,17°K, jame atsiranda komponentė He II, kuri pasižymi supertekamumu ir gali „pratekėti“ per normalųjį skystą helį He I, nesąveikaudama su juo. Helyje He II galima stebėti du nepriklausomus bangų tipus, pernešančius impulsą (slėgį) ir energiją (temperatūrą), nesąveikaujant su aplinkui esančiu He I.

Apie kitus, žymiai paprastesnius ir daugeliui gerai žinomus eksperimentus, patvirtinančius čia mano pateiktą **hipotezę apie idealaus skysčio galimybę slūgti, neįgyjant kinetinės energijos, bei galimybę be nuostolių perduoti impulsą ir energiją**, papasakosiu šiek tiek vėliau.

Formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2}}$ galėtų būti teisinga idealiam skysčiui tik tuo atveju, kai skystis inde

jau pačioje proceso pradžioje turėtų greitį $v_1 = \frac{\sigma}{S} \left(1 - \frac{\sigma^2}{S^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2gh} = \left(\frac{S^2}{\sigma^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2gh}$ ir todėl turėtų

ne tik potencinę, bet ir kinetinę energiją. Taip galėtų būti tuomet, kai mūsų nagrinėjamas indas būtų vertikalus vamzdis, turintis skerspjuvio plotą, lygų S , bei angą dugne, turinčią plotą σ , ir į tą vamzdį per kiekvieną laiko intervalą Δt iškėtų $v_1 S \Delta t$ kubinių vienetų skysčio, turinčio greitį v_1 . Tada skysčio ištekėjimo iš vamzdžio per angą jo apačioje greitis v ir skysčio lygio vamzdyje aukštis h būtų ištekančio į indą skysčio kiekio ir iškėjimo greičio v_1 didėjančios funkcijos. Didėjant ištekančio į vamzdį skysčio greičiui v_1 , kiltų skysčio lygis h vamzdyje ir kartu didėtų skysčio ištekėjimo greitis v . Esant tam tikram skysčio iškėjimo greičiui v_1^* , t.y., per kiekvieną laiko vienetą išeiktų po $v_1^* S$ tūrio vienetų skysčio, nusistovėtų pusiausvyra (balansas tarp ištekančio ir ištekančio skysčio kiekių). Tai atsitiktų tada, kai

skysčio stulpo aukštis h vamzdyje pasiektų lygį $h^* = \frac{(v_1^*)^2}{2g} \left[\left(\frac{S}{\sigma^*}\right)^2 - 1 \right]$. Tuomet ištekančio skysčio greitis taptų lygus $v^* = v_1^* \frac{S}{\sigma^*}$ ir dydis v^* tenkintų formulę $v^* = \sqrt{\frac{2gh^*}{1 - \frac{\sigma^*}{S}}}$.

Šią išvadą taip pat galima patikrinti, pasitelkiant imitacinį modeliavimą. Sudarius atitinkamą programą, galima stebėti kompiuterio displejaus ekrane, kaip keičiasi skysčio stulpo aukštis h ir ištekėjimo greitis v , mums keičiant iškėjimo greitį v_1 , t.y. naudojantis imitaciniu modeliu galima padaryti matematinį eksperimentą, gana panašų į natūrinį eksperimentą, ir įsitikinti čia pateiktos išvados teisingumu.

Visa tai patvirtina, kad **eksperimentai su matematiniais modeliais – naujas galingas instrumentas, žymiai išplečiantis matematikos taikymo sritį.**

Gaila tik, kad **ne visi tai jau suspėjo suprasti ir dar nesugeba rimtai žiūrėti į imitacinio modeliavimo rezultatus ir iš jų išplaukiančias išvadas.** Gana dažnai, kai tos išvados nesutampa su nusistovėjusia tradicine nuomone ar yra kai kam nepageidautinos, jos yra atmetamos, net nepabandžius įsigilinti į jas ir įsitikinti jų teisingumu ar argumentuotai paneigti.

Taip, pavyzdžiui, atsitiko šios mokymo priemonės autoriui, kai jis 1991 m., pastebėjęs, kad Lietuvos ekonominę ir socialinę raidą bandoma pasukti ne pačiu racionaliausiu keliu, pabandė imituoti įvairius tos raidos variantus ir, išanalizavęs imitacinio modeliavimo rezultatus, pateikė savo išvadas LR Aukščiausios Tarybos ir Vyriausybės vadovams.

Atsižvelgdamas į tuomet susiklosčiusią labai palankią Lietuvai ir jos politiniams vadovams politinę situaciją, į didžiulį visuomenės vieningumą ir pasitikėjimą Sąjūdžiu, į tos visuomenės didžiosios dalies pasiryžimą pasiaukojančiai dirbti atsikuriančios Lietuvos labui, į atsiradusią galimybę racionaliai tvarkyti ir panaudoti tikrai nemažą turtą, kurį buvo sukoncentravęs tarybinės valdžios aparatas, suvalstybindamas beveik viską, aš siūliau protingai pasinaudoti susiklosčiusia situacija ir atsiradusiomis galimybėmis, pasitelkiant Lietuvos visuomenę ir, pirmoje eilėje, jos intelektualiąją dalį. Kartu bandžiau perspėti, kad tuo metu jau pradėtoji staigi ir netvarkinga privatizacija nepagrįstai žemomis kainomis, neįvykdžius viso turto kruopščios inventorizacijos ir jo tikrosios vertės nustatymo, neišvengiamai iššauks to turto grobstymą ir išvaistymą, nežabotą palūkanų normos augimą ir didžiulę infliaciją, dalies įmonių bankrotą, daugumos gyventojų gyvenimo lygio nuosmukį, bedarbių ir nusikalstamumo augimą nedidelės grupelės žmonių nepagrįstai staigaus praturtėjimo fone. Bandžiau taip pat įrodyti, kad laisvoji rinka ir konkurencija (į kurias tuometinis premjeras G. Vagnorius dėjo didžiules viltis ir laikė panacėja nuo visų bėdų) tampa galingais progreso varikliais ir reguliatoriais tik tada, kai jau sukurta atitinkama įstatyminė bazė ir įstatymų vykdymą užtikrinančios struktūros, kada konkurentai gali lenktyniauti ir laimėti tik „kildami aukštyn“ ir geriau tenkindami vartotojų poreikius, o jei tokios sąlygos dar nesudarytos (o jos tuomet dar nebuvo sudarytos ir nėra pilnai sudarytos net iki šiol), tai laisvoji rinka ir konkurencija veda ne į progresą, o į nuosmukį, į nusikalstamumo augimą, į bandymus laimėti konkurencinę kovą, kenkiant vienas kitam, sprogdinant ir žudant vienas kitą. Tokioje konkurencinėje kovoje dažniausiai laimi blogis prieš gerį, nes blogio kovos arsenalas visuomet mažiau suvaržytas moralės normomis.

Mano gana ilgame (beveik 14 puslapių spausdinto teksto, žiūr. 1.14.12.2.1.-jį šios mokymo priemonės skyrelį) laiške, įteiktame Sausio 13-osios Brolijos vardu, kurios valdybos nariu aš tuomet buvau ir su kurios kitais nariais buvau tą laišką aptaręs, buvo gana daug įvairių, kaip man atrodo, gerai argumentuotų pasiūlymų, prognozių ir perspėjimų. Tačiau, gaila, tas laiškas nebuvo tinkamai įvertintas bei suprastas, ir pragaištinga ekonominė politika buvo tęsiama toliau vis spartėjančiu tempu. Tos politikos pasekmės gana greitai pajuto visos Lietuvos piliečiai ir tebejunta iki šiol. **Unikali, matyt, jau niekada nebepasikartosianti istorinė galimybė liko nusikalstamai neišnaudota, visuomenės entuziazmas išblėso, pavirsdamas nusivylimu ir abejingumu. Šis moralinis ir psichologinis nuostolis, iššaukęs visuomenės apatiją, kainavo, kainuoja ir kainuos mūsų visuomenei, mano nuomone, net daugiau negu sukaupto valstybinio turto išgrobstymas ir iššvaistymas, nes jo pasekmės yra žymiai rimtesnės, skaudesnės ir ilgalaikiškesnės. Kas atsakys prieš istoriją už šį nusikaltimą?**

Dabar, kai praėjo tiek metų, skaitydamas tą laišką, kiekvienas gali įsitikinti, kiek teisingos buvo prognozės, gautos, modeliuojant Lietuvos ekonominės ir socialinės raidos variantus. Atrodytų, kad skaudžios pamokos turėjo išmokyti Lietuvos vadovus ne taip jau atmestinais žiūrėti į matematinių eksperimentų rezultatus. Tačiau, gaila, taip nėra.

1997 m. pavasarį mokslinės konferencijos metu šių eilučių autorius įteikė LR Seimo pirmininkui (tam pačiam asmeniui, kuris 1991 m. buvo AT pirmininku ir kuriam buvo įteiktas ką tik minėtas pirmasis laiškas) „Lietuvos Telekomo“, „Mažeikių naftos“, „Vilniaus vandenų“ ir kitų strategiškai svarbių objektų pardavimo užsienio firmoms gana nepalankiomis Lietuvai sąlygomis pasekmių modeliavimo rezultatus. Įteikiant šiuos rezultatus, LR Seimo pirmininkui buvo mandagiai priminta, kokias liūdnas pasekmes turėjo lengvabūdiškas požiūris į 1991 m. įteiktus perspėjimus ir pasiūlymus. Kad būtų lengviau įsitikinti iš matematinio modeliavimo išplaukiančių prognozių tikslumu, pirmininkui buvo pakartotinai įteiktas ir 1991 m. laiškas (jo kopija). Tačiau ir šį kartą reikiamų išvadų padaryta nebuvo, Lietuvos žmonės greitai pajus naujų klaidų (o gal ir nusikaltimų) pasekmes.* Matyt, **kai kam asmeniškai nenaudinga sutikti su iš imitacinio modeliavimo rezultatų išplaukiančiomis išvadomis**, todėl ir ignoruojami ir tie rezultatai, ir pati modeliavimo idėja.

Žinoma, būtų visai kitaip, jei Lietuvoje būtų įvesta tokia tvarka, kad valstybės pareigūnai (net patys aukštieji) būtų personaliai atsakingi už savo sprendimų bei veiksmų pasekmes ir privalėtų asmeniškai padengti nuostolius, kurie atsiranda dėl jų klaidų bei nusikaltimų. Tuomet modeliavimas jiems taptų reikalingas. Tačiau tokios tvarkos patys aukštieji pareigūnai dabar, aišku, jau neįves, o šansas ją įvesti anksčiau, kada dar buvo tokia galimybė, negrįžtamai prarastas. Ar ne todėl, kad nebūtų pasinaudota šia galimybe, ir buvo atmesti 1991 m. mano pasiūlymai?

Nors ir apmaudu, tačiau nėra ko labai stebėtis, kad valdžios atstovai, būdami gana tolimi nuo matematikos ir jos taikymų, pasinėrę į politinius žaidimus ir galvodami, jog tai ir yra pagrindinė visos jų veiklos ir buvimo valdžioje paskirtis, dar nesugeba pakankamai rimtai žiūrėti į matematinio modeliavimo rezultatus, ypačingai, kai iš šių rezultatų išplaukiančios išvados nesutampa su jų politinėmis nuostatomis ir tikslais, o politinės sąlygos leidžia nesiskaityti su tokiomis išvadomis.

Daug nuostabiau, kad į matematinį modeliavimą kartais dar nepakankamai rimtai žiūri ir kai kurie tikslųjų mokslų atstovai, kurie, atrodo, objektyviai turėtų būti suinteresuoti mokslinės tiesos paieška ir gynimu.

1995 m. LMD XXXVI konferencijos tezių rinkinyje buvo išspausdinta mano pranešimo „Imitacinio modeliavimo taikymo hipotezių tikrinime pavyzdys“ santrauka. Tame pranešime buvo parodyta, kad net tokiuose objektyviuose moksluose kaip fizika, naudojantis matematiniu modeliavimu, galima patikrinti ir patikslinti jau, atrodo, seniai nusistovėjusias bei visuotinai pripažįstamas „tiesas“ ir įrodyti kai kurių jų abejotinumą bei nepagrįstumą. Tokios „tiesos“ pavyzdžiu buvo pasirinktas kai kuriuose aukštųjų mokyklų fizikos bei teorinės hidromechanikos vadovėliuose pateikiamas idealaus skysčio išteklėjimo greičio formulės $v = \sqrt{2gh}$ ką tik minėtasis „patikslinimas“, pakeičiant tą formulę

formule $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, kurioje h – skysčio stulpelio aukštis inde, S – indo skersinio pjūvio plotas, σ –

angos indo dugne, per kurią skystis išteka iš indo, plotas, v – ištekančio skysčio greitis, g – Žemės traukos veikiamo kūno laisvo kritimo beorėje erdvėje netoli Žemės paviršiaus pagreitis.

Remdamasis matematinio modeliavimo rezultatais ir čia ką tik aprašytais metodais, aš pabandžiau parodyti, jog hipotezė apie iki tol inde stovėjusio idealaus skysčio judėjimą inde greičiu

* Tai buvo rašyta 1998 m. pradžioje. Kaip matome dabar, ir ši prognozė, deja, išsipildė su kaupu.

$v_2 = \frac{\sigma}{S} v_1$, skysčiui ištekančiam iš indo greičiu v_1 , kai skysčio kiekis inde nėra papildomas ir jo lygis

slūgsta, yra klaidinga, kad idealaus skysčio paviršiaus slūgimas greičiu $v_2 = \frac{\sigma^*}{S} v_1$ dar nereikia

viso idealaus skysčio inde judėjimą tokiu greičiu, įgyjant atitinkamą kinetinę energiją.

Po kurio laiko aš sulaukiau nuo kai kurių gana aukštos kvalifikacijos matematikų ir fizikų gana rimtų priekaištų, jog aš, esą, spausdinąs neatsakingus straipsnius, nes, esą, negali būti, kad idealus skystis, ištekdamas pro angą, pačiame inde nejudėtų. Ir bendrai, „esą, neįmanoma, kad solidžių vadovėlių solidūs autoriai klystų tokį ilgą laiką, o jų klaidos būtų iki šiol nepastebėtos“. Į mano prašymą nurodyti, kurioje vietoje aš, jų nuomone, esu padaręs klaidą, buvo atsakyta, „jog klaidos buvimas išplaukia iš akivaizdaus išvados klaidingumo“.

Teko 1999 m. LMD XL konferencijoje daryti žymiai ilgesnį ir detalesnį pranešimą šiuo klausimu. Konferencijos metu vykusioje diskusijoje šių eilučių autorius jokių rimtų priekaištų nesulaukė, tačiau vėliau gavo pranešimą iš konferencijos darbų rinkinio redkolegijos, kad jo **straipsnis rinkinyje spausdinamas nebus**.

Pirmoji (ir pagrindinė) tokio redkolegijos sprendimo priežastis – politinė: straipsnio šešiuose puslapiuose pustrėčio šimto eilučių tekste su įvairiomis formulėmis recenzentui pavyko surasti nepilnas 25 eilutes, kuriose kalbama apie ekonominių ir socialinių procesų modeliavimo rezultatus ir šiek tiek kritiškai vertinamas tas faktas, jog aukšti mūsų valdžios pareigūnai kažkodėl praignoravo iš tų rezultatų išplaukiančias išvadas. Recenzentui tai pasirodė visiškai nepriimtina, nes, jo nuomone: „Darbe **daugiau** (pabraukta mano norint atkreipti skaitytojo dėmesį, kaip kai kurie politikuojantys „matematikai“ supranta sąvoką „daugiau“, A.Š.) kalbama apie autoriaus politines diskusijas su LRS, nei apie idealaus tekėjimo modeliavimą“.

Antroji priežastis išplaukė iš pirmosios ir pasireiškė kaip recenzento ir redkolegijos noras išvengti atsakomybės už kai kam nepageidautino ir, jų nuomone, abejotino straipsnio spausdinimą. Recenzentas, savo šešių eilučių recenzijoje sugebėjęs padaryti dvi gramatines ir dar daugiau loginių klaidų, pareiškė: „Nagėjamas (recenzijoje taip ir parašyta „nagėjamas“, A.Š.) uždavinys suformuluotas neaiškiai“. Tai irgi neatitinka tikrovės (kaip ir mano pabrauktasis „daugiau“), nes santraukoje, pateiktoje pačioje mano straipsnio pradžioje rašoma: „Straipsnyje parodyta, jog fizikos

vadovėliuose pateikiama formulė $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ netinka idealaus skysčio **ištekėjimo** greičio

apskaičiavimui ir aprašo ne to skysčio ištekėjimo, o jo **pratekėjimo** reiškinį. Pasitelkiant energijos balanso ir imitacinio modeliavimo metodus, įrodoma, jog idealus skystis nepriklausomai nuo S ir σ santykio išteka greičiu $v = \sqrt{2gh}$. Straipsnio tikslas – **parodyti, jog eksperimentai su matematiniais modeliais – efektyvus hipotezių įvairiuose moksluose tikrinimo instrumentas**“.

Tesprendžia šių eilučių skaitytojas, kas čia teisėsnis: šių eilučių autorius ar recenzentas bei leidinio redkolegija, „pasilikusi sau teisę nediskutuoti su autoriais dėl atmetų darbų publikavimo galimybių“ ir tokiu sau patogiu būdu „išsprendusi“ diskusiją apie ištekančio idealaus skysčio greičio formulę. Paskutiniu metu toks diskutavimo „metodas“ tapo gana populiarus mūsų šalyje: beveik tuo pačiu metu, kai gavau minėtąjį matematinių straipsnių rinkinio redkolegijos pranešimą, vieno gana rimto ekonominio žurnalo („Lietuvos ūkis“) redaktoriaus pavaduotojas pareiškė šių eilučių autoriui, kad, jei šis neišbrauksias iš savo 10 mašinraščio puslapių apimties straipsnio, parašyto tenkinant specialų žurnalo redakcijos užsakymą ir skirtą matematinės statistikos bei imitacinio modeliavimo taikymams ekonomikoje ir valstybės valdyme informacinės visuomenės kūrimo sąlygomis, kai kurių teiginių, nelabai suderinamų su dabar Lietuvoje vykdomomis ekonominės politikos „generaline linija“, tai redakcija negalėsianti to straipsnio spausdinti. Teko, remiantis Aristotelio posakiu, jog „Platonas – man draugas, tačiau tiesa – brangesnė“, atsiimti straipsnį, o kartu ir „išėiti“ iš užimamų pareigų statistikos departamente. Lyginant su tuo, kiek kainuodavo tiesos sakymas sovietmečiu, tai dar – gana nedidelė kaina.

Atmestasis mano straipsnis apie idealaus skysčio ištekėjimo greičio formulę buvo apsvarstytas Vilniaus Universiteto Matematinės statistikos katedros seminare. Seminaro metu paaiškėjo, jog kai kurie mano kolegos iš Matematikos ir informatikos fakulteto negali net įsivaizduoti, kaip slūgstantis idealus skystis gali nejudėti ir neįgyti kinetinės energijos, ir todėl tikrai abejoja mano straipsnio išvadų teisingumu. Manau, kad tokių abejonių gali atsirasti ir kai kuriems šios mokymo priemonės skaitytojams. Todėl laikau tikslingu pateikti dar keletą papildomų paskaičiavimų bei samprotavimų, paaiškinančių ir apginančių mano siūlomą idealaus skysčio ištekėjimo hipotezę.

Hipotezės apie iki tol stovėjusio idealaus skysčio judėjimą inde, skysčiui ištekančiam pro angą indo dugne, ir iš tos hipotezės išplaukiančios ištekančio greičio formulės $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ gynėjams aš

pasiūlyčiau, naudojantis ta formule, apskaičiuoti, skysčio ištekančio greitį v tuo atveju, kai $\sigma=S$. Nejaugi, staiga ištraukus sklendę, esančią indo dugne ir sutampančią su tuo dugnu, skystis tikrai pradės kristi su begaliniu greičiu? Čia nieko nepakeis ir perėjimas nuo σ prie σ^* , nes šiuo atveju indo sienelės bus lygiagrečios ištekančio skysčio srovei ir todėl čiaurkšlės skerspjūčio suspaudimo nebus (suspaudimo koeficientas $\epsilon=1$), iš kur išplauks, jog $\sigma^*=\sigma=S$.

Kaip matome, formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, kai $\sigma \rightarrow S$, netenkina jau minėtojo (žiūr. 1.9.1.2.

skyrelį) **atotyčio principo reikalavimų** ir jau vien todėl negali būti teisinga. Ši formulė, kaip jau buvo minėta šiame skyrelyje, galioja visai kitam atvejui – **ne iki tol stovėjusio idealaus skysčio ištekančiamui, o jo pratekėjimui**, pilant idealų skystį į indą iš viršaus greičiu v_2 pro angą, turinčią plotą S , ir skysčiui ištekančiam iš indo greičiu $v_1 = \frac{S}{\sigma^*} v_2$ pro angą dugne, turinčią plotą σ . Tuomet inde nusistovės ir bus

palaikomas pastovus idealaus skysčio stulpo aukštis $h = \frac{v_1^2 \left(1 - \frac{(\sigma^*)^2}{S^2}\right)}{2g} = \frac{v_2^2 \left(\frac{S^2}{(\sigma^*)^2} - 1\right)}{2g}$,

apskaičiuojamas, naudojantis formule $v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2}}$.

Kai $\sigma=S$, tai visas įpilamas idealus skystis iškart suspės ištekti tuo pačiu greičiu, koku jis buvo pilamas, ir skysčio stulpo aukštis h inde tuomet būtų lygus 0, o $v_1=v_2$.

Tačiau grįžkime prie klausimo, su koku greičiu iš tikrųjų pradės tekėti ir kaip tekės į beorę erdvę idealus skystis, kurio stulpo aukštis inde yra h , jei mes staiga ištrauksime sklendę, sudarančią indo dugną, kitaip tariant, koks bus idealaus skysčio ištekančio greitis v , kai $\sigma=S$?

Rasti teisingą atsakymą į šį klausimą, į kurį jau minėtoji formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ atsako

neteisingai, taip pat gali padėti imitacinis modeliavimas, t. y. matematinis eksperimentas su imitaciniu modeliu.

Tarkime, kad skysčio stulpą, kurio pradinis aukštis $h(0)=H$, sudaro molekulės, išsidėsčiusios į n horizontalių sluoksnių, kur $n = \frac{H}{d}$, o d – molekulės skersmuo. Į atmosferos slėgį p_0 , kuris skysčio paviršiuje ir angos indo dugno lygyje, kai H neviršija kelių metrų, yra praktiškai vienodas, galima nukreipti dėmesio, tuo labiau, kad beorės erdvės atveju tas slėgis būtų lygus 0.

Kol indo dugnas uždarytas, žemutinio sluoksnio molekulę aukščiau esančios molekulės slėgia jėga $F_S=(n-1)mg$, kur m – vienos molekulės masė. Pati žemutinio sluoksnio molekulę jėga $F=F_S+mg=nmg$ slėgia indo dugną, o indo dugnas atoveiksmio jėga $F_A=nmg$ veikia į molekulę. Dvi priešingos krypties lygios jėgos atsveria viena kitą, todėl jokio tos molekulės judėjimo nėra.

Staiga ištraukus dugno sklendę, atoveiksmio jėga išnyks ir žemutinio sluoksnio molekulės, kiekviena jėgos $F=F_S+mg=nmg$ veikiamą, pradės judėti žemyn pradiniu greičiu $v_0=0$ su pagreičiu $a = \frac{F}{m} = ng$. Ta jėga veiks kiekvieną žemutinio sluoksnio molekulę, kol ji bus inde, t. y. tol, kol ji nepraeis kelio, lygaus savo diametrai d .

Žinant kelią ir pagreitį, nesunku apskaičiuoti laiką Δt_1 , kurį sugaiš žemutinio sluoksnio molekulės, kol išlėks iš indo, netekusio dugno. Kadangi $d = \frac{a(\Delta t_1)^2}{2}$, tai $\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{ng}}$.

Per tą laiką Δt_1 žemutinio sluoksnio molekulės įgys greitį $v_1=0+a\Delta t_1=ng\sqrt{\frac{2d}{ng}}=\sqrt{2dng}=\sqrt{2Hg}$. Tai ir bus skysčio pirmojo sluoksnio išteklėjimo greitis.

Kaip matome, gavome tą pačią formulę $v=\sqrt{2gh}$, kuri buvo išvesta dar 1.4.3. skyrelyje, remiantis energijos tvermės dėsniu, ir dar kartą įsitikinome, kad idealaus skysčio išteklėjimo greitis nepriklauso nei nuo S , nei nuo σ , t. y. kad formulė $v=\sqrt{2gh}$ tinka, o formulė $v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{\sigma^2}{S^2}}}$ netinka iki

tol stovėjusio idealaus nesuspaudžiamo skysčio išteklėjimo greičio apskaičiavimui.

Toliau žemutinio sluoksnio molekulės judės jau vien tik Žemės traukos jėgos veikiamos (į oro pasipriešinimą mes čia neatsižvelgiame ir laikome, kaip jau buvo minėta, kad idealus skystis išteka iš indo į beorę erdvę) su pagreičiu g ir pradiniu greičiu $v_1(\Delta t_1)=\sqrt{2gH}$. Per laiką t nuo sklendės

ištraukimo jos įgys greitį $v_1(t)=v_1(\Delta t_1)+g(t-\Delta t_1)=\sqrt{2gH}+g\left(t-\sqrt{\frac{2d}{ng}}\right)=gt+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{2gH}$ ir nutols nuo

indo dugno nuotoliu $s_1(t)=\sqrt{2gH}(t-\Delta t_1)+\frac{g(t-\Delta t_1)^2}{2}=\frac{gt^2}{2}+\sqrt{2gH}\cdot t\left(1-\frac{1}{n}\right)-d\left(2-\frac{1}{n}\right)$.

Analogiškai gausime, jog antrojo nuo apačios sluoksnio molekulės išlėks iš indo jėgos $F=(n-1)mg$ veikiamos per laiką $\Delta t_2=\sqrt{\frac{2d}{(n-1)g}}$, įgydamos išlėkimo iš indo momentu $\Delta t_1+\Delta t_2$ greitį $v_2(\Delta t_1+\Delta t_2)=\sqrt{2g(n-1)d}=\sqrt{2g(H-d)}=\sqrt{2gh_2}$, kas dar kartą patvirtina formulės $v=\sqrt{2gh}$ teisingumą.

Toliau tos molekulės judės su pagreičiu g , įgydamos momentu t greitį $v_2(t)=\sqrt{2g(H-d)}+g(t-\Delta t_1-\Delta t_2)=gt+\sqrt{2gH}\left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{1}{n}\right)$ ir praeidamos nuo indo dugno atstumą $S_2(t)=\sqrt{2g(H-d)}(t-\Delta t_1-\Delta t_2)+\frac{g(t-\Delta t_1-\Delta t_2)^2}{2}=\frac{gt^2}{2}+t\sqrt{2gH}\left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\right)-d\left(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+2\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Nesunku įrodyti, kad atstumai $s_i(t)-s_{i+1}(t)$ tarp išlėkusių iš indo molekulių sluoksnių, laikui bėgant, didės, ir idealus skystis bei biralai kris kitaip nei kietas kūnas ir, aišku, joku būdu ne taip, kaip

išplauktų iš formulės $v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{\sigma^2}{S^2}}}$.

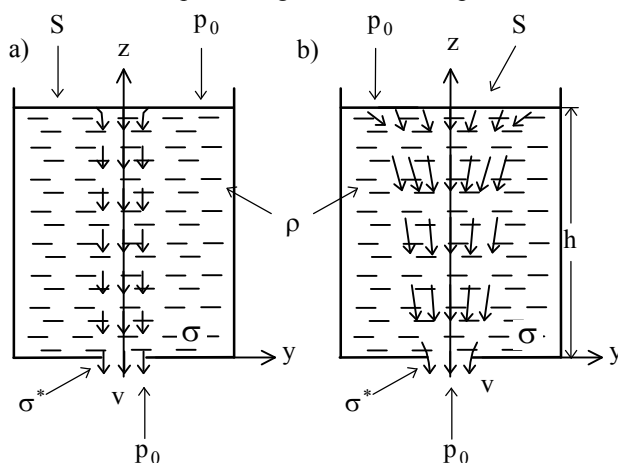
Pavyzdžiui, atstumas tarp pirmojo ir antrojo (nuo apačios) ką tik minėtųjų sluoksnių momentu t bus lygus $\sqrt{2dg}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)t+2d\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$ ir didės, didėjant t , nes, kai

$n>1$, tai $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ yra baigtinis teigiamas dydis.

Stebėdami, kaip byra sauso smulkaus smėlio grūdėliai iš smėlio laikrodžio, galime įsitikinti čia gautų išvadų teisingumu, nors, žinoma, sausas smulkus smėlis nėra idealus skystis, o tik jo artutinis modelis. Analogišką išvadą galėtume padaryti ir stebėdami tokio artimo idealiam realaus skysčio kaip vanduo čiurkšlėlės, turinčios nedidelį skersplotį σ^* , kritimą iš pakankamai didelio aukščio net ne beorėje, o to kritimo greitį mažinančioje oro erdvėje. Galima pastebėti, kaip pradžioje buvusi vientisa čiurkšlėlė ilgainiui subyra į atskirai krintančius lašus, o dideli lašai, jei tokie susidaro, ilgainiui susprogsta į mažesnius lašelius. Tai reiškia, jog net tarp vandens molekulių egzistuojančios sankabos

jėgos, dėl kurių atsiranda paviršinis įtempimas, jungiantis tas molekules į lašą, tampa nebepajėgus išlaikyti visas molekules kartu, kai tas lašas didelis.

Kai kurie mano oponentai, sutikdami, kad, iki tol stovėjusiam idealiam skysčiui ištekančiam, visas skystis inde iškart galbūt ir nepajuda, teigia, jog vis dėlto gali pajudėti ir judėti skysčio stulpelis virš angos, kaip tai parodyta 289 „a“ ir „b“ pav. Išnagrinėsime tokias prielaidas.



289 pav.

Atveju, pavaizduotu 289 „a“ pav., priimama hipotezė, kad skysčio stulpelis juda vienodu greičiu visuose jo sluoksniuose (nes tik tada judančio srauto skerspjūvio plotas σ^* galėtų būti pastovus), o atveju, pavaizduotu 289 „b“ pav., priimama hipotezė, kad, atidarius angą, ištekančio skysčio greitis ištekančio skysčio sluoksniuose tolydžiai didėja, pradedant nuo 0 skysčio paviršiuje ir baigiant koku tai maksimaliu greičiu v , ištekančio iš indo pro angą vietoje. Tuomet ištekančio skysčio srauto skerspjūvio plotas σ_z turėtų tolydžiai didėti, didėjant koordinatei z (žiūr. 289 „b“ pav.), nes kitaip nebūtų tenkinama sąlyga $\sigma_z v_z = \sigma^* v$, išplaukianti iš skysčio nesuspaudžiamumo dėsnio, kur v_z – ištekančio skysčio greitis aukštyje z , skaičiuojant nuo indo dugno, σ_z – ištekančio skysčio srauto skerspjūvio plotas aukštyje z , σ – angos indo dugne skerspjūvio plotas, $\sigma^* = \sigma \epsilon$ – ištekančios iš indo čiurkšlės skersplotis, ϵ – čiurkšlės suspaudimo koeficientas, v – skysčio ištekančio iš indo greitis. Nesunku įrodyti, kad tuomet vertikaliame pjūvyje, pravestame taip, kad indo simetrijos ašis, o kartu – ir koordinatės ašis Oz , gulėtų to pjūvio plokštumoje, linija $y = \varphi(z)$, ribojanti judantį skysčio srautą nuo nejudančio skysčio, turėtų būti

linija $y = \sqrt{\frac{av^2}{h-z}}$, kur v – ištekančio pro angą skysčio greitis, h – skysčio lygio inde aukštis, a –

konstanta (pavyzdžiui, $a = \frac{(\sigma^*)^2}{2g\rho^2}$).

Gerbdamas savo oponentų, kvalifikuotų matematinės fizikos specialistų, nuomonę, patikrinsiu jų hipotezes, pasinaudodamas jau ne vieną kartą išbandytu matematinių eksperimentų su imitaciniais nagrinėjamų procesų modeliais metodu ir laikydamas, kad išoriniai slėgiai p_0 iš viršaus ir iš apačios kompensuoja vienas kitą.

Tarkime, jog teisinga pirmoji hipotezė (žiūr. 289 „a“ pav.). Tuomet, skysčiui ištekančiam, per labai mažą laiko intervalą Δt , praėjusį nuo angos, turinčios plotą σ , atidarymo momento, skysčio lygis inde pasislinks žemyn kokia tai maža atkarpėle, kurios ilgį pažymėsime $|\Delta h|$. Skysčio potencinė energija sumažės dydžiu $\Delta W^{(p)} \approx \rho |\Delta h| S g h$. Tarkime, kad per tą laiką ištekančio skysčio viso vertikalio stulpelio, kurio tūris lygus $h \sigma^*$, greitis padidės nuo 0 iki kažkokių greičio, kurį pažymėsime v . Tai reiškia, kad to

stulpelio masės $\rho h \sigma^*$ kinetinė energija padidės nuo 0 iki dydžio $\Delta W = \frac{\rho h \sigma^* v^2}{2}$. Iš energijos tvermės

dėsni šiuo atveju gautume, jog $v = \sqrt{\frac{2g|\Delta h|S}{\sigma^*}}$. Kai $\Delta t \rightarrow 0$, tai ir $\Delta h \rightarrow 0$, o tai reiškia, kad šiuo atveju

pradinis jau ištekančio skysčio ištekančio greitis būtų lygus 0 ir po to, didėjant Δt ir $|\Delta h|$, palaipsniui didėdamas, po kurio laiko pasiektų maksimumą. Tai, kaip jau ne kartą buvo minėta, neatitinka natūrinių eksperimentams su realiais skysčiais, kurių savybės artimos idealaus skysčio savybėms. O jei priimtume, kad pradžioje skystis teka koku tai baigtiniu greičiu $v > 0$, tai gautume prieštarą energijos

tvermės dėsniai. Todėl šią hipotezę tenka atmesti, kaip neatitinkančią tikrovės (panašiai, kaip buvo atmesta hipotezė, kad juda visas skystis inde).

Tačiau ši hipotezė nėra visiškai absurdiška. Naudodamiesi iš energijos tvermės dėsnio išplaukiančia lygybe $|\Delta h|Sgh \approx \frac{\rho \sigma^* v^2}{2}$, kuri tampa absoliučiai tiksli, kai $\Delta h \rightarrow 0$, apskaičiuosime

ištekančio skysčio stulpelio greičio v didėjimo pagreitį $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Iš skysčio nesuspaudžiamumo

dėsnio išplaukia, jog $|\Delta h|S = \sigma^* \bar{v} \Delta t$, kur $\bar{v}$ – vidutinis skysčio išteklėjimo greitis intervale Δt .

Laikydami pagreitį a pastoviu dydžiu ir pradinį stulpelio greitį $v(0)$ lygiu 0, gautume, jog $\bar{v} = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2}$

ir $|\Delta h|S = \sigma^* \frac{v}{2} \Delta t$. Tuomet iš energijos tvermės dėsnio gautume, jog $\frac{\rho \sigma^* v}{2} \Delta t gh = \frac{\rho \sigma^* v^2}{2}$, iš kur

išplauktų, jog $v = g \Delta t$, o tai reikštų, kad stulpelio greitis, būdamas lygus 0 pačioje išteklėjimo pradžioje, skysčiui ištekančiam didėtų su pastoviu pagreičiu $a = g$. Kitaip tariant, tai reikštų, kad pirmoji mano oponentų hipotezė galėtų būti teisinga, jei iškretančio skysčio stulpelis, turintis masę $\rho h \sigma^*$, staiga sukiestų (pavyzdžiui, sušaltų į ledą) ir pradėtų kristi kaip kietas kūnas.

Įdomu, kad pirmoji mano oponentų hipotezė apie stulpelio, pavaizduoto 289 „a“ pav., judėjimą, galėtų būti teisinga dar vienu atveju, kai idealaus skysčio sluoksnis inde būtų tik vienos molekulės storio, anga indo dugne užimtą visą dugną (t. y. $\sigma = S$), o skysčio išteklėjimo greitis v tenkintų formulę $v = \sqrt{2gh}$. Įrodysiu tai.

Suskirstysime skystį inde į vienos molekulės storio d sluoksnius. Tarkime, kad pradžioje tokių sluoksnių būtų $n \geq 1$, t. y., kad $H = nd$. Tarkime taip pat, kad $\frac{S}{\sigma^*} = k \geq 1$. Atidarysime angą indo dugne ir

palauksime tokį laiko intervalą Δt , kad skysčio lygis inde nuslūgtų dydžiu $|\Delta h| = kd$. Per tą laiką skysčio potencinė energija sumažėtų dydžiu $\rho kdSh$, o pro angą, turinčią plotą σ , ištektų Skd tūrio vienetų nesuspaudžiamo skysčio, praeidami kelią $\ell = \frac{v^2}{2a}$, kur a – ištekančio skysčio pagreitis, o v – ištekančio

skysčio greitis, kuris būtų pasiektas intervalo Δt pabaigoje. Remdamiesi tuo, kad skystis nesuspaudžiamas, gautume, jog $\ell \sigma^* = Skd$, iš kur išplauktų, kad $v^2 = 2ak^2d$. Laikydami, kad pirmoji mano

oponentų hipotezė teisinga, iš energijos tvermės dėsnio gautume lygybę $\rho kdShg = \frac{\rho \sigma^* h v^2}{2}$, iš kur

išplauktų, jog $v^2 = \frac{2kSgd}{\sigma^*} = 2k^2gd$. Iš lygybės $2ak^2d = 2k^2gd$ gautume, jog $a = g$, kas atitiktų mūsų jau nagrinėtąjį „kietojo kūno“ variantą.

Tačiau galimas ir kitas variantas. Priėmę natūralią prielaidą, kad ištekančio skysčio greitis $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gnd}$, iš lygybės $2gnd = 2k^2gd$ gautume, jog $n = k^2$. Tuo atveju, kai $\sigma^* = S$, gautume, kad $k = 1$ ir todėl $n = 1$, ką ir reikėjo įrodyti.

Taigi, jei inde būtų tik vienos molekulės storio idealaus skysčio sluoksnis, tai, atidarius sklendę, sudarančią viso indo dugną, visas skystis pradėtų kristi su pagreičiu $a = g$ ir, praeidamas kelią d , pasiektų išteklėjimo greitį $v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2g \cdot 1 \cdot d} = \sqrt{2gh}$, kas ne tik atitiktų pirmąją mano oponentų hipotezę, bet ir sutaptų su mano ginama idealaus skysčio išteklėjimo hipoteze, nes šiuo atveju $d = h$.

Nagrinėjant šį antrąjį pirmosios mano oponentų hipotezės galimą teisingumo variantą, prielaida, jog $\sigma = S$, nėra būtina. Tarkime, kad mes pasirinkome tokį pradinį laiko intervalą Δt , kad per jį išteklėjęs iš indo skystis suspėtų nueiti kelią $\ell = d$, kur d – molekulės skersmuo. Tuomet per laiko intervalą Δt ištektų lygiai $\frac{S}{\sigma^*} d$ skysčio ir potencinė likusio inde skysčio energija sumažėtų $\Delta W^{(p)} \approx \frac{\rho}{\sigma^*} dhg$, o ištekančias skystis įgytų greitį $v = \sqrt{2da}$, kur a – ištekančio skysčio pagreitis. Laikydami pirmąją mano oponentų hipotezę teisinga, gautume, jog per laiko intervalą Δt ištekančio skysčio stulpelis įgytų kinetinę energiją $W^{(k)} = \frac{\rho \sigma^* h v^2}{2} = \frac{\rho \sigma^* h 2da}{2} = \frac{\rho \sigma^* h da}{2}$. Atmesdami jau minėtąją

pirmąją galimybę, kad ištekančias stulpelis virsta kietu kūnu ir krinta su pagreičiu $a = g$, priimsime, kad iš indo ištekančią skystį veikia aukščiau esančių molekulių slėgis ir jo nuosavo svorio jėga, dėl ko proceso

pradžioje ištekančio pro dugno angą skysčio molekulės įgyja pagreitį $a=ng$. Tuomet iš energijos tvermės dėsnio gautume, jog $\int \sigma^* h dng = \int \sigma^* dhg$, iš kur išplauktų, jog tokia lygybė būtų galima tik atveju, kai $n=1$. Tuomet ištekančio skysčio pagreitis $a=ng$ būtų lygus g , o jo greitis $v = \sqrt{2dg}$, kas vėl gi atitiktų formulę $v = \sqrt{2hg}$, nes ir šiuo atveju $h=nd=d$.

Taigi, jei inde būtų tik vienos molekulės storio idealaus skysčio sluoksnis, tai jis pro bet kurio dydžio angą indo dugne ištektų greičiu $v = \sqrt{2dg}$, ir tuomet pirmoji mano oponentų hipotezė, sutapdama su mano ginama idealaus skysčio ištekejimo hipoteze, būtų teisinga. Tačiau, jei inde būtų daugiau negu vienos molekulės storio skysčio sluoksnis, tai pirmoji mano oponentų hipotezė taptų jau neteisinga, o mano ginamoji idealaus skysčio ištekejimo hipotezė išliktų teisinga. Taigi, kaip matome, ginčas su pirmąja mano oponentų grupe išsispresdžia mano naudai.

Pereisiu prie antrosios mano oponentų hipotezės (žiūr. 289 „b“ pav.) nagrinėjimo. Atidarius sklendę indo dugne, inde buvęs skystis galėtų pajudėti tik savo svorio ir hidrostatinio slėgio p_z jėgos veikiamas. Hidrostatinio slėgio p_z priklausomybę nuo koordinatės z vaizduoja lygybė $p_z=(h-z)g$ ir todėl, priėmus antrąją mano oponentų hipotezę, galima būtų tikėtis, kad skysčio molekulių, priklausančių sluoksniui, kurio viršutinio paviršiaus koordinatė yra lygi z , pagreitis a_z būtų lygus $k(h-z)g+g$, kur k – pastovus koeficientas, charakterizuojantis molekulės paviršiaus ir jos masės santykį. Kadangi skysčio molekulės, esančios žemutiniame skysčio sluoksnyje prieš angą dugne, stumiamos jėgos mng , kur m –

molekulės masė, $n = \frac{h}{d}$ – molekulių sluoksnio numeris, skaičiuojant sluoksnius nuo viršaus ($i=1, 2, \dots, n$), d – molekulės skersmuo, turėtų įgyti pagreitį $a=ng$, tai įstatę į formulę $a_z=k(h-z)g+g$ dydžius $z=d$ ir $a_z=ng$, gautume $ng=k(h-d)g+g$, iš kur išplauktų, jog $k = \frac{n-1}{h-d} = \frac{n-1}{nd-d} = \frac{1}{d}$. Todėl $a_z = \left(n - \frac{z}{d} + 1\right)g$.

Kadangi molekulių i -jo sluoksnio paviršiaus koordinatė $z=h-(i-1)d=(n+1-i)d$, tai i -jo sluoksnio molekulės, priėmus antrąją mano oponentų hipotezę, turėtų judėti pagreičiu $a_i=(n-n+1+i+1)g=ig$.

Tarkime, jog, atidarius angos indo dugne sklendę, praėjo nedidelis laiko intervalas Δt , per kurį iš indo ištektų $\rho|\Delta h|S$ skysčio masės vienetų, praeidami kelią ℓ nuo ištekejimo pradžios. Tuomet dėl idealaus skysčio nesuspaudžiamumo gautume lygybę $\ell \sigma^*=|\Delta h|$. S. Priimsime, kad Δt buvo pasirinktas taip, kad per tą laiką pro angą indo dugne ištektų žemutinis judančių molekulių „hiperboloideo“ (žiūr. 289 „b“ pav.) sluoksnis, turintis numerį $i=n$, praeidamas kelią $\ell=d$. Tuomet to sluoksnio molekulės, judėdamos su pagreičiu $a=ng$, bus įgijusios greitį $v = \sqrt{2a\ell} = \sqrt{2ngd} = \sqrt{2Hd}$, kas kol kas atitinka ir mano ginamą idealaus skysčio ištekejimo hipotezę. Bet kurio i -jo ($1 \leq i \leq n$) judančio sluoksnio molekulės, jei būtų teisinga antroji (žiūr. 289 „b“ pav.) hipotezė, nueidamos kelią $\ell=d$, veikiamos pagreičio $a_i=ig$, įgytų greitį $v_i = \sqrt{2a_i d} = \sqrt{2ig d}$.

Kadangi judančio skysčio srautui turėtų galioti masės tvermės dėsnis, tai kiekvienas judančio skysčio sluoksnis turėtų vieną ir tą pačią masę $m_1=m_2=\dots=m_i=\dots=m_{n-1}=m_n=d\sigma^*=|\Delta h|S$. Todėl visų judančio skysčio sluoksnių kinetinių energijų suma $W^{(k)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$, praėjus minėtajam laiko

intervalui Δt nuo angos atidarymo, turėtų būti lygi $\sum_{i=1}^n \frac{|\Delta h|S}{2} (\sqrt{2ig d})^2 = |\Delta h|Sgd \sum_{i=1}^n i = |\Delta h|Sgd \frac{n(n+1)}{2}$.

Inde likusio skysčio potencinė energija, ištekęs iš jo $\rho|\Delta h|S$ masės vienetų skysčio, lyginant su pradine dar nepradėjusio tekėti skysčio būseną, sumažėtų dydžių $\Delta W^{(p)} \approx |\Delta h|SgH$. Laikydami, kad, taikant antrąją mano oponentų hipotezę, vis dėlto turėtų galioti energijos tvermės dėsnis, gautume, jog $|\Delta h|SgH = |\Delta h|Sgd \frac{n^2+n}{2}$, t. y. gautume, jog $H = d \frac{n^2+n}{2}$.

Kadangi $H=nd$, tai gauname, jog $2n=n^2+n$, t. y., jog $n=1$, iš kur išplaukia, jog antroji mano oponentų hipotezė galėtų būti teisinga tik tada, kai inde būtų tik vienos molekulės storio sluoksnis. Žinoma, tuomet būtų teisinga ir manoji hipotezė, nes $v = \sqrt{2gd}$, t. y. tuomet būtų tenkinama lygybė $v = \sqrt{2Hg}$, kadangi $H=nd=1d=d$.

Jei pareikalautume, kad antroji mano oponentų hipotezė būtų teisinga bet kuriam inde esančiam sluoksniui skaičiui $n > 1$, tai, pasinaudodami energijos tvermės dėsniu, gautume, jog pačioje pradžioje ištekancio skysčio greitis turėtų būti lygus ne $v = \sqrt{2gh}$ (ir, aišku, ne $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}}$), o nuliui ir tik po

to palaipsniui didėtų, kas neatitinka gaunamų rezultatų, eksperimentuojant su realiais skysčiais, turinčiais savybes, artimas idealaus skysčio savybėms. Tik skysčiai, turintys gana didelį klampumą, pradžioje ištekejimo elgiai panašiai, kaip išplaukia iš mano oponentų antrosios hipotezės.

Taigi, ir antrąją mano oponentų hipotezę tenka atmesti, nes ji priveda arba prie prieštaros energijos tvermės dėsniui arba prie prieštaros natūrinių eksperimentų metu stebimiems reiškiniams. Ji galėtų būti teisinga tik tada, kai $n=1$. Bet tuomet antroji mano oponentų hipotezė susiveda į dalinį mano ginamos hipotezės atvejį ir patvirtina mano ginamą formulę $v = \sqrt{2gh}$. Mano oponentų ginama iki tol

stovėjusio idealaus skysčio ištekejimo greičio formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}}$ nebūna teisinga jokiais atvejais.

Hipotetinių reiškinių, vaizduojamų 289 „a“ ir „b“ pav., analizė dar kartą patvirtina pagrindinį šio skyrelio teiginį, kad, pasitelkę matematinius eksperimentus su nagrinėjamų procesų modeliais, mes galime, naudodamiesi mokslo (šiuo kartu – fizikos) nustatytais dėsniais ir gana elementariais samprotavimais, patikrinti įvairias hipotezes, atmesdami klaidingas prielaidas ir patvirtindami neklaidingų hipotezių (šiuo kartu – mano ginamos hipotezės apie idealaus skysčio ištekejimą ir jo slūgimą inde) teisingumą.

Kai kurie didžiai mokyti mano oponentai kaip tik ir priekaištauja man dėl to, kad mano čia pateikti samprotavimai labai jau elementarūs. Jų manymu, jei aš pasitelkčiau šiuolaikinį idealaus skysčio hidrodinamikos matematinį aparatą, tai tučtuojau gaučiau rezultatus, kurie parodytų mano hipotezės ir mano samprotavimų klaidingumą.

Priverstas ir šį kartą nuvilti gerbiamų savo oponentų lūkesčius, pranešdamas, kad **mano ginamoji hipotezė niekur neprieštarauja nei iš masės tvermės dėsniu išplaukiančiai tolydumo lygčiai** $\text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$, **nei iš judesio kiekio tvermės dėsniu L. Oilerio dar 1755 m. išvestai idealaus**

skysčio judėjimo lygčiai $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \vec{f}$.

Norėdamas įrodyti šį savo teiginį skaitytojui, galbūt dar nestudijavusiam matematinės fizikos kurso, privalau paaiškinti kai kuriuos žymėjimus, panaudotus tolydumo ir Oilerio lygtyse.

Pirmasis žymėjimas $\text{div } \vec{v}(x, y, z, t)$ reiškia skysčio greičio $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ taške (x, y, z) momentu t **divergencija** $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$, apibrėžiamą kaip skysčio greičio vektoriaus $\vec{v}$ srauto $\oint_S \vec{v} d\vec{S} = \oint_S (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) (dS_x \vec{i} + dS_y \vec{j} + dS_z \vec{k}) = \oint_S (v_x dS_x + v_y dS_y + v_z dS_z)$, ištekancio iš elementaraus tūrio ΔV , apimančio tašką (x, y, z) , per visą uždara to tūrio paviršių, turintį plotą S , santykio $\frac{\oint_S \vec{v} d\vec{S}}{\Delta V}$ su tūriu ΔV ribą $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{v} d\vec{S}}{\Delta V}$, kai tas elementarus tūris ΔV mažėja iki 0, susitraukdamas momentu t į tašką (x, y, z) .

Antrasis žymėjimas $\frac{\partial}{\partial t}(x, y, z, t)$ reiškia skysčio tankio / kitimo **taške (x, y, z)** greitį momentu t , kurį reikėtų skirti nuo tankio / kitimo greičio $\frac{d}{dt}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x}(x, y, z, t) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(x, y, z, t) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}(x, y, z, t) \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$ **judančio skysčio dalelėje**, momentu t esančioje taške (x, y, z) . Greitis $\frac{d}{dt}$ vadinamas **pilnuoju**, greitis $\frac{\partial}{\partial t}$ – **lokaliuoju**, o greitis

$\frac{\partial}{\partial x}v_x + \frac{\partial}{\partial y}v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_z$ – **konvekciniu** (pernešančiuoju), nes pastarasis atsiranda dėl skysčio dalelės judėjimo erdvėje, kurioje slėgis (o todėl ir skysčio tankis ρ) gali būti pasiskirstęs ir nevienodai.

Trečiasis žymėjimas $\frac{d\vec{v}(x, y, z, t)}{dt}$ reiškia **pilnąjį dalelės, momentu t esančios taške (x, y, z) ,**

pagreitį $\vec{a}$, susidedantį iš **lokalinio pagreičio** $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\vec{k}$ ir **konvekcinio pagreičio**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \cdot \vec{i} +$$

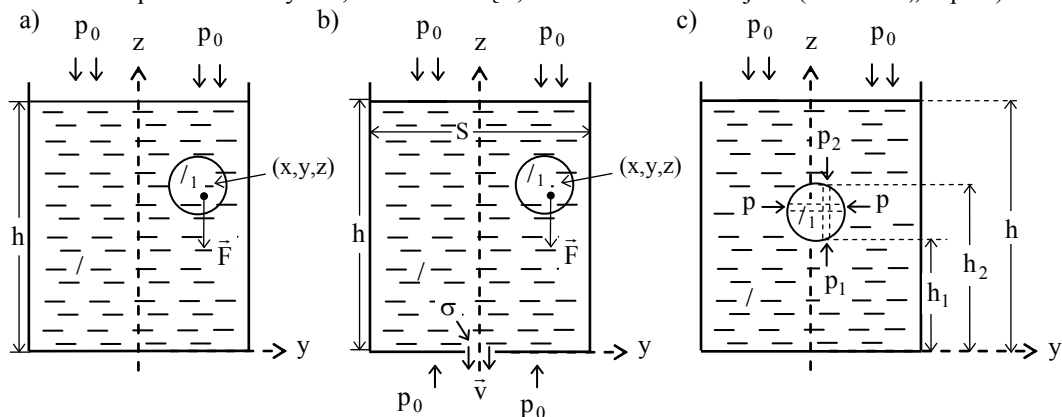
$$+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \right) \cdot \vec{k}.$$

Ketvirtasis žymėjimas grad $p(x, y, z, t)$ reiškia skysčio slėgio p taške (x, y, z) momentu t **gradientą**, apibrėžiamą kaip vektorių $\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$, vaizduojantį skysčio slėgio kitimo

$$\text{didžiausiu greičiu kryptį ir to didžiausio greičio dydį } |\text{grad} p| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}.$$

Penktasis žymėjimas $\vec{f}$ reiškia taip vadinamąją **tūrinę jėgą**, apibrėžiamą kaip santykio $\frac{\vec{F}(x, y, z, t)}{\Delta V}$ ribą $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x, y, z, t)}{\Delta V}$, kur $\vec{F}(x, y, z, t)$ – išorinė jėga, veikianti į dalelę, momentu t esančią taške (x, y, z) (pavyzdžiui dalelės svorio jėga, atsirandanti dėl Žemės traukos poveikio į dalelę), o ΔV – dalelės tūris.

Pritaikysime tolydumo ir Oilerio lygtis idealiam nesuspaudžiamam skystiui, apskaičiuodami, kaip judės panardintas į tokį skystį kūnas, turintis kokią tai baigtinį tūrį ΔV ir vidutinį tankį ρ_1 , kai momentu $t=0$ to kūno svorio centras yra taške (x, y, z) ir pats kūnas, būdamas iš visų pusių apsuptas idealaus nesuspaudžiamo skysčio, turinčio tankį ρ , momentu $t=0$ dar nejuda (žiūr. 290 „a“ pav.).



290 pav.

Priimame prielaidą, kad nagrinėjamas idealus skystis yra nesuspaudžiamas ir jo temperatūra nekinta. Tuomet tas skystis visuose taškuose turės vienodą tankį ρ , ir todėl bet kuriame erdvės (kurį užima 290 „a“ pav. pavaizduotas skystis) taške turėsime $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Kadangi anga indo dugne uždaryta ir skystis tikrai nejuda, tai $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, iš kur išplaukia, jog tolydumo lygtis $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ šiuo atveju tenkinama kiekviename idealaus skysčio taške.

Pradžioje tarkime, kad panardintas į skystį kūnas yra labai maža dalelė, esanti taške (x, y, z), turinti tankį ρ_1 ir labai mažą tūrį ΔV . Pritaikysime tai dalelei Oilerio lygtį $\rho_1 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}p + \vec{f}$, kurioje

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\Delta V} = \frac{-\rho_1 \Delta V g \vec{k}}{\Delta V} = -\rho_1 g \vec{k}, p = p_0 + (h - z)/g \text{ ir } \text{grad}p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - \rho_1 g \vec{k} = -\rho_1 g \vec{k}.$$

$$\text{Padalinę abi Oilerio lygties puses iš } \rho_1 > 0, \text{ rasime dalelės pagreitį } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = g \frac{1 - \rho_1}{\rho_1} \vec{k}.$$

Gautoji formulė rodo, kad dalelės pagreitis $\vec{a}$ nepriklauso nuo tos dalelės padėties, o tik nuo jos medžiagos ir skysčio tankių ρ_1 ir ρ . Todėl bet kurioje skysčio vietoje esanti tos medžiagos dalelė, o taip pat ir iš jų sudarytas panardintas kūnas, turintis bet kokį tūrį ΔV , judės su vienu ir tuo pačiu pagreičiu $\vec{a} = g \frac{1 - \rho_1}{\rho_1} \vec{k}$.

Tuo atveju, kai $\rho > \rho_1$, pagreitis bus nukreiptas aukštyn ir kūnas, skysčio stumiamas, kils į viršų. Tuo atveju, kai $\rho < \rho_1$, pagreitis bus nukreiptas į apačią, ir kūnas savo svorio jėgos $\vec{F} = \rho_1 \Delta V g$, didesnės už skysčio išstumiamąją jėgą, veikiamas, grims žemyn. Kai $\rho = \rho_1$, pagreitis bus lygus 0 ir kūnas, jei jis iki tol nejudėjo, liks vietoje.

Kadangi $\rho_1 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}p + \vec{f}$ yra rezultatyvinė jėga, veikianti kūno, panardinto į skystį, tūrio vieneta, tai, padauginę tą jėgą iš ΔV , gausime visą rezultatyvinę jėgą $\vec{F}_r$, veikiančią į panardintą kūną: $\vec{F}_r = \rho_1 \frac{d\vec{v}}{dt} \Delta V = (-\text{grad}p + \vec{f}) \Delta V = (\rho g \vec{k} - \rho_1 g \vec{k}) \Delta V = mg \vec{k} - m_1 g \vec{k} = -\vec{P} + \vec{P}_1$, kur $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{k}$ – panardinto į skystį kūno svoris, o $\vec{P} = -mg \vec{k} = -\rho \Delta V g \vec{k}$ – kūno išstumto skysčio svoris.

Taigi, gavome, jog Oilerio lygtis bus tenkinama, jei skystyje galios jau nuo Archimedo laikų žinomas dėsnis: į panardintą kūną veikia skysčio išstumiamoji jėga, lygi kūno išstumto skysčio svoriui.

Kadangi Archimedo dėsnis yra eksperimentaliai nustatytas ir patvirtintas faktas, tai iš jo išplaukia, jog mūsų nagrinėjamo atveju Oilerio lygtis yra tenkinama.

Antra vertus, galima teigti, jog iš Oilerio lygties Archimedo dėsnį galima išvesti grynai deduktyviai.

Kai $\rho < \rho_1$, tai panardintas į idealų skystį kūnas, nesutikdamas skysčio pasipriešinimo, nes idealiame skystyje nėra trinties, judės į viršų su pastoviu pagreičiu $\vec{a} = g \frac{1 - \rho_1}{\rho_1} \vec{k}$ ir per laiko intervalą

$$\Delta_1 t = \sqrt{\frac{2\ell_1}{|\vec{a}|}} = \sqrt{\frac{2\ell_1 \rho_1}{g(1 - \rho_1)}}, \text{ kur } \ell_1 - \text{kūno viršutinio taško atstumas iki skysčio paviršiaus, pasieks skysčio}$$

paviršių. Po to, kūnui palaipsniui išnyrant iš skysčio, išstumiamoji jėga ir išstūmimo pagreitis palaipsniui mažės, kol pasinėrusios į skystį kūno dalies išstumto skysčio svoris netaps lygus paties kūno svoriui $|\vec{P}_1| = m_1 g = \rho_1 \Delta V g$. Tuomet bus pasiekta į kūną veikiančių jėgų pusiausvyra, pagreitis $\vec{a}$ taps lygus 0 ir dalinai pasinėręs į idealų skystį kūnas pradės plūduriuoti skysčio paviršiuje.

Kai $\rho > \rho_1$, tai panardintas į idealų skystį kūnas su pastoviu pagreičiu $\vec{a} = g \frac{1 - \rho_1}{\rho_1} \vec{k}$ grims žemyn

$$\text{ir per laiko intervalą } \Delta_2 t = \sqrt{\frac{2\ell_2 \rho_1}{g(1 - \rho_1)}}, \text{ kur } \ell_2 - \text{kūno žemutinio taško atstumas iki dugno, pasieks}$$

dugną ir atsisuks taip, kad jo svorio centras užims žemiausią padėtį iš galimų.

Tą patį galima pasakyti ir apie plūduriuojančio kūno svorio centro padėtį. Toks reiškinys išplaukia iš kūno potencinės energijos minimumo principo ir gali būti paaiškintas tuo, kad, kūnui nukrypus nuo minėtosios padėties, atsiranda sukimo momentas, grąžinantis kūną į tą – pusiausvyrinę – padėtį. Tačiau čia mes toliau nebesigilinsime į šį reiškinį, nes nuo jo nepriklauso atsakymas į klausimą, kuri iš nagrinėjamų idealaus skysčio išteklėjimo hipotezių yra teisinga, kuri – ne.

Tarkime dabar, kad kūnas, turintis tūrį ΔV ir vidutinį tankį ρ_1 , yra panardintas į idealų nesuspaudžiamą skystį ir kol kas nejuda, o po to momentu $t = t_0 = 0$, atidaroma anga, esanti indo dugne ir turinti skerspjūvio plotą σ (žiūr. 290 „b“ pav.). Tarkime, kad stebimu momentu $t > t_0$ ištekančio pro angą idealaus nesuspaudžiamo skysčio greitis yra $v_1 = v_1(t)$. Tuomet skysčio lygio slūgimo inde greitis

$v_2(t) = \frac{\sigma^*}{S} v_1(t)$, kur S – indo skerspjūvio plotas, o $\sigma^* = \sigma \varepsilon$ – ištekančios čiurkšlės skerspjūvio plotas.

Greičiai $v_1(t)$ ir $v_2(t)$ yra kintami dydžiai ir, kaip tai išplaukia iš mano hipotezės ir eksperimentų su skysčiais, artimais idealiems, mažėja, didėjant laikui t ir mažėjant skysčio lygio inde aukščiui h .

Pabandydime nustatyti, ar pasikeistų panardinto į idealų skystį kūno judėjimo tame skystyje pagreitis, lyginant su pagreičiu, kai anga indo dugne buvo uždaryta ir skysčio lygio aukštis nesikeitė (žiūr. 290 „a“ pav.).

Pradžioje laikysime, jog teisinga mano hipotezė, kad pats skystis po angos atidarymo inde tik slūgsta, bet nejuda ir neišvysta kinetinės energijos. Tuomet lygiai taip pat, kaip buvo gauta nagrinėjant 290 „a“ pav. pavaizduotą atvejį, gausime, kad visuose skysčio, esančio inde, taškuose tenkinama tolydumo lygtis $\text{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ir kad panardintas į idealų skystį kūnas ir šiuo atveju įgys pagreitį

$\vec{a} = g \frac{1 - \sigma^2}{1} \vec{k}$, t. y., kad panardinto kūno judėjimas ir atveju, pavaizduotu 290 „b“ pav., liks toks pat,

kaip ir atveju, kai anga indo dugne buvo uždaryta.

Įsivaizduodami, kad tokiu panardintu kūnu galėtų būti ir to paties skysčio „gabalas“, užimantis to kūno vietą, gautume, kad to „gabalo“ pagreitis būtų lygus $\vec{a} = g \frac{1 - \sigma^2}{1} \vec{k} = 0$, t. y., kad tas „gabalas“,

nejudėjęs prieš angos indo dugne atidarymą, nepajudėtų ir tą angą atidarius.

Iš to išplaukia, kad **mano hipotezė, pritaikius Oilerio lygtį idealaus skysčio judėjimui, neatveda prie mano oponentų pranašautos prieštaros, o veda prie savęs pačios patvirtinimo, kad idealus iki tol nejudėjęs skystis, inde nepajudės ir atidarius angą indo dugne.**

Jei priimtume mano oponentų hipotezę, kad idealus iki tol stovėjęs inde skystis, atidarius angą indo dugne, pradeda judėti ir pačiame inde greičiu $\vec{v}_2 = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \sigma^2}} \vec{k} = -\sigma \sqrt{\frac{2gh}{S^2 - \sigma^2}} \vec{k}$, lygiu skysčio

lygio slūgimo inde greičiui $\frac{dh}{dt} \vec{k}$, įgydamas kinetinę energiją, tai gautume, jog į kūną, panardintą į taip judantį idealų skystį, indo sienelių atžvilgiu turėtų pradėti veikti papildoma inercinė jėga, ir todėl panardintas kūnas turėtų įgyti papildomą pagreitį, nukreiptą žemyn. Tuomet Oilerio lygties dešiniąją pusę tektų papildyti tūrine jėga $\vec{f}_1 = -\frac{1}{1} g \frac{\sigma^2}{S^2 - \sigma^2} \vec{k}$, kurią galima apskaičiuoti, išsprendus diferencialinę

lygtį $\frac{dh}{dt} = -\sigma \sqrt{\frac{2gh}{S^2 - \sigma^2}}$ ir gavus, kad $h(t) = H_0 + \frac{g\sigma^2 t^2}{2(S^2 - \sigma^2)} - \sigma t \sqrt{\frac{2gH_0}{S^2 - \sigma^2}}$, iš kur išplauktų, jog skysčio

judėjimo inde greitis $\vec{v}_2(t) = \frac{dh}{dt} \vec{k} = -\left(\sigma \sqrt{\frac{2gH_0}{S^2 - \sigma^2}} - \frac{g\sigma^2}{S^2 - \sigma^2} t \right) \vec{k}$ mažėtų su pagreičiu $\frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = \frac{g\sigma^2}{S^2 - \sigma^2} \vec{k}$,

kur $\vec{k}$ – vertikalios krypties ortas (vienetinis vektorius), nukreiptas aukštyn.

Tuomet iš vektorinės Oilerio lygties gautume, jog panardintas į taip judantį skystį kūnas įgytų

$$\text{pagreitį } \vec{a} = -\frac{1}{1} (\text{grad} p - \vec{f} - \vec{f}_1) = -\frac{1}{1} \left(-\frac{1}{1} g \vec{k} + \frac{1}{1} g \vec{k} + \frac{1}{1} \frac{\sigma^2}{S^2 - \sigma^2} \vec{k} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}} \right) g \vec{k}.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš $\frac{1}{1} \Delta V$, kur ΔV – panardinto kūno tūris, gautume, kad į panardintą kūną šiuo atveju veiktų rezultatinė jėga $\vec{F}_r = \frac{1}{1} \Delta V g \vec{k} - \frac{1}{1} \Delta V g \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}} \vec{k} = -\vec{P} + \vec{P}_1 \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}$, kur

$\vec{P}_1 = -\frac{1}{1} \Delta V g \vec{k}$ – panardinto į skystį kūno svoris, o $\vec{P} = -\frac{1}{1} \Delta V g \vec{k}$ – to kūno išstumto skysčio svoris.

Išėitų, jog, galiojant mano oponentų hipotezei, kūnas, panardintas į indą su ištekančiu iš to indo

idealiu skysčiu, turėtų lyg ir „pasunkėti“ $\frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}$ karto ir, kai $\rho_1 > \rho$ turėtų grimzti greičiau nei tuo atveju,

kai anga indo dugne buvo uždaryta. Tas kūnas turėtų grimzti net ir tada, kai $\rho > \rho_1 > \rho \left(1 - \frac{\sigma^2}{S^2}\right)$. Artėjant

σ prie S , inde turėtų grimzti bet koks kūnas, turintis bet koki vidutinį tankį $\rho_1 > 0$, nes tuomet tas kūnas dėl savo „pasunkėjimo“ turėtų tapti lyg ir be galo sunkus.

Tokios išvados, išplaukiančios iš mano oponentų hipotezės ir Oilerio lygties taikymo idealiems skysčiams, neatrodo labai tikroviškos, kad remiantis jomis būtų galima teigti, jog mano oponentų hipotezė teisinga, o mano hipotezė – neteisinga.

Realiuose skysčiuose, kuriuose tarp skysčio dalelių ir panardinto kūno paviršiaus dalelių egzistuoja sankabos jėgos, tikrai galime pastebėti, kaip judantis skystis „neša“ panardintą į jį kūną savo judėjimo kryptimi, kas šiek tiek atitiktų iš mano oponentų hipotezės išplaukiančią išvadą, nors, žinoma, joks skystis, nei realus, nei idealus, nepradeda kristi iš indo, ištraukus sklendę, sudarančią to indo visą dugną, su begaliniai dideliu greičiu, nešdamas su tokiu pat greičiu į jį panardintą kūną, kaip tai išplaukia

iš mano oponentų ginamos formulės $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$. Taigi, šią formulę ir šį kartą tenka atmesti, kaip

netinkančią nei idealaus, nei pakankamai artimo idealiam realaus iki tol stovėjusio inde skysčio išteklėjimo greičio apskaičiavimui.

Būtų įdomu patikrinti eksperimentais, ar skysčiuose, pakankamai artimuose idealiams, atidarius angą indo dugne, atsiranda panardinto kūno „pasunkėjimo“ reiškinys, išplaukiantis iš mano oponentų hipotezės apie skysčio inde pajudėjimą ir judėjimą, skysčiui ištekančiam.

Neturėdami sąlygų įvykdyti natūrinius eksperimentus, ir šiuo atveju juos galime pakeisti matematiniais eksperimentais su matematiniais modeliais. Tai ir padarysime.

Realūs skysčiai hidromechanikoje ir hidraulikoje sąlyginai skirstomi į dvi grupes.

Pirmajai grupei priskiriami skysčiai, kuriuose vidinė trintis pakankamai tiksliai tenkina **Niutono trinties dėsnį**, teigiantį, jog, duotajam kūnui judant realiame skystyje greičiu v to skysčio atžvilgiu (arba skysčiui judant greičiu v į tą skystį panardinto duotojo kūno atžvilgiu), tarp to kūno paviršiaus ploto kiekvieno vieneto (tiksliau, tarp tą ploto vienetą dengiančio prie jo prilipusio skysčio sluoksnio) ir su juo besiliečiančio judančio skysčio sluoksnio atsiranda trinties jėga, proporcinga judėjimo greičio gradientui (greičio dydžio išvestinei kryptimi, statmena greičio vektoriaus kryptiai), o to proporcingumo koeficientas, vadinamas dinamine klampa (dinaminio klampumo koeficientu), yra duotajam skysčiui, kai nesikeičia jo temperatūra, pastovus dydis.

Šios grupės skysčiai, kai dinaminė klampa μ artėja prie 0, gali būti laikomi idealių skysčių artutiniais modeliais.

Antrajai grupei priskiriami skysčiai, kuriems jų vidinės trinties apskaičiavimui tenka naudotis jau sudėtingesniais dėsniais negu minėtasis Niutono trinties dėsnis. Jai priklauso tokie skysčiai kaip koloidinės suspensijos, polimerų tirpalai, cemento, kreidos, molio ir pan. hidromišiniai ir kiti „tiršti“ skysčiai. Visi tokie skysčiai jau gana tolimi nuo idealių, todėl jų čia dabar nenagrinėsiu.

Realiems skysčiams, priklausantiems pirmajai grupei, galioja **Navje ir Stokso lygtis**

$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}p + \vec{f} + \rho \nabla^2 \vec{v}$, besiskirianti nuo mums jau žinomos idealių skysčių judėjimo Oilerio lygties

tik papildomu dėmeniu $\rho \nabla^2 \vec{v}$, kuriame ρ – realaus skysčio tankis, ν – to skysčio kinematinis klampumo koeficientas (kinematinė klampa), lygus dinaminei klampai μ , padalintai iš skysčio tankio ρ ,

$\vec{v}$ – skysčio judėjimo greitis, o $\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – **Hamiltono**

operatoriaus $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ kvadratas, vadinamas **Laplaso operatoriumi**, kartais žymimu

dar ir žymeniu Δ .

Laplaso operatoriaus poveikio į bet kokią dukart diferencijuojamą funkciją $\varphi(x, y, z)$ rezultatas

yra $\Delta \varphi(x, y, z) = \nabla^2 \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z^2}$.

Hamiltono operatoriaus poveikio į bet kurią diferencijuojamą skaliarinę funkciją $\psi(x, y, z)$ rezultatas $\nabla\psi(x, y, z) = \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial z}\vec{k}$ sutampa su tos funkcijos gradientu $\text{grad}\psi(x, y, z)$, o poveikio į diferencijuojamą vektorinę funkciją $\vec{v}(x, y, z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ rezultatas $\nabla\vec{v}(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{k}$ sutampa su tos funkcijos divergencija $\text{div}\vec{v}(x, y, z)$.

Kartais Hamiltono operatoriaus žymenį ∇ (o kartu – ir patį Hamiltono operatorių) dėl jo panašumo į senovinį muzikos instrumentą – arfą, vadina dar ir „nabla operatoriumi“ (nuo graikiško žodžio „nabla“, reiškiančio arfą).

Kai kinematinio klampumo koeficientą ν galima laikyti labai mažu dydžiu, artimu 0, t. y., kai skysčio klampumas, atsirandantis dėl sankabos jėgų tarp skysčio dalelių ir sąlygojantis trinties jėgų skystyje atsiradimą, yra toks mažas, kad į jį praktiškai galima nekreipti dėmesio, tai **vektorinė Navjė ir Stoko lygtis tampa vektoriale Oilerio lygtimi ir realių skystį praktiškai galima laikyti idealiu**.

Eksperimentai su realiais skysčiais rodo, jog į realių stovintį skystį panardintas kūnas kyla bei grimzta lėčiau negu tas pats kūnas, panardintas į idealų (ar pakankamai artimą idealiam) stovintį skystį, turintį tą patį tankį ρ . Tai ir suprantama: panardintam kūnui kylant bei grimztant, realiame stoviniame skystyje tenka susidurti su atsirandančiomis trinties jėgomis, pasireiškiančiomis tuo stipriau, kuo didesnis realaus skysčio dinaminis klampumas, judančio kūno greitis ir to kūno paviršiaus ploto santykis su kūno tūriu.

Eksperimentaliai nustatę vieno ir to paties kūno nugrimzdimo ar jo iškilimo įvairiuose stoviniuose realiuose skysčiuose laiką Δt ir palyginę tą laiką su apskaičiuotu to kūno nugrimzdimo ar iškilimo laiku idealiam stoviniame skystyje, turiniame tą patį tankį ρ kaip tiriamasis realus skystis, mes galime įvertinti realių skysčių klampumo poveikį ir apskaičiuoti apytikrą klampumo koeficiento reikšmę.

Suprantama, kad judantis klampus skystis veikia panardintą į tą skystį kūną, ne tik stumdamas, bet ir tempdamas tą kūną skysčio judėjimo kryptimi bei stabdydamas priešinga skysčio judėjimo kryptimi judančius kūnus.

Taip pat aišku, kad klampaus skysčio išteklėjimą pro angą indo dugne procesas vykty jau šiek tiek kitaip nei idealaus skysčio, nes ištekančios skysčio dalelės sankabos jėgomis patrauktų paskui save ir daleles, kol kas dar liekančias inde, o tai reiškia, kad, realiam skysčiui ištekančiam, kinetinę energiją įgytų ne tik tas skystis, kuris šiuo momentu išteka iš indo pro angą, bet ir skysčio dalelės, kol kas liekančios inde. Dėl sankabos jėgų egzistavimo tarp realaus skysčio dalelių ir indo bei angos indo dugne sienelių skysčio išteklėjimo greitis priklausys jau ne tik nuo skysčio stulpo virš angos aukščio, bet ir nuo tos angos ploto, tačiau nesunku įsitikinti, jog ta priklausomybė nėra tokia, kad iš jos, skysčio klampumui

mažėjant, išplauktų skysčio išteklėjimo greičio formulė $v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, teigianti, kad, angos plotui σ

artėjant prie indo dugno ploto S , idealaus skysčio išteklėjimo greitis artėtų prie begalybės.

Kadangi kai kurie mano oponentai teigia priešingai ir bando apginti šią iš formulės

$v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ išplaukiančią išvadą, remdamiesi prancūzų gydytojo ir fiziko Ž. Puazeilio dar XIX a.

nustatytu dėsniu ir formule, tai tenka čia šiek tiek panagrinėti šią formulę ir tą situaciją, kurioje ji gali būti taikoma.

Ž. Puazeilis nagrinėjo realaus klampaus skysčio, tenkinančio Niutono trinties dėsni (ir todėl kartais vadinamo Niutono skysčiu), stacionarų (nusistovėjusių) **laminarinį tekėjimą** (kuriam būdinga, kad tėkmės linijos išlieka lygiagrečios viena kitai ir neatsiranda sūkurų bei kavernų, būdingų **turbulentiniam tekėjimui**) pro siaurą cilindrinį vamzdelį ir nustatė, jog tokio tekėjimo metu per laiko vienetą (vieną sekundę) pratekančio pro tokio vamzdelio skerspjūvį klampaus skysčio tūris V yra tiesiogiai proporcingas slėgių skirtumui Δp vamzdelio galuose bei vamzdelio skerspjūvio spindulio R ketvirtajam laipsniui ir atvirkščiai proporcingas vamzdelio ilgiui ℓ bei skysčio dinaminei klampai μ , t. y. jog $V = \pi \Delta p R^4 / 8 \mu \ell$.

Šia formule dažnai naudojamosi, nustatant pirmosios grupės realių skysčių (Niutono skysčių) dinaminę klampą μ .

Kadangi pratekėjusio pro vamzdelio skerspjuvį per laiko vieneta skysčio kiekis proporcingas to skerspjuvio plotui ir vidutiniams skysčio greičiui $\bar{v}$, tai iš Puazeilio formulės galima gauti lygybę $\bar{v} = \Delta p R^2 / 8\mu\ell$, kurią analizuodami kai kurie mano oponentai daro išvadą, jog tuo atveju, kai vamzdeliu pratekantis skystis būtų idealus (t. y., kai jo dinaminis klampumas μ taptų lygus 0), vidutinis jo pratekėjimo greitis $\bar{v}$ turėtų tapti be galo didelis, t. y. atitinkantis formulę $v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, nes vamzdelyje

$$\sigma = S.$$

Taip samprotaudami, mano oponentai daro tą pačią klaidą, kurią jie daro, taikydami formulę $v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, tinkančią idealaus skysčio stacionariam pratekėjimui pro indą, turintį angą savo dugne,

nuolat papildant inde esančio skysčio kiekį taip, kad būtų palaikomas pastovus skysčio lygio aukštis h inde, visai kitam atvejui, kai idealus skystis išteka iš indo, jo nepapildant, dėl ko skysčio lygio aukštis inde mažėja.

Matyt, mano oponentai pamiršta, kad Puazeilio formulė galioja ir gali būti išvesta tik stacionariam procesui, kai skysčio pratekėjimo cilindrinio vamzdeliu greitis laikomas nesikeičiančiu laike, o tik dėl trinties mažėjančiu srovės skerspjuvyje, didėjant skysčio tėkmės linijos atstumui r nuo vamzdelio simetrijos ašies. Tokiame stacionariame procese pratekantis vamzdeliu skystis neįgyja pagreičio ir nekeičia savo kinetinės energijos, nes visą tą skystį stumianti vamzdeliu jėga $F_{st} = \Delta p \pi R^2$ išieikvojama skysčio vidinės trinties įveikimui (laikoma, kad skysčio sluoksnis, prilipęs prie vamzdelio sienelių, nejuda ir todėl tiesioginės trinties tarp skysčio ir vamzdelio sienelių neatsiranda, o atsiranda tik trintis tarp skysčio cilindrinio sluoksnio, kuriais skystis teka skirtingais greičiais, tolydžiai didėjančiais, atėjant prie tų cilindro ir vamzdelio simetrijos ašies).

Puazeilio formulę šiuo atveju galima išvesti analiziškai, remiantis Niutono trinties dėsnio $F_{tr} = \mu S \frac{dv(r)}{dr}$, kuriame μ – skysčio dinaminė klampa, S – skysčio cilindro, simetriško vamzdelio simetrijos ašiai ir turinčio spindulį $r \in (0, R)$ bei ilgį ℓ , šoninio paviršiaus plotas $S = 2\pi r \ell$, $\frac{dv(r)}{dr}$ – skysčio greičio $v(r)$ išvestinė cilindro spindulio kryptimi cilindro, turinčio spindulį r , paviršiuje, t. y. skysčio tekėjimo greičio $v(r)$ pokyčio greitis, didinant atstumą r nuo vamzdelio simetrijos ašies, F_{tr} – trinties jėgos tarp nagrinėjamo cilindro paviršiaus ir tą cilindrą supančio skysčio artimiausio cilindrinio sluoksnio absoliutus dydis, paimtas su minuso ženklu (nes $\frac{dv}{dr} < 0$).

Kadangi nagrinėjamąjį cilindrą stumiančioji jėga $F_{st} = \Delta p \pi R^2$ ir trinties jėga $F_{tr} = \mu 2\pi r \ell \frac{dv}{dr}$ stacionariame procese yra lygios ir turi tiksliai priešingas kryptis, tai gauname lygtį $\Delta p \pi R^2 + \mu 2\pi r \ell \frac{dv}{dr} = 0$.

Dešinioji šios lygties pusė lygi 0 tik stacionariame procese, o visais kitais atvejais stumiančiosios ir trinties jėgų algebrinė suma yra lygi teigiamam ar neigiamam dydžiui – rezultatyvinės jėgos, suteikiančios skysčiui pagreitį, dydžiui.

Spręsdami šią diferencialinę lygtį stacionariam atvejui, kai tos lygties dešinioji pusė lygi 0,

$$\text{gauname: 1) } dv = -\frac{\Delta p}{2\mu\ell} r dr; \quad 2) \quad \int_0^{v(r)} dv = -\frac{\Delta p}{2\mu\ell} \int_0^r r dr; \quad 3) \quad v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu\ell} (R^2 - r^2); \quad 4) \quad v^{(\max)} = v(0) = \frac{\Delta p}{4\mu\ell} R^2; \quad 5) \quad \bar{v} \pi R^2 = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{2\pi\Delta p}{4\mu\ell} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi\Delta p}{2\mu\ell} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\mu\ell}, \quad \text{iš kur}$$

išplaukia, jog vidutinis skysčio pernešimo vamzdeliu greitis yra $\bar{v} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu\ell}$ (gautas rezultatas rodo, kad

$\bar{v}$ buvo galima apskaičiuoti ir naudojantis paprastesne formule $\bar{v} = \frac{0 + v^{(\max)}}{2} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu\ell}$);

6) $V = \bar{v}\pi R^2 = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\mu\ell}$ – Puazeilio formulė.

Taigi, Puazeilio formulė gali būti išvesta ir gali būti teisinga tik tuo atveju, kai stumiančiąją jėgą pilnai atsveria trinties jėga, kuri tuo metu, kai stumiančioji jėga $\Delta p\pi R^2$ nelygi nuliui, taip pat negali būti lygi nuliui, dėl ko negali būti lygi nuliui ir nagrinėjamo realaus skysčio dinaminė klampa μ . Dėl šios priežasties mes neturime teisės įstatyti $\mu=0$ į Puazeilio formulę ir tokiu būdu gauti išvadą, jog

idealus skystis gali ištekti su begaliniai dideliu greičiu. O štai į formulę $v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ įstatyti σ reikšmę

lygią S nėra jokių tam trukdančių bei draudžiančių aplinkybių, nes ji buvo gauta iš Bernulio dėsnį aprašančios formulės $p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{const}$, turinčios vienoda reikšmę

kiekviename stacionariame tekančio idealaus skysčio skerspjūvyje, ir iš skysčio nesuspaudžiamumo formulės $v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const}$, galiojančios kiekvienam stacionariam tekančio idealaus skysčio skerspjūvio plotui S_i . Juk niekas nedraudžia laikyti kai kurių skerspjūvių plotus vienodais, dėl ko σ gali būti ne tik mažesnis, bet ir lygus S . O štai taikyti Bernulio formulę nestacionariam idealaus skysčio ištekimui procesui, kai skysčio lygio aukštis $h(t)$ keičiasi, ką daro mano oponentai, išvesdami formulę

$$v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}, \text{ tikrai negalima.}$$

Jei lygybėje $\Delta p\pi r^2 + \mu 2\pi\ell \frac{dv}{dr} = 0$, aprašančioje stacionarų realaus skysčio tekėjimą Puazeilio

vamzdeliu, būtume pakeitę μ nuliu, tai būtume gavę, kad visa stumiančioji jėga būtų tapusi pagreiti suteikiančiąją jėgą, ir skysčio judėjimas tuomet taptų jau nestacionarus, nes skystis judėtų su pagreičiu

$$a = \frac{F_{st}}{m} = \frac{\Delta p\pi r^2}{\rho\pi r^2\ell} = \frac{\Delta p}{\rho\ell} \neq 0, \text{ jei } \Delta p \neq 0. \text{ Skysčio greitis didėtų, tačiau bet koku baigtiniu momentu}$$

netaptų be galo didelis, taigi, vėl nepasiteisintų mano oponentų ginama formulė.

Jei $\mu > 0$, tai nestacionarų procesą aprašančios lygties dešinioji pusė būtų nelygi 0, tačiau, jei $\Delta p = \text{const}$ ir laikas t – neribotas, tai anksčiau ar vėliau būtų pasiekta būsena, kai, skysčio greičiui didėjant, proporcingai tam didėjimui auganti trinties jėga taptų lygi stumiančiajai jėgai ir procesas taptų

stacionarus. Tekančiu vamzdeliu skysčio vidutinis greitis tuomet taptų $\bar{v} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu\ell}$ ir toliau nebesikeistų,

jei nesikeistų Δp . Todėl praktikoje taip dažnai stebime stacionarius realių skysčių tekėjimo procesus, į kuriuos, laikui bėgant, pereina daugelis skysčių tekėjimo procesų.

Pavyzdžiui, atsukus vandentiekio kraną, kai vandens tiekimo magistralėje palaikomas pastovus slėgis, vandens tekėjimo iš kranų procesas gana greitai tampa stacionarus.

Idealių ir realių skysčių stacionaraus tekėjimo procesai žymiai geriau aprašyti ir išnagrinėti hidromechanikoje ir hidraulikoje, ir ne tik todėl, kad jie gana dažnai sutinkami praktikoje, bet ir todėl, kad juos aprašyti ir nagrinėti žymiai paprasčiau negu nestacionarius.

Skaitytojas gali tuo įsitikinti, pabandęs išspręsti diferencialinę lygtį, aprašančią realaus skysčio ištekimą iš vertikalaus Puazeilio vamzdelio, kai skystis iš to vamzdelio tik išteka ir jo kiekis nėra papildomas iš viršaus. Tokią diferencialinę lygtį skaitytojas gali gauti apskaičiavęs skysčio svorio jėgos darbo, prastumiant skystį vamzdeliu labai mažą atstumą $|\Delta h|$, ir trinties jėgos darbo per tą patį laiką skirtumą ir prilyginęs tą skirtumą skysčio kinetinės energijos prieaugliui, tačiau išspręsti šią diferencialinę lygtį su dalinėmis išvestinėmis ir su kraštinėmis sąlygomis $v(r, t) = 0$ visoms t reikšmėms, kai $r = R$, bei su pradinėmis sąlygomis $h(t) = \ell$ ir $v(r, t) = 0$, kai $t = 0$, matyt, pajęgs tik kai kurie iš skaitytojų. Mažindami dinaminės klampos μ reikšmę, tokie skaitytojai galėtų stebėti, kaip elgtųsi ištektantis realus skystis, kai jo savybės artėtų prie idealaus skysčio savybių, ir galėtų įsitikinti, kaip to

skysčio ištekimą iš pilno vamzdelio laikas mažėdamas artėtų prie dydžio $T = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$, išplaukiančio iš

mano ginamos formulės $v = \sqrt{2gh}$, o ne prie 0, kaip turėtų išplaukti iš mano oponentų ginamos

formulės $v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, kadangi šiuo atveju $\varepsilon=1$, $\sigma^*=\sigma=S$ ir $v \rightarrow \infty$.

Tiems skaitytojams, kurie nepajėgs išspręsti sudėtingos diferencialinės lygties su dalinėmis išvestinėmis, galima rekomenduoti į tą lygtį vietoj μ įstatyti 0 ir gauti gana paprastą diferencialinę lygtį.

Jei pradinė diferencialinė lygtis buvo sudaryta laikantis prielaidos, kad stumiančiosios jėgos ir trinties jėgos darbų skirtumas lygus tik ištekančio skysčio kinetinės energijos pokyčiui, tai sprendžiamas tą lygtį, kai $\mu=0$, skaitytojas gaus idealaus skysčio išteklėjimo iš vamzdelio greičio formulę

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}, \quad h(t) = \ell - t\sqrt{2g\ell} + \frac{g}{2}t^2 \quad \text{ir pilno išteklėjimo laiko formulę} \quad T = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}, \quad \text{kas sutampa su}$$

formulėmis idealiam skysčiui, išplaukiančiomis iš mano ginamos hipotezės.

Jei pradinė diferencialinė lygtis buvo sudaryta laikantis prielaidos, kad stumiančiosios jėgos ir trinties jėgos darbų skirtumas lygus viso, esančio vamzdyje, skysčio kinetinės energijos pokyčiui, tai sprendžiamas tą lygtį, kai $\mu=0$, skaitytojas gaus kieto kūno iškritimo iš vamzdelio be trinties formules:

$$v(t)=gt, \quad h(t) = \ell - \frac{gt^2}{2}, \quad T = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}. \quad \text{Nei pirmuoju, nei antruoju atveju skaitytojas negaus formulių, kurias}$$

gina mano oponentai, nes tos formulės negali būti matematiškai išvestos iš lygčių, aprašančių nestacionarų procesą.

$$\text{Negaus skaitytojas mano oponentų ginamos formulės} \quad v = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}} \quad \text{ir naudodamasis Navje ir}$$

Stokso lygtimi, kai kinetinio klampumo koeficientas ν artėja prie 0, tačiau, prijungęs prie šios lygties energijos tvermės dėsni išreiškiančią lygtį, jis gana nesunkiai galės įsitikinti, kad šią keturių lygčių sistemą (vektorinė Navje ir Stokso lygtis ekvivalenti 3 skaliarinėms lygtims), kai $\mu \rightarrow 0$, tenkina iš mano

$$\text{ginamos hipotezės išplaukiančios formulės:} \quad v(t) = \sqrt{2gh(t)}, \quad h(t) = h(t) - t \frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gh(0)} + \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2 \frac{g}{2} t^2,$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gh(0)} + \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2 gt = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gh(t)} \quad \text{ir} \quad a = \frac{d^2h(t)}{dt^2} = g \left(\frac{\sigma^*}{S}\right)^2, \quad \text{kai pradinės sąlygos yra}$$

tokios: $h(t)$ ir $v(t)$, kai $t=0$, yra $h(0)=H_0=\ell$, $v(0)=0$.

Iš viso šio gana daug vietos ir laiko užėmusio nagrinėjimo, remiantis matematinės fizikos formulėmis (čia pateikto ne tik todėl, kad būtų paneigta mano oponentų prielaida, jog perėjimas prie sudėtingesnio matematinio aparato parodys mano jiems nepriimtinos hipotezės klaidingumą, bet ir todėl, kad studijuojantį sistemotyrą skaitytoją šiek tiek supažindintume su matematinės fizikos aparatu), galima padaryti išvadą, kad perėjimas prie sudėtingesnio matematinio aparato ne tik neparodė mano hipotezės klaidingumo bei nepatvirtino mano oponentų hipotezių, bet ir nieku ypatingai nauju ir svarbiu šios diskusijos nepapildė.

Tūlas skaitytojas, nesutikdamas su paskutiniąja pastaba, galėtų pasakyti, jog mes, pasinaudodami Oilerio lygtimi, išvedėme Archimedo dėsni, kuris po to buvo naudingas, nagrinėjant panardinto į skystį kūno judėjimą. Dalinai sutikdamas su skaitytoju, kad sudėtingesnis matematinis aparatas gana dažnai pagreitina ir palengvina kai kurių išvadų gavimą, vis dėlto norėčiau pastebėti, kad pagrindinių dėsnių (šiuo atveju – fizikos dėsnių) žinojimas leidžia gauti tas išvadas ir nesinaudojant labai sudėtingu matematiniu aparatu.

Pavyzdžiui, jau minėtąjį Archimedo dėsni buvo galima išvesti ir žymiai paprastesniu būdu. Nagrinėdami hidrostatinio slėgio pasiskirstymą panardinto kūno paviršiuje (žiūr. 290 „c“ pav.), nesunkiai pastebime, kad kiekvienoje horizontalioje plokštumoje vienodo dydžio tačiau skirtingų kryptių slėgiai pasiskirstę taip, kad rezultatinė horizontalioji slėgio jėga, veikianti į panardintą kūną, yra lygi 0, nes kiekvienai elementariai (veikiančiai į kūno paviršiaus elementą ΔS , tiksliau – į to elemento projekciją, statmeną slėgio kryptiai) slėgio jėgai galiam surasti jai lygią priešingos krypties elementariąją slėgio jėgą. Todėl kiekviename horizontaliame panardinto kūno pjūvyje kūnas tik spaudžiamas iš visų pusių, tačiau nestumiamas nė į vieną pusę ir neįgyja horizontalaus pagreičio.

Paskaičiuosime vertikaliją slėgio jėgą, veikiančią į kūną. Į viršutinės kūno dalies paviršiaus kiekvieną elementą ΔS_2 iš viršaus į apačią veikia elementari slėgio jėga (žiūr. 290 „c“ pav.) $/g(h-h_2) \cdot \Delta S_2$, kur ΔS_2 – kūno paviršiaus ploto elemento ΔS_2 projekcijos į horizontaliąją plokštumą

plotas. Į apatinės kūno dalies paviršiaus atitinkamą elementą ΔS_1 iš apačios į viršų veikia elementari slėgio jėga $/g(h-h_1) \cdot \Delta_z S_1$, kur $\Delta_z S_1$ – kūno paviršiaus ploto elemento ΔS_1 projekcijos į horizontaliąją plokštumą plotas. Kadangi $\Delta_z S_1 = \Delta_z S_2$ ir $h_2 > h_1$, tai rezultatinė elementari slėgio jėga, kuri lygi $/g(h-h_1) \Delta_z S_1 \vec{k}$ ir $(- /g(h-h_2) \Delta_z S_2 \vec{k})$ algebrinei sumai $/g(h-h_1) \Delta_z S_1 \vec{k} - /g(h-h_2) \Delta_z S_2 \vec{k} = /g(h_2-h_1) \Delta_z S \vec{k}$, stums elementarų panardinto kūno stulpelį, turintį ilgį h_2-h_1 ir tūrį $(h_2-h_1) \Delta S$, į viršų.

Sudarę visų elementarių rezultolinių slėgio jėgų algebrinę sumą ir priėję prie ribos $\Delta_z S \rightarrow 0$, gausime, kad panardintą į skystį kūną skystis savo hidrostatiniu slėgiu stums į viršų jėga, lygia skysčio, turinčio tą patį tūrį kaip ir panardintas kūnas, svoriui. Kaip matome, gavome tą patį Archimedo dėsnį, tik jį išvedant prireikė šiek tiek daugiau samprotavimų ir daugiau žodžių negu naudojantis Oilerio lygtimi, tačiau neprireikė nei išvestinės, nei gradiento sąvokų.

Iš šito pavyzdžio galima padaryti išvadą: sudėtingesnio matematinio aparato panaudojimas gali pagreitinti išvadų gavimą ir tokio aparato vartojimas pasiteisina, kai laiko išlaidos jo įsisavinimui ar „pasigaminimui“ atsiperka, juo naudojantis. Tačiau nėra racionalu paprastų problemų sprendimui naudoti pernelyg sudėtingą matematinį aparatą. Kartais būna naudinga prisiminti rusišką patarlę „Зачем стрелять по воробьям из пушек, когда воробья можно убить и из рогатки?“*

Juk, labai to norint, galima buvo pasitelkti idealaus skysčio išteklėjimo nagrinėjimui dar sudėtingesnį matematinį aparatą, pavyzdžiui, tenzorinę analizę, įsivesti skysčio greičio potencialo ir tėkmės funkcijas, nagrinėti jų konforminius atvaizdus ir t. t., kaip kartais daroma kai kurių autorių knygose, skirtose hidromechanikai bei kitų terpių, laikomų tolydžiomis (kontinuumais), mechanikai [141, 142].

Suprantama, kad be tenzorius sąvokos, kuri susiformavo apibendrinant skaliaro ir vektoriaus sąvokas (skaliaras yra laikomas nulinės eilės tenzorium, nes jo aprašymui pakanka vieno skaičiaus $1=3^0$; erdvinis vektorius yra laikomas pirmos eilės tenzorium, nes jo aprašymui pakanka trijų skaičių $3=3^1$; antros eilės tenzorius, vaizduojantis, pavyzdžiui, mechaninę įtampą deformuojamame kūne, aprašomas jau $3^2=9$ skaičiais ir t. t.), bei be tenzorinės analizės matematinio aparato tikrai sunku būtų aprašinėti deformacijos procesus ir deformuojamame kūne įvairiose kryptyse atsirandančias ne visada vienodas mechanines įtampas, tačiau, vargu, ar būtų tikslinga vartoti tokią galingą „sunkiąją artileriją“ idealaus skysčio tekėjimo nagrinėjimui? Tai ne tik nepalengvintų šio proceso suvokimo, o, greičiau, užtemdytų jį.

Be konforminio atvaizdavimo (t. y. be vienos kompleksinės plokštumos taškų, linijų ir elementarių trikampių transformavimo į kitos kompleksinės plokštumos atitinkamus taškus, linijas ir elementarius trikampius taip, kad bet kokie kampai tarp bet kurių pirmosios kompleksinės plokštumos linijų liestinių bet kuriame tos plokštumos taške transformuotųsi į lygiai tokius pat kampus tarp minėtųjų pirmosios plokštumos linijų atvaizdų antroje plokštumoje liestinių taškuose, esančiuose atitinkamų pirmosios plokštumos taškų atvaizdais, žiūr. [141, 143]) būtų gana sunku apskaičiuoti skysčio srovės sąveikavimą su kokia nors kliūtimi arba tos srovės skerspjūčio suspaudimo koeficiento ε teorinę reikšmę, skysčiui ištekančiam pro angą, kai tėkmės linijos sudaro įvairius kampus α su indo sienelėmis, kuriose padaryta ta anga.

Tokių paskaičiavimų rezultatas, o taip pat eksperimentinius duomenis galima rasti, pavyzdžiui, knygoje [139].

Žingeidžiam skaitytojui, norinčiam sužinoti, kaip daromi teoriniai ε apskaičiavimai naudojantis konforminiu atvaizdavimu, galima parekomenduoti V. Pragerio knygą [142], kurioje parodyta, kaip idealaus skysčio plokščio jau nusistovėjusio (stacionaraus) tekėjimo atveju, kai ištekančio skysčio tėkmės linijos sudaro su indo dugno plokštuma, kurioje skysčio išteklėjimui padarytas siauras tiesus

plyšys, kampą $\alpha=90^\circ$, išvedama formulė $\varepsilon = \frac{\sigma^*}{\sigma} = \frac{a}{b} = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0,611$, kur b – minėtojo labai siauro

stačiakampio plyšio begaliniai plataus indo dugne ilgis, o a – idealaus ištekančio skysčio plonos plokščios jau nusistovėjusios čiurkšlės skerspjūvio ilgis.

* „Kam šaudyti į žvirblius iš patrankų, kai žvirblį galima užmušti ir iš laidynės?“ Gaila, kad ne visada šia savo liaudies išmintimi vadovaujasi kai kurie Rusijos vadovai, vartodami kovoje su „čečėnų teroristais“ ne tik patrankas, bet ir bombonešius bei napalmą. O gal „teroristai“ – tik patogi priedanga, ir po ta priedangą vykdomas didžiulis Rusijos karas prieš mažą čečėnų tautą, jau nebe pirmą šimtmetį kovojančią dėl savo nepriklausomybės, vykdomas tos tautos genocidas. O „humanistiškieji“ Vakarai apsiriboja tik delikačiomis pastabomis, nes čečėnai neturi nei bankų Uolstrite (Wall Street), nei tų bankų dosniai finansuojamo Vyzentelio centro, kai tuo tarpu Rusijos nafta ir dujos Vakarams labai reikalingos. Tyliame ir mes, kol mūsų dar neliečia, tylime, pamiršę savo praeitį ir nelabai galvodami apie savo ateitį. Nejaugi narsios čečėnų tautos laukia Amerikos indėnų likimas?

Sprendžiant nusistovėjusios čiurkšlės suspaudimo koeficiento apskaičiavimo ir kitus panašius hidrodinamikos bei aerodinamikos uždavinius konforminio atvaizdavimo panaudojimo nauda akivaizdi, ir todėl hidrodinamikos ir aerodinamikos specialistams reikia žinoti to atvaizdavimo metodus ir mokėti jais naudotis. Tačiau būtų neracionalu griebtis konforminio atvaizdavimo, apskaičiuojant idealaus skysčio išteklėjimo vidutinį greitį $\bar{v}$, kai galima nesunkiai įrodyti, kad tokio skysčio vidutinis išteklėjimo greitis $\bar{v}$ nepriklauso nei nuo angos skerspločio, nei nuo srovės suspaudimo koeficiento ε .

Tai galima padaryti ne tik tuo atveju, kai indas turi pastovų skersinio pjūvio plotą S , bet ir bet kokios formos indui. Paprastumo dėlei apsiribosiu atveju, kai indo skerspločio $S(h)$ aukštyje h

priklausomybė nuo to aukščio aprašoma formule $S(h) = \left(\frac{h}{H_0}\right)^{2n} \cdot S_0$, kurioje H_0 – skysčio lygio inde

pradinis aukštis momentu $t=0$, S_0 – indo skersplotis tame aukštyje, o n – bet koks realus neneigiamas skaičius. Kai $n=0$, tai $S(h)=S_0=\text{const.}$, kas atitinka atvejus, kai indas turi ritinio ar prizmės formą, o kai

$n=1$, tai $S(h) = \left(\frac{h}{H_0}\right)^{2n} \cdot S_0$, kas atitinka atvejus, kai indas turi piltuvėlio formą, kuri gaunama apvertus

kūgį arba piramidę. Nesunku įsitikinti, kad kai indas turi paraboloido formą, tai $n=0,5$ ir t. t.

Įrodydamas anksčiau suformuluotą teiginį apie idealaus nesuspaudžiamo skysčio išteklėjimo vidutinio greičio $\bar{v}$ nepriklausomumą nuo σ , ε ir S , kartu ir apskaičiuosiu tą greitį $\bar{v}$, išvesdamas

formulę $\bar{v} = \frac{2n+0,5}{2n+1} \sqrt{2gH_0}$, iš kurios išplaukia, jog ritinio formos indo atveju $\bar{v} = 0,5\sqrt{2gH_0}$, t. y.,

kad vidutinis išteklėjimo greitis yra du kartus mažesnis už maksimalų greitį, kurį ištekančias skystis įgyja išteklėjimo pradžioje.

Iš skysčio nesuspaudžiamumo išplaukia, jog bet kuriuo išteklėjimo momentu, kai skysčio lygio aukštis yra $h(t)=h$, galioja lygybė $S(h)dh = -\varepsilon \cdot \sigma \cdot v \cdot dt$, kur $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$.

$$\begin{aligned} \text{Iš šios lygybės gauname, kad } \frac{h^{2n}}{H_0^{2n}} S_0 dh = -\varepsilon \sigma \sqrt{2gh} dt, \text{ arba } \frac{S_0}{H_0^{2n}} \int_{H_0}^0 h^{2n-0,5} dh = \\ = -\varepsilon \sigma \sqrt{2g} \int_0^T dt, \text{ kur } T - \text{viso skysčio išteklėjimo laikas } T = \frac{S_0 H_0^{0,5}}{\varepsilon \sigma (2n+0,5) \sqrt{2g}}. \end{aligned}$$

Viso išteklėjusio skysčio tūrį V galime apskaičiuoti dviem būdais: 1) $V = \varepsilon \sigma \bar{v} T$ ir

$$2) V = \int_0^{H_0} S(h) dh = \frac{S_0}{H_0^{2n}} \int_0^{H_0} h^{2n} dh = \frac{S_0 H_0^{2n+1}}{H_0^{2n} (2n+1)} = \frac{S_0 H_0}{2n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Iš lygybės } \varepsilon \sigma \bar{v} T = \frac{S_0 H_0}{2n+1} \text{ gauname, kad } \bar{v} = \frac{S_0 H_0}{(2n+1) \varepsilon \sigma T} = \frac{S_0 H_0 \varepsilon \sigma (2n+0,5) \sqrt{2g}}{(2n+1) \varepsilon \sigma S_0 H_0^{0,5}} = \\ = \frac{2n+0,5}{2n+1} \sqrt{2gH_0}, \text{ ką ir reikėjo įrodyti.} \end{aligned}$$

Iš šios formulės išplaukia, jog vidutinis išteklėjimo greitis $\bar{v}$ iš piltuvėlio, turinčio apversto kūgio formą, bus lygus $\frac{5}{6} \sqrt{2gH_0}$, o kai piltuvėlis yra paraboloido formos, tai $\bar{v} = 0,75 \sqrt{2gH_0}$.

Reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį, kad formulę $\bar{v} = \frac{2n+0,5}{2n+1} \sqrt{2gH_0}$, kai $n>0$, galima taikyti idealaus skysčio išteklėjimo vidutinio greičio apskaičiavimui, kai išteklėjimo anga yra indo dugno centre

ir turi, palyginus su S_0 , pakankamai mažą plotą σ , nes esant didelei σ reikšmei integralą $\int_{H_0}^0 h^{2n-0,5} dh$ ir

$\int_0^{H_0} h^{2n} dh$ režius reikėtų imti ne nuo H_0 iki 0, o nuo H_0 iki h_0 , kur h_0 reikšmė apskaičiuojama, naudojantis

formule $\sigma = S_0 \left(\frac{h_0}{H_0}\right)^{2n}$, iš kurios gaunama, kai $n>0$, kad $h_0 = H_0 \sqrt[2n]{\frac{\sigma}{S_0}}$. Tuomet, apskaičiuodami $\bar{v}$,

gautume formulę $\bar{v} = \frac{(2n+0,5) \left[1 - \left(\frac{\sigma}{S_0} \right)^{1+\frac{1}{2n}} \right]}{(2n+1) \left[1 - \left(\frac{\sigma}{S_0} \right)^{1+\frac{1}{4n}} \right]} \sqrt{2gH_0}$, iš kurios išplauktų, kad išteklėjimo iš tokios

formos indų vidutinis greitis $\bar{v}$ nepriklausytų nuo ε ir galėtų būti apskaičiuotas nesinaudojant konforminiu atvaizdavimu, tačiau jau priklausytų nuo angos ploto σ ir indo skerspjūvio ploto S_0 santykio.

Ritinio bei prizmės formos indams kuriems $n=0$, formulė $\bar{v} = \frac{(2n+0,5)}{(2n+1)} \sqrt{2gH_0}$, t. y. formulė $\bar{v} = 0,5 \sqrt{2gH_0}$, gali būti taikoma bet kokio dydžio angoms, turinčioms plotą $\sigma \in (0, S]$.

Idealaus skysčio išteklėjimo vidutinio greičio apskaičiavimo formulė čia buvo išvesta ne tik tam, kad pailiuotume teiginį, jog daugelyje atvejų mes galime gauti įdomias išvadas ir nesinaudodami tokiu sudėtingu matematiniu aparatu kaip matematinės fizikos lygčių sprendimo metodai, tenzorinis skaičiavimas, konforminis atvaizdavimas ir pan., bet ir tam, kad suteiktume skaitytojui galimybę natūriniais eksperimentais patikrinti, kuri iš idealaus skysčio išteklėjimo greičio v

apskaičiavimo formulių ($v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ ar $v(t) = \frac{\sqrt{2gh(t)}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$) atitinka tikrovę, kuri ne.

Išteklėjimo momentinio greičio $v(t)$ eksperimentinis matavimas – sudėtingas dalykas, tačiau išmatuoti skysčio išteklėjimo laiką T , turint gerą laikrodį (pavyzdžiui, chronometrą), yra gana paprasta. Ir tai leidžia gana paprastais eksperimentais patikrinti minėtas hipotezes.

Nagrinėsime atvejį, kai indas, iš kurio išteka skystis, yra ritinio ar prizmės formos. Tuomet bet kokio ploto angai σ galioja formulė $\bar{v} = 0,5 \sqrt{2gH_0}$. Ši formulė buvo išvesta, naudojantis formule $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$, ir yra teisinga, jei teisinga mano ginama idealaus iki angos atidarymo stovėjusio inde skysčio išteklėjimo greičio apskaičiavimo formulė $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$. Jei teisinga mano oponentų ginama

formulė $v(t) = \frac{\sqrt{2gh(t)}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, tai išteklėjimo vidutinio greičio $\bar{v}$ formulė, kai $n=0$, turėtų būti

$\bar{v} = 0,5 \sqrt{\frac{2gH_0}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}} = 0,5 S \sqrt{\frac{2gH_0}{S^2 - \sigma^2}}$. Ši formulė turi tą pačią „silpnąją vietą“, kaip ir formulė

$v(t) = \frac{\sqrt{2gh(t)}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$: kai $\sigma \rightarrow S$, tai vidutinis greitis $\bar{v}$ turėtų artėti prie ∞ ir skystis turėtų momentaliai

„iškristi“ iš indo, kas neatitinka tikrovės, nes, kaip nesunku patikrinti natūriniu eksperimentu, skysčiai gana artimi idealiam (vanduo, pienas, spiritas ir pan.) „iškrenta“ iš indo, atidarius jo visą dugną, ne be galo greit, kaip tai išplaukia iš mano oponentų ginamos formulės, o per laiką, truputį didesnį už

$T = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$, kuri gautume, pasinaudoję mano ginama formule. Nevisiškai pilnas sutapimas

paiškinamas skysčio trintimi ir oro pasipriešinimu. Skysčiai, turintys didesnį klampumą, iškrinta dar lėčiau, ir tai rodo, kad **mano oponentų ginama formulė netinka nei idealiems, nei, tuo labiau, realiams skysčiams, o tik idealaus skysčio pratekėjimui.**

Čia aprašytiems natūriniais eksperimentams reikia turėti specialų indą su greitai ištraukiamu dugnu – sklende, kas nėra taip jau patogiu, o be to tokiuose eksperimentuose sunku pasiekti pakankamą matavimų tikslumą. To tikslumo pakanka, kad paneigtume mano oponentų ginamą formulę, tačiau, norint pilnai įrodyti mano ginamos formulės tinkamumą, reiktų tikslesnio eksperimento.

Toks eksperimentas yra galimas. Iš mano ginamos formulės išplaukia, kad idealaus skysčio, turinčio tūrį V , išteklėjimo iš indo, kai $n=0$, laikas turėtų būti lygus $T = \frac{V}{\varepsilon \sigma \bar{v}} = \frac{SH_0}{\varepsilon \sigma 0,5\sqrt{2gH_0}} =$

$$= \frac{S}{\varepsilon \sigma} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}. \text{ Šią formulę nesunku patikrinti natūriniais eksperimentais, išmatavus } T, H_0, S \text{ ir } \sigma \text{ bei}$$

apskaičiavus ε ir įstačius gautus duomenis kartu su žinoma laisvo kritimo pagreičio g reikšme į tą formulę.

Skysčio čiurkšlės suspaudimo koeficiento ε apskaičiavimą (o kartu ir konforminio atvaizdavimo panaudojimą) ir šį kartą galime „apeiti“, kartu sumažindami ir reikalingų matavimų skaičių, tuo pačiu palengvindami eksperimentavimą ir padidindami eksperimento rezultatų tikslumą.

Tarkime, jog turime du visiškai vienodus indus, kurių $n=0$. Pasidarysime tų indų dugnuose dvi vienodos formos angeles, besiskiriančias tik savo plotais σ_1 ir σ_2 . Kol kas užkimšime (ar kaip nors kitaip uždengsime) tas angeles ir pripildysime į tuos indus kokio nors skysčio, pakankamai artimo idealiam (pavyzdžiui, švaraus vandens), iki vienodo lygio H_0 . Atidarysime angelę pirmojo indo dugne ir išmatuosime skysčio išteklėjimo iš indo laiką T_1 . Jei laikytume, jog teisinga mano ginama hipotezė, tai

tas laikas turėtų būti pakankamai artimas dydžiui $T_1^* = \frac{S}{\varepsilon \sigma_1} \sqrt{\frac{2gH_0}{g}}$. Analogiškai išmatuosime skysčio

išteklėjimo iš antrojo indo laiką T_2 , kuris, esant teisingai mano hipotezei, turėtų būti pakankamai artimas

dydžiui $T_2^* = \frac{S}{\varepsilon \sigma_2} \sqrt{\frac{2gH_0}{g}}$. Dydžių T_1 ir T_2 santykis turėtų būti pakankamai artimas santykiui

$$\frac{T_1^*}{T_2^*} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \text{ t. y. išteklėjimo iš indų laikai turėtų būti atvirkščiai proporcingi angų jų dugnuose plotams.}$$

Tai jau tikrai nesunku patikrinti gana paprastais eksperimentais, ir tai jau gana seniai žino iš praktikos daugelis žmonių, turinčių reikalų su ištekančiais skysčiais.

Jei būtų teisinga mano oponentų hipotezė, tai T_1 turėtų būti artimas dydžiui

$$T_1^{**} = \frac{1}{\varepsilon \sigma_1} \sqrt{\frac{2H_0(S^2 - \sigma_1^2)}{g}}, \text{ o } T_2 - \text{ dydžiui } T_2^{**} = \frac{1}{\varepsilon \sigma_2} \sqrt{\frac{2H_0(S^2 - \sigma_2^2)}{g}}, \text{ iš kur gautume, jog santykis}$$

$$\frac{T_1}{T_2} \text{ turėtų būti artimas santykiui } \frac{T_1^{**}}{T_2^{**}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sqrt{\frac{S^2 - \sigma_1^2}{S^2 - \sigma_2^2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sqrt{\frac{1 - \frac{\sigma_1^2}{S^2}}{1 - \frac{\sigma_2^2}{S^2}}}. \text{ Šis santykis } \sqrt{\frac{S^2 - \sigma_1^2}{S^2 - \sigma_2^2}} \text{ karto}$$

skiriasi nuo iš mano ginamos hipotezės išplaukiančio santykio $\frac{T_1^*}{T_2^*} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, ir todėl, kai $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ir bent

vienas iš santykių $\frac{\sigma_1}{S}$ ar $\frac{\sigma_2}{S}$ nėra labai maži dydžiai, santykiai $\frac{T_1^*}{T_2^*}$ ir $\frac{T_1^{**}}{T_2^{**}}$ turėtų skirtis gana

reikšmingai, o tai ir leistų natūriniais eksperimentais patikrinti, kuri iš hipotezių yra teisinga.

Kadangi $T^{**} < T^*$, o eksperimentų metu gauname, kad skysčio išteklėjimo laikas T apytikriai lygus T^* , būdamas už jį truputį didesnis, tai iš nelygybių $T^{**} < T^* < T$ nesunku padaryti išvadą, kuri iš

hipotezių arčiau tikrovės. Eksperimentų metu gaunamas santykis $\frac{T_1}{T_2}$ yra gana artimas santykiui

$$\frac{T_1^*}{T_2^*} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ ir, kai } \sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ ir bent vienas iš santykių } \frac{\sigma_1}{S} \text{ arba } \frac{\sigma_2}{S} \text{ nėra labai mažas dydis, žymiai}$$

skiriasi nuo santykio $\frac{T_1^{**}}{T_2^{**}}$. Tai dar kartą patvirtina, kad mano ginama formulė $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$

artimesnė tikrovei negu mano oponentų siūloma formulė $v(t) = \sqrt{\frac{2gh(t)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$. Siūlyčiau skaitytojui pačiam

pakartoti šiuos gana nesudėtingus eksperimentus ir pačiam nuspręsti, kuri iš hipotezių yra teisingesnė.

Įdomu, kad vienas iš mano oponentų, perskaitęs čia pateiktus samprotavimus ir eksperimentaliai įsitikinęs, kad mano ginama formulė $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ labiau atitinka tikrovę negu

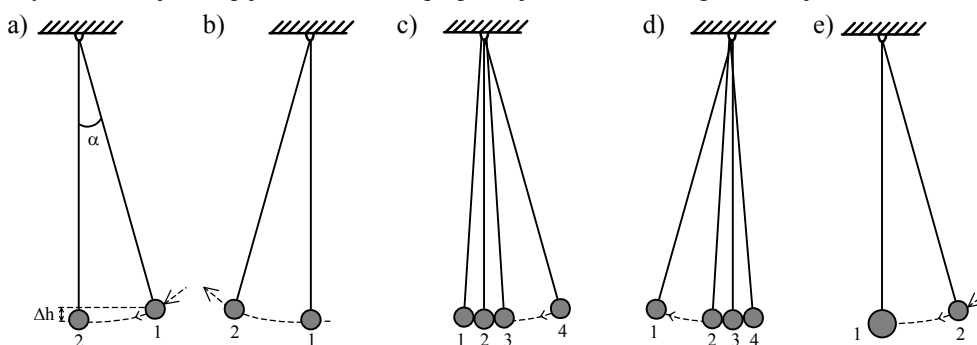
„patikslintoji“ formulė $v(t) = \frac{\sqrt{2gh(t)}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, pareiškė: „Matyt, tikrai formulė $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ yra labiau

priimtina negu formulė $v(t) = \frac{\sqrt{2gh(t)}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$, tačiau aš vis dėl to negaliu įsivaizduoti, kaip, skysčiui ištekančiam iš indo, skystis inde, kai jo lygis slūgsta, gali nejudėti ir neįgyti kinetinės energijos“.

Manau, kad panašios abejonės gali kilti ne vienam šių eilučių skaitytojui, tuo labiau, kad kai kurie iš jų stebėjo ištekančių dažytų realių skysčių sroves bei matė fotografijas, iš kurių galima padaryti išvadą, kad tėkmės linijos skysčiuose – ne tik teorinė abstrakcija, bet ir realiai egzistuojantis reiškinys. Juk Helmholtz (H.Helmholtz. Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegung, Monatsbericht. Berlin. Akad., 1868) ir Kirchhofo (G.Kirchhoff. Zur Theorie freier Flursigheitsstrahlen, J.Reine angew. Math., 70, 1869) tėkmės linijų teorija atsirado ne tuščioje vietoje ir nėra vien tik matematikų abstrakčios vaizduotės tvarinys.

Kad išsklaidyčiau galimas skaitytojų abejones mano ginamos hipotezės teisingumu, priminsiu jiems ir savo oponentams keletą labai paprastų ir lengvai pakartojamų eksperimentų, apie kuriuos daugelis iš jų yra girdėję, o kai kurie – net ir matę, tačiau juos primiršę ir dėl sisteminio mąstymo stokos dabar nesugeba pamatyti ryšio tarp čia nagrinėjamo reiškinio ir tų eksperimentų, kas ir trukdo prisiminti tuos eksperimentus bei padaryti iš jų išplaukiančias išvadas.

Pakabinkime ant ilgo plono siūlo du vienodus gana masyvius plieninius rutuliukus (tinka taip pat ir biliardo rutuliai bei pingpongo rutuliukai) ir vieną, atlenkę nuo pusiausvyros būsenos, kaip parodyta 291 „a“ pav., paleiskime laisvai kristi ir atsitrėnkti į antrąjį rutuliuką, ramiai kabantį pusiausvyros būsenoje. Kaip judės rutuliukai po pirmojo rutuliuko smūgio į antrąjį?



291 pav.

Jei Jūs manote, kad po smūgio abu plieniniai rutuliukai pradės judėti pirmojo rutuliuko judėjimo kryptimi, tik su mažesniu greičiu, tai apsirinkite. Taip judėtų rutuliukai, jei jie, pavyzdžiui, būtų vaškiniai. O plieniniai rutuliukai pasiels kitaip: po smūgio pirmasis rutuliukas sustos ir pasiliks antrojo rutuliuko vietoje, o antrasis rutuliukas pratęs pirmojo rutuliuko judėjimą, perimdamas iš pastarojo jo visą kinetinę energiją ir judesio kiekį (energijos nuostoliai dėl trinties šiame eksperimente bus tokie maži, kad mes plika akimi jų iškart net nepastebėsime). Jei skaitytojas netiki, kad tikrai taip bus, jis pats gali pakartoti šį eksperimentą, o aš čia pateiksiu paskaičiavimus, kurie parodys, kad kitaip ir būti negali, t. y. įvykdysiu vietoj natūrinio matematinį eksperimentą, laikydamas, kad energetiniai nuostoliai dėl oro pasipriešinimo ir siūlo trinties bei jo inercijos yra lygūs 0.

Tarkime, kad kiekvieno plieninio rutuliuko masė lygi m , o siūlo masė, lyginant ją su rutuliukų mase, yra tokia maža, kad ją galima laikyti lygia 0. Tarkime taip pat, kad pirmąjį rutuliuką mes atlenkėme koku nors kampu α ir todėl jo masės centrą pakėlėme virš antrojo rutuliuko masės centro atitinkamu aukščiu Δh (žiūr. 291 „a“ pav.). Pirmasis rutuliukas, judėdamas antrojo rutuliuko link, savo

potencinę energiją $mg\Delta h$ pavers kinetine energija $\frac{mv^2}{2}$, įgydamas greitį $v = \sqrt{2g\Delta h}$ ir judesio kiekį

$mv = m\sqrt{2g\Delta h}$. Kadangi antrasis rutuliukas iki smūgio neturėjo kinetinės energijos ir jo judesio kiekis buvo lygus 0, tai iš energijos tvermės ir judesio kiekio tvermės dėsnių išplaukia, kad tuoj pat po smūgio

pirmojo ir antrojo rutuliukų greičiai v_1 ir v_2 turi būti tokie, kad būtų tenkinamos lygybės:

$$1) \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = mg\Delta h; \quad 2) mv_1 + mv_2 = mv = m\sqrt{2g\Delta h}.$$

Supaprastinę šias lygybes, gauname lygčių sistemą $\begin{cases} v_1^2 + v_2^2 = v^2 \\ v_1 + v_2 = v \end{cases}$, iš kuriuos galima rasti v_1 ir

v_2 , laikant, kad v – mums žinomas skaičius, didesnis už 0.

Pakėlę kvadratu abi antrosios lygybės puses, gausime lygybę $v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 = v^2$. Atėmę iš šios lygybės abiejų pusių pirmosios lygybės atitinkamas puses, gausime, jog $2v_1v_2 = 0$. O tai reiškia, kad vienas iš greičių v_1 ar v_2 turi būti lygus 0, o kitas – lygus v .

Kadangi pirmasis rutuliukas „perskroستی“ antrojo rutuliuko, praskrisdamas pro jį greičiu v ir palikdamas antrąjį rutuliuką vietoje, fiziškai negali, tai nelieka nieko kita, kaip tik priimti, kad $v_1 = 0$, o $v_2 = v$. Kad taip yra ir iš tikrųjų, patvirtina natūrinis eksperimentas. Situacija, kurią stebime po rutuliukų smūgio, pavaizduota 291 „b“ pav. Taigi, gavome, kad plieniniai rutuliukai, kurių smūgį galima laikyti idealiai tampriu (stangriu), kuomet rutuliukų mechaninės energijos kiekis smūgio metu išlieka nepakitęs, smūgio metu pasikeičia vaidmenimis: pirmasis rutuliukas, neperduodamas savo masės ir medžiagos, perduoda antrajam rutuliukui savo kinetinę energiją bei judesio kiekį ir po to antrasis rutuliukas juda taip, kaip būtų judėjęs pirmasis rutuliukas, jei antrojo nebūtų buvę.

Jei į kabantį antrąjį vaškinių rutuliuką trenktųsi pirmasis vaškinis rutuliukas, jų smūgis nebūtų tamprus, nes deformacija, kurią patirtų rutuliukai smūgio metu, išliktų ir po smūgio. Todėl mechaninė energija, kuri buvo išeikvota deformacijai, jau nebegrįžtų, o pavirstų šilumine energija. Mechaninės energijos, pavirtusios šilumine, kiekį galima būtų apskaičiuoti, pasinaudojus jau minėtais energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniais bei tuo eksperimento metu nustatytu faktu, kad po smūgio abu vaškiniai rutuliukai judėtų kartu vienodu greičiu, kurį pažymėsime v_3 ir apskaičiuosime, pasinaudodami judesio

tvermės dėsniu $(m+m)v_3 = mv$, iš kurio išplaukia, jog $v_3 = \frac{v}{2}$. Iš energijos tvermės dėsniu gautume, jog šiluminės energijos kiekis E_s , atsiradęs vaškinių rutuliukų smūgio metu, būtų lygus

$$E_s = \frac{mv^2}{2} - \frac{2m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Tai reiškia, jog jei laiktume dviejų vienodų vaškinių rutuliukų smūgį

absoliučiai netampriu, tai to smūgio metu pusė kinetinės energijos virstų šilumine. Realūs realių rutuliukų smūgiai nebūna nei idealiai tamprūs, nei idealiai netamprūs, tačiau dėl plieno stangrumo plieninių rutuliukų smūgį galima laikyti gana artimu idealiai tampriam smūgiui, kurio metu atsiradusi deformacija yra pilnai grįžtama ir todėl mechaninės energijos kiekis išlieka nepakitęs, o vaškinių rutuliukų smūgį dėl vaško plastiškumo galima laikyti gana artimu pilnai netampriam smūgiui, kurio metu visa įvykusi deformacija yra negrįžtama.

Tarkime dabar, kad rimties būsenoje kabo trys vienodi plieniniai rutuliukai, o prie jų, turėtos bei turimos potencinės energijos sąskaita didindamas savo greitį, artėja ketvirtasis toks pat rutuliukas (žiūr. 291 „c“ pav.). Nesunku įrodyti, kad po smūgio ketvirtasis ir pirmasis rutuliukai lyg ir pasikeis vaidmenimis: ketvirtasis rutuliukas užims trečiojo rutuliuko vietą ir pereis į rimties būseną, perduodamas visą savo kinetinę energiją ir visą judesio kiekį pirmajam rutuliukui, kuris prates ketvirtojo rutuliuko judėjimą. Mums šiuo atveju svarbiausia yra tai, kad tas **energijos ir judesio kiekio (impulso) perdavimas vyksta per trečiąjį ir antrąjį rutuliukus, juos tik šiek tiek pastumiant, bet nesuteikiant jiems nei judesio kiekio, nei kinetinės energijos.** Aš manau, kad skaitytojas jau pastebėjo **analogiją tarp to, kaip plieniniai rutuliukai sugeba perduoti savo energiją ir impulsą per kitus rutuliukus, juos tik pastumdami, bet nesuteikdami jiems nei judesio kiekio, nei kinetinės energijos, ir to, kaip slūgsta inde idealus skystis, jam ištekančiam pro angą indo dugne.** Galbūt, po to, kai aš matematiškai įrodysiu, tai, ką vaizduoja 291 „c“ ir „d“ pav., ir kai bet kuris skaitytojas, įvykdęs atitinkamą natūrinį eksperimentą, įsitikins, kad tas eksperimentas patvirtina išvadą, išplaukiančias iš matematinio eksperimento, tam skaitytojui **mano ginama hipotezė, kad idealus skystis gali slūgti, neįgydamas greičio ir kinetinės energijos, nebeatrodys tokia abejotina?**

Matematiškai aprašydami idealiai tamprų smūgį, pervedantį situaciją, vaizduojamą 291 „c“ pav., į situaciją, vaizduojamą 291 „d“ pav., gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2} = \frac{mv^2}{2}, \\ mv_1 + mv_2 + mv_3 + mv_4 = mv. \end{cases}$$

$$\text{Supaprastinę tą sistemą, gauname } \begin{cases} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = v^2, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v. \end{cases}$$

Pakėlę abi antrosios lygties puses kvadratu ir atėmę iš jos abiejų pusių atitinkamas pirmosios lygties puses, gausime, kad $v_1(v_2+v_3+v_4)+v_2(v_1+v_3+v_4)+v_3(v_1+v_2+v_4)+v_4(v_1+v_2+v_3)=0$.

Laikydami, kad greičiai v_1, v_2, v_3 ir v_4 nėra neigiami, gauname keturis matematiškai leistinus sprendinius: 1) $v_1=v, v_2=0, v_3=0, v_4=0$; 2) $v_1=0, v_2=v, v_3=0, v_4=0$; 3) $v_1=0, v_2=0, v_3=v, v_4=0$; 4) $v_1=0, v_2=0, v_3=0, v_4=v$.

Pirmasis sprendinys yra leistinas ne tik matematiškai, bet ir fiziškai, o antrasis ir trečiasis, nors ir leistini matematiškai, bet nerealizuojami fiziškai nei prieš smūgį, nei smūgio metu, nei po smūgio. Ketvirtasis sprendinys galėjo būti realizuojamas prieš smūgį, tačiau negali būti realizuotas po smūgio. Taigi, lieka tik pirmasis sprendinys, kurį vaizduoja 291 „d“ pav. Jis sutampa su natūrinio eksperimento rezultatu.

Fiziškai ir matematiškai realizuojamu galėtų būti dar vienas sprendinys: $v_1=v_2=v_3=\frac{v}{2}, v_4=-\frac{v}{2}$,

nes tuomet gautume, jog $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2} = 4m \frac{v^2}{8} = \frac{mv^2}{2}$ ir $\frac{3mv}{2} - \frac{mv}{2} = mv$, t. y. gautume, jog tenkinami energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniai.

Šis sprendinys atitiktų atvejį, kai pirmasis, antrasis ir trečiasis rutuliukai būtų sujungti į vieną nedalomą kūną. Tai vaizduoja 291 „e“ pav., kuriame vietoj trijų rutuliukų (pirmojo, antrojo ir trečiojo) pakabintas vienas plieninis rutulys, turintis tų trijų rutuliukų masę. Pažymėję to rutulio greitį tuoj po smūgio žymeniu v_1 , o ketvirtojo rutuliuko, turinčio masę m , prieš pat smūgį – žymeniu v , o tuoj pat po

smūgio – žymeniu v_2 , gausime lygybes: 1) $\frac{3mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$; 2) $3mv_1 + mv_2 = mv$.

$$\text{Supaprastinę šias lygtis iš } m>0, \text{ gauname lygčių sistemą } \begin{cases} 3v_1^2 + v_2^2 = v^2, \\ 3v_1 + v_2 = v. \end{cases}$$

Pakėlę kvadratu abi antrosios lygties puses ir atėmę iš jų atitinkamas pirmosios lygties puses, gausime, kad $6v_1^2 + 6v_1v_2 = 0$, iš kur išplaukia, jog $v_1(v_1+v_2)=0$.

Ši lygtis turi du sprendinius: 1) $v_1=0$; 2) $v_1=-v_2$. Pirmasis sprendinys galėtų atitikti tą atvejį, jei judantis rutuliukas galėtų „pereiti“ per kabantį rutulį, jo nepajudindamas. Toks atvejis tiesiogiai negali būti realizuotas, bet energijos ir impulso perdavimo požiūriu atitinka mūsų jau išnagrinėtąjį nesurištų plieninių rutuliukų atvejį, kada ketvirtasis judantis rutuliukas lyg ir „pereina“ per kabančius rutuliukus „virsdamas“ pirmuoju judančiu rutuliuku, panašiai kaip idealaus skysčio viršutinis sluoksnis inde, skysčiui tekant iš indo, lyg ir „prakrinta“ per visus kitus sluoksnius, „tapdamas“ žemutiniu to skysčio sluoksniu, ištekančiu pro angą, kai tuo tarpu visi kiti sluoksniai lyg ir lieka savo vietose. Tikrovėje viršutinis idealaus skysčio sluoksnis neprakrinta, o tik perduoda savo energiją ir impulsą žemutiniam sluoksniui per visus tarpinius sluoksnius, juos tik pastumdamos, tačiau neperduodamas jiems nei savo energijos, nei impulso.

Antrasis sprendinys atitinka atvejį, pavaizduotą 291 „e“ pav., kai pirmasis, antrasis ir trečiasis plieniniai rutuliukai sujungti į vieną tris kartus masyvesnį rutulį. Tuomet gauname, jog

$$3v_1+v_2=3v_1-v_2=2v_1, \text{ iš kur išplaukia, jog } v_1 = \frac{v}{2}, \text{ o } v_2 = -\frac{v}{2}, \text{ t. y., judantis rutuliukas, turintis masę } m$$

ir prieš pat susidūrimą su trigubai masyvesniu rutuliuku įgijęs greitį v , atsitrenkęs į tą rutulį, atsloka į priešingą pusę su dvigubai mažesniu greičiu, o rutulys, turintis masę $3m$, atsitrenkusio rutuliuko pastumtas, pradeda judėti tą rutulį išjudinusio rutuliuko smūgio kryptimi, įgijęs pusę to rutuliuko buvusio greičio.

Šią matematiškai gautą išvadą nesunku patikrinti natūriniu eksperimentu ir įsitikinti, jog ir ši kartą fizikos dėsniai ir matematika nemeluoja.

Jei 291 „e“ pav. pavaizduoti rutulys ir rutuliukas būtų buvę ne plieniniai, o vaškiniai, būtume gavę kitonišką rezultatą: po smūgio rutulys ir rutuliukas pradėtų judėti rutuliuko judėjimo kryptimi vienodu greičiu, sudarančiu ketvirtadalį to greičio, su kuriuo mažesnis rutuliukas trenkėsi į didįjį rutulį. Ši išvada išplaukia iš tos prielaidos, kad vaškinių rutuliukų smūgis absoliučiai netamprus ir rutuliukų deformacija absoliučiai negrįžtama, o taip pat iš judesio kiekio tvermės dėsnio $3mv_1+mv_1=mv$, iš kur

išplaukia, kad $v_1 = \frac{v}{4}$. Tokio absoliučiai netampraus (nestangraus) smūgio metu trys ketvirtadaliai smūgiuojančiojo mažojo vaškinio rutuliuko kinetinės energijos pereitų į šiluminę energiją, o likusis

ketvirtadalis taptų kinetine vaškinio rutulio ir vaškinio rutuliuko bendro judėjimo po smūgio kinetine energija, o dar vėliau – jų bendra potencine energija, po to – vėl kinetine energija ir t. t.

Iš eksperimentų, pavaizduotų 291 pav., išplaukia išvada, kad **idealiai tampraus smūgio metu galimas energijos impulso perdavimas tik pastumiant tarpinius kūnus, bet nesuteikiant jiems nei kinetinės energijos, nei impulso. Tai atitinka energijos ir impulso perdavimą idealiame iki tol stovėjusiame skystyje, jam pradėjus tekėti pro angą indo dugne.**

Apie panašų reiškinį aš jau esu kalbėjęs, aprašinėdamas skysto helio He II judėjimą skystame helyje He I, kai skysto helio temperatūra tampa artima absoliučiam nuliui. Ten buvo pažadėta, kad vėliau bus papasakota apie žymiai paprastesnius reiškinius, patvirtinančius mano hipotezės apie idealaus skysčio ištekėjimo iš indo, tam skysčiui nejudant, o tik slūgstant pačiame inde, teisingumą. Eksperimentai su plieniniais rutuliukais kaip tik ir yra tų žadėtųjų reiškinių pavyzdžiai. Panašius reiškinius galima stebėti ir žaidžiant biliardu. Eksperimentai su vaškiniais rutuliukais galėtų duoti atsakymą, kaip turėtų vykti labai klampaus realaus skysčio tekėjimas.

Kad mano hipotezė yra teisinga, patvirtina ir daugybė kitų gerai žinomų faktų. Vienas iš jų – **garso sklidimas kietais kūnais ir skysčiais.** Pridėję ausį prie geležinkelio bėgio, Jūs galite išgirsti artėjančią traukinį, kai kiti žmonės to artėjančio traukinio garso, sklindančio oru, dar negirdi. Tai rodo, kad garso bangos metalu sklinda greičiau ir su mažesniais energetiniais nuostoliais negu oru. Bet mums šįkart svarbu ne tai, o tai, kad **judančio traukinio ratų bėgiams perduodama energija pasiekia mūsų ausį, metalo dalelės nejudant garso sklidimo kryptimi, o tik virpant savo vietose.** Panašiai garso bangos sklinda ir vandeniui, kuo nesunku įsitikinti, pasinėrus į ežerą ir pasiklausius, kaip pliuškena nuo kito kranto atplaukiančios valtys irklai. Mūsų ausis pasiekusios garso bangos neatneša su savimi tuos irklus lietusią vandens dalelių.

Taip sklinda ne tik garso bangos, bet ir paprastos bangos vandens paviršiumi. Įmeskite į ežerą ar kūdrą akmenėlį ir pasižiūrėkite, kaip vandens paviršiumi ratilais sklinda įkritusio akmenėlio sukeltos bangos. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad vanduo lyg ir bėga bangomis į visas puses nuo akmenėlio įkritimo taško. Tačiau, atidžiau pasižiūrėję, pastebėsime, kad vandens paviršiuje esantį šiaudelį tos ratilais bėgančios bangos tik kilnoja aukštyn–žemyn, nenešdamas jo savo judėjimo kryptimi. Tai rodo, kad **bangos vandens paviršiumi bėga, o vandens dalelės tik svyruoja statmenai bangų judėjimo kryptiai, neįgydamos greičio ta kryptimi.**

Panašūs reiškiniai visiems gerai žinomi ir nieko nestebina, nes yra įprasti, daug kartų stebėti. O štai, kad idealus skystis gali perduoti energiją ir impulsą, pats nejudėdamas ta kryptimi ir neįgydamas atitinkamos kinetinės energijos, daugeliui žmonių atrodo abejotinu teiginiu. Tai rodo, kad **daugeliui žmonių trūksta sugebėjimo surišti atskirus faktus į sistemą ir padaryti iš to išplaukiančias išvadas, t. y. trūksta to, ką vadina sisteminiu mąstymu.** Matyt, **sisteminio mąstymo ugdymui reikėtų skirti daugiau dėmesio visose mokymo pakopose.** Dabar gi jam šioks toks dėmesys skiriamas tik pradinėse klasėse, o vėliau, perėjus į atskirų dalykų mokymą, apie tai pamirštama. Ne ką geresnė padėtis ir aukštesiose mokyklose. Man ne vieną kartą teko ginčytis su kai kuriais savo kolegomis, įsitikinusiais, kad sistemos tyros kursas visai nereikalingas, nes sistemos tyra kaip naudingas mokslas, jų manymu, egzistuoti negali. Jų žodžiais, „ką naujo ir naudingo gali duoti sistemos tyra, diletantiškai sklindanti įvairių specialių mokslų paviršiumi, lyginant su specialiais mokslais, kurių kiekvienas nagrinėja savo specialią sritį ir žymiai detaliau, ir žymiai giliau?“ Šie mano kolegos būtų visiškai teisūs, jei neegzistuotų toks reiškinys kaip emerđžencija, pasireiškiantis tuo, kad, paprastesnėms sistemoms jungiantis į sudėtingesnę, dėl naujų ryšių atsiradimo gali atsirasti ir naujos savybės, kurių neturėjo jungiamos paprastesnės sistemos. **Kaip tik tų naujų ryšių suradimu bei sudarymu ir iš jų išplaukiančių savybių bei išvadų nagrinėjimu ir užsiima sistemos tyra, ir to padaryti negali joks atskiros specialaus mokslo atstovas, netapęs sistemos tyrininku, t. y. nepradėjęs nagrinėti ryšių tarp reiškinų, priklausančių atskiroms specialaus mokslo, technikos ir gyvenimo sritims.** Taigi, ir sistemos tyra ir specialūs mokslai, orientuoti į kokiais tai žymiai siauresnės sritis, išsiskiriančias savo specifika, yra reikalingi ir vienas kitą papildo. **Sistemos tyra tampa dar labiau reikalinga dabar, kai iškyla įvairių sričių specialistų kolektyvinio darbo reikiamybė, sprendžiant kokią nors sudėtingą kompleksinę problemą, kada be įvairių sričių specialistų bendravimo, be jų susikalbėjimo tarpusavyje, be vienas kito supratimo, be visų bendro darbo vadovavimo, ką gali padaryti tik dženeralistas, sugebantis dalykiškai bendrauti su įvairių sričių specialistais, gerai suderintas ir efektyvus tokio didelio ir margo kolektyvo darbas tampa nebepasiekiamu dalyku.** Nereikia būti ypatingu pranašu, kad galėtum numatyti, jog ateityje sistemos tyros ir dženeralistų reikšmė ir poreikis tik didės. **Kartu didės ir sisteminio modeliavimo bei matematinių eksperimentų su sudėtingu sistemų modeliais reikšmė ir poreikis.**

Atsakysiu į dar vieną jau kitų mano kolegų priekaištą man, kad aš be reikalo perkraunąs sistemos tyros kursą, nagrinėdamas klausimus, kuriuos studentai privalėtų žinoti iš specialių matematikos, fizikos, chemijos ir t. t. kursų.

Aš sutikčiau su šiuo savo kolegų priekaištu, jei didelė dalis studentų tikrai žinotų visa tai, ko reikia sistematyrai, kad ji, sintezuodama atskirų mokslų pasiekimus, emeridžencijos reiškiniu dėka gamintų naują naudingą informaciją, ugdydama sisteminę pasaulėžiūrą ir sisteminio mąstymo įgūdžius. Bet tikrovėje, gaila, taip nėra, ir sistematyrai negali sujungti studentų galvose į naują visumą tų iš įvairių mokslų ateinančių dalių, jei tų dalių studentų galvose iš viso nėra ar yra tik atskiros nuotrupos ir labai miglotas tų dalių kaip savo rūšies atskirų sistemų suvokimas. Todėl ir tenka daug ką kartoti, gaištant savo ir studentų laiką.

Tačiau tas studentų ir mano sugaištas laikas nedingsta veltui. Jis reikalingas ir naudingas ne tik sistematyrai, bet ir įvairiems specialioms mokslams, nes studentai, kartodami jau girdėtus dalykus ir sujungdami juos į vieningą sistemą, pažvelgia į tuos girdėtus dalykus visiškai iš naujos pusės ir pamato juose daug ką, ko anksčiau pastebėję nebuvo. Ir, kas svarbiausia, **mokosi naudotis žiniomis, paimtomis iš atskirų specialių mokslų, sprendžiant sudėtingas problemas**, aktualias ir praktikai ir mokslui.

Juk nepakanka, kad studentas pakankamai daug **žinotų**, įgydamas daug naujų žinių. Reikia dar, kad studentas pakankamai gerai **suprastų** tai, ką sužino ir žino, o ne mechaniškai įsimintų tam tikrą sąrašą faktų, formulių bei įvairių taisyklių. Bet ir to dar nepakanka, nes reikia, kad studentas dar ir **mokėtų tuo, ką sužinojo ir suprato, naudotis**, sprendžiamas įvairias išskylančias problemas.

Įvairūs universitetuose dėstomi kursai gana daug dėmesio skiria **žinojimui**, naujų žinių pateikimui. Nors kartais ir nepakankamai, bet vis dėl to dauguma dėstytojų nemažai dėmesio skiria ir tam, kad būtų pasiektas reikiamas studijuojamo dalyko **supratimo lygis**, o taip pat patikrinimui, kaip giliai studentai suprato tai, ką sužinojo. Tačiau dėl laiko stokos, dėl objektyvių sąlygų nebuvimo, o taip pat ir dėl pačių dėstytojų kaltės visiškai **nepakankamai dėmesio skiriama tam, kad studentai būtų išmokyti įgytomis ir suprastomis žiniomis naudotis praktikoje**, o ne tik sprendžiant specialiai parinktus labai jau supaprastintus uždavinėlius iš uždavinynų, kur labai aišku, ką reikia rasti, viskas, ko tam reikia, duota ir belieka tik pasirinkti ir pritaikyti atitinkamą formulę ar kelių formulių rinkinį. Ar ne todėl **atsiranda ta didžiulė praraja tarp universitetuose įgyjamų žinių bei įgūdžių ir tų gyvenimo praktikos keliamų poreikių, su kuriais susiduria daugelis studentų, baigę universitetus ir pradėję ieškoti įgytų žinių ir sugebėjimų pritaikymo gyvenime**, kai, vaizdžiai tariant, nebe tiek reikalinga „indukcija ir dedukcija, kiek sugebėjimas gaminti reikalingą produkciją?“ Ar ne todėl ne taip jau mažai mūsų buvusių studentų sako, kad iš viso to, ką jie išmoko universitete, jiems prireikė tik mokėjimo dirbti su kompiuteriu ir nieko daugiau?

Nepasakyčiau, kad buvusių studentų pretenzijos universitetui yra visiškai nepagrįstos. Tačiau ar visuomet, dėstant kokį nors siaurą labai specializuotą kursą, yra sąlygos mokyti studentus taikyti kurso studijavimo metu įgytas specialias žinias realių aktualių praktiškų problemų sprendimui. Juk tos problemos beveik visuomet nėra tokios siauros ir specializuotos, kad jas būtų galima išspręsti, pasitelkiant vien tik to kurso studijavimo metu įgytas žinias. Praktinės problemos dažniausiai būna kompleksinės, ir jų sprendimui reikalingos žinios iš daugelio įvairių sričių, tame tarpe galbūt ir iš minėtojo specialaus kurso, bet ne atskirai, o sudėtingame komplekse, sudarytame jungiant žinias iš įvairių sričių į atitinkamą sistemą. Tačiau **specializuotas siauras kursas tokiame jungimui sąlygų neturi. O štai sistematyros kursas jau gali tokias sąlygas turėti ir privalo jas kuo pilniau ir kuo efektyviau išnaudoti**, tuo pačiu parodydamas ir atskirų specialių žinių, gaunamų studijuojant specialius kursus, reikalingumą ir naudingumą. Taigi, **sistematyros kursas, pakartodamas kai kurių specialių mokslų atskirus skyrius ir jungdamas žinias iš įvairių mokslų į sistemas, skirtas sudėtingų praktinių problemų sprendimui** (sudėtingų sistemų modelių bei naujų sistemų projektų sudarymui, sudėtingų procesų modeliavimui ir analizei, įvairių hipotezių formulavimui bei tikrinimui, priimamų sprendinių pasekmių prognozavimui ir t. t.), **gali ir privalo būti naudingas ne tik praktikai, bet ir specialioms mokslams, parodydamas jų reikalingumą bei naudingumą, ko patys tie mokslai, būdami paimti atskirai, dažniausiai padaryti negali**.

Atsižvelgiant į šią sistematyros kurso funkciją, jo studijavimui reikėtų skirti žymiai daugiau laiko aukštesniuose kursuose, **negu skiriama dabar**, nors patį sistematyros kurso dėstymą galima ir naudinga pradėti jau nuo pat pirmojo kurso, sujungiant jį su „Įvadu į specialybę“, nes tik žiūrint iš sisteminių pozicijų galima pakankamai pilnai ir suprantamai parodyti būsimosios specialybės bei specializacijos vietą gyvenime ir visoje mokslų sistemoje, o taip pat pakankamai argumentuotai orientuoti pradedančius studijuoti studentus į sąmoningą bei atsakingą požiūrį į būsimų įvairių kursų studijas, jų vietą visoje konkreto specialisto (ar dženeralisto) paruošimo sistemoje.

Norėčiau atsakyti į dar vieną kai kurių mano kolegų priekaištą, šiek tiek prieštaraujantį mano oponentų dėl idealaus skysčio išteikėjimo nuomonei. Kai kurie mano kolegos (priešingai nei minėtieji mano oponentai) teigia, kad mano dėstomas sistematyros kursas pernelyg matematizuotas, kad šį kursą būtų galima (ir reikėtų) dėstyti, žymiai mažiau orientuojantis į matematiką ir žymiai labiau – į filosofiją.

Sutikdamas su šiais savo kolegomis, kad tokia galimybė yra, nes kai kurioms humanitarinėms specialybėms kai kuriuose Europos ir JAV universitetuose dėstomas bendrosios sistemų teorijos kursas

yra gana silpnai matematizuotas, aš vis dėl to nesutikčiau, kad matematikos ir informatikos fakulteto studentams mano dėstomo matematinės sistemotyros kurso matematizavimo lygio sumažinimas būtų naudingas. Tai būtų ne tik žalinga praktiškai, nes tuomet sistemotyros kurso studijos nebegalėtų prisidėti prie studentų matematinės kultūros ugdymo ir kėlimo, į ką jos dabar orientuotos kaip į vieną pagrindinių tikslų (tai rodo ir pats kurso pavadinimas – „**Matematinė** sistemotyra“), bet ir klaidinga iš principo, nes sistemotyra ir matematika – visais atžvilgiais labai giminingi ir vienas kitą labai naudingai papildantys dalykai. Nors sistemotyrą dėstyti galima ir be matematikos, bet stengtis dirbtinai išmesti matematiką iš sistemotyros, kai studijuojantys sugeba suprasti matematikos kalbą ir naudotis matematiniu aparatu, būtų žalinga ne tik matematikos, bet ir sistemotyros studijoms. Juk tai ne tik sulėtintų sistemotyros studijų tempą ir pakenktų jų gilumui, bet ir iškreiptų studijuojančiųjų sampratą apie sistemotyrą, neatskleidžiant vieno pagrindinių to mokslo ir jo naudojamų metodų bruožo. Tuo pačiu metu būtų prarasta ir galimybė sistemotyros studijų metu paaiškinti studentams, iš kur ir kaip matematika įgijo tokią savybę (kai kuriems atrodančią net šiek tiek mistiškai), kad **matematiką galima taikyti bet kokiame sistemoje bet kokių procesų nagrinėjimui bei bet kokiuose moksluose ir kad tokie taikymai beveik visada priveda prie teisingų išvadų, kurias kartais iškart net sunku suprasti ir reikiamai įvertinti. O jei retkarčiais taikant matematiką ir suklystama, tai – ne dėl matematikos ir jos aparato kaltės, o tik todėl, kad nagrinėjamas procesas, kurio aprašymui ir analizei buvo taikoma matematika, buvo ne visai suvoktas ir todėl buvo sudarytas ne visai atitinkantis tikrovę jo matematinis modelis. Tačiau net ir tokiais atvejais gana dažnai paaiškėja, jog sudarytas modelis nėra visai beprasmiškas, o gali būti teisingas, esant atitinkamoms sąlygoms.**

Šią čia suformuluotą gana sudėtingą mintį patvirtinančių pavyzdžių galima rasti gana daug. Jų apstu net ir šiame skyrelyje, kuriame buvo pateikta nemažai modelių atitinkančių įvairias hipotezes bei stebimus reiškinius. Tikiuosi, jog skaitytojas pats suras tuos pavyzdžius.

Neveltui dėl šios ypatingos savybės matematika dažnai vadinama mokslų karaliene ir teigiama, jog įvairiuose kituose moksluose yra tiek mokslo, kiek juose yra matematikos.

Sistemotyra paaiškina šią ypatingą, iki sistemotyros atsiradimo tik matematikos mokslui (ir gal šiek tiek dar ir filosofijai bei fizikai) būdingą savybę tuo, kad **matematikos dėsniai yra bendrasisteminiai dėsniai, teisingi visoms sistemoms; jos formuluojami teiginiai yra savo rūšies tapatybės, visada ir visur teisingi teiginiai, jei tik galioja tuose teiginiuose minimos sąlygos; matematikos metodai ir matematinio mąstymo logika yra realaus pasaulio logikos ir dialektikos atspindys ir todėl negali vesti, kai jais teisingai naudojamosi, prie išvadų, neatitinkančių tikrovės; matematikos kalba – tai bendramokslinės kalbos, kurios plėtotė – vienas pagrindinių sistemotyros tikslų** (žiūr. šios mokymo priemonės „Įvadą“) **sudedamoji dalis, tos kalbos branduolys, todėl ji gali būti taikoma bet kokių sistemų aprašymui, nors žinoma, ne visuomet vien tik tos kalbos priemonių pakanka.**

Dėl šio esminio ir principialiai svarbaus ryšio tarp matematikos ir sistemotyros, leidžiančio teigti, jog **sistemotyra – tai matematikos plėtinys**, siekiantis išplėsti bendrasisteminių dėsnių paiešką bei taikymą, o taip pat logiškai pagrįstą bendrasisteminių analizės, sintezės ir modeliavimo bei projektavimo metodų kūrimą bei taikymą ne tik kiekybiniais, bet ir kokybiniais reiškiniais, matematikos eliminavimas iš sistemotyros būtų principinė klaida, ką aš esu ką tik specialiai pažymėjęs, pradėdamas diskusiją apie sistemotyros kurso „dematematizavimą“. Todėl aš laikausi tos nuomonės, kad matematikos taikymas sistemotyros kurse, skirtame matematikos ir informatikos fakulteto studentams, yra ne tik labai pageidautinas, bet ir būtinas, tačiau taikomo matematinio aparato sudėtingumas turėtų būti suderintas su sprendžiamų problemų sudėtingumu, kad nebūtų „šaudoma į žvirblius iš patrankų“. Be to tenka atsižvelgti ir į tai, ką iš matematinių disciplinų studentai, studijuojantys sistemotyros kursą, jau žino, o ko – dar ne. Kartais, žinoma, atsiranda neišvengiama būtinybė sistemotyros kurse išdėstyti ir tokius matematinius dalykus, kurių matematikos kursuose dar nebuvo ar iš viso dėl laiko stokos nebus dėstoma. Tuomet tenka nagrinėti grynai matematinius klausimus laiko, skirto sistemotyros kurso dėstymui, sąskaita. Tačiau dėl minėtojo labai glaudaus ryšio tarp matematikos ir sistemotyros aš nelaikau tai dideliu nuostoliu sistemotyrui. O studentų matematinė kultūra nuo to tik išlošia. Kartu pagilėja ir sistemotyros supratimas.

Čia išsakytos mintys apie matematikos ir matematinės sistemotyros ryšius nereiškia, jog negali egzistuoti mažiau matematizuotas sistemotyros vadovėlis.

Toks vadovėlis ne tik galėtų egzistuoti, bet ir būtų labai reikalingas ir naudingas nematematinių specialybių studentams. Tikiuosi, kad toks vadovėlis kada nors bus parašytas. Tai bus bendrosios sistemotyros vadovėlis. O ši mokymo priemonė skirta studijuojantiems matematinę sistemotyrą.

Po visų bendrų pastabų apie sisteminį mąstymą, sistemotyros mokslą, matematinės sistemotyros kurso dėstymą bei matematinių disciplinų vietą ir vaidmenį jame, tik gana silpnai susijusių su šio (1.13.3.) skyrelio tema, tačiau gana svarbių viso sistemotyros kurso kontekste, grįšiu prie

diskusijos apie idealaus skysčio išteklį aiškinančių hipotezių bei apie išteklį greičio apskaičiavimo formulų teisingumą.

Manau, kad skaitytojui dabar jau aišku, kuri hipotezė ir kuri formulė yra teisingesnė, ir jam dabar kyla klausimas, kodėl kai kuriuose fizikos* ir hidromechanikos vadovėliuose galėjo atsirasti

idealios skysčio išteklį greičio formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ ir iki šiol juose pasilikti. Juk šią formulę

galime rasti ne tik jau minėtoje labai populiarioje ir rimtoje Feinmano knygoje, bet ir labai autoritetingų aukštos kvalifikacijos specialistų N. E. Kočino, I. A. Kibelio ir K. V. Rozės parašytame teorinės hidromechanikos fundamentaliame vadovėlyje [144], skirtame universitetams. Ši formulė ten laikoma

tikslesne negu formulė $v = \sqrt{2gh}$ ir tai specialiai pabrėžiama sakinyje: „Jei santykis $\frac{s}{S}$ yra mažas, tai,

atmesdami nari $\left(\frac{s}{S}\right)^2$, gauname išteklį greičiui artutinę Toričelio formulę $v^2 = 2gz$ “.

Įdomu, kad ką tik minėtieji autoriai, išvesdami formulę $v^2 = 2gz \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}$ iš idealios skysčio

nesuspaudžiamumo formulės ir Bernulio lygties $\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz$, kur v – idealios skysčio

išteklį greitis, V – skysčio judėjimo greitis inde aukštyje z , p_0 – atmosferos slėgis, ρ – skysčio tankis, nepastebi kad patys prieštarauja savo puslapiu anksčiau gautai išvadai: „Jeigu, pavyzdžiui, vanduo, esantis dideliame inde, veikiamas tik atmosferinio slėgio p_0 , išteka į tuštumą, tai skysčio paviršiuje inde dydį v_0 galima laikyti artimu nuliui ir išteklį greičiui gaunama ribojanti sąlyga

$$v \leq \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

Ši sąlyga išvedama iš natūralios prielaidos, kad „slėgis p idealiame skystyje negali būti neigiamas“. Aš laikau tą ribojančią sąlygą tikrai teisinga, o tai sąlygai prieštaraujančią minėtųjų autorių

rekomenduojamą formulę $v^2 = 2gz \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}$ – neteisinga. Mano ginama formulė $v = \sqrt{2gz}$ minėtąją

ribojančią sąlygą tenkina kaip ribinis maksimalaus leistino greičio atvejis, o didesnio išteklį greičio

negu $v = \sqrt{2gz}$, kaip išplaukia iš sąlygos $v \leq \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$, būti tikrai jau nebegali.

Pažymėtina taip pat, kad minėtieji autoriai, „išvedę“ „tikslinę“ formulę $v^2 = 2gz \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}$,

toliau ją jau niekur nebesinaudoja, o visur taiko tik formulę $v = \sqrt{2gz}$.

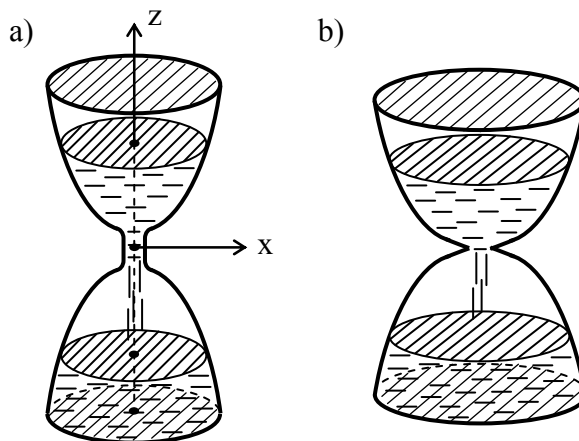
Pavyzdžiui, pravertę 7 puslapius pirmyn nuo skyrelio, skirtą „tikslinės formulės“ gavimui, rasime įdomų uždavinį, skirtą klepsidros (vandens laikrodžio) formos, tenkinančios reikalavimą, kad vandens lygis klepsidroje slūgtų pastoviu greičiu, radimui. Atrodytų, kad norėdami pasigaminti kuo tikslesnį vandens laikrodį, turintį tolygią laiko matavimo skalę, turėtume naudotis kuo tikslesnėmis formulėmis. Tačiau, sprendami šį uždavinį, vadovėlio autoriai, nors ir būdami įsitikinę, kad formulė

$v^2 = 2gz \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}$ yra tikslesnė už formulę $v^2 = 2gz$, vis dėlto naudojami pastarąją, o ne „tikslniąją“.

Samprotaudami, kad, vandeniui ištekančiam iš klepsidros viršutinės dalies į apatinę (žiūr. 292 „a“ pav.),

* Man malonu, kad Lietuvos fizikų vadovėliuose (tame tarpe ir P. Brazdžiūno, kurį aš gerbiu ne tik kaip savo „žemietį“, bet ir kaip mokslininką, vadovėlyje aukštosios mokykloms) nėra formulės $v = \sqrt{2gh}$ „patikslinimo“.

kiekviename labai trumpame laiko intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ turėtų galioti vandens nesuspaudžiamumą išreiškianti lygybė $S \cdot V \cdot \Delta t = s \cdot v \cdot \Delta t$, kurioje $S = \pi x^2$ – vandens lygio aukštyje z paviršiaus plotas, $V = -\frac{dz(t)}{dt} = \text{const}$ – pastovus (klepsidros konstruktorių pasirenkamas) vandens lygio slūgimo klepsidros viršutinėje dalyje greitis (paprastai gana nedidelis, kad būtų patogų matuoti laiką ir nereikėtų klepsidros dažnai vartyti), s – kanalo, jungiančio abi klepsidros dalis, skerspjūvio plotas (taip pat pastovus, klepsidros konstruktorių pasirenkamas labai nedidelis dydis, nes nuo jo priklauso jam proporcingas vandens lygio slūgimo, greitis V), v – vandens ištekėjimo pro tą kanalą greitis, knygos autoriai gauna lygybę $\pi x^2 V = s v$. Įstatę į ją formulę $v = \sqrt{2gz}$ ir pakėlę kvadratu abi gautos lygybės puses, jie išveda klepsidros viršutinės dalies paviršiaus, gaunamo kaip sukimo paviršiaus sudaromosios $z = f(x)$ lygtį $z = b x^4$, kurioje $b = \frac{\pi^2 V^2}{2gs^2} = \text{const}$. Šią lygtį galima taikyti visoms $x \geq \sqrt{\frac{s}{\pi}}$ reikšmėms, apskaičiuojant z nuo $z_1 = \frac{V^2}{2g}$ iki kokio nori aukščio $z > z_1$. Trumpame intervale $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{s}{\pi}}$ klepsidros viršutinės dalies paviršius turėtų būti ritinėlio paviršiaus formos, kurio spindulys $r = x_0 = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$, o aukštis – nuo $z = 0$ iki $z = z_1 = \frac{V^2}{2g}$. Klepsidros apatinės dalies paviršių gautume simetriškai atspindėję viršutinės jos dalies paviršių horizontalioje plokštumoje xOy atžvilgiu.



292 pav.

Sunku paaiškinti, kodėl vadovėlio autoriai nepasinaudojo vandens ištekėjimo greičio formule $v^2 = 2gz \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}$, laikydami ją tikslesne negu formulę $v^2 = 2gz$.

Juk atsižvelgiant į tai, kad kiekvienu momentu t skysčio paviršiaus plotas $S(t) = \pi x^2(t)$, gautume, jog $v(t) = \sqrt{\frac{2gz(t)}{1 - \frac{s^2}{\pi x^2(t)}}}$, iš kur analogiškai galėtume išvesti formulę $z(t) = \frac{\pi^2 V^2}{2gs^2} x^4(t) -$

$-\frac{\pi V^2}{2g} x^2(t)$, t. y. klepsidros viršutinės dalies paviršiaus sudaromosios $z = f(x)$ lygtį

$z = \frac{\pi V^2}{2gs} x^2 \left(\frac{\pi x^2}{s} - 1 \right)$. Šiuo atveju viršutinę ir apatinę klepsidros dalis jungiančio „kaklelio“ ilgis būtų

jau ne $2 \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{g}$, o 0, nes kai $x = x_0 = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$, tai $z = 0$ (žiūr. 292 „b“ pav.).

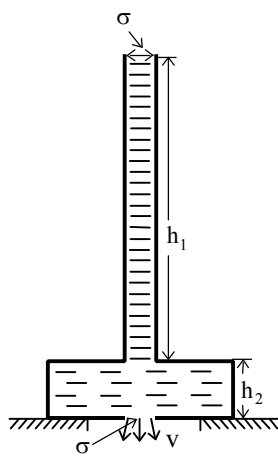
Būtų įdomu patikrinti, ar vandens laikrodis, pagamintas pagal „patikslintos“ formulės receptą, veiktų tiksliau ir vanduo jame slūgtų su pastovesniu greičiu klepsidroje, kurią vaizduoja 292 „a“ pav. Tai padaryti nebūtų lengva, nes laikrodžių veikimo skirtumas būtų gana nedidelis, kadangi s – mažas dydis, tačiau turėdami pakankamai aukštas klepsidras ir tiksliai matuodami per netrumpus laiko intervalus Δt vandens lygio nueitus kelius Δz bei apskaičiuodami vandens lygio slūgimo greičius

$$V_i = \frac{\Delta_i z}{\Delta_i t} \text{ ir lygindami tarpusavyje jų reikšmes, galėtume spręsti, kuris iš laikrodžių eina tolygiau.}$$

Eilė kitų hidromechanikos teoretikų, nors ir tiesiogiai neskelbia kaip ką tik minėtieji N. E. Končinas, I. A. Kibelis ir K. V. Rozė, kad formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma}{S^2}}}$ yra tikslesnė už formulę

$v = \sqrt{2gh}$, ir visur vartoja pastarąją, tačiau nepamiršta pabrėžti, kad ši formulė gali būti laikoma teisinga tik todėl, kad paprastai $\frac{\sigma}{S}$ – pakankamai mažas dydis ir todėl ištekančio idealaus skysčio judėjimo greitis inde $v_1 = \frac{\sigma}{S} v$, kur v – skysčio išteklėjimo greitis, praktiškai gali būti laikomas 0.

Pavyzdžiui, net N. Kerlas (N. Curle) knygoje [31], skirtoje matematiniam modeliavimui, laiko, kad idealus skystis, jam ištekančiam iš indo, pačiame inde juda, ir piešia tą judėjimą vaizduojančias tėkmės linijas, net nekeldamas sau klausimo, ar tokia nuomonė neprieštarauja energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniams. Išvesdamas išteklėjimo iš indo greičio formulę, sutampančią su mano ginama formule, jis ją gauna, priimdamas prielaidą, kad skysčio judėjimo inde greitis u_A yra labai mažas, į kurį todėl galima ir nekreipti dėmesio. Įdomu, kaip jis apskaičiuotų idealaus skysčio išteklėjimo iš indo greitį v , jei indas turėtų tokią formą, kokia pavaizduota 293 pav., ir h_1 būtų gana didelis dydis, vaizduojantis idealaus skysčio stulpo, turinčio skerspjūvio plotą σ , lygų angos indo dugne skerspločiui, aukštį, o h_2 būtų nedidelis dydis, lyginant su h_1 ?



293 pav.

Įdomu taip pat, kokių išteklėjimo greitį visą tą laiko intervalą, kol skysčio lygis tame inde nuslūgtų nuo $h(0)=h_1+h_2$ iki $h(t)=h_2$, apskaičiuotų mano oponentai, naudodamiesi formule $v(t) = \sqrt{\frac{2gh(t)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2(t)}}}$?

Peržiūrėjęs tokių garsių hidromechanikos specialistų kaip Birkhofas (G. Birkhoff), Milnas – Tomsonas (L. M. Milne – Thomson), Saratonelo (E. H. Zarattonello) ir kitų knygas [145, 141, 138], aš niekur neradau net mažytės pastabėlės, kad idealus skystis, jo lygiui slūgstant, galėtų nejudėti. Idealus skysčio lygio slūgimas kokioje nors talpoje automatiškai sutapatinamas su skysčio judėjimu ir net nebandoma išivaizduoti, jog galimas energijos ir impulso perdavimas be energetinių nuostolių, kaip tai matėme eksperimentuose su idealiais plieniniais rutuliukais. Žinoma, realiuose skysčiuose toks perdavimas iššaukia didesnius ar mažesnius energetinius nuostolius paties perdavimo metu, tačiau idealus skystis todėl ir vadinamas idealiu, kad jame tie nuostoliai lygūs nuliui.

Man neteko skaityti literatūros, kurioje idealaus skysčio slūgimo procesas šiuo atžvilgiu būtų specialiai nagrinėjamas, tačiau ir iš netiesioginių pasisakymų galima spręsti, kokios nuomonės šiuo klausimu laikosi tų pasisakymų autoriai ir ką jie atsakytų į klausimą „Ar idealus skystis slūgdamas juda, įgydamas kinetinę energiją, ar ne?“

Tiesa, galima rasti ir tokių netiesioginių pasisakymų, iš kurių galėtų išplaukti, kad, idealiam skysčiui ištekančiam pro angą, pakankamai nutolusiuose nuo angos sluoksniuose pačiame inde tas skystis, matyt, galėtų ir nejudėti. Štai jau minėtasis Brauno universiteto (JAV) profesorius V. Prageris (W. Prager) savo knygoje „Einführung in die Kontinuumsmechanik“ [142], sudarytoje paskaitų, skaitytų Ciuricho universitete, pagrindu, nagrinėdamas idealaus besvorio skysčio, turinčio tankį ρ , išteklėjimą pro siaurą plokščią pailgą plyšį, turintį ilgį b , iš indo, turinčio begaliniai didelį dugno plotą, pastoviam slėgių skirtumui Δp spaudžiant, ir išvesdamas to išteklėjimo greičio formulę $v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$, rašo: „Priimkime,

kad pusplokštumėje $x_2 > 0$ (t. y. inde, iš kurio idealus skystis išteka, A. Š.), esant dideliui nuotoliui nuo plyšio skystis nejuda...“ Taigi, profesoriaus V. Pragerio nuomone, esant pakankamai dideliui nuotoliui

nuo angos, idealus skystis inde galbūt ir nejuda (arba juda su tokiu mažu greičiu, kad į tą judėjimą galima nekreipti dėmesio, juk ne šiaip sau V. Prageris vartoja žodį „Priimkime...“), o štai šiek tiek arčiau angos – tai jau tikrai juda (neveltui ten pat pateiktame piešinyje V. Prageris piešia tėkmės linijas ne tik ištekančioje čiurkšlėje, bet ir pačiame inde netoli angos esančiuose skysčio sluoksniuose).

Pagrindinė priežastis, kodėl teorinės hidromechanikos atstovai net nenagrinėja idealaus skysčio nejudėjimo inde, skysčio lygiui slūgstant, mano manymu, yra ta, kad hipotezė apie idealaus skysčio judėjimą inde, jo lygiui slūgstant, daugeliui atrodo tokia akivaizdi ir natūrali, jog retai kam gali kilti abejonių jos teisingumu, nors, kaip jau buvo šiame skyrelyje rašyta, sistemiškai mąstančiam teoretikui neturėjo būti sunku pastebėti nemažai reiškinių, nelabai suderinamų su ta hipoteze ir verčiančių susimąstyti. **Tačiau sisteminis mąstymas šiuolaikiniame moksle, susiskaidžiusiame į atskiras labai specializuotas sritis, dar nėra taip paplitęs ir išsisknijęs, kad specialiųjų mokslų atstovams, užsiėmusiems siauromis savo mokslinių interesų sferomis, tučtuojau kristų į akį kai kurie nesuderinamumai bei prieštaraivimai tarp atskirų teiginių, priklausančių gana nutolusioms viena nuo kitos sritims.**

„Na, gerai“, tars koks nors priekabus skaitytojas, „teoretikai galėjo ir nepastebėti kai kurių reiškinių, priklausančių gana nutolusioms viena nuo kitos sritims, tam tikro nesuderinamumo su hipoteze, kad idealaus skysčio lygio slūgimas būtinai reiškia to skysčio judėjimą, tačiau juk egzistuoja ne tik teoretikai, bet ir techninių mokslų atstovai – hidraulikai, nagrinėjantys realių skysčių pusiausvyrą ir judėjimą, besiremiantys savo skaičiavimuose ir samprotavimuose ne tik hidromechanikų išvestomis teorinėmis, o ir iš natūrinių eksperimentų rezultatų apdorojimo gautomis empirinėmis formulėmis. Kodėl jie, o taip pat ir fizikai – eksperimentatoriai, nepastebėjo minėtųjų nesuderinamumų?“

Mano nuomone, jei hipotezė apie slūgstančio idealaus skysčio nejudėjimą, pagal kurią slūgstančio idealaus skysčio dalelės tik keičia savo vietą, perduodamos be nuostolių energiją ir impulsą ir neįgydamos kinetinės energijos, negimė teoretikų galvose, tai tos hipotezės atsiradimas hidraulikų gretose buvo dar mažiau tikėtinas. Juk, hidraulikai ir eksperimentinės fizikos specialistai nagrinėja ne idealius, o realius skysčius, kuriuose dėl sankabos jėgų tarp skysčio dalelių juda ne tik ištekančios dalelės, bet ir dalelės, priklausančios arti ištekJėjimo angos esantiems ir kol kas dar liekantiems inde skysčio sluoksniuams. Ir tą judėjimą galima stebėti vizualiai, todėl stebint tokį reiškinį, vargu, ar gali kilti abejonės jo egzistavimu.

Antra, realiuose skysčiuose dėl trinties egzistavimo gana greitai nusistovi stacionarūs arba beveik stacionarūs procesai, o tokiems procesams visiškai pagrįstai gali būti taikoma Bernulio lygtis ir iš jos išplaukiančios formulės.

Kad realiuose skysčiuose ir net dujose po kurio laiko nusistovi stacionarūs procesai, patvirtina daugybė eksperimentų. Čia paminėsiu tik vieną jų – iš fizikos kurso gerai žinomą Stokso eksperimentą su skystyje bei ore krintančiu rutuliuku. Stoksas, nustatęs, kad į skystyje bei dujose krintantį rutuliuką veikia trinties jėga $F_t = 6\mu\pi r v$, priklausanti nuo skysčio ar dujų dinaminės klampos μ , rutuliuko spindulio r ir to kritimo greičio v , didėjanti tam greičiui didėjant, ir sudaręs jėgų pusiausvyros lygtį $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g = 6\mu\pi r v$, kur ρ – rutuliuko medžiagos tankis, ρ_0 – skysčio (ar dujų) tankis, gavo, kad, rutuliukui pasiekus kritimo greitį $v = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\mu}$, tolimesnis kritimas jau vyksta stacionariai, t. y.

pastoviu greičiu, kuris tuo mažesnis, kuo didesnė skysčio (ar dujų) dinaminė klampa ir kuo mažesnis pats krintantis rutuliukas. Savo įvykdytais eksperimentais Stoksas patvirtino šios formulės teisingumą. Kad ši formulė teisingai aprašo rutuliuko kritimą, gali patvirtinti ir elementarūs stebėjimai, kaip lėtai ir pastoviu greičiu nusėda vandenyje ar kokiame nors kitame skystyje esančios dalelės bei dulkės, esančios ore, ir kaip tas nusėdimo greitis priklauso nuo dalelių dydžio bei jų medžiagos tankio.

Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti apskaičiuoti, per kiek laiko rutuliukas įgis pusę to greičio, kuris reikalingas, kad toliau rutuliuko kritimas būtų stacionarus.

Trečia, hidraulikai, taikydami realių skysčių, turinčių, palyginti, mažą klampą, tekėjimui Bernulio formulę, įsiveda eilę empirinių koeficientų, atspindinčių hidraulinius energetinius nuostolius bei kitus faktorius, įtakančius skysčio tekėjimą, ir todėl hidraulikoje naudojamos formulės leidžia gauti apskaičiuotas įvairių charakteristikų reikšmes, pakankamai tiksliai atitinkančias tų charakteristikų eksperimentuose nustatytas reikšmes. Tokių empirinių koeficientų dėka kompensuojamas teorinių modelių nepilnas atitikimas tikrovei ir pasiekiamas skaičiavimo rezultatų sutapimas su eksperimentų rezultatais, o tai vargu ar skatina jau seniai naudojamų ir pasiteisinusių praktikoje modelių teorinių pagrindų peržiūrą. Tolimesnis modelių tobulinimas dažniausiai vyksta ne revizuojant modelių esmę, o tikslinant empirinių koeficientų reikšmes, įvedant dar daugiau koeficientų bei papildomų narių pusiau teorinėse, pusiau empirinėse formulėse.

Hidraulikų metodiką pailiustruosiu, parodydamas, kaip jie išveda realaus skysčio, priklausančio Niutono skysčių grupei, išteklėjimo pro mažą plonasienę angą greičio apskaičiavimo formulę ir kaip tą formulę taiko tais ar kitais atvejais (žiūr., pavyzdžiui, [140, 146, 147]).

Mazos angos hidraulikoje laikomos plonasienėmis, kai angos sienelės storis d yra ne didesnis negu trys tos angos skersmenys D . Kai $d > 3D$, tai anga laikoma storasiene ir ją galima laikyti savo rūšies tūta (vamzdeliu).

Kadangi dėl vidinės trinties realaus skysčio tekėjimą pro mažą angą galima laikyti praktiškai stacionariu, tai hidraulikai realaus skysčio išteklėjimo greičio apskaičiavimui taiko čia ką tik aprašyto

būdu modifikuotą Bernulio formulę $p_a + \rho gh + \frac{\alpha_0 \bar{v}_0^2}{2} = p_a + \frac{\alpha \bar{v}^2}{2} + \rho gh_n$, kurioje p_a – atmosferos slėgis, ρ – skysčio tankis, h – skysčio lygio talpoje aukštis angos atžvilgiu, g – laisvo kritimo pagreitis, $\bar{v}_0$ – realaus skysčio judėjimo vidutinis greitis skysčio paviršiuje tuo momentu, kuomet tas paviršius yra aukštyje h , α_0 ir α – Koriolio koeficientai, $\bar{v}$ – ištekančio skysčio vidutinis greitis, ką tik minėtuojų momentu, $h_n = h_L + \zeta \frac{\bar{v}^2}{2g}$ – skysčio išteklėjimo hidraulinių nuostolių koeficientas, h_L – kelio nuostolių

koeficientas, kurį, kai angos sienelių storis d yra mažas dydis, galima laikyti lygiu nuliui, ζ – vietinių kliūčių koeficientas, kuris, priklausydamas nuo pasipriešinimo skysčio išteklėjimui jėgos, priklauso nuo angos sienelių paviršiaus formos ir vidutiniškai būna lygus apie 0,06. Tai rodo, kad realus skystis, laminarinio tekėjimu išteklėdamas pro mažą plonasienę angą, dėl vietinių kliūčių praranda vidutiniškai apie 6% savo kinetinės energijos, kurią jis įgyja slėgio ir svorio jėgų dėka.

Hidraulinėje literatūroje gana dažnai suma $h + \frac{\alpha_0 \bar{v}_0^2}{2g}$ žymima h_0 ir vadinama skysčio slėgio pilnutiniu aukščiu.

Tuomet iš modifikuotos Bernulio formulės gauname $\frac{\alpha \rho \bar{v}^2}{2} + \rho g \zeta \frac{\bar{v}^2}{2g} = \rho gh_0$, iš kur išplaukia, jog vidutinis ištekančio pro angą skysčio greitis $\bar{v}$ momentu, kada skysčio paviršiaus talpoje lygio aukštis yra h (arba, kas yra tas pats, kai $h_0 = h + \frac{\alpha_0 \bar{v}_0^2}{2g}$), yra lygus $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gh_0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2g \left(h + \frac{\alpha_0 \bar{v}_0^2}{2g} \right)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gh + \alpha_0 \bar{v}_0^2}$.

Dydį $\frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$ hidraulikai vadina greičio koeficientu ir žymi ϕ . Plonoms mažoms angoms greičio koeficientas ϕ vandeniui būna lygus apie 0,97÷0,98, todėl galima laikyti, kad $\bar{v} = \phi \sqrt{2gh_0} \approx \approx (0,97 \div 0,98) \sqrt{2gh_0}$. Mažoms angoms greitį $\bar{v}_0$ galima laikyti praktiškai lygiu 0, todėl mažoms angoms $\bar{v} \approx (0,97 \div 0,98) \sqrt{2gh}$, kas beveik sutampa su mano ginama formule $v = \sqrt{2gh}$ idealiam skysčiui.

Skysčio tūrį, išteklėjusį pro angą per laiko vienetą, hidraulikai vadina debitu ir dažnai žymi žymeniu Q . Kadangi $Q = \sigma^* \bar{v}$, tai $Q = \sigma \varepsilon \phi \sqrt{2gh_0}$, kur ε – skysčio čiurkšlės suspaudimo koeficientas. Eksperimentais nustatyta suspaudimo koeficiento reikšmė mažoms plonasienėms apvalioms angoms yra lygi apie 0,62÷0,64, todėl sandaugos $\varepsilon \cdot \phi$, hidraulikoje vadinamos debito koeficientu, empirinė reikšmė mažoms plonasienėms apvalioms angoms apytikriai yra lygi apie 0,60÷0,62. Tokiu būdu gauname, jog ištekančio iš talpos pro mažą plonasienę angą, esančią talpos dugno centre pakankamai toli nuo šoninių talpos sienų, realaus skysčio, priklausančio mūsų jau minėtai Niutono skysčių grupei, debitas Q yra lygus $Q = \varepsilon \phi \sigma \sqrt{2gh_0} \approx (0,60 \div 0,62) \sigma \sqrt{2gh_0}$, o kai anga labai maža – apie $(0,60 \div 0,62) \sigma \sqrt{2gh}$.

Tarkime, jog talpa yra ritinio ar prizmės formos ir turi skersplotį, lygų S .

Tuomet $S dh = -Q dt$, iš kur gauname lygybę $\int_H^0 h^{-\frac{1}{2}} dh \approx - \frac{\varepsilon \phi \sigma \sqrt{2g}}{S} \int_0^T dt$, kurioje H – pradinis realaus skysčio lygis talpoje, o T – viso skysčio išteklėjimo iš talpos laikas.

$$\text{Po integravimo gauname, jog } T \approx \frac{2S\sqrt{H}}{\varepsilon\varphi\sigma\sqrt{2g}} = \frac{2SH}{\varepsilon\varphi\sigma\sqrt{2gH}} = \frac{2V}{\varepsilon\varphi\sigma\sqrt{2gH}} \approx \frac{V}{(0,30 \div 0,31)\sigma\sqrt{2gH}}, \text{ kur}$$

$V=SH$ – pradinių momentu talpoje buvusio skysčio tūris.

Ištekėjimo laikas T , apskaičiuotas, naudojantis šia ką tik išvesta formule, gana tiksliai sutampa su realiu ištekėjimo laiku, ir tai daugybę kartų patikrinta inžinierinėje praktikoje.

Iš šios formulės matome, jog **ir hidraulika patvirtina, kad ištekėjimo iš talpos laikas yra atvirkščiai proporcingas angos plotui σ , kas sutampa su mūsų jau anksčiau gauta išvada, išplaukiančia iš mano ginamos idealaus skysčio ištekėjimo hipotezės ir formulės $v = \sqrt{2gh}$ ir nesutampa su išvada, išplaukiančia iš mano oponentų ginamos ir kai kurių fizikų bei**

hidromechanikų rekomenduojamos idealaus skysčio ištekėjimo greičio formulės $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$. Jei

hidraulikai būtų taikę tokią formulę ar jos modifikuotą analogą realių skysčių ištekėjimo greičio apskaičiavimui, tai seniai būtų įsitikinę tokios formulės netinkamumu. Tačiau hidraulikai tokia „patikslinta“ formule niekur nesinaudojo ir nesinaudoja, todėl ir negalėjo įsitikinti, kad ji netinka skysčio ištekėjimo (o ne pratekėjimo) procesams.

Hidraulikai, savo praktikoje naudodamiesi formule $\bar{v} = \sigma\varepsilon\varphi\sqrt{2gh_0}$, įsitikino, kad suspaudimo koeficiento ε reikšmė priklauso nuo angos padėties talpoje. Kai anga dalimi savo kontūro liečia talpos sienelės, tai čiurkšlės suspaudimas tampa nepilnas (nepilnutinis). Tuomet nepilnutinį suspaudimą atitinkantis debito koeficientas tampa apie $\left(1 + c \frac{n}{\chi}\right)$ karto didesnis už $\varepsilon \cdot \varphi \approx 0,60 \div 0,62$, kur χ – pilnas angos perimetras, n – nesuspausta čiurkšlės perimetro angoje dalis (tos dalies ilgis), c – angos formos koeficientas (pavyzdžiui, apvalioms angoms $c \approx 0,13$, stačiakampėms – $c \approx 0,15$ ir pan.).

Ištekančio realaus skysčio čiurkšlės suspaudimas vadinamas netobulu, kai anga yra arti kitų talpos sienų, t. y. arčiau negu trys angos skersmenys $3D$ (arba $3a$ bei $3b$, kai anga stačiakampė ir turi matmenis $a \times b$). Tuomet debito koeficientas $\varepsilon \cdot \varphi$ padidėja $\left(1 + 0,64 \frac{\sigma}{F}\right)$ karto, kur F – tos sienos, kuri yra arti angos, plotas.

Kai realus skystis išteka iš talpos pro tūtas (vamzdelius), tai kelio nuostolių koeficientą h_L jau negalima laikyti lygiu 0. Šį koeficientą hidraulikai tuomet apskaičiuoja, naudodamiesi formule

$$h_L = \lambda \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g}, \text{ kur } \lambda - \text{skysčio hidraulinės trinties koeficientas, } \ell - \text{tūros ilgis, } D - \text{jos skersplokščio}$$

$$\text{skersmuo. Tuomet gaunama, kad hidraulinių nuostolių koeficientas } h_n = \lambda \frac{\ell}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} + \zeta \frac{\bar{v}^2}{2g} =$$

$$= \left(\lambda \frac{\ell}{D} + \zeta \right) \frac{\bar{v}^2}{2g}, \text{ iš kur išplaukia, kad greičio koeficientas } \varphi \text{ tuomet lygus } \varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta + \lambda \frac{\ell}{D}}}.$$

Kadangi, skysčiui ištekančiam iš tūtos, skysčio tėkmės linijos tūtoje yra lygiagrečios tūtos vidinėms sienelėms, tai, kaip teigia teoriniai paskaičiavimai (žiūr. [138, 139, 141, 145]) ir eksperimentai (žiūr. [140, 146, 147]), čiurkšlės suspaudimo koeficientą ε galima laikyti lygiu 1, ir todėl debito koeficientas tampa lygus greičio koeficientui φ .

Kai tūtos briaunos yra aštrios, tai vietinių kliūčių koeficientą ζ galima laikyti lygiu 0,5, o kai aštriabriaunės tūtos yra neilgos, t. y. kai $\ell \leq (3 \div 4)D$, tai greičio koeficientą φ galima laikyti apytikriai lygiu $\frac{1}{\sqrt{1,5}} \approx 0,82$.

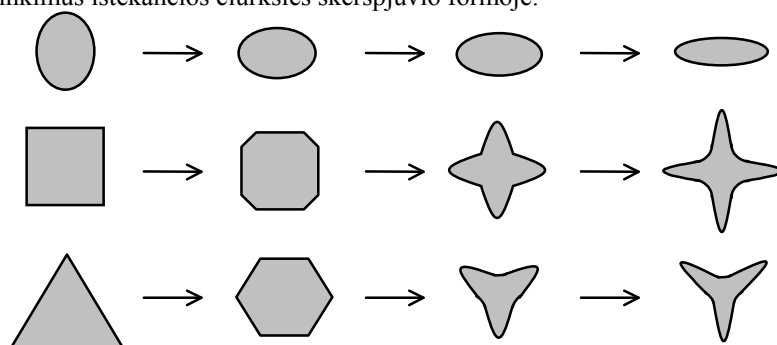
Suspaudimo koeficientas ε būna artimas 1 tik išorinėms cilindrinėms tūtoms, taip vadinamoms Ventūrio tūtoms. Vidinės cilindrinės tūtos, t. y. tūtos, esančias talpos viduje ir nukreiptas priešinga tėkmės linijoms kryptimi, vadina Bordo tūtomis. Joms suspaudimo koeficientas, kaip tai nesunku įrodyti teoriškai (tam nereikia net konforminio atvaizdavimo, pakanka judesio kiekio tvermės dėsnio), turėtų būti lygus 0,5. Tai patvirtina ir natūriniai eksperimentai.

Suspaudimo koeficientą ϵ galima laikyti lygiu 1 ir plėtėjančioms kūginėms tūtoms, tačiau joms greičio koeficientas yra lygus apie $0,45 \div 0,50$, todėl jų debito koeficientas yra, palyginti, mažas, tik apie $0,45 \div 0,50$.

Žymiai didesnę debito koeficientą turi siaurėjančios kūginės tūtos, kurių $\epsilon \approx 0,98$, $\varphi \approx 0,96$ ir todėl debito koeficientas – apie 0,94. Šią siaurėjančių kūginių tūtų savybę žinojo dar senovės romėnai ir ją pasinaudodavo savo hidraulinėse sistemose.

Debito dydžio atžvilgiu geriausios yra taip vadinamos konoidinės tūtos, kurių vidinių sienelių forma atitinka ištekančios čiurkšlės formą. Jose $\epsilon = 1,00$, $\varphi \approx 0,98$ ir debito koeficientas yra taip pat apie 0,98, t. y. didžiausias, o hidrauliniai išteklėjimo nuostoliai mažiausi.

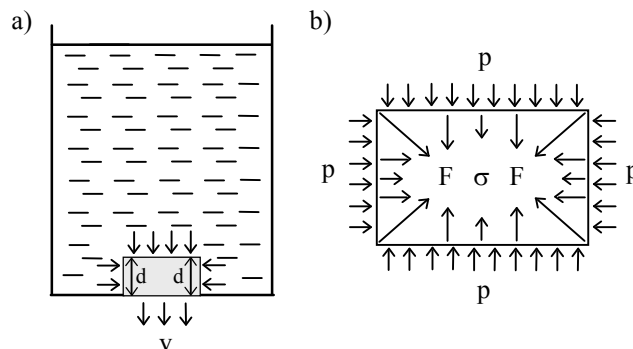
Hidraulikai nustatė, jog skysčiui tekant pro labai mažą plonasienę angą, nesančią idealiai apvalia, pasireiškia taip vadinamoji čiurkšlės inversija: čiurkšlė keičia ne tik savo skerspjūvio plotą, bet ir formą, o be to pradeda sukis aplink savo išilginę ašį. Čiurkšlės skerspjūvio formos kitimą vaizduoja 294 pav. Kaip matyti iš to paveikslėlio, slėgio jėgos, labiau spausdamos čiurkšlę angos kampuose, pagreitina skysčio tekėjimą tose vietose, lyg ir „nupjaudamos“ tuos kampus, o po to ir „išgrauždamos“ tose kryptyse įlinkimus ištekančios čiurkšlės skerspjūvio formoje.



294 pav.

Siūlyčiau teorinės kontinuuminės hidrodinamikos specialistams pabandyti apskaičiuoti, kaip keisis čiurkšlės forma, idealiam skysčiui ištekančiam pro stačiakampę nedidelių matmenų, lyginant su indo dugno matmenimis ir su skysčio stulpo inde aukščiu h , angelę, dėl ką tik paminėto inversijos reiškinio. Manau, kad tokį uždavinį išspręsti jiems nebus labai lengva. O tuo tarpu, naudojantis imitaciniu modeliavimu ir atsižvelgiant į tai, kad ištekančiam pro angą duotuoju momentu skysčio molekulių sluoksnis turi storį $d > 0$ ir kad likęs inde idealus skystis spaudžia tą sluoksnį ne tik iš viršaus, bet ir iš šonų (žiūr. 295 „a“ pav.), dėl ko į tą sluoksnį veikiančių jėgų horizontaliosios sudedamosios pasiskirsto nevienodai (žiūr. 295 „b“ pav., kuriame ištekančiam sluoksniui pavaizduotas iš viršaus), o būtent taip, kad jos yra didžiausios stačiakampio kampuose ir mažėja, artėjant prie stačiakampio kraštinių vidurio taškų, tapdamos lygios 0 stačiakampio centre, nesunku paaiškinti čiurkšlės formos pasikeitimą ir net suimituoti visą tos formos keitimosi procesą.

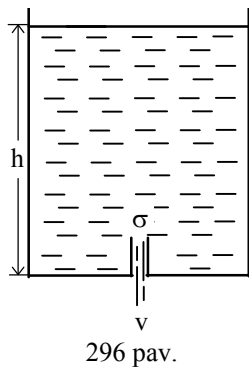
Nevienodos slėgio jėgų horizontaliosios sudedamosios, vektoriškai susidedamos su vienodomis vertikaliosiomis sudedamosiomis, sudaro nevienodas veikiančias į ištekančiojo skysčio molekules rezultatinės jėgos. Todėl ištekančiojo skysčio molekulės įgyja nevienodus pagreičius ir išteka su nevienodais greičiais: kampuose tie greičiai yra didžiausi ir nukreipti šiek tiek į čiurkšlės ašį, kraštinių viduriniuose taškuose šie greičiai jau mažesni ir labai artimi vertikaliai kryptiai, nors irgi šiek tiek nukreipti čiurkšlės ašies link, angos centre ištekančio skysčio greitis yra pats mažiausias ir nukreiptas vertikaliai žemyn.



295 pav.

Pažymėtina, kad imitacinio modeliavimo rezultatai matavimo paklaidų ribose sutampa su natūrinių eksperimentų, kuriuos įvykdė Bazenas, matuodamas ištekančio skysčio greičių pasiskirstymą čiurkšlėje, rezultatais. Bazenas gavo, kad, vandeniui ištekančiam pro apvalią angą indo dugne, ištekančio skysčio greitis angos pakraščiuose yra apytikriai lygus $\sqrt{2gh}$, kas praktiškai sutampa su mano ginama formule, o angos centre – apie $0,64\sqrt{2gh}$, t. y. mažiau negu $\sqrt{2gh}$, o ne daugiau, kaip išplauktų iš mano oponentų ginamos formulės $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$.

Naudojantis imitacinio modeliavimo metodu ir priimant, kad į ištekančio pro angą indo dugne idealaus skysčio molekulės slėgio jėgos veikia ne tik iš viršaus, bet ir iš šonų, galima paaiškinti ir ištekančios čiurkšlės skerspločio suspaudimo efektą ir net apskaičiuoti suspaudimo koeficientą ε .



Kai kuriais paprastais atvejais, kaip jau buvo minėta, čiurkšlės suspaudimo koeficiento ε apskaičiavimui pakanka energijos ir judesio kiekio tvermės dėsnių. Pavyzdžiui, jau minėtoms Bordo tūtom (žiūr. 296 pav.), sudarę šiuos tvermės dėsnius išreiškiančias lygtis, gausime:

$$1) \Delta A = \frac{\Delta m v^2}{2}, \text{ kur } \Delta A - \text{slėgio jėgų darbas, lygus } F \cdot \Delta \ell = p \sigma^* v \Delta t = p \varepsilon \sigma v \Delta t, \Delta m - \text{ištekančio per laiką } \Delta t \text{ skysčio masė } / \sigma^* v \Delta t = \varepsilon \sigma v \Delta t;$$

$$2) / \sigma \Delta t = \Delta m v, \text{ t. y. } p \sigma \Delta t = \varepsilon \sigma v \Delta t v.$$

Iš pirmosios lygybės, išplaukiančios iš energijos tvermės dėsniu, gauname, kad $p \varepsilon \sigma v \Delta t = \frac{\varepsilon \sigma v \Delta t v^2}{2}$, t. y. kad $p = \frac{v^2}{2}$.

Iš antrosios lygybės, išplaukiančios iš judesio kiekio (jėgos impulso) tvermės dėsniu, gauname, kad $p \sigma \Delta t = \varepsilon \sigma v \Delta t v$, t. y., kad $p = \varepsilon v^2$.

Prilygindami slėgio p išraiškų dešiniąsias puses, gauname $\frac{v^2}{2} = \varepsilon v^2$, iš kur išplaukia, jog $\varepsilon = 0,5$.

Gautas rezultatas sutampa su rezultatu, gautu naudojantis skysčio tėkmės ir greičio potencialo funkcijų konforminio atvaizdavimo metodais, kai tėkmės linijos sudaro su tūtos sienelėmis kampą $\alpha = 180^\circ$ (žiūr. [138, 139]), o taip pat ir su eksperimentiniais rezultatais.

A. Altšulis ir V. Jablonskis, įvykdę seriją eksperimentų su įvairiais realiais skysčiais įvairiuose tekėjimo režimuose, nustatė, kad koeficientų ε ir ϕ reikšmės beveik nepriklauso nuo skysčio rūšies, tačiau priklauso nuo skysčio tekėjimo režimą charakterizuojančio Reinoldso skaičiaus Re : didėjant Re , greičio koeficientas ϕ mažėja, o suspaudimo koeficientas ε – didėja. Kadangi ε didėja greičiau negu ϕ mažėja, tai debito koeficientas, didėjant Re , taip pat didėja. Kai Re tampa didesnis už 100000, tolimesnis jo didėjimas jau nebeįtakoja koeficientams ε ir ϕ .

Norėdami suprasti koeficientų ε ir ϕ priklausomybės nuo Re dydžio priežastis, turėtume prisiminti iš fizikos kurso, kad Reinoldso skaičius išreiškia greitėjimo darbo, suteikiant judančiam skystyje kūnui (ar judančiam skysčiui) kinetinę energiją, ir darbo, nugalint skysčio vidinę trintį, santykį:

$$Re = \frac{|W^{(k)}|}{|A_{tr}|} = \frac{|\ell^3 v^2|}{|\mu \ell^2 v|} = \frac{|\ell v|}{|\mu|} = \frac{|\ell v|}{\mu}, \text{ kur } \mu - \text{dinaminė skysčio klampa, } v = \frac{\mu}{\ell} - \text{kinematinės klamos}$$

koeficientas, ℓ – skysčio tankis, v – skysčio greitis, ℓ – judančio kūno matmenų tiesinė charakteristika. Pavyzdžiui, skysčiui ištekančiam pro apvalią angą, turinčią skersmenį D , gauname, jog $\ell = D$ ir

$$Re = \frac{|\ell v|}{\mu} = \frac{D \sqrt{2gh}}{\mu}.$$

Iš šios formulės matyti, jog idealaus skysčio Reinoldso skaičius turėtų būti be galo didelis, o labai klampiams skysčiams – mažas.

Kol realaus skysčio tekėjimą charakterizuojantis Reinoldso skaičius yra mažas, tai tas tekėjimas yra laminarinis: skysčio dalelės juda lygiagrečiomis ar beveik lygiagrečiomis trajektorijomis, tėkmės linijos nesikerta ir nepersipina, tekančio skysčio srovėje neatsiranda sūkurių, kavėnų bei kitų netolydumų, tekėjimas yra ramus, be triukšmo.

Didėjant skysčio tekėjimo greičiui, didėja ir tą tekėjimą charakterizuojantis Reinoldso skaičius. Kai skysčio greitis ir Reinoldso skaičius pasiekia taip vadinamąją aukštutinę kritinę ribą (ar dar

anksčiau), laminarinis realaus skysčio tekėjimas būtinai pereina į turbulentinį su jo sukūriais, ir kavonomis bei dėl kavitacijos ir dėl skysčio paviršiuje susidarančių bangų keturų kritimo atsirandančių triukšmu. Ištekanči pro angą turbulentinė čiuurklė jau ne tik nesusiaurėja, bet dar praplatėja.

Turbulentiškai tekančio skysčio greičiui mažėjant, mažėja ir tą tekėjimą charakterizuojantis Reinoldso skaičius. Kai mažėjantis skysčio greitis (o kartu ir Reinoldso skaičius) pasiekia taip vadinamą žemutinę kritinę ribą (ar dar anksčiau), turbulentinis realaus skysčio tekėjimas būtinai pereina į laminarinį.

Ištekančiam pro apvalią angą vandeniui, žemutinę kritimo greičio ribą atitinka žemutinė kritinė Reinoldso skaičiaus reikšmė, kuri yra apie 2320. Aukštutinę kritinio greičio ribą atitinka aukštutinė kritinė Reinoldso skaičiaus reikšmė, kuri yra apie 4000.

Taigi, kai ištekančio pro angą vandens tekėjimą charakterizuoja $Re < 2320$, tai tas tekėjimas būna laminarinis, o kai $Re > 4000$ – turbulentinis. Kai $2320 \leq Re \leq 4000$, tai ištekanti čiuurklė priklausomai nuo sąlygų kartais gali būti laminarinė, kartais – turbulentinė.

Kai vanduo teka vamzdžiais bei kanalais, tai kritinės Re reikšmės yra mažesnės ir intervalas tarp aukštutinės ir žemutinės kritinių reikšmių taip pat sumažėja.

Esant turbulentiniam tekėjimui, didelė dalis skysčio energijos eikvojama reiškinų, dėl kurių atsiranda tekėjimo turbulentiškumo požymiai, susidarymui ir palaikymui. Teorinė hidrodinamika iki šiol dar nesukūrė patenkinamos turbulentinio tekėjimo teorijas. Šioje srityje (bent jau kol kas) žymiai daugiau pavyksta pasiekti eksperimentuojant su realiais skysčiais, o taip pat su turbulentinio tekėjimo metu vykstančius mikroprocesus imituojančiais stochastiniais modeliais.

Reikia pažymėti, kad klampos koeficiento (o kartu ir Re) reikšmė priklauso nuo skysčio temperatūros: didėjant temperatūrai t , skysčių klampumas mažėja ir todėl Re didėja. Pavyzdžiui, švaraus vandens dinaminės klampos μ priklausomybę nuo temperatūros galima išreikšti empirine formule $\mu \approx \mu_0(1 + 0,0337t + 0,000221t^2)^{-1}$, kurioje μ_0 – švaraus vandens dinaminė klampa prie temperatūros $t_0 = 0^\circ\text{C}$ (ji tuomet lygi $17,92 \cdot 10^{-4}$ Pa·s). Naudodamiesi ta formule, gauta apdorojant natūrinius eksperimentų rezultatus matematinės statistikos metodais, randame, jog, pavyzdžiui, kai $t = 10^\circ\text{C}$, tai $\mu \approx 13,04$ Pa·s, kai $t = 20^\circ\text{C}$, tai $\mu \approx 10,1 \cdot 10^{-4}$ Pa·s, o kai $t = 30^\circ\text{C}$, tai $\mu \approx 8,00 \cdot 10^{-4}$ Pa·s.

Į visus tokius faktorius kaip skysčio temperatūra, skysčio užterštumas, jo tekėjimo režimas, angos dydis, jos forma, jos sienelių storis ir t. t. ir t. t., hidraulikai atsižvelgia savo inžineriniuose apskaičiavimuose ir todėl jiems pavyksta gauti patikimus ir savo tikslumu inžinerinę praktiką tenkinančius rezultatus.

Jau iš šio pavyzdžio, parodančio, kaip hidraulikai apskaičiuoja skysčio ištekėjimo bei jo tekėjimo greitį, skaitytojas gali suvokti, kad hidraulika sukaupė nemažai žinių apie realius skysčius bei jų tekėjimą ir sugeba išspręsti žymiai daugiau ir žymiai sudėtingesnių uždavinių nei teorinė hidrodinamika, kuri savo metodais yra artimesnė matematikai negu fizikai, nors ir nagrinėja fizikinius reiškinius – skysčių pusiausvyrą ir tekėjimą. Neveltui kartais pajuokaujama, kad, perskaitęs teorinės hidrodinamikos klasiko H. Lambo fundamentalią knygą „Hidrodinamika“ ir išsprendęs daugybę diferencialinių lygčių, taip ir nesužinai, jog vanduo gali būti šlapias.

Žiūrint iš sisteminių pozicijų, būtų labai naudingas tampsrenis teoretikų – hidromechanikų ir hidraulikos specialistų bendradarbiavimas, hidromechanikos ir termodinamikos metodų sintezė, o taip pat makro ir mikrometodų sintezė. Dabar gi, skaitant kai kurių teorinės hidromechanikos atstovų straipsnius, susidaro įspūdis, kad klasikinės hidromechanikos požiūris kartais net trukdo atsižvelgti į diskrečią (molekulinę) realių skysčių struktūrą ir išvesti iš to fakto išplaukiančias išvadas, kurių negalima išvesti iš klasikinės kontinuumo teorijos. Aš ilgą laiką galvojau, kad tokia mano nuomonė gali būti nepagrįsta, išplaukianti tik iš to, kad aš su hidromechanika ir hidraulika esu susipažinęs tik labai paviršutiniškai ir esu, kaip ir dauguma sistematyros mokslo atstovų, tik diletantas tokiuose specialiuose moksluose, tačiau neseniai įsitikinau, kad ir šį kartą sisteminis mąstymas man leido padaryti teisingas išvadas. Knygoje [148], skaitydamas žymaus hidromechaniko Dž. Pirsono (Pearson J. R.) straipsnį, aš radau lygiai tokias pačias mintis. Šių minčių teisingumą patvirtina ir tokių naujų teorijų kaip Eiringo (Eyring H.) molekulinė skysčių teorija, o tai pat struktūrizuotą skysčių teoriją, plėtojama Betčeloro (Batchelor G. K.), Berdo (Bird R. B.), Edvardso (Edwards S. F.), De Ženo (De Gennes) ir kit. darbuose.

Apie būtinybę „gryniesiems“ hidromechanikams, tebesilaikantiems puristinių klasikinės hidromechanikos požiūrių, keisti tas požiūris prabilo ir vienas labai autoritetingo tarptautinio žurnalo „Journal of Fluid Mechanics“ redaktorių H. Mofatas (Moffat H. K.). To žurnalo jubiliejui skirtame specialiaame leidinyje jis rašo: „... gerai padarytų puristai, jei pastebėtų, kad visi esminiai iki šiol pasiekti laimėjimai turbulentiškumo teorijoje buvo stimuliuoti galingų fizikinių argumentų. Izoliuoti matematiniai metodai mažai ką davė, išskyrus sunkų darbą ir nusivylimus“.

Ryšium su šia H. Mofato pastaba norėčiau pažymėti, kad statistinė molekulinė kinetinė dujų teorija ne tik leidžia gauti tuos dėsnius, kurie buvo nustatyti dujų termodinamikos moksle, bet ir daug papildomų dėsningumų ir todėl tą teoriją galima laikyti galingesne už klasikinę termodinamiką. Panašią

išvadą galima padaryti ir lyginant statistinę elektronų judėjimo metaluose, skysčiuose ir dujose teoriją su klasikine elektrodinamika. Šios pastabos nereiškia klasikinių termodinamikos ir elektrodinamikos mokslų neigimo, nes daugelyje atvejų tų mokslų sukurtu matematiniu aparatu yra patogiau naudotis negu statistinėmis mikroteorijomis, o tik patvirtina 1.12. skyriaus pagrindinę mintį, kad **turėdami sistemos mikromodelį, mes galime juo naudotis ir išorinio modelio vaidmenyje, kai tuo tarpu atvirkštinės galimybės nėra, nes iš išorinio sistemos modelio mes negalime vienareikšmiškai spręsti, koks yra tos sistemos vidinis modelis.** Mes, žinodami sistemos išorinį modelį, galėtume tik suprojektuoti tokį vidinį modelį, kuris, jei jį naudotume išorinio modelio vaidmenyje, duotų tas pačias išorines išėjimų ir fazines trajektorijas, kaip ir nagrinėjamoji sistema, tačiau negalėtume garantuoti, jog realios sistemos vidinė struktūra sutampa su mūsų suprojektuotos sistemos vidine struktūra.

Galima suformuluoti tokį apibendrinantį teiginį: bet kokia papildoma informacija apie sistemos vidinę sandarą, reikiamai panaudojus ją, leidžia praturtinti ir patikslinti sistemos išorinį modelį. Šią mintį iliustruoja toks gerai žinomas pavyzdys: įvesdami į termodinaminę Klapeirono–Mendelejevo lygtį

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ aprašančią idealių dujų būseną, papildomas eksperimentaliai nustatomas konstantas } a \text{ ir } b,$$

charakterizuojančias dujų molekulėmis užimamą tūrį ir papildomą slėgį, kuris atsiranda dėl sankabos jėgų tarp realių dujų molekulių, mes gauname Van der Valso (J. D. van der Waals) lygtį

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right) \cdot (V_0 - b) = RT, \text{ kurioje } V_0 - \text{dujų molio tūris, } \frac{a}{V_0^2} - \text{dujų vidinis slėgis, kurį lemia molekulių}$$

traukos jėgos, b – molekulių savojo tūrio pataisa, kurią lemia molekulių stūmos jėgos. Ši lygtis aprašo ne tik realių dujų būseną, bet tinka net ir dujų fazinio perėjimo į skystą būseną proceso aprašymui. Vadinasi, ši formulė daug universalesnė.

Tuo norėčiau ir baigti teorinės hidromechanikos ir inžinierinės hidraulikos pasiekimų palyginimą, iliustruojatį **praktikos reikšmę teorijai** ir atskleidžiantį dar vieną priežastį, kodėl teorinės hidromechanikos atstovai niekada nenagrinėjo hipotezės apie galimą idealaus skysčio slūgimą, jo dalelėms neįgyjant kinetinės energijos. Juk tokia hipotezė galėjo kilti tik mąstant apie skystį, kaip apie diskrečią struktūrą, ir negalėjo kilti, laikant skystį kontinuumu.

Manychiau, jog šis trumpas ekskursas į hidraulikos valdas būsimajam sistemotyryninkui bus naudingas ne tik tuo, kad padės praplėsti akiratį ir papildys sistemotyryninko tezaurusą kai kuriomis žiniomis apie skysčius ir jų tekėjimą, bet ir tuo (kas dar svarbiau), jog pailiustruos, **koki reikšmingą vaidmenį bet kuriame moksle (tame tarpe – ir sistemotyroje gali ir turi vaidinti natūriniai stebėjimai ir natūriniai eksperimentai.** Juk nuo jų prasideda bet kuris mokslas. Ir kol tokiais stebėjimais ir eksperimentais nebus sukaupta pakankamai faktų, kol tie faktai, taikant indukcijos metodus, nebus apibendrinti, kol mokslininkai savo galvose nesusikurs koncepcinių modelių, bent jau apytikriai teisingai atspindinčių tikrovę, kol nebus atrasti ir suformuluoti dėsniai, išreiškiantys nagrinėjamų procesų esmę, tol neįmanoma efektyviai taikyti dedukcijos metodus ir kurti efektyvias dedukcines teorijas. Prie šios labai svarbios sistemotyrai temos mes dar grįšime šios mokymo priemonės 1.16. skyriuje.

Kalbėdamas apie natūrinių stebėjimų ir natūrinių eksperimentų reikšmę moksle, norėčiau pažymėti dar vieną šiam mokymo priemonės skyreliui labai **svarbų faktą, dar kartą patvirtinantį šio skyrelio pagrindinę idėją, kad kartu su natūriniais eksperimentais gali būti labai efektyviai panaudoti ir matematiniai eksperimentai su sudėtingų sistemų ir sudėtingų procesų imitaciniais modeliais.**

Nors imitacinis modeliavimas ir eksperimentai su imitaciniais modeliais dar nėra paplitę šiuolaikinėje hidro bei aerodinamikoje, tačiau jau pirmieji bandymai parodė, jog tai – **labai perspektyvi kryptis.** Naudojantis analiziniais aerodinamikos metodais ilgai nesisėkė prognozuoti smūginių bangų frontų struktūrą vienaatominėse dujose: teorinių paskaičiavimų ir eksperimentų rezultatų skirtumai buvo tokie dideli, kad jie negalėjo patenkinti smūgines bangas tyrinėjusių mokslininkų. Ir štai H. A. Berdas (Bird H. A.) pabandė nagrinėjamus procesus imituoti, pasinaudodamas statistinio modeliavimo (Monte Karlo) metodu, apie kurį bus kalbama šios mokymo priemonės 1.14. skyriuje. H. A. Berdo gauti rezultatai buvo tiesiog įspūdingi. Pasinaudodama jais, grupė Vašingtono universiteto mokslininkų (Elliott J. P., Baganoff D., McGregor R. D.) sukūrė skaičiavimo metodą, kuris leido gauti rezultatus, puikiai sutampančius su H. Alzmajerio eksperimentiniais rezultatais, gautais, naudojantis gana tiksliais matavimo metodais. Kaip rodo šis pavyzdėlis, **imitacinis statistinis modeliavimas jau skinasi sau kelią net ir tokioje konservatyvioje srityje kaip teorinė hidro ir aerodinamika.**

Baigdamas kai kurių šios srities žymių specialistų požiūrių į idealaus skysčio išteklį iš indo, kuriame skysčio kiekis nėra papildomas, apžvalgą, norėčiau pareikšti, jog manęs nenustebino tai, kad mano oponentams mano hipotezė pasirodė klaidinga. Juk mano oponentai, būdami klasikinės mokyklos

auklėtiniai, laikėsi pažiūrų, kurios jiems buvo įdiegtos toje mokykloje. **Mane nustebino ne jų pažiūros, o jų nenoras ir nesugebėjimas idėmiau įsiklausyti į kitų žmonių išsakomų minčių ir jų pateikiamų faktų bei įrodymų logiką, jų nesugebėjimas ir net nenoras vaisingai diskutuoti, artėjant prie tiesos. O juk toks artėjimas, mąstant sistemiškai, yra būtinas bei niekad nepabaigiamas procesas, ir nė viena iš diskutuojančių pusių negali pretenduoti į absoliučią tiesą.** Nepretenduoju į ją ir aš, teigdamas, kad idealus skystis, jam ištekant iš indo, pačiame inde tik slūgsta neįgydamas kinetinės energijos, o tik paversdamas savo potencinę energiją (jos sumažėjimą) į ištekantčio skysčio kinetinę energiją. Aš tik išsaku vieną iš galimų idealaus skysčio ištekėjimą paaiškinančių hipotezių ir pateikiu eilę argumentų, parodančių, jog mano siūloma hipotezė gali būti teisinga, o mano oponentų ginamos hipotezės teisingomis būti negali. Formuluodamas šią savo hipotezę ir skelbdamas ją LMD konferencijoje, aš net neturėjau tiesioginio tikslo sukurti ar patobulinti idealaus skysčio ištekėjimo teoriją, o tik norėjau atkreipti dėmesį į tai, kad esama teorija yra abejotina ir todėl diskutuotina, ir, kas man buvo tuo metu ir dabar svarbiausia, kad, **diskutuoju ir tikrinant įvairias hipotezes, gana efektyviu instrumentu gali būti imitacinis sudėtingų procesų modeliavimas ir eksperimentai su tų procesų matematiniais modeliais.** Net ir dabar, pateikęs tiek daug argumentų savo ginamos hipotezės

ir formulės $v = \sqrt{2gh}$ naudai ir mano oponentų ginamos hipotezės ir formulės $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$ nenaudai,

aš jokių būdu neteigiu, jog ši diskusija jau visiškai baigta. **Taip daryti man neleidžia mano dėstomas sistematizacijos mokslas, pati sisteminio mąstymo metodologija:** juk aš šioje diskusijoje galėjau nepastebėti kai kurių svarbių faktorių, kurių aibė yra begalinė ir niekada neišsemiamą, ir todėl mano padarytos išvados dėl tokio nepilnumo galėjo būti ne visai teisingos. Pavyzdžiui, čia aš neatsižvelgiau į tai, kad molekulės – ne paprasti rutuliukai, o gana sudėtingi dariniai, apie ką jau buvo rašoma 1.9.1.2. ir 1.9.1.3. skyreliuose. Todėl manęs nė kiek nenuliūdins tai, jei koks nors mano oponentas pateiks tokių faktų bei tokių samprotavimų, kurie parodys, jog galimas dar artimesnis absoliučiai tiesai, kurios siekimas – kiekvieno mokslo paskirtis, sprendimas. **Juk tokiu atveju išloš abi diskutuojančios pusės ir, kas svarbiausia, išloš mokslas, dar arčiau priartėdamas prie tiesos, išloš visa visuomenė.**

Todėl aš jokių būdu nesmerkiu savo oponentų, turinčių kitokią nuomonę negu aš, ir kviečiu juos pratęsti diskusiją. Laimės ar pralaimės jie toje diskusijoje, mano pagarba jiems, jei jie diskutuos garbingai ir argumentuotai, nė kiek nesumažės.

O štai savo straipsnio į „Lietuvos matematikų darbų“ leidinį recenzentui, to leidinio redkolegijai, o taip pat jau minėtajam „Lietuvos ūkio“ redaktoriaus pavaduotojui bei tiems „aukštiesiems ponams“, kuriems pataikaudami ir kurių nemalonės bijodami įvairūs „recenzantai“ ir „redaktoriai“ trukdo tiesos paieškai bei jos skelbimui, aš pagarbos jausti tikrai negaliu, nors ir suprantu, kad ir jie, kaip ir visi žmonės, negali neturėti trūkumų ir silpnybių, o į kai kuriuos trūkumus ir silpnybes net turi teisę.

Tačiau ar turi jie teisę, taip elgdamiesi, užimti tas pareigas, kurias dabar užima, vykdyti tas visuomenines funkcijas, kurias dabar vykdo? Juk įvairūs pataikūnai, kurie, stengdamiesi nepakenkti savo ir savo šeimų gerbūviui, ar net pagerinti jį, nesipriešina „stipriųjų“ melui ar net patys sąmoningai skelbia netiesą, daro labai didelę žalą visai visuomenei. Juk jei nebūtų tokių bestuburių padlaižių arba jei jų būtų labai mažai, ar ilgai galėtų išsilaikyti valdžioje koks nors diktatorius ar diktatorėlis bei kokia nors apgavikų, demagogų ir sukčių gauja, kokius turtus ir kokius ginklus jos nariai beturėtų? Juk tokių, drebantių tik dėl savo kailio ir savo gerbūvio, parankinių rankomis ir vykdoma dauguma nusikaltimų, susidorojama su padoresniais žmonėmis, išdrįsusiais pasipriešinti melui, smurtui, savanaudiškam ir grobuoniškam „vadukų“ elgesiui.

Tokių bestuburių padlaižių buvo, yra ir bus visais laikais, ir tik todėl blogis gali klestėti ne tik trumpomis akimirkomis, bet ir gana ilgais intervalais. Ar ne apie juos savo laiku su kartėliu rašė mūsų tautos dainius Maironis savo eilėraštyje „Mano gudrūs draugai greit į žmones išėjo...“? Ar ne apie juos galvojo Lietuvos Himno autorius V.Kudirka, kviesdamas mus neparsiduoti dėl trupinio aukso, gardaus valgio šaukšto, linkėdamas, kad tik šviesa ir tiesa telydėtų mūsų žingsnius?

Taigi, tokie parsiduodantys padlaižūnai ne tik niekingi, bet ir labai žalingi bei pavojingi. Žinoma, ne mažiau niekingi, žalingi bei pavojingi tie „vadai“ ir „vadukai“, kurie toleruoja tokių padlaižių buvimą ir net skatina jų atsiradimą ir daugėjimą, nes žino, kad tik jų dėka gali išsilaikyti valdžioje.

Visi jie (ir „ponai“, ir jų nuolankūs „tarnai“) labiausiai bijo tiesos, taigi – ir mokslo. Jis jiems reikalingas tik tiek, kiek padeda jiems siekti savo egoistinių tikslų, bet ne daugiau. Jų nuomone mokslas – ne tiesos ieškojimas ir jos taikymo instrumentas, o „prekė“, kuri ir naudinga tik kaip „prekė“, ir tos „prekės“ kiekis turi būti „gaminamas“ ir pateikiamas tik atsižvelgiant į tai, ar yra pinigų tos „prekės“ pirkėjui ir kiek koks nors „pirkėjas“ turi pinigų. O jei kas nors reikiamos sumos neturi, tai jam to

„mokslo“ bus pateikta tik tiek, kad pastarasis sugebėtų naudingai tarnauti tiems, kas tų pinigų turi. „Aukštų ponų“ nuomone tai – net ir gerai, nes, jų manymu, mokslo perteklius „driskiams“ žalingas. Juk nepageidautina, kad „driskiai“ žinotų tai, kas „aukštiems ponams“ nepageidautina. O kad kartais kokia nepageidautina mintis atsitiktinai neužklystų į tuščią „driskiaus“ galvą, ją reikia užimti pigia popkultūra, kurioje sunku beatskirti, kur čia dar erotika, o kur jau – pornografija, kur čia dar šioks toks gėris, o kur – jau nuogas blogis, kur čia dar šioks toks mokslas, o kur – jau grynas šarlatanizmas. Tikram mokslui pinigų trūksta, o tokiai „prekei“ kaip popkultūra – pinigų kažkodėl visada atsiranda. Kaip ir besaiki reklamai, plūstančiai iš visų kampų, kuria galima pasitikėti lygiai tiek pat, kiek ir politikų priešrinkiminiais pažadais.

„Geras tonas“ reikalauja viso to „nematyti“, visa tai laikyti – norma, kurios ne tik neįmanoma pakeisti, bet ir nereikia keisti, nes tai naudinga tiems, kurie užsako visą šią „muziką“.

Ir, neduok Dieve, kad kas nors, kaip toj Anderseno pasakoj, nežinodamas ar nesilaikydamas priimtų „žaidimo“ taisyklių, nesuriktų, jog „karalius tai nuogas!“. Tokiam reikia tučtuojau užčiaupti burną. Žinoma, ne taip žiauriai kaip bolševikai ar hitlerininkai, kuomet už tiesos žodį buvo skiriama konclageriai, katorga ar net mirties bausmė, bet „civilizuotai“, „kultūringai“ – ekonominėmis priemonėmis, kurios, pasirodo, žymiai efektyvesnės negu grubus atviras smurtas.

Tačiau šio „efektyvumo“ kai kuriems aukštus postus užimantiems „veikėjams“, atrodo, jau nebepakanka, ir jie imasi iniciatyvos dar labiau „patobulinti“ šią sistemą. Tuo tikslu kurpiami nauji įstatymų projektai, kuriuose numatoma: įsteigti valstybinę žiniasklaidos kontrolės inspekciją su gana plačiais įgaliojimais, dešimteriopai padidinti baudas už aukštų ponų ramybės drumstinimą, paviešinant informaciją apie kai kuriuos jų „darbelius“, apriboti šimtmečius gyvavusių universitetuose akademinės laisvės teisę, deleguojant į universitetų tarybas tiek „patikimų“ ir „ištikimų“ valdžiai atstovų nuo valdžios institucijų ir nuo „nusipelnusių“ visuomenės organizacijų, kad jie savo balsais galėtų „ryžtingai užkirsti kelią“ bet kokiai „erezijai“, kuri galėtų „užsiveisti“ kai kurių mokslininkų, nepanorusių tapti „gerais ir savais vyrais“, galvose.

Kodėl čia apie tai rašau sistemotyros kurso mokymo priemonėje? Todėl, kad **sisteminis mąstymas neleidžia viso to nematyti ir nemąstyti apie viso to pasekmes ne tik dabar, bet ir ateityje.** Todėl, kad **negalima mokyti sistemotyros, sisteminės viso to, kas vyksta aplinkui, analizės, pačiam to nedarant.** Todėl, kad **negalima išugdyti pilietinės visuomenės, neugdant nuo „mažų dienų“ pilietinio mąstymo ir asmeninės pilietinės atsakomybės jausmo už visa tai, kas vyksta šalia tavęs.** Todėl, kad **bet koks mokslas – tai, visų pirma, tiesos paieška ir tos tiesos sakymas ir taikymas, o sistemotyra – irgi mokslas ir ne bet koks, o mokslas, apimantis visas sistemas, tame tarpe ir socialines, ir politines.**

Šios mokymo priemonės šio skyrelio paskirtis buvo ne tik parodyti, kaip sisteminis matematinis modeliavimas gali būti taikomas įvairių hipotezių tikrinime, ne tik išsiaiškinti, kuri iš nagrinėjamų idealaus skysčio išteklėjimą aiškinančių hipotezių yra teisingesnė, bet ir pademonstruoti, kaip vykdoma tų ar kitų išskylančių problemų sisteminė analizė, kaip visapusiškai turi būti nagrinėjamos įvairios galimos alternatyvos, kaip stengiamasi išnagrinėti įvairias nuomones, ieškant jose racionalaus grūdėlio bei aiškinantis priežastis, kaip ir kodėl tokia nuomonė galėjo atsirasti, ir nebijant sakyti tiesą, kokia neįprasta, kai kam nepriimtina ar pavojinga pačiam sakančiajam ji bebūtų. Visa tai – sisteminės analizės sudėtinės dalys, o vienas pagrindinių šio sistemotyros kurso tikslų – išmokyti studentus sistemiškai mąstyti ir sistemiškai analizuoti sudėtingas sistemas ir procesus. Siekiant šio tikslo, būtina parodyti studentams, kaip tokia analizė atliekama konkrečioje situacijoje.

Todėl sisteminė analizė mes užsiiminėjome ne tik čia, bet ir 1.9.2.13. skyrelyje, nagrinėdami visus galimus Šteinerio taškų išsidėstymo lygiašonėje trapezijoje atvejus, o taip pat ir 1.11.10. skyrelyje, nagrinėdami virpesių kontūre galinčius vykti procesus, sisteminė analizė mes užsiiminėsime ir 1.15. skyriuje, nagrinėdami, kaip gali keistis optimalus sprendinys, keičiantis optimizacinio modelio parametrams. Sisteminei analizei bus skiriamas atskiras skyrius antroje šios mokymo priemonės dalyje, nes be jos neįmanomas nei sudėtingų sistemų ir procesų pakankamai adekvačių modelių sudarymas, nei naujų sudėtingų sistemų sisteminis projektavimas.

Baigdamas 1.13. skyrių, norėčiau dar kartą pabrėžti svarbią mintį, kuriai ir buvo skirti minėtieji mano pranešimai LMD konferencijose: **jei net tokiam objektyviame ir tiksliame moksle kaip klasikinė fizika, turinčiame solidžią eksperimentinę ir teorinę bazę, matematinis modeliavimas gali padėti pastebėti „baltas dėmes“ ir rasti teisingesnius atsakymus į išskylančius nelengvus klausimus, tai kiek „baltų dėmių“ ir teisingesnių atsakymų galima būtų rasti ekonomikoje,**

socialiniuose moksluose, vadyboje ir pan., pasitelkus eksperimentus su matematiniais modeliais, kiek klaidų ir nuostolių būtų galima išvengti?!

Todėl **matematinio modeliavimo pagrindus būtų tikslinga dėstyti visų specialybių studentams, o su jo taikymo pavyzdžiais ir galimybėmis derėtų supažindinti visus vadovus**, priimančius svarbius sprendimus sudėtingose situacijose, kuriose paprasto sveiko proto ir intuicijos jau nebepakanka.

Šioje mokymo priemonėje, atsižvelgiant į matematinio modeliavimo svarbą ir naudą, imitaciniam sudėtingų sistemų ir procesų modeliavimui ir eksperimentams su matematiniais modeliais skiriama gana daug dėmesio.

1.14. skyriuje skaitytojas bus supažindintas su imitacinio modeliavimo taikymu statistiniuose tyrimuose bei statistiniame modeliavime ir bus sudarytas kirpyklos funkcionavimo statistinis imitacinis modelis bei pateikti eksperimentų su tuo modeliu rezultatai.

Tame pačiame skyriuje skaitytojas susidurs dar su vienu gana **specifiniu imitacinio modeliavimo taikymo pavyzdžiu – pseudoatsitiktinių skaičių generavimu**, t. y. su atsitiktinių procesų, kurių statistinės charakteristikos galėtų priklausyti tiems ar kitiems tikimybiniais skirstiniais, skaitmeniniu imitavimu, leidžiančiu gauti skaičių pasiskirstymą, pakankamai artimą atsitiktiniam, turinčiam pageidaujamas statistines charakteristikas. Bus nagrinėjami ekonominiai, ekonometriniai ir ekologiniai modeliai.

Dar daugiau dėmesio imitaciniam sudėtingų sistemų modeliavimui bus skirta antrojoje šios mokymo priemonės dalyje, kurioje skaitytojas bus supažindintas su Foresterio ir Buslenkos dinaminio imitacinio modeliavimo sistemomis FDS ir BAS, su automatizuotomis imitacinių modelių kūrimo ir eksperimentavimo su jais sistemomis Powersim, GPSS ir t. t., o taip pat su programiniais paketais Maple, MatLab, MathCad.

1.13. skyriaus santrauka

Šio skyriaus pagrindinė tema – **matematinis eksperimentavimas, matematiniai eksperimentai su nagrinėjamų ar projektuojamų sistemų modeliais**.

Skyrių sudaro trys nuosavos specialios paskirtis turintys poskyriai, kuriuos ši tema sujungia ir kuriuose ši tema nagrinėjama skirtingais aspektais.

1.13.1. poskyryje apžvelgiami tipai uždavinių, kurių sprendimo gali prireikti, atliekant sisteminę analizę, sisteminį modeliavimą bei sisteminį projektavimą, ir kurių sprendimui gali prireikti eksperimentų su nagrinėjamų ar projektuojamų sistemų matematiniais modeliais.

Nagrinėjami **keturi tipai tokių uždavinių**. Jie formuluojami atsižvelgiant į tai, ką mes apie nagrinėjamą ar projektuojamą sistemą žinome ir ką norime sužinoti bei pasiekti.

Pirmajam tipui priskiriami uždaviniai, kuriuos sprendami mes turime nagrinėjamos ar projektuojamos sistemos matematinį modelį, žinome jos pradinę (dabartinę) būseną ir norime sužinoti, kaip funkcionuos ta sistema esant duotajai ar planuojamai įėjimo trajektorijai.

Jei mes turime išorinį analizinį sistemos modelį, tai, naudodamiesi sistemos perėjimo ir išėjimo funkcijomis, galime apskaičiuoti sistemos fazinę ir išėjimų trajektorijas, o turėdami imitacinį išorinį modelį, galime tas trajektorijas imituoti.

Tuo atveju, kai turime vidinį sistemos modelį ir žinome sistemos įėjimo trajektoriją ir jos vidinę būseną, tai galima apskaičiuoti ir vidinį sistemos funkcionavimą – jos elementų įėjimų, išėjimų ir fazines trajektorijas, ir išorinį sistemos funkcionavimą – sistemos fazinę ir išėjimų trajektorijas, t. y. galima panaudoti sistemos vidinį modelį ne tik kaip vidinį modelį, bet ir jos išorinio modelio vaidmenyje.

Antrojo tipo uždavinius galima laikyti atvirkštiniais pirmojo tipo uždavinių atžvilgiu: sprendami antrojo tipo uždavinius, mes norime nustatyti, kokia turėtų būti sistemos, kurios matematinį modelį mes turime ir kurios dabartinę būseną mes žinome, įėjimo trajektorija, kad sistemos išėjimo ir jos fazinė trajektorijos būtų tokios, kokių mes pageidaujame. Antrojo tipo uždaviniai iškyla formuojant sistemų valdymo procesus. Sudėtingų sistemų valdyme pilnai ir tiksliai išspręsti antrojo tipo uždavinius pavyksta gana retai. Dažniausiai tenka apsiriboti tik gana artutiniais sprendimais, gaunamus supaprastinus uždavinių sąlygas. Tokie artutiniai sprendiniai leidžia tik apytiksliai įvertinti sritį, kuriai

galėtų priklausyti ieškomos įėjimų trajektorijos. Tikslesnį sprendinį galima gauti tik atliekant eksperimentus su sistemos matematiniu modeliu, t. y. išbandant galimas įėjimo trajektorijas, priklausančias minėtajai galimų įėjimo trajektorijų sričiai, ir sprendžiant atitinkamus pirmojo tipo uždavinius. Analizuodami gaunamus fazinių ir išėjimo trajektorijų variantus ir atitinkamai keisdami išbandomas įėjimo trajektorijas, mes galime atrinkti tokias įėjimo trajektorijas, kurias atitinka mums pageidautinos išėjimų ir fazinės trajektorijos ar trajektorijos pakankamai artimos pageidautinoms.

Trečiojo tipo uždaviniai – tai nagrinėjamų ar projektuojamų sistemų modelių sudarymo uždaviniai. Tokių uždavinių sprendimo tikslas – sudaryti modelį tokios sistemos, kuri duotąsias įėjimo trajektorijas transformuotų į duotąsias išėjimo trajektorijas. Tai sistemų, tenkinančių duotus reikalavimus, sintezės, jų projektavimo uždaviniai.

Analiziškai išspręsti tokius uždavinius pavyksta tik pakankamai paprastais atvejais. Sudėtingesniais atvejais analizinius tokių uždavinių sprendimo metodus tenka derinti su matematinio ir fizinio eksperimentavimo metodais: išbandant modelių ir projektų variantus, eksperimentuojant su jais.

Kadangi trečiojo tipo uždaviniai gali turėti daug sprendinių, tai atsiranda geriausio sprendinio išsirinkimo iš galimų sprendinių aibės uždavinys. Tai – optimizavimo uždavinys.

Optimizavimo uždaviniai priskiriami ketvirtajam uždavinių, nagrinėjamų 1.13.1. poskyryje, tipui. Tokių uždavinių sprendimui bus skiriami atskiri mokymo priemonės skyriai, poskyriai ir skyreliai, o šiame poskyryje apsiribojame tik pastaba, jog ir šio tipo uždaviniai išsprendžiami tik paprastais atvejais, o sudėtingesniais atvejais analizinius optimizavimo metodus tenka papildyti matematinio eksperimentavimo metodais.

1.13.2. poskyris skirtas imitaciniam modeliavimui. Šiame poskyryje įsivedamos imitacinio modelio ir imitavimo siaurąją bei plačiąją prasme sąvokos ir pateikiami imitacinių modelių ir imitacinio modeliavimo pavyzdžiai. Pažymima, jog **imitaciniai modeliai gali būti deskriptiniai ir normatyviniai, o eksperimentai su imitaciniais modeliais – vidiniai, išoriniai ir mišrūs.**

1.13.3. poskyris skiriamas eksperimentų su matematiniais modeliais (tame tarpe – ir su imitaciniais modeliais) taikymui hipotezių tikrinimui. Tai labai perspektyvi ir įdomi matematinio eksperimentavimo sritis.

Poskyryje apžvelgiami tokio taikymo etapai, o pats taikymas iliustruojamas konkrečiu pavyzdžiu, kuriam skiriama didžioji dalis šio gana didelės apimties skyrelio teksto.

Tikrinamos dvi idealaus skysčio išteklėjimo iš rezervuaro, kuriame ištekančio skysčio kiekis nėra papildomas, hipotezės. Parodoma, kad net tokioje palyginti gerai ištirtoje srityje kaip hidrodinamika ir hidraulika eksperimentai su matematiniais modeliais gali atskleisti tai, į ką anksčiau nebuvo atkreiptas dėmesys, ir daroma išvada, kad **matematinio eksperimentavimo taikymas hipotezių tikrinimui mažiau ištirtose srityse – labai perspektyvi mokslinių tyrimų kryptis.**

Išnagrinėtas pavyzdys kartu yra ir sisteminės analizės pavyzdys, iliustruojantis, kaip sisteminiai analitikai analizuoja tiriamas situacijas, pasitelkdami specialiųjų mokslų (šiuo konkrečiu atveju – hidrodinamikos ir hidraulikos) žinias. Sisteminiams analitikams ir dženeralistams privalo sugebėti „susigaudyti“ specialiuosiuose moksluose, kad galėtų efektyviai bendrauti su specialistais kompleksiniuose kolektyvuose, keldami pastariesiems prasmingus klausimus ir suprasdami jų pateikiamus atsakymus, naudingai diskutuoti su jais. Sisteminiams analitikams ir dženeralistams nėra būtina gerai žinoti specialiuosius mokslus, tačiau sugebėti, reikalui esant, juos suprasti – privalu. Tik tuomet jų bendravimas su siauresnių sričių specialistais bus abipusiai naudingas.

Išsiaiškinamos sąvokos

aerodinamika	automatinis reguliavimas
aktyvieji eksperimentai	automatinis valdymas
algebrinė lygtis	automatizuota imitacinio modeliavimo sistema
algoritmatis modelis	(AIMS)
analizinis modelis	automatizuota projektavimo sistema (APS)
analizinis sprendimo būdas	automatizuotas valdymas
angos formos koeficientas	automatų abstrakčioji sintezė
antrojo tipo uždaviniai – atvirkštiniai uždaviniai	automatų loginė sintezė
antros eilės tenzorius	automatų struktūrinė sintezė
Archimedo dėsnis	
bandomasis egzempliorius	Bordo tūta
bendravimas su sistemos modeliu	Buslenkos agregatinė sistema
Bernulio lygtis	

chronometras

čiurkšlė
čiurkšlės inversija

dalykinis žaidimas
debitas
debito apskaičiavimo formulė
debito koeficientas
dedukcija
dedukcijos metodai
dedukcinė teorija
deformacija

ekologinė sistema
ekologinis modelis
ekonometrinis modelis
eksperimentai su biliardo kamuoliais
eksperimentai su imitaciniais modeliais: vidiniai,
išoriniai, mišrūs
eksperimentai su matematiniais modeliais –
efektyvus hipotezių tikrinimo instrumentas

fizinė erdvė
fizinis imitacinis modelis
fizinis imitavimas

gradientas
grafinis interfeisas

Hamiltono operatorius
helis I
helis II
hidraulika
hidraulinės trinties koeficientas
hidrauliniai energetiniai nuostoliai
hidrodinamika
hidromechanika
hiperboloidas

idealaus skysčio išteklėjimas
idealaus skysčio išteklėjimo greičio formulė
idealaus skysčio išteklėjimo vidutinio greičio
apskaičiavimo formulė
idealaus skysčio judėjimo lygtis
idealiai nestangrus smūgis
idealiai tamprus (stangrus) smūgis
idealus skystis
imitacinio modeliavimo automatizavimas
imitacinio modeliavimo sistemos
imitacinio modeliavimo taikymas hipotezių
tikrinime
imitacinis modeliavimas plačiąją prasme
imitacinis modeliavimas siaurąją prasme
imitacinis modelis

jėgos impulsas

kauzalinis modelis
kaverna

čiurkšlės suspaudimo koeficientas
čiurkšlės suspaudimo koeficiento apskaičiavimas

deskriptinis imitacinis modelis
deskriptinių modelių sudarymo uždaviniai
dialogo su kompiuteriu režimas
diferencialinė lygtis
dinaminio imitacinio modeliavimo sistemos
dinaminio klampumo koeficientas
divergencija

eksperimentavimo su matematiniais modeliais
automatizavimas
eksperimentinė fizika
eksperimentų planavimas
empirinė koeficiento reikšmė
empiriniai koeficientai
energijos tvermės dėsnis

fizinis modelis
Foresterio dinaminė sistema (FDS)
funkcionaliai ekvivalentiškos sistemos

greičio koeficientas
GPSS

hipotetinis koncepcinis modelis
hipotetinis modelis
hipotetinių variantų atrinkimas
hipotezė
hipotezės formulavimas
hipotezės paneigimas
hipotezės patikslinimas
hipotezės tikrinimas

imitacinių modelių kūrimas
indukcija
indukcijos metodai
informacinis modelis
informacinis imitacinis modelis
integralinė lygtis
interfeisas
inžinerinė praktika
inžineriniai skaičiavimai
išorinis funkcionavimas
išorinis modelis
išorinis sistemos optimizavimas
iteracija
iteracijų metodas

judėsio kiekio tvermės dėsnis

kelio nuostolių koeficientas
ketvirtojo tipo uždaviniai – optimizavimo uždaviniai

kinematinio klampumo koeficientas
klampumas
klampumo koeficientai
klampus skystis
Klaiperono – Mendelejevo lygtis
klasikinė fizika
klasikinė hidrodinamika
klasikinė kontinuumo teorija
klepsidra
kombinacinė schema
kompiuteriniai žaidimai
kompleksinė plokštuma

laboratorinis egzempliorius
laminarinis tekėjimas
Laplaso operatorius

MAPLE
masės tvermės dėsnis
matematinės erdvės
matematinė sistemotyra
matematinės statistikos metodai
matematiniai eksperimentai
matematinio eksperimentavimo taikymai
 hipotezių tikrinime
matematinų eksperimentų metodas

natūriniai stebėjimai
natūrinių eksperimentų metodas
naujų hipotezių paieška
Navje ir Stokso lygtis
nepilnutinis čiurkšlės suspaudimas

Oilerio lygtis idealaus skysčio tekėjimui

paraboloidas
pasyvieji eksperimentai
pilnasis skysčio dalelės greitis
pirmojo tipo uždaviniai – fazinių ir išėjimo
 trajektorijų apskaičiavimo uždaviniai
pirmos eilės tenzorius
plonasienė anga
POWERSIM
praktikos reikšmė teorijai

realios sistemos rekonstravimas
realus skystis
Reinoldso skaičiaus aukštutinė riba

„sausas“ skystis
sisteminė analizė
sisteminė hipotezių analizė
sisteminės hipotezių analizės etapai
sisteminis analitikas
sistemų analizė
sistemų modeliavimas
sistemų optimizavimas
sistemų projektavimas
sistemų sintezė
sistemų tobulinimas

konceptinis modelis
konforminis atvaizdavimas
konkurencija
konkurencinė kova
konkurencinės kovos priemonių apribojimas
konkurencinės kovos priemonių arsenalas
konoidinė tūta
kontinuuminė hidrodinamika
konvekcinis skysčio dalelės greitis
Koriolio koeficientai
kūginė tūta

loginė kauzalinė analizė
loginė lygtis
lokalusis skysčio dalelės greitis

matematinų eksperimentų planavimas
MathCad
MatLab
modelio tobulinimas eksperimentavimo metu
modifikuota Bernulio formulė
mokymasis eksperimentuojant
molekulinė skysčių teorija
multimedia

netobulas čiurkšlės suspaudimas
Niutono skystis
Niutono trinties dėsnis
normatyvinis imitacinis modelis
nulinės eilės cenzorius

priežastiniai ryšiai
prognozavimas
prognozų palyginimas
programinio serviso sistemos
pseudoatsitiktinis skaičius
pseudoatsitiktinių skaičių generavimas –
 matematinio imitavimo pavyzdys
Puazeilio formulė

Reinoldso skaičiaus žemutinė riba
Reinoldso skaičius

situacijų imitavimas
skaitmeninis imitavimas
skirtumai tarp analizinių ir imitacinių modelių
skirtuminė lygtis
skysčio išteklėjimas
skysčio išteklėjimo laiko apskaičiavimo formulė
skysčio nesuspaudžiamumo dėsnis
skysčio prateklėjimas
skysčio pusiausvyra
slėgio jėga
slėgis

stacionarus procesas
statistinė informacija
statistinė informacinė sistema (SIS)
statistinė molekulinė kinetinė dujų teorija
statistinės charakteristikos
statistinis modelis

tenzorinė analizė
tenzorinis skaičiavimas
tenzorius
teorinė fizika
teorinė hidrodinamika
termodinamika
tiesioginis bendravimas su sistema

Van der Valso lygtis
ventilinė schema
Ventūrio tūta
vidinis funkcionavimas
vidinis modelis

stochastinis procesas
Stokso eksperimentas
Stokso formulė
struktūrizuotų skysčių teorija
sudėtingų sistemų projektavimo metodologija
sūkurys

tolydumo lygtis
trečiojo tipo uždaviniai – modelių sudarymo
uždaviniai
turbulentinis tekėjimas
tūrinė jėga
tūta

vidinis sistemos optimizavimas
vietinių kliūčių koeficientas
virtuali aplinka
virtuali situacija
virtualus kalkuliatorius

UŽDUOTYS

1.13.1. Raskite pirmojo tipo uždavinių, sprendžiamų sistemotyroje bei operacijų tyrime, ir jų sprendimo pavyzdžių. Raskite pavyzdžių, kada šio tipo uždavinių sprendinių radimui buvo naudojami natūriniai eksperimentai. Raskite pavyzdžių, kada šio tipo uždavinių sprendimui buvo naudojami sistemų modeliai: a) fiziniai, b) matematiniai (analiziniai ar imitaciniai).

1.13.2. Raskite antrojo tipo uždavinių ir jų sprendimo pavyzdžių. Raskite pavyzdžių, kada šio tipo uždavinių sprendiniai buvo randami, sprendžiant matematinių lygčių sistemas: a) analiziniais metodais, b) skaičiavimo matematikos metodais. Raskite pavyzdžių, kada šio tipo uždaviniai buvo sprendžiami, pasitelkiant matematinius eksperimentus su sistemų imitaciniais modeliais.

1.13.3. Raskite trečiojo tipo uždavinių ir jų sprendimo pavyzdžių. Raskite pavyzdžių, kada sprendžiant šio tipo uždavinius buvo naudojami: a) matematiniai eksperimentai su projektuojamų sistemų modeliais, b) natūriniai eksperimentai su projektuojamos sistemos bandomaisiais egzemplioriais bei laboratoriniais maketais.

1.13.4. Raskite ketvirtojo tipo uždavinių ir jų sprendimo pavyzdžių. Raskite pavyzdžių, kada šio tipo uždaviniai buvo sprendžiami, pasitelkus specialius determinuotus optimizavimo algoritmus. Raskite pavyzdžių, kada šio tipo uždavinių sprendimui buvo naudojami matematiniai eksperimentai su sistemų modeliais. Raskite pavyzdžių, kada, eksperimentuojant su objektais ar su jų modeliais, optimalus sprendinys buvo surastas atsitiktinės paieškos metodu, o taip pat pavyzdžių, kada eksperimentai buvo planuojami

1.13.5. Perskaitykite apie antrojo tipo uždavinius matematinėje logikoje ir jų sprendimo metodus (pavyzdžiui, knygelėje [52]). Raskite pavyzdžių, kada šie metodai galėtų būti panaudoti, sprendžiant antrojo tipo uždavinius su sudėtingomis sistemomis.

1.13.6. Kokioje valdymo proceso fazėje (žiūr. [15, 16, 17]) iškyla antrojo tipo uždaviniai? Kaip, sprendžiant tokius uždavinius, galėtų būti panaudoti matematiniai eksperimentai su sistemų modeliais?

1.13.7. Perskaitykite apie trečiojo tipo uždavinius matematinėje logikoje ir automatikoje bei jų sprendimo metodus (pavyzdžiui, knygelėse bei knygose [50, 100, 101, 102, 110, 117, 120, 121, 122, 123, 124, 127]). Raskite pavyzdžių, kada šie metodai galėtų būti panaudoti, sprendžiant trečiojo tipo uždavinius su sudėtingomis techninėmis ir organizacinėmis sistemomis.

1.13.8. Susipažinkite su kokia nors automatizuoto projektavimo sistema (APS) ir su kokios nors konstruktorių ar technologų grupės, užsiimančios automatizuotu projektavimu, darbu. Pasiūlykite, kur ir kaip kokioje nors konkrečioje APS galėtų būti panaudoti matematiniai eksperimentai su projektuojamų sistemų modeliais. Ar naudojami matematiniai eksperimentai, projektuojant informacines sistemas, naudojantis CASE metodu ir priemonėmis?

1.13.9. Perskaitykite apie ketvirtojo tipo uždavinius matematinėje logikoje ir jų sprendimo metodus (pavyzdžiui, knygelėje [100]). Raskite pavyzdžių, kada šie metodai galėtų būti panaudoti, sprendžiant ketvirtojo tipo uždavinius sudėtingose techninėse ir organizacinėse sistemose.

1.13.10. Perskaitykite apie ketvirtojo tipo uždavinius operacijų tyrime (OT) ir jų sprendimo metodus (pavyzdžiui, knygoje [46, 47, 49, 128, 135, 149, 150, 151, 152, 153]). Raskite pavyzdžių, kada šie metodai galėtų būti panaudoti, sprendžiant ketvirtojo tipo uždavinius sudėtingose sistemose. Ar galėtų būti panaudoti matematiniai eksperimentai su matematiniais modeliais, sprendžiant OT uždavinius? Savo atsakymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais ir pasiūlymais.

1.13.11. Palyginkite kokios nors sudėtingos problemos sprendimo būdus: a) naudojantis natūriniais eksperimentais, b) naudojantis matematiniais eksperimentais su sistemų modeliais. Įvertinkite abu būdus išlaidų, laiko sąnaudų ir rizikos atžvilgiu.

1.13.12. Raskite pavyzdžių, kada matematiniais eksperimentams su sudėtingų sistemų modeliais pasitelkiami kompiuteriai. Kaip pasikeistų matematinų eksperimentų trukmė, kaina ir diapazonas, jei šie eksperimentai būtų vykdomi be ESM?

1.13.13. Raskite imitacinių modelių ir imitacinio modeliavimo (kaip plačiąja, taip ir siaurąja prasme) pavyzdžių. Raskite pavyzdžių, kada su imitaciniais modeliais buvo vykdomi: a) išoriniai, b) vidiniai, c) mišrūs eksperimentai.

1.13.14. Ar medžiagų sandėlio išėjimo ir fazinės trajektorijas galima buvo apskaičiuoti, neturint jo matematinio modelio, bet žinant jo pradinę būseną bei įėjimo trajektorijas ir imituojant sandėlio funkcionavimą? Kuo skiriasi imitaciniai ir analiziniai modeliai? Sudarykite sandėlio vidinio funkcionavimo imitacinį modelį ir palyginkite jį su analiziniu modeliu.

1.13.15. Grįžkite prie 1.10.11., 1.10.12. ir 1.10.13. užduočių. Kuo Jūs dabar galėtumėte papildyti ir patikslinti Jūsų parašytus referatus ir sudarytą imitacinį modelį?

1.13.16. Grįžkite prie 1.10.14. užduoties. Išnagrinėkite įeinančių į TPP imitacinių modelių charakteristikas, jų sudėtį ir struktūrą. Apibūdinkite eksperimentus, kuriuos Jūs įvykdėte (ar galite įvykdyti), naudodamiesi šiuo TPP.

1.13.17. Susipažinkite su VU studentų diplominiiais darbais imitacinio modeliavimo tema. Ką naudingo Jūs radote tuose darbuose? Kokius diplominių darbų trūkumus Jūs pastebėjote? Sudarykite techninę užduotį kokiam nors diplominiam darbui šia tema ir to diplominio darbo detalų planą.

1.13.18. Kas, Jūsų nuomone, sudaro statistinio modeliavimo esmę? Ką bendro turi statistinio ir imitacinio modeliavimo sąvokos? Kuo jos skiriasi? O gal jos sutampa? Savo atsakymą argumentuokite ir iliustruokite pavyzdžiais.

1.13.19. Perskaitykite apie sudėtingų organizuotų nepilnai determinuotų sistemų matematizavimo principą (žiūr. [5, 15, 16]) ir pabandykite suformuluoti, ką principaliai naujo ir reikšmingo įnešė į matematiką ir, bendrai, į mokslą imitacinis modeliavimas.

1.13.20. Pateikite multimedia priemonių panaudojimo imitaciniame modeliavime pavyzdžių.

1.13.21. Suformuluokite imitacinio modeliavimo siaurąją ir plačiąją prasme apibrėžimus. Kuo skiriasi imitacinis modeliavimas nuo analizinio ir ką jie turi bendro? Iliustruokite tai pavyzdžiais.

1.13.22. Pateikite imitacinio modeliavimo taikymo moksliniuose tyrimuose ir hipotezių tikrinime pavyzdžių, nepamirėtu šiame (1.13.) skyriuje.

1.13.23. Sudarykite realaus skysčio (turinčio klampumą ir išorinę bei vidinę trintį, t. y. sankabos jėgas, veikiančias tarp skysčio molekulių, o taip pat tarp skysčio molekulių ir indo sienelių) išteklėjimo iš indo pro angą jo dugne imitacinį modelį ir paeksperimentuokite su juo. Palyginkite gautus rezultatus su matematinio modeliavimo rezultatais, pateiktais knygoje [31] N. Karlo (N. Curle) straipsnyje.

1.13.24. Apskaičiuokite, per kiek laiko realus skystis, turintis dinaminį klampumą μ , išteklės iš Puazeilio vamzdelio, kurio ilgis yra ℓ ir skerspjūvio spindulys R , jei pradžioje vamzdelis buvo pilnas skysčio ir vėliau papildomas nebuvo.

1.13.25. Kodėl kai kurie skysčiai kapiliariniais vamzdeliais kyla aukštyn, o kai kurie – leidžiasi žemyn? Kuo skiriasi tų skysčių paviršių meniskai kapiliariniuose vamzdeliuose? Kaip galima apskaičiuoti vandens pakilimo kapiliariniu vamzdeliu aukštį?

1.13.26. Kodėl iš plonų vamzdelių realūs skysčiai išteka ne srovele, o lašais? Kaip apskaičiuoti lašo, atitrūkstančio nuo pipetės galiuko, masę?

1.13.27. Su koku greičiu iš vertikalios vamzdzio, atidarius jo dugną, pradėtų tekėti vanduo, jei vandens stulpo aukštis vamzdyje būtų 20 km? Per kiek laiko staigus smūgis į vandens paviršių tame stulpe atsiliptų ištekančio iš vamzdzio vandens greičiui?

1.13.28. Išveskite formulę, leidžiančią apskaičiuoti laiką, per kurį metalinis rutuliukas, kurio spindulys lygus r ir medžiagos tankis yra ρ , padėtas ant realaus skysčio, turinčio tankį $\rho_0 < \rho$ ir dinaminį klampumą μ , paviršiaus ir po to panardintas į tą skystį taip, kad viršutinis rutuliuko taškas sutaptų su skysčio paviršiumi, grimzdamas skysčiu, pasieks pusę to greičio, kuris reikalingas, kad tolimesnis rutuliuko grimzimas taptų stacionarus. Kaip pasikeistų tas laikas, jei rutuliuko spindulys sumažėtų 10 kartų? Ar galėtų rutuliuko grimzimas tapti stacionariu, jei skystis būtų idealus? Per kiek laiko idealiaame skystyje rutuliukas pasiektų dugną, jei atstumas nuo skysčio paviršiaus iki dugno lygus ℓ ?

1.13.29. Kodėl nuosėdos realiuose skysčiuose sluoksniuojasi ne tik pagal nuosėdų medžiagos tankį, bet ir pagal nuosėdų dalelių dydį? Jei nuosėdas sudaro tos pačios medžiagos dviejų dydžių dalelės, tai kaip išsidėstys nuosėdų sluoksniai?

1.13.30. Pasižiūrėkite, kaip juda biliardo rutuliai po smūgio ar susidūrimo vienas su kitu bei su sienelėmis ir paaiškinkite, kodėl jie taip juda? Ar galėtumėte apskaičiuoti atšokančių biliardo rutulių judėjimo kryptį bei prognozuoti rutulių judėjimą po jų susidūrimo?

1.13.31. Priimdami, kad ištekančio idealaus skysčio molekulės skersmuo yra d ir apvalios angos indo dugne plotas yra σ , apskaičiuokite ištekančios čiurkšlės suspaudimo koeficientą ε . Kodėl skiriasi ε Bordo ir Ventūrio vamzdeliuose? Kaip galima apskaičiuoti ε reikšmę, naudojantis impulso tvermės dėsniu? Kaip apskaičiuojamos ε reikšmės teorinėje hidrodinamikoje?

1.13.32. Paaiškinkite, kaip ir kodėl atsiranda ištekančio skysčio čiurkšlės inversija? Pabandykite sudaryti inversijos proceso imitacinį modelį ir, naudodamiesi juo, išnagrinėti, kaip keisis čiurkšlės forma, esant įvairioms angos formoms?

1.13.33. Susipažinkite su paketais Maple, MatLab ir MathCad (žiūr.[154], [155], [156], [157]), o taip pat su paketais [158] ir [159] ir išmokite juos taikyti matematiniame modeliavime. Pabandykite, naudodamiesi kuriuo nors paketu, sudaryti kokį nors modelį iš knygos [31] ir paeksperimentuokite su juo. Ar galima sudaryti tokį modelį, naudojantis POWERSIM?

1.13.34. Susipažinkite su knygomis [7, 32, 113, 132, 133, 134, 160, 161, 162, 163], aprašančiomis imitacinio modeliavimo technologiją bei matematinių eksperimentų su imitaciniais modeliais taikymą. Remdamiesi šiomis knygomis, parašykite apžvalginį referatą apie imitacinį modeliavimą ir jo taikymus.

1.13.35. Išvardinkite tai, kas Jums atrodo svarbiausia 1.13.3. poskyryje ir visame 1.13. skyriuje.