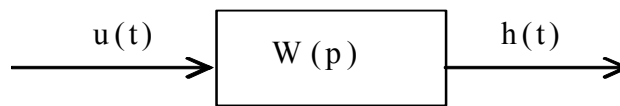


1.11.12. Perėjimo charakteristikų metodas. Ryšys tarp perėjimo charakteristikų ir perdavimo funkcijų. Diuamelio integralai

Kaip jau buvo anksčiau minėta, perdavimo funkcijų metodas – tai vienas iš gana plačiai naudojamų metodų tiesinių sistemų išėjimo trajektorijoms gauti ir įėjimo trajektorijų transformavimo į išėjimo trajektorijas procesams nagrinėti. Yra ir kitų metodų, tarp jų ir tokių, kurie išplaukia iš perdavimo funkcijų metodo.

Perdavimo funkcijų metodui **giminingas perėjimo charakteristikų metodas**. 1.11.11. skyrelyje mes jau susipažinome su impulsine perėjimo charakteristika $w(t)$. Dabar įvesime dar vieną perėjimo charakteristiką, žymimą $h(t)$.

Bloko perėjimo charakteristika $h(t)$ vadinama to bloko reakcija (išėjimas $y(t)$) į poveikį (įėjimą $x(t)$), lygų $u(t) = \begin{cases} 0, & \text{jei } t \leq -0, \\ 1, & \text{jei } t \geq +0, \end{cases}$ (žiūr. 261 pav.), paduotą į tą bloką tuo momentu, kai bloko būseną $z(t)$ yra lygi 0.



261 pav.

Kadangi $Y(p) = W(p)X(p)$ ir $H[u(t)] = 1$, tai iš $H[h(t)] = W(p)H[u(t)]$ gauname, jog $H[h(t)] = W(p)$, t. y. kad perėjimo charakteristikos $h(t)$ Hevisaido atvaizdas sutampa su bloko perdavimo funkcija.

Pažymėję $H[h(t)]$ kaip $H(p)$, gauname, kad $H(p) = W(p)$ ir $Y(p) = H(p)X(p)$. Iš pastarosios formulės gauname formulę $Y(p) = \frac{pH(p)X(p)}{p}$, iš kurios, atsižvelgiant į sąsūkos Hevisaido atvaizdo ir originalo diferencijavimo formules, išplaukia

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Šios formulės – dar viena **Diuamelio integralų forma**. Iš šių formulių išplaukia, kad žinodami bloko perėjimo charakteristiką $h(t)$, esant pradinėms nulinėms sąlygoms, mes galime surasti to bloko išėjimo trajektoriją, kurią iššaukia bet koks įėjimas $x(t)$.

Rasime, pavyzdžiui, integravimo grandelės, turinčios perdavimo funkciją $W(p) = \frac{1}{1+Tp}$, perėjimo charakteristiką $h(t)$.

Tai galime padaryti dviem būdais: 1) rasti integravimo grandelės išėjimą $y(t) = h(t)$, kai jos įėjimas $x(t) = u(t)$; 2) rasti funkciją – originalą, kurios Hevisaido atvaizdas būtų $W(p) = \frac{1}{1+Tp}$.

Naudodamiesi pirmuoju būdu, žinodami integravimo grandelės matematinį modelį $y(t) = z(t)$, $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{RC}$, randame, jog $y(t) = z(0)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{T} \int_0^t x(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{T}}d\tau$. Priėmę, jog $z(0) = 0$ ir $x(t) = u(t)$,

$$\text{gauname: } h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t u(\tau)e^{\frac{\tau}{T}}d\tau = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}d\tau = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot T \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}.$$

Naudodamiesi antruoju būdu, iš formulės $W(p) = \frac{1}{1+Tp} = \frac{\frac{1}{T}}{p + \frac{1}{T}} = 1 - \frac{p}{p + \frac{1}{T}}$, gauname, jog

atvaizdo $W(p)=H(p)$ originalas $h(t)$ yra $u(t)-e^{-\frac{t}{T}}=1-e^{-\frac{t}{T}}$, t. y. tą patį rezultatą.

Analogiškai galima gauti, kad diferencijavimo grandelės, turinčios perdavimo funkciją $W(p)=\frac{Tp}{Tp+1}=\frac{p}{p+\frac{1}{T}}$, perėjimo charakteristika yra $h(t)=e^{-\frac{t}{T}}$, o virpesių kontūro, turinčio perdavimo

funkciją $W(p)=\frac{1}{T_2p^2+T_1p+1}$, perėjimo charakteristika, kai kvadratinio trinario $T_2p^2+T_1p+1=0$

šaknys p_1 ir p_2 nelygios, yra $h(t)=\frac{1}{T_2(p_1-p_2)}\left[\frac{1}{p_2}(1-e^{p_2t})-\frac{1}{p_1}(1-e^{p_1t})\right]$, nes $\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{1}{p_1-p_2}\frac{(p-p_2)-(p-p_1)}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{1}{p_1-p_2}\left[\frac{1}{p-p_1}-\frac{1}{p-p_2}\right]=\frac{1}{p_1-p_2}\left[\frac{1}{p_1}\frac{p_1}{p-p_1}-\frac{1}{p_2}\frac{p_2}{p-p_2}\right]$, o $\frac{a}{p-a}=H[e^{at}-1]$.

Jei integravimo grandelės įėjimo trajektorija būtų $x(t)=at$, kur $a=\text{const}$, tai, žinodami, jog jos perėjimo charakteristika $y(t)$ $h(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$, grandelės išėjimo trajektoriją $y(t)$ lengvai apskaičiuotume, naudodamiesi mūsų išvesta formule $y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau$ ir iš matematinės analizės kurso žinoma

integralinės funkcijos diferencijavimo formulė

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\varphi(x,y)dx=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dx+\varphi(\beta(y),y)\frac{d\beta(y)}{dy}-\varphi(\alpha(y),y)\frac{d\alpha(y)}{dy}.$$

Mūsų nagrinėjamu atveju integralo diferencijavimo formulėje $y=t$, $\alpha(y)=0$, $\beta(y)=t$, $x=\tau$, $\varphi(x,y)=\varphi(\tau,t)=x(t-\tau)h(\tau)=a(t-\tau)\left(1-e^{-\frac{\tau}{T}}\right)$, todėl gauname, jog $y(t)=\frac{d}{dt}\left[a\int_0^t(t-\tau)(1-e^{-\frac{\tau}{T}})d\tau\right]=a\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-\tau)(1-e^{-\frac{\tau}{T}})\right]d\tau+a(t-t)(1-e^{-\frac{t}{T}})\frac{dt}{dt}-a(t-0)(1-e^{-\frac{0}{T}})\frac{d0}{dt}=a\int_0^t(1-e^{-\frac{\tau}{T}})d\tau+0\cdot1-0\cdot0=at+aT\left(e^{-\frac{t}{T}}-1\right)=a\left[t-T(1-e^{-\frac{t}{T}})\right]$.

Dažnai naudojama ir 1.11.11. skyrelyje jau minėtoji **impulsinė perėjimo charakteristika $w(t)$ – bloko reakcija (išėjimas $y(t)$) į poveikį (įėjimą) $x(t)=u'(t)=\delta(t)$, vadinamą vienetine impulsine funkcija (delta funkcija).**

Kadangi $L[\delta(t)]=1$, tai, kaip jau buvo parodyta 1.11.11. skyrelyje, **$L[w(t)]=W(s)$, t. y. impulsinės perėjimo charakteristikos Laplaso atvaizdas sutampa su bloko perdavimo funkcija $W(s)$.** Su ta funkcija $W(p)$, kaip matėme šio (t. y. 1.11.12.) skyrelio pradžioje, sutampa ir perėjimo charakteristikos $h(t)$ Hevisaido atvaizdas.

Iš formulės $Y(s)=W(s)X(s)$ ir sąsūkos atvaizdo formulės gauname, jog **$y(t)=\int_0^t x(t-\tau)w(\tau)d\tau$.** Šia formule mes jau naudojome 1.11.11. skyrelyje, apskaičiuodami įvairių blokų išėjimų trajektorijas ir išvesdami formules: $A_y=A_x|W(i\omega)|$, $\varphi_y=\varphi_x+\arg W(i\omega)$, galiojančias tiesiniams blokams, kai jų įėjimai – harmoniniai svyravimai. Todėl čia apie impulsinės perėjimo charakteristikos panaudojimą jau nebekalbėsime.

Rasime sąryšį tarp charakteristikų $h(t)$ ir $w(t)$.

$$\text{Kadangi } H[h(t)] = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt = W(p) = [W(s)]_{s=p} = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt \text{ arba,}$$

kitaip tariant (t. y., pakeičiant parametro p žymėjimą į s), $sH(s) = W(s)$, tai iš lygybės $L[h'(t)] = sH(s) - h(0) = W(s) - h(0) = L[w(t) - h(0)\delta(t)]$ gauname lygybę $L[h'(t)] = L[w(t) - h(0)\delta(t)]$, iš kur išplaukia, jog **$w(t) = h'(t) + h(0)\delta(t)$** .

Patikrinsime išvestąją formulę.

Mes jau žinome, jog integravimo grandelės perėjimo charakteristika $h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$. Kadangi $h(0) = 1 - 1 = 0$ ir $h'(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, tai gauname, jog integravimo grandelės impulsinė perėjimo

charakteristika $w(t)$ turėtų būti lygi $\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, kas sutampa su 1.11.11. skyrelyje gautu rezultatu.

Šiame skyrelyje jau esame nustatę, jog diferencijavimo grandelės perėjimo charakteristika yra $h(t) = e^{-\frac{t}{T}}$. Kadangi $h(0) = 1$ ir $h'(t) = -\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, tai gauname, jog $w(t) = -\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} + 1 \cdot \delta(t) = \delta(t) - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, kas taip pat sutampa su 1.11.11. skyrelyje gauta formule.

Pasinaudosime formule $w(t) = h'(t) + h(0)\delta(t)$ virpesių kontūro impulsinės perėjimo charakteristikos radimui.

Žinodami, jog elektromagnetinių virpesių kontūro, turinčio perdavimo funkciją $W(p) = \frac{1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$, perėjimo charakteristika, kai $p_1 \neq p_2$, yra lygi $h(t) = \frac{1}{T_2^2 (p_1 - p_2)} \times \left[\frac{1}{p_2} (1 - e^{p_2 t}) - \frac{1}{p_1} (1 - e^{p_1 t}) \right]$, gauname (atsižvelgdami į tai, jog $h(0) = 0$), kad $w(t) = h'(t) = \frac{1}{T_2^2 (p_1 - p_2)} (-e^{p_2 t} + e^{p_1 t})$, kur, kaip buvo gauta 1.11.10. skyrelyje, $p_1 = -\alpha - \beta$, $p_2 = -\alpha + \beta$, $\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}$, $\beta = \frac{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$.

$$\text{Kai } T_1 < 2T_2, \text{ tai } \beta = i\omega_0, \text{ kur } \omega_0 = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tuomet } w(t) &= \frac{1}{T_2^2 (-\alpha - i\omega_0 + \alpha - i\omega_0)} (-e^{-(\alpha - i\omega_0)t} + e^{-(\alpha + i\omega_0)t}) = \frac{1}{i\omega_0 T_2^2} \cdot e^{-\alpha t} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} = \\ &= \frac{1}{\omega_0 T_2^2} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t = \frac{2}{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Kadangi $\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2} > 0$, tai virpesių kontūro impulsinė perėjimo charakteristika, kai $p_1 \neq p_2$ ir

$T_1 < 2T_2$, yra sinusoidė, kurios amplitudė eksponentiškai mažėja.

Kitaip tariant, vienetinis impulsas $\delta(t)$, paduotas į tokio kontūro įėjimą, iššauks kondensatoriaus įtampos U_C ir srovės i silpnėjančius sinusoidinius svyravimus.

Diuamelio integralais galima naudotis ir tuo atveju, kai pradinės sąlygos nėra nulinės. Tik tuomet dalinius Diuamelio integralus reikia pakeisti bendraisiais.

Bendrąjį Diuamelio integralą galima gauti iš šio skyrelio pradžioje išsivestos Diuamelio formulės $y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$, naudojantis integralo diferencijavimo

formule. Gauname $y(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [x(\tau)h(t-\tau)] d\tau + x(t)h(t-t) \frac{dt}{dt} - x(0)h(t-0) \frac{d0}{dt} =$
 $= \int_0^t x(\tau) \frac{\partial}{\partial t} [h(t-\tau)] d\tau + x(t)h(0) - x(0)h(t) \cdot 0 = \int_0^t x(\tau) h'(t-\tau) d\tau + x(t)h(0).$

Šią formulę $y(t) = x(t)h(0) + \int_0^t x(\tau) h'(t-\tau) d\tau = x(t)h(0) + \int_0^t x(\tau) \frac{\partial}{\partial t} h(t-\tau) d\tau$ vadina **bendruoju Diuamelio integralu**.

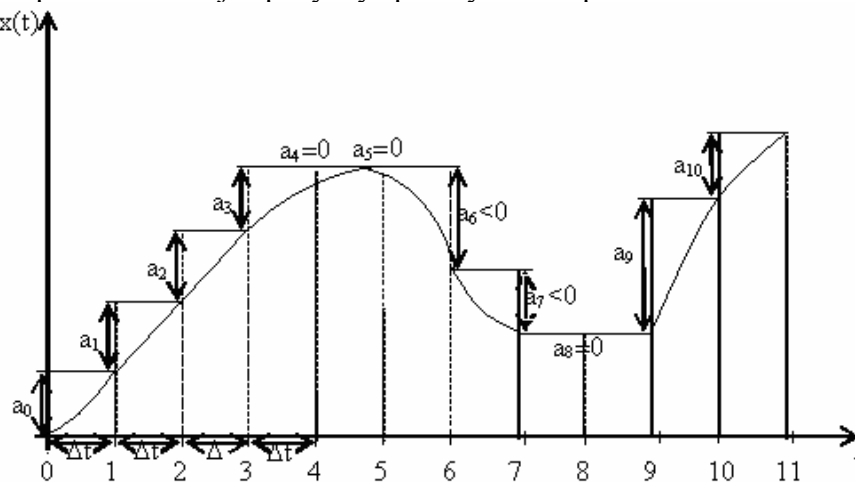
Kadangi $\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)x(t-\tau)d\tau$, tai bendrasis Diuamelio integralas gali turėti ir kitą formą: $y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [h(\tau)x(t-\tau)] d\tau + h(t)x(t-t) \frac{d}{dt} - h(0)x(t-0) \frac{d0}{dt} = h(t)x(0) + \int_0^t h(\tau) \frac{\partial}{\partial t} x(t-\tau) d\tau.$

Kai pradinės sąlygos yra nulinės, tai bendrasis Diuamelio integralas tampa daliniu: $y(t) = \int_0^t x(\tau)h'(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x'(t-\tau)d\tau.$

Apskaičiuojant sistemos išėjimo trajektoriją, naudotis perėjimo charakteristikomis ir Diuamelio integralais netgi patogiau negu perdavimo funkcijomis, nes tampa nebereikalingas įėjimo trajektorijos transformavimas į jos atvaizdą ir, kas svarbiausia, nebereikalinga išėjimo trajektorijos atvaizdo atvirkštinė transformacija į tą atvaizdą atitinkančią funkciją – originalą.

Perėjimo charakteristikų metodą galima taikyti ne tik tolydžioms, bet ir taip vadinamoms „laiptuotoms“ funkcijoms $x(t) = \sum_{k=0}^n a_k u(t-k\Delta t) = \sum_{k=0}^{n-1} \{x[(k+1)T] - x(kT)\} \cdot u(t-kT).$

Laiptuotos funkcijos pavyzdys parodytas 262 pav.



262 pav.

Kadangi įėjimas $u(t)$ transformuosis į $h(t)$, tai tiesinio bloko reakcija į tokią įėjimo trajektoriją $x(t)$ bus $y(t) = \sum_{k=0}^n a_k h(t-k\Delta t)$, kur $\Delta t = T$ yra „laiptuko“ trukmė, o t

kiekviename laiptuke, turinčiame numerį k , tenkina sąlygą ($k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$).

Vietoj įėjimo trajektorijos $x_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \{x[(k+1)T] - x(kT)\}u(t-kT)$ galima buvo nagrinėti funkciją $x_2(t) = \sum_{k=1}^n \{x(kT) - x[(k-1)T]\}u(t-kT)$ ir gauti išėjimo trajektoriją $y_2(t) = \sum_{k=1}^n \{x(kT) - x[(k-1)T]\}h(t-kT)$.

Laiptuotomis funkcijomis, pasirinkus pakankamai mažą Δt , galima aproksimuoti įvairias įėjimo trajektorijas, o po to, naudojantis perėjimo charakteristika, rasti artutines išėjimo trajektorijas. Tuo dažnai naudojamosi praktikoje. Dar tikslesnę aproksimaciją gautume pakeisdami $x(t)$ į $\frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)]$ ir gaudami $y(t) = \frac{1}{2}[y_1(t) + y_2(t)]$.

1.11.13. Perdavimo funkcijų metodo taikymas diskrečioms trajektorijoms. Z-transformacija

Perdavimo funkcijų bei perėjimo charakteristikų metodus galima taikyti ne tik tolydžioms trajektorijoms (t. y. tolydžioms laiko funkcijoms), bet ir diskrečioms funkcijoms, t. y. skaičių sekoms, sudarytoms iš įėjimo ir išėjimo koordinačių reikšmių tam tikrais laiko momentais $0; T; 2T; 3T; \dots; nT; \dots$, kur T – laiko diskretumo kvantas Δt . Tokių trajektorijų vaizdavimui įsivesime taip vadinamąją **z-transformaciją**, o vėliau parodysime jos ryšį su Laplaso transformacija: z-transformacija yra diskretus

Laplaso transformacijos $L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ analogas ir išplaukia iš pastarosios,

integravimą pakeitus sumavimu, o integravimo elementą $x(t)e^{-st}dt$ – sumavimo elementu $x(kT)e^{-skT} = x(kT)z^k$, priimant, jog $z = e^{-sT}$.

Jei diskrečią įėjimo trajektoriją sudaro įėjimo $x(t)$ reikšmės (skaičiai): $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(kT), \dots$, tai z-transformacija perveda tą trajektoriją (skaičių $x(kT)$ seką) į jos atvaizdą – kompleksinio kintamojo $z = e^{-sT} = e^{-(\sigma + i\omega)T}$ daugianarį $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k$. Tai žymima taip: $\{x(kT)\} \Leftarrow X(z)$, kur $\{x(kT)\}$ – skaičių $x(kT)$

seka, $\Leftarrow$ z-transformacijos (transformavimo) ženklas, $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k$ – skaičių

sekos $\{x(kT)\}$ z-transformacijos atvaizdas – z-transformacijos rezultatas.

Z-transformacija gali būti taikoma skaičioms begalinėms ir baigtinėms bet kokių skaičių (racionalių ir iracionalių; teigiamų ir neigiamų; realių, menamų ir kompleksinių) sekoms.

Baigtinės sekos $\{x(kT)\} = x(0), x(T), x(2T), \dots, x(mT)$ z – atvaizdu vadinamas daugianaris $X(z) = \sum_{k=0}^m x(kT)z^k$, kur $m > 0$ – sveikas teigiamas skaičius.

Z-transformacijos pavyzdžiai:

$$0; 1; 2; 3; \dots; n; \Leftarrow \sum_{k=0}^n kz^k;$$

$$1; 1; 1; 1; \dots \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \text{ kadangi } |z| < 1;$$

$$\begin{aligned} 1; 2; 3; 4; 5; \dots; n; \dots &\leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k + \frac{1}{1-z} = \\ &= z \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} + \frac{1}{1-z} = z \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} z^k + \frac{1}{1-z} = z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \frac{1}{1-z} = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z} = \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}; \end{aligned}$$

$$1; 2; 4; 8; 16; \dots; 2^n; \dots \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2z)^k = \frac{1}{1-2z};$$

$$1; 2; 1; 0; 3; -2; -1,15 \leftarrow 1+2z+z^2+3z^4-2z^5-1,15z^6;$$

$$0; 0; 0; 0; -0,01 \leftarrow -0,01z^4;$$

$$1; -1 \leftarrow 1-z;$$

$$1; -1; 1; -1; 1; -1; \dots = \{[(-1)^k]\} \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \frac{1}{1+z};$$

$$e, -\pi \leftarrow e^{-\pi z};$$

$$e^{-\pi} \leftarrow e^{-\pi};$$

$$3-2i; 4; -2+5i; 3i; 3,142\dots; 1 \leftarrow (3-2i)+4z+(-2+5i)z^2+3iz^3+(3,142\dots)z^4+z^5 \text{ ir}$$

pan.

Nesunku įrodyti, jog **z-transformacija, būdama Laplaso transformacijos analogu, turi gana daug savybių, analogiškų Laplaso bei Hevisaido transformacijų savybėms.** Tai natūralu, nes transformacijos $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

ir $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$, kaip jau buvo minėta, skiriasi tik tuo, kad vienoje jų naudojamas tolydžios funkcijos $f(t)e^{-st}$ integravimas, o kitoje – analogiškos diskrečios funkcijos $f(kT)z^k = f(kT)e^{-skT}$ reikšmių sumavimas.

1. Z-transformacijos tiesiškumo savybė

Kai $a_1 = \text{const}$, $a_2 = \text{const}$, $\{x_1(kT)\} \leftarrow X_1(z)$ ir $\{x_2(kT)\} \leftarrow X_2(z)$, kur $k=0, 1, 2, \dots$, tai $\{a_1x_1(kT) + a_2x_2(kT)\} \leftarrow a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$.

$$\text{Ir bendrai: } \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i(kT) \right\} \leftarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i(z) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=0}^{\infty} x_i(kT) z^k.$$

Z-transformacijos tiesiškumo savybė išplaukia iš daugianarių tiesiškumo savybės ir lengvai įrodoma: $\{a_1x_1(kT) + a_2x_2(kT)\} \leftarrow [a_1x_1(0) + a_2x_2(0)] + [a_1x_1(T) + a_2x_2(T)]z + [a_1x_1(2T) + a_2x_2(2T)]z^2 + \dots = a_1x_1(0) + a_1x_1(T)z + a_1x_1(2T)z^2 + \dots + a_2x_2(0) + a_2x_2(T)z + a_2x_2(2T)z^2 + \dots = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$.

Analogiškai ši savybė įrodoma bet kuriam dėmenų skaičiui n .

Tiesiškumo savybė pilnai sutampa su analogiška Laplaso ir Hevisaido transformacijų savybe: $L[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)] = \sum_{i=1}^n a_i L[f_i(t)]; H[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)] = \sum_{i=1}^n a_i H[f_i(t)]$.

2. Postūmio (delsos, vėlinimo, vėlavimo) savybė

$$\text{Kai } r = \text{const} - \text{sveikas teigiamas skaičius ir } x[(k-r)T] = \begin{cases} 0, & \text{kai } k < r \\ x[(k-r)T], & \text{kai } k \geq r, \end{cases} \text{ tai}$$

$$\{x[(k-r)T]\} \leftarrow z^{-r} X(z).$$

Ši savybė taip pat pilnai sutampa su analogiška Laplaso ir Hevisaido transformacijų savybe, kadangi $z=e^{-sT}$ ir $z^r=e^{-srT}$, kur rT ir yra delsa (vėlinimas) τ .

Postūmio savybė lengvai įrodoma: $\{x[(k-r)T]\} \leftrightarrow 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^{r-1} + x(0)z^r + x(T)z^{r+1} + x(2T)z^{r+2} + \dots = z^r[x(0)z^0 + x(T)z + x(2T)z^2 + \dots] = z^r \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k = z^r X(z)$.

3. Skirtumo savybė

$\{x(kT) - x[(k-1)T]\} \leftrightarrow (1-z)X(z)$.

Ši savybė automatiškai išplaukia iš pirmųjų dviejų.

Pavyzdžiui, pasinaudodami šiomis savybėmis, rasime antrojo skirtumo (skirtumų skirtumo) $\{x(kT) - x[(k-1)T]\} - \{x[(k-1)T] - x[(k-2)T]\}$ z – atvaizdą.

Jis lygus $[X(z) - zX(z)] - [zX(z) - z^2X(z)] = X(z)(1-z) - z(1-z)X(z) = (1-z)^2X(z)$.

Kaip matome, **skirtumo savybė yra panaši į Laplaso transformacijos funkcijos – originalo diferencijavimo savybę**: kai $x(0)=0$, tai $L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sL[x(t)] =$

$=sX(s)$; kai $x(0)=0$ ir $x'(0)=0$, tai $L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X(s)$.

Analogiškai gauname, **jog n -sios eilės skirtumo z -transformacija yra $(1-z)^nX(z)$, panašiai kaip n -sios eilės išvestinės $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ Laplaso transformacija, esant nulinėms pradinėms sąlygoms, yra $s^n X(s)$.**

4. Sumavimo savybė:

Nagrinėsime sumų seką $x(0)$; $x(0)+x(T)$; $x(0)+x(T)+x(2T)$; ..., $\sum_{i=0}^k x(iT)$;

$\sum_{i=0}^{k+1} x(iT)$; ..., kurią pažymėsime žymeniu $\left\{\sum_{i=0}^k x(iT)\right\}_n$, čia n gali būti 1, 2, 3, ... iki $+\infty$.

Rasime tos sekos z – atvaizdą.

$\left\{\sum_{i=0}^k x(iT)\right\}_n \leftrightarrow x(0)z^0 + [x(0)+x(T)]z + [x(0)+x(T)+x(2T)]z^2 + \dots +$
 $+ \left[\sum_{i=0}^k x(iT)\right]z^k + \dots + \left[\sum_{i=0}^n x(iT)\right]z^n = x(0)(1+z+\dots+z^n) + x(T)(z+z^2+\dots+z^n) + x(2T)(z^2+\dots+z^n) + \dots + x(kT)(z^k+z^{k+1}+\dots+z^n) + \dots + x((n-1)T)(z^{n-1}+z^n) + x(nT)z^n$.

Kai $n=\infty$, tai $\left\{\sum_{i=0}^k x(iT)\right\}_{k=0}^{\infty} \leftrightarrow x(0) \sum_{i=0}^{\infty} z^i + x(T) \sum_{i=1}^{\infty} z^i + x(2T) \sum_{i=2}^{\infty} z^i + \dots +$
 $+ x(kT) \sum_{i=k}^{\infty} z^i + \dots + x(mT) \sum_{i=m}^{\infty} z^i + \dots = x(0) \sum_{i=0}^{\infty} z^i + x(T)z \sum_{i=1}^{\infty} z^{i-1} + x(2T)z^2 \sum_{i=2}^{\infty} z^{i-2} + \dots +$
 $+ x(kT)z^k \sum_{i=k}^{\infty} z^{i-k} + \dots + x(mT)z^m \sum_{i=m}^{\infty} z^{i-m} + \dots = x(0) \sum_{i=0}^{\infty} z^i + x(T)z \sum_{i=0}^{\infty} z^i + x(2T)z^2 \sum_{i=0}^{\infty} z^i + \dots +$
 $+ x(kT)z^k \sum_{i=0}^{\infty} z^i + \dots + x(mT)z^m \sum_{i=0}^{\infty} z^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} z^i [x(0) + x(T)z + x(2T)z^2 + \dots + x(kT)z^k + \dots] =$
 $= \sum_{i=0}^{\infty} z^i X(z)$.

Kadangi $z=e^{-sT}<1$, tai $\sum_{i=0}^{\infty} z^i$ – begalinės mažėjančios progresijos suma, iš kur

išplaukia, jog $\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$.

Todėl gauname sumavimo formulę $\left\{ \sum_{i=0}^k x(iT) \right\}_{k=0}^{\infty} \leftrightarrow \frac{1}{1-z} X(z)$, atitinkančią Laplaso ir Hevisaido transformacijų funkcijos integralo atvaizdo formules: $L\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} L[x(t)]$, $H\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} H[x(t)]$.

Kaip matome, z-transformacijoje diferencijavimą atitinka skirtumų apskaičiavimas, o integravimą – sumavimas, atvaizdo daugybą ir dalybą iš parametru s bei p Laplaso ir Hevisaido transformacijose z-transformacijoje atitinka daugybą ir dalybą iš 1–z.

5. Sąsukos savybė

$$\left\{ \sum_{i=0}^k x_1(iT) \cdot x_2((k-i)T) \right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=0}^k x_1((k-i)T) \cdot x_2(iT) \right\}_{k=0}^{\infty} \leftrightarrow X_1(z)X_2(z).$$

Ši savybė analogiška Laplaso transformacijos savybei $L[x_1(t) \cdot x_2(t)] = L\left[\int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau\right] = L\left[\int_0^t x_1(t-\tau) x_2(\tau) d\tau\right] = X_1(s)X_2(s)$.

Įrodysime šią z-transformacijos savybę, išskleisdami atvaizdų sandaugą $X_1(z)X_2(z)$.

$$\begin{aligned} X_1(z)X_2(z) &= [x_1(0) + x_1(T)z + x_1(2T)z^2 + \dots + x_1(kT)z^k + \dots] \cdot [x_2(0) + x_2(T)z + x_2(2T)z^2 + \dots + x_2(kT)z^k + \dots] \\ &= x_1(0)x_2(0) + [x_1(0)x_2(T) + x_1(T)x_2(0)]z + [x_1(0)x_2(2T) + x_1(T)x_2(T) + x_1(2T)x_2(0)]z^2 + \\ &+ [x_1(0)x_2(3T) + x_1(T)x_2(2T) + x_1(2T)x_2(T) + x_1(3T)x_2(0)]z^3 + \\ &+ \dots + z^k \sum_{i=0}^k x_1(iT) \cdot x_2((k-i)T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^k x_1(iT) \cdot x_2((k-i)T) \right] z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^k x_1((k-i)T) \cdot x_2(iT) \right] z^k. \end{aligned}$$

Kadangi $\left\{ \sum_{i=0}^k x_1(iT) \cdot x_2((k-i)T) \right\}_{k=0}^{\infty} \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^k x_1(iT) \cdot x_2((k-i)T) \right] z^k$, tai ir gauname, jog $\left\{ \sum_{i=0}^k x_1(iT) \cdot x_2((k-i)T) \right\}_{k=0}^{\infty} \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$, t. y. gauname z-transformacijos sąsukos formulę.

Laplaso ir z-transformacijos turi ir daugiau analogiškų savybių, kurias taip pat nesunku įrodyti, tačiau mums čia užteks jau įrodytų penkių savybių.

Panašiai, kaip tolydžioms tiesinėms sistemoms, turinčioms tolydžias (ar dalimis tolydžias) įėjimo ir išėjimo trajektorijas $x(t)$ ir $y(t)$, buvo įvesta perdavimo funkcijos $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ sąvoka, taip ir diskrečioms tiesinėms sistemoms, turinčioms diskrečias

įėjimų ir išėjimų trajektorijas $\{x(kT)\}$ bei $\{y(kT)\}$ su jų z – atvaizdais $X(z)$ ir $Y(z)$ galima įvesti diskrečios perdavimo funkcijos $W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ sąvoką, vaizduojamą

išėjimo ir įėjimo trajektorijų z-atvaizdų santykiu.

Pavyzdžiui, kai diskrečios sistemos S_1 įėjimo trajektoriją $\{x_1(kT)\} = \{k\}$, kur $k=0, 1, 2, \dots$ atitinka išėjimo trajektorija $\{y_1(kT)\} = \{k^2\}$, tai tos sistemos perdavimo funkcija

$$\begin{aligned}
W_1(z) &= \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} k z^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k}{\sum_{k=1}^{\infty} k z^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k z^k}{\sum_{k=1}^{\infty} k z^k} = 1 + \frac{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^k}{\sum_{k=1}^{\infty} k z^k} = \\
&= 1 + \frac{z^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}}{z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}} = 1 + \frac{z \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k}{\frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k} = 1 + \frac{z \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right)}{\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right)} = 1 + \frac{2z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}.
\end{aligned}$$

Analogiškai galime rasti kitos diskrečios sistemos S_2 perdavimo funkciją $W_2(z)$, jei žinoma, jog jos įėjimo trajektoriją $\{x_2(kT)\} = \{k^2\}$ atitinka išėjimo trajektorija $\{y_2(kT)\} = \{k^3\}$:

$$\begin{aligned}
W_2(z) &= \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k} = \frac{\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)z^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k} = \\
&= 3 + \frac{z^3 \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)z^{k-3} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}}{z^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} + z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}} = 3 + \frac{z^3 \frac{d^3}{dz^3} \sum_{k=0}^{\infty} z^k - 2z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k}{z^2 \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k + z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k} = \\
&= 3 + \frac{z^3 \frac{d^3}{dz^3} \left(\frac{1}{1-z} \right) - 2z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right)}{z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) + z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right)} = 3 + \frac{\frac{6z^3}{(1-z)^4} - \frac{2z}{(1-z)^2}}{\frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2}} = \\
&= 3 + \frac{4z^2 + 4z - 2}{1-z^2} = \frac{1+4z+z^2}{1-z^2}.
\end{aligned}$$

Turėdami sistemų S_1 ir S_2 perdavimo funkcijas $W_1(z)$ ir $W_2(z)$ ir įėjimų trajektorijas, galime rasti tų sistemų išėjimo trajektorijų atvaizdus, o po to – ir pačias išėjimų trajektorijas, atitinkančias bet kokias diskrečias įėjimų trajektorijas, o ne tik tas, kurios buvo panaudotos perdavimo funkcijoms gauti.

Pavyzdžiui, jei sistemos S_1 įėjimo trajektorija būtų ne $\{x_1(kT)\} = \{k\}$, o $\{x_2(kT)\} = \{k^2\}$, tai jos įėjimo trajektorijos z -atvaizdas būtų $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = z^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} +$
 $+ z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k + z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^2 \frac{d^2}{dz^2} (1+z+z^2+\dots) + z \frac{d}{dz} (1+z+z^2+\dots) = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) +$
 $+ z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = z^2 \frac{2}{(1-z)^3} + z \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$. Tuomet sistemos S_1 išėjimo trajektorijos atvaizdą $Y(z)$

gautume, pasinaudoję lygybe $Y(z) = W_1(z)X_2(z) = \frac{1+z}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)^2}{(1-z)^4}$.

Suradus $Y(z)$, galima atlikti atvirkštinę transformaciją ir rasti išėjimo trajektoriją $\{y(kT)\}$.

Tam, kad būtų galima atlikti atvirkštinę z -transformaciją, reikia $Y(z)$ pertvarkyti taip, kad $Y(z)$ taptų $\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^k$ tipo polinomu, arba suskaidyti $Y(z)$ į paprastesnes formules, kurias būtų galima pertvarkyti į polinomus. Nagrinėjamu atveju pasinaudosime antruoju būdu.

Suskaidę $Y(z)$ į paprastų trupmenų sumą $\frac{z(1+z)^2}{(1-z)^4} \equiv \frac{A}{(1-z)^4} + \frac{B}{(1-z)^3} + \frac{C}{(1-z)^2} + \frac{D}{1-z}$, ir neapibrėžtų koeficientų metodu radę, jog $A=4$, $B=-8$, $C=5$, $D=-1$, gausime: $Y(z) = \frac{4}{(1-z)^4} - \frac{8}{(1-z)^3} +$

$$+\frac{5}{(1-z)^2}-\frac{1}{1-z}=\frac{4}{6(1-z)^4}-4\frac{2}{(1-z)^3}+5\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1-z)}.$$

$$\text{Kadangi } \frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \text{ ir } \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{n}{(1-z)^{n+1}} \text{ bei}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)z^{k-n}, \text{ tai } \frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}=$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)z^r=\sum_{k=0}^{\infty} kz^k+\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \frac{2!}{(1-z)^3}=\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]=\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} (r+2)(r+1)z^r=\sum_{r=0}^{\infty} r^2 z^r+3\sum_{r=0}^{\infty} rz^r+2\sum_{r=0}^{\infty} z^r=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k+3\sum_{k=0}^{\infty} kz^k+2\sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

$$\frac{3!}{(1-z)^4}=\frac{d^3}{dz^3}\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k+6\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k+11\sum_{k=0}^{\infty} kz^k+6\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

$$\begin{aligned} \text{Todėl gauname, jog } Y(z)&=\frac{4}{3!}\cdot\frac{3!}{(1-z)^4}-\frac{8}{2!}\cdot\frac{2!}{(1-z)^3}+5\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{1}{1-z}=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k+4\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k+ \\ &+\frac{22}{3}\sum_{k=0}^{\infty} kz^k+4\sum_{k=0}^{\infty} z^k-4\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k-12\sum_{k=0}^{\infty} kz^k-8\sum_{k=0}^{\infty} z^k+5\sum_{k=0}^{\infty} kz^k+5\sum_{k=0}^{\infty} z^k-\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k+ \\ &+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} kz^k. \end{aligned}$$

$$\text{Iš lygybės } Y(z)=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} kz^k \text{ išplaukia, jog } \{y(kT)\}=\left\{\frac{2}{3}k^3+\frac{1}{3}k\right\}=\left\{\frac{k(2k^2+1)}{3}\right\}=0;$$

1; 6; 19; 44; 85; 146; 231; ...

$$\begin{aligned} \text{Jei } \{x_1(kT)\}=\{k\} \text{ būtų sistemos } S_2 \text{ įėjimas, tai tos sistemos išėjimo atvaizdas būtų} \\ Y(z)=W_2(z)X_1(z)=\frac{1+4z+z^2}{1-z^2}\sum_{k=0}^{\infty} kz^k=\frac{1+4z+z^2}{1-z^2}\cdot\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{z^3+4z^2+z}{(1+z)(1-z)^3}=\frac{1,5z(1+z)}{(1-z)^3}-\frac{0,25}{1-z}+ \\ +\frac{0,25}{1+z}=1,5\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k-0,25\sum_{k=0}^{\infty} z^k+0,25\sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k, \text{ iš kur išplaukia, jog } \{y(kT)\}=\{1,5k^2-0,25+ \\ +0,25(-1)^k\}=\left\{\frac{6k^2-1+(-1)^k}{4}\right\}=0; 1; 6; 13; 24; 37; 54; 73; 96; \dots \end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad šiuo atveju $\{y[(k+1)T]-y(kT)\}=1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots$, t. y. visų teigiamų sveikų skaičių, nedalių skaičiams 2 ir 3, seka, į kurią įeina ir visi paprastieji skaičiai.

$$\begin{aligned} \text{Todėl, jei į sekos } \{y[(k+1)T]-y(kT)\} \text{ atvaizdą } \frac{Y(z)}{z}-Y(z)=\frac{1-z}{z}Y(z) \text{ žiūrėtume kaip į} \\ W_3(z)Y(z), \text{ kur } W_3(z)=\frac{1-z}{z} \text{ – perdavimo funkcija, transformuojanti trajektoriją } \{x(kT)\} \text{ į trajektoriją} \\ \{x[(k+1)T]-x(kT)\}, \text{ tai būtų galima sudaryti perdavimo funkciją } W_4(z)=W_2(z)W_3(z)= \\ =\frac{1+4z+z^2}{1-z^2}\cdot\frac{1-z}{z}=\frac{1+4z+z^2}{z(1+z)}, \text{ kuri turėtų trajektoriją } \{k\} \text{ transformuoti į trajektoriją } 1; 5; 7; 11; 13; \\ 17; 19; 23; 25; 29; \dots=\left\{\frac{6(k+1)^2-1+(-1)^{k+1}}{4}-\frac{6k^2-1+(-1)^k}{4}\right\}=\left\{3k+\frac{3-(-1)^k}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Patikrinsime šią hipotezę.

$$Y(z)=W_4(z)X_1(z)=\frac{1+4z+z^2}{z(1+z)}\sum_{k=0}^{\infty} kz^k=\frac{1+4z+z^2}{z(1+z)}\cdot\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1+4z+z^2}{(1+z)(1-z)^2}.$$

$$\text{Išskaidę } Y(z) \text{ į paprastų trupmenų sumą, gausime: } \frac{1+4z+z^2}{(1+z)(1-z)^2}=\frac{3z}{(1-z)^2}+\frac{1,5}{1-z}-$$

$$-\frac{0,5}{1+z} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} kz^k + 1,5 \sum_{k=0}^{\infty} z^k - 0,5 \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k, \text{ iš kur rasime, jog šio atvaizdo originalas } \{y(kT)\} = \\ = \{3k+1,5-0,5(-1)^k\} = \left\{3k + \frac{3-(-1)^k}{2}\right\} = 1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25; 29; 31; \dots$$

Reiškia, hipotezė, jog sistema S_4 , susidedanti iš dviejų nuosekliai sujungtų sistemų S_2 ir S_3 su perdavimo funkcijomis $W_2 = \frac{1+4z+z^2}{1-z^2}$ ir $W_3 = \frac{1-z}{z}$, transformuoja seką $\{k\}$ į seką $\left\{3k + \frac{3-(-1)^k}{2}\right\}$, yra teisinga.

Žinodami $W(z)$ ir $Y(z)$, galime išspręsti ir atvirkštinį uždavinį – rasti $X(z)$.

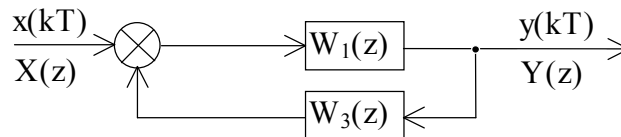
Pavyzdžiui, rasime sistemos S_5 , turinčios perdavimo funkciją $W_5(z) = W_1(z)W_2(z) = \frac{1+4z+z^2}{(1-z)^2}$, įėjimo atvaizdą $X(z)$ ir pačią įėjimo trajektoriją $\{x(kT)\}$, atitinkančią išėjimo trajektoriją $\{y(kT)\} = \{k^3\}$.

$$\text{Kadangi } Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)z^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = z^3 \frac{d^3}{dz^3} \left(\frac{1}{1-z} \right) + \\ + 3z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) + z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{6z^3}{(1-z)^4} + \frac{6z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(1-z)^4}, \text{ tai } X(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k}{W_5(z)} = \\ = \frac{(z^3 + 4z^2 + z)(1-z)^2}{(1-z)^4(1+4z+z^2)} = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k, \text{ iš kur gauname, jog } \{x(kT)\} = \{k\}.$$

Jei 250-255 pav. tolydžių blokų perdavimo funkcijas $W(p)$ pakeistume diskrečių blokų perdavimo funkcijomis $W(z)$, tai lengvai įrodytume, **jog $W(z)$ turi tas pačias savybes, kaip ir $W(p)$ bei $W(s)$: nuosekliai jungiant blokus, jų perdavimo funkcijos sudauginamos, lygiagrečiai jungiant – sudedamos ir t. t.**

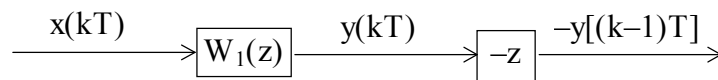
Pavyzdžiui, jei sudarytume sistemą, panaudodami teigiamąjį grįžtamąjį ryšį, kaip tai parodyta

$$263 \text{ pav., tai jos perdavimo funkcija } W_6(z) \text{ būtų lygi } \frac{W_1(z)}{1 - W_1(z)W_3(z)} = \frac{\frac{1+z}{1-z}}{1 - \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-z}{z}} = \frac{-z(1+z)}{1-z} = \\ = -zW_1(z).$$



263 pav.

Į daugiklį z galima žiūrėti kaip į elementaraus postūmio (vėlinimo) bloko perdavimo funkciją, o į daugiklį $(-z)$ – kaip į tokio vėlavimo bloko, kuris papildomai dar keičia signalo ženklą, perdavimo funkciją (žiūr. 264 pav.).



264 pav.

Nesunku įsitikinti, jog sistemų, pavaizduotų 263 ir 264 pav., perdavimo funkcijos ekvivalenčios. Pavyzdžiui, jei $\{x(kT)\} = \{k\}$, tai $Y_6(z) = W_6(z) \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = W_6(z) \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{-z^2(1+z)}{(1-z)^3} = \\ = -z \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = -z \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$, iš kur išplaukia, jog $\{y_6(kT)\} = -(0; 0; 1; 4; 9; 16; \dots) = 0; 0; -1; -4; -9; -16; \dots$

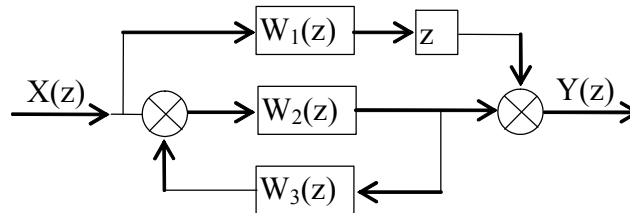
Tą pačią išėjimo trajektoriją gausime ir naudodamiesi sistema, pavaizduota 263 pav.:

$$W_1(z) \cdot (-z) \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = -z \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = -z \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = -z(0+z+4z^2+9z^3+\dots+k^2 z^k+\dots) =$$

$$= 0 - z^2 - 4z^3 - \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) e^{-kTs} z^4 - \dots - k^2 z^{k+1} - \dots = -0 - 0 \cdot z - z^2 - 4z^3 - 9z^4 - \dots - k^2 z^{k+1} - \dots, \text{ iš kur išplaukia, jog}$$

$$\{-y[(k-1)T]\} = 0; 0; -1; -4; -9; -16; -25; \dots, \text{ t. y. sutampa su } y_6(kT).$$

Jei sistemą, pavaizduotą 263 pav., turinčią perdavimo funkciją $W_6(z)$, sujungtume lygiagrečiai su sistema, turinčia perdavimo funkciją $W_7 = zW_1(z) = \frac{z(z+1)}{1-z}$, kaip tai parodyta 265 pav., tai gautume sistemą, kurios perdavimo funkcija būtų lygi 0, t. y. sistemų $W_6(z)$ ir $W_7(z)$ išėjimai, būdami priešingų ženklų ir lygūs savo absoliučiomis reikšmėmis, gesintų vienas kitą ir bendras abiejų lygiagrečiai sujungtų sistemų išėjimas, esant bet kokiam įėjimui, būtų lygus 0.



265 pav.

Į diskrečius blokus su perdavimo funkcijomis $W(z)$ galima žiūrėti kaip į ESM realizuojamus programų modulius, transformuojančius skaičių sekas – įėjimo trajektorijas $\{x(kT)\}$ – į kitas skaičių sekas – išėjimo trajektorijas $\{y(kT)\}$. Pačios perdavimo funkcijos $W(z)$ gali būti interpretuojamos kaip transformavimo algoritmų (transformavimo programų) z – atvaizdai.

Kaip jau buvo minėta šio skyrelio pradžioje, z -transformacija gali būti taikoma tiek begalinėms, tiek baigtinėms funkcijų-originalų reikšmių sekoms.

Kadangi $|z| < 1$, tai sumos $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$, ..., $\sum_{k=0}^{\infty} k^m z^k$, ... absoliučiai konverguoja.

Absoliučiai konverguoja ir sumos $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^k$, kai funkcijos $f(t)$ absoliučioji reikšmė $|f(t)|$ nedidėja greičiau už eksponentę, t. y., kai funkcija $f(t)$ tenkina reikalavimus, keliamus funkcijoms-originalams, išvardintus 1.11.5.1. skyrelyje.

Todėl su z -atvaizdų eilutėmis, nepriklausomai nuo to, ar dėmenų skaičius jose yra baigtinis, ar begalinis, galima operuoti, naudojantis tomis pačiomis taisyklėmis, kurios galioja sumoms, turinčioms baigtinį dėmenų skaičių. Skiriasi tik gaunami rezultatai.

Pavyzdžiui, $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, o $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, bet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$ sutampa su $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Analogiškai gauname, jog $\sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$, o

$$\sum_{k=0}^n k z^k = \sum_{k=1}^n k z^k = z \sum_{k=1}^n k z^{k-1} = z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^n z^k = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right) = z \cdot \frac{-(n+1)z^n(1-z) - (1-z^{n+1})(-1)}{(1-z)^2} =$$

$$= z \cdot \frac{(n+1)z^{n+1} - (n+1)z^n + 1 - z^{n+1}}{(1-z)^2} = z \cdot \frac{1 - z^n - n z^n(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2} - \frac{n z^{n+1}}{1-z}.$$

Gautas rezultatas skiriasi nuo $\frac{z}{(1-z)^2}$, tačiau kai $n \rightarrow \infty$, tampa lygus pastarajam.

Analogijas galima testuoti, apskaičiuojant $\sum_{k=0}^n k^2 z^k$, $\sum_{k=0}^n k^3 z^k$ ir t. t., bei lyginant gautas sumas su

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}, \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4} \text{ ir t. t.}$$

1.11.14. Ryšys tarp Laplaso ir z-transformacijų. Bloko, turinčio tolydžią perdavimo funkciją, reakcija į impulsinę įėjimo trajektoriją. Perėjimai nuo tolydžių trajektorijų ir perdavimo funkcijų prie diskrečiųjų ir atvirkštiniai perėjimai

Pasinaudodami įvestomis funkcijomis $\delta(t)$ ir $w(t)$ bei jų savybėmis, papildysime žinias apie ryšį tarp Laplaso ir z-transformacijų. Kartu su tuo permesime dar vieną „tiltuką“ tarp diskrečių ir tolydžių modelių, parodydami, jog galima sukurti bendrą matematinį aparatą, tinkantį ir diskretiems, ir tolydiems procesams.

Rasime bloko, turinčio tolydžią perdavimo funkciją $W(s)$, reakciją į impulsinę įėjimo trajektoriją $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$, sudarytą iš tolydžios įėjimo trajektorijos $x(t)$ reikšmių taškuose $t=kT$ (t. y. iš diskrečios trajektorijos $\{x(kT)\}$ reikšmių), surištą funkcija $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$.

Kad šiek tiek geriau išsivaizduotume funkciją $x^*(t)$, nustatysime kai kurias jos savybes, išplaukiančias iš funkcijos $\delta(t-kT)$ savybių. Iš funkcijos $\delta(t)$ apibrėžimo išplaukia, jog funkcija $\delta(t)$ ir jos integralas yra lygūs 0 visuose taškuose, išskyrus tašką $t=0$, kur jos integralas lygus 1, ir todėl

(nepriklausomai nuo to, kokia maža bebūtų $|\Delta t|$ reikšmė), jei $\Delta t > 0$, tai $\int_{-\infty}^{kT-\Delta t} \delta(t-kT)dt = 0$,

$\int_{kT+\Delta t}^{+\infty} \delta(t-kT)dt = 0$, $\int_{kT-\Delta t}^{kT+\Delta t} \delta(t-kT)dt = 1$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{kT-\Delta t}^{kT+\Delta t} \delta(t-kT)dt = 1$. Todėl, kai $0 < \Delta t < T$, gauname, kad

teiginys $\forall_k \{[x^*(kT-\Delta t) = x^*(kT+\Delta t) = 0] \wedge [\int_{kT-\Delta t}^{kT+\Delta t} x^*(t)dt = x(kT)]\}$ yra teisingas teiginys.

$$\begin{aligned} \text{Rasime } x^*(t) \text{ atvaizdą } L[x^*(t)] = X^*(s) &= \int_0^{\infty} x^*(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)e^{-st}dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} e^{-st} du(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [u(t-kT)e^{-st}]_0^{\infty} + \\ &+ s \int_0^{\infty} u(t-kT)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [0 - 0 + s \int_{kT}^{\infty} e^{-st}dt] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-ksT}. \end{aligned}$$

Iš gauto rezultato išplaukia: jei prisimintume, jog $z = e^{-sT}$ ir gautose formulėse e^{-sT} pažymėtume z , tai iš $X^*(s)$ apskaičiavimo formulės gautume $X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k = X(z)$, t. y. impulsinės įėjimo trajektorijos $x^*(t)$ Laplaso atvaizdas $X^*(s)$ sutampa su atitinkamos diskrečios trajektorijos $\{x(kT)\}$ z-atvaizdu $X(z)$.

Pereiti nuo tolydžios trajektorijos $x(t)$ Laplaso atvaizdo $L[x(t)]=X(s)$, kai $X(s)$ yra daugianarių $A(s)$ ir $B(s)$ santykis $X(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$, prie impulsinės trajektorijos

$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ Laplaso atvaizdo $L[x^*(t)]=X^*(s)$, o po to – ir prie tos trajektorijos taškus vaizduojančios skaičių sekos $\{x(kT)\}$ z – atvaizdo $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ksT}$ galima įvairiais būdais.

Vienas praktiškai paprasčiausių (tačiau, deja, ne visais atvejais tinkamų, nes ne visada daugianario $B(s)$ šaknys yra skirtingos) metodų yra toks:

1) turimą trajektorijos $x(t)$ Laplaso atvaizdą $X(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ išskaidome į elementarių trupmenų $\frac{a_i}{s-s_i}$ sumą $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-s_i}$; čia s_i – daugianario $B(s)$ šaknys (jos šiuo atveju turi būti skirtingos), o a_i – pastovūs koeficientai, randami iš tapatybės $\frac{A(s)}{B(s)} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-s_i}$ (pavyzdžiui, neapibrėžtųjų koeficientų metodu);

2) elementariose trupmenose $\frac{a_i}{s-s_i}$ vardiklius $s-s_i$, kur $i=1, 2, \dots, n$, pakeičiame į skirtumus $1-e^{s_i T} z$, t. y. į $1-e^{s_i T} e^{-sT}=1-e^{-(s-s_i)T}$ ir sudarome sumą $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-e^{s_i T} z}$, kuri ir yra ieškomasis sekos $\{x(kT)\}$ atvaizdas $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k$.

Pagrįsime šį algoritmą:

1) trupmena $\frac{a_i}{s-s_i}$ yra funkcijos $f_i(t)=a_i e^{s_i t}$ Laplaso atvaizdas, nes

$$\int_0^{\infty} a_i e^{s_i t} e^{-st} dt = a_i \int_0^{\infty} e^{-(s-s_i)t} dt = -\frac{a_i}{s-s_i} e^{-(s-s_i)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{a_i}{s-s_i};$$

2) todėl $X(s)=\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-s_i}$ yra funkcijos $x(t)=\sum_{i=1}^n a_i e^{s_i t}$ Laplaso atvaizdas;

3) žinodami $x(t)=\sum_{i=1}^n a_i e^{s_i t}$, galime rasti šią trajektoriją $x(t)$ atitinkančią impulsinę trajektoriją $x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} \delta(t-kT)$ ir jos Laplaso

$$\begin{aligned} \text{atvaizdą } X^*(s) &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} \delta(t-kT) \right) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} \left[u(t-kT) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} u(t-kT) e^{-st} dt \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} \left[0 - 0 + s \int_{kT}^{\infty} e^{-st} dt \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} \left(-\frac{s}{s} e^{-st} \right) \Big|_{kT}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i kT} e^{-skT} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(s-s_i)T} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{1-e^{-(s-s_i)T}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-e^{s_i T} e^{-sT}}; \end{aligned}$$

4) naudodamiesi šiame skyrelyje įrodytu perėjimu nuo $X^*(s)$ prie $X(z)$, pakeisdami e^{-sT} į z , gauname, jog $X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - e^{s_i T} z}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Pavyzdžiui, kai $x(t) = a = \text{const}$, tai $X(s) = \frac{a}{s} = \frac{a}{s-0}$, ir, naudodamiesi ką tik aprašytu metodu, gauname, jog $X^*(s) = \frac{a}{1 - e^{-(s-0)T}} = \frac{a}{1 - e^{-sT}}$ ir $X(z) = \frac{a}{1 - z}$. Tai sutampa su sekos $\{a\}$ z – atvaizdu $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a z^k = \frac{a}{1 - z}$.

Kai $x(t) = a e^{bt}$, tai $X(s) = \frac{a}{s - b}$, iš kur $X^*(s) = \frac{a}{1 - e^{-(s-b)T}} = \frac{a}{1 - e^{bT} e^{-sT}}$ ir $X(z) = \frac{a}{1 - e^{bT} z}$. Tai sutampa su sekos $\{a e^{b k T}\}$ z – atvaizdu $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a e^{b k T} z^k = \frac{a}{1 - e^{bT} z}$.

Kai $x(t) = \cos t$, tai $X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{0,5}{s + i} + \frac{0,5}{s - i}$, iš kur $X^*(s) = \frac{0,5}{1 - e^{-(s+i)T}} + \frac{0,5}{1 - e^{-(s-i)T}} =$
 $= \frac{0,5}{1 - e^{-iT} e^{-sT}} + \frac{0,5}{1 - e^{iT} e^{-sT}}$ ir $X(z) = \frac{0,5}{1 - e^{-iT} z} + \frac{0,5}{1 - e^{iT} z} = 0,5 \frac{1 - e^{iT} z + 1 - e^{-iT} z}{1 + z^2 - e^{iT} z - e^{-iT} z} =$
 $= 0,5 \frac{2 - z^2 \frac{e^{iT} + e^{-iT}}{2}}{1 + z^2 - 2z \frac{e^{iT} + e^{-iT}}{2}} = \frac{1 - z \cos T}{1 + z^2 - 2z \cos T}$. Tai sutampa su sekos $\{\cos kT\}$ z – atvaizdu

$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos kT \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikT} + e^{-ikT}}{2} z^k = 0,5 \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikT} z^k + 0,5 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ikT} z^k =$
 $= \frac{0,5}{1 - e^{iT} z} + \frac{0,5}{1 - e^{-iT} z} = \frac{1 - z \cos T}{1 + z^2 - 2z \cos T}$.

Čia aprašytas metodas turi tą trūkumą, kad **jis tiesiogiai negali būti pritaikytas tam atvejui, kai lygtis $B(s) = 0$ turi kartotinių šaknų**, nes tuomet trupmena $\frac{A(s)}{B(s)}$ tuo metodu negali būti išskaidyta į elementarių trupmenų sumą

$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - s_i}$, kur a_i – pastovūs koeficientai, nepriklausantys nuo s .

Tokiais atvejais tenka naudotis kitais atvirkštinę Laplaso transformaciją atliekančiais metodais (pavyzdžiui, 1.11.6. skyrelyje aprašyta Koši teorema bei reziduumų apskaičiavimo formulė), ir, iš duotojo $X(s)$ suradus $x(t)$, po to sudaryti impulsinę funkciją $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$, apskaičiuoti jos Laplaso atvaizdą $X^*(s)$ ir gauti $X(z)$.

Pavyzdžiui, kai $X(s) = \frac{a}{s^2}$, kur $A(s) = a = \text{const}$, $B(s) = s^2$, lygtis $B(s) = 0$ turi dvi kartotines šaknis $s_{1,2} = 0$.

Naudodamiesi reziduumų formule $x(t) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left[\frac{a}{s^2} e^{st} (s-0)^2 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [a e^{st}]$, gauname, jog $x(t) = at$ (ką, žinoma, galėjome gauti ir paprasčiau, pasinaudodami formule $L[t] = \frac{1}{s^2}$), iš kur

$x^*(t) = a \sum_{k=0}^{\infty} kT \delta(t - kT)$ ir $X^*(s) = \int_0^{\infty} a \sum_{k=0}^{\infty} kT \delta(t - kT) e^{-st} dt = aT \sum_{k=0}^{\infty} k \int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt =$

$$= aT \sum_{k=0}^{\infty} k \left[u(t-kT)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} u(t-kT)e^{-st} dt \right] = aT \sum_{k=0}^{\infty} ks \int_{kT}^{\infty} e^{-st} dt = aT \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-skT}.$$

$$\text{Todėl } X(z) = aT \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = aTz \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = aTz \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} z^k = aTz \frac{d}{dz} \frac{z}{1-z} = \frac{aTz}{(1-z)^2}.$$

$$\text{Gautas rezultatas sutampa su sekos } \{akT\} \text{ } z\text{-atvaizdu } X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} akTz^k = aT \sum_{k=0}^{\infty} kz^k.$$

Turėdami $X^*(s)$ ir $W(s)$, galime rasti $Y(s) = W(s)X^*(s)$, o taip pat ir $y(t)$, t. y. bloko, turinčio tolydžią perdavimo funkciją $W(s)$, reakciją į impulsinę įėjimo trajektoriją $x^*(t)$, kai pradinės sąlygos yra nulinės.

Išėjimo trajektoriją $y(t)$ galima rasti įvairiais būdais:

$$1) \text{ naudojantis atvirkštine Laplaso transformacija } y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} W(s)X^*(s) ds,$$

t. y. naudojantis reziduumų apskaičiavimo formule;

2) naudojantis Duamelio integralu $y(t) = \int_0^t x^*(\tau)w(t-\tau)d\tau$, nes $W(s)X^*(s)$ yra funkcijų $x^*(t)$ ir $w(t)$ sąsūkos atvaizdas;

3) naudojantis ta bloko, turinčio perdavimo funkciją $W(s)$, savybe, jog jo reakcija $y(t)$ į poveikį $x(t) = \delta(t)$ yra $w(t)$, o į poveikį $\sum_{k=0}^n a_k \delta(t-kT)$ yra $\sum_{k=0}^n a_k w(t-kT)$.

Pasinaudodami trečiuoju išėjimo trajektorijos $y(t)$ gavimo būdu, rasime, jog tuo atveju, kai įėjimo trajektorija yra $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$, bloko, turinčio perdavimo funkciją $W(s)$, išėjimo trajektorija yra $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)w(t-kT)$.

Dabar sudarysime impulsinę funkciją $y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT)$, rasime jos atvaizdą $Y^*(s) = L[y^*(t)]$ ir nustatysime jo sąryšį su $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^k$.

Mūsų nagrinėjamu atveju, kaip esame ką tik gavę: $y(t) = x(0)w(t) + x(T)w(t-T) + x(2T)w(t-2T) + \dots + x(kT)w(t-kT) + \dots$. Todėl $y(0) = x(0)w(0)$; $y(T) = x(0)w(T) + x(T)w(0)$; $y(2T) = x(0)w(2T) + x(T)w(T) + x(2T)w(0)$; ... $y(kT) = \sum_{i=0}^k x(iT)w[(k-i)T]$; ...

Įstatę $y(kT)$ reikšmes į $y^*(t)$ formulę, gauname, kad

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT)w[(k-i)T]\delta(t-kT) \text{ ir } Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT)w[(k-i)T] \cdot \int_0^{\infty} \delta(t-kT)e^{-st} dt = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT)w[(k-i)T]e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT)e^{-iT_s} w[(k-i)T]e^{-(k-i)Ts}.$$

Naudodamiesi 1.11.13. skyrelyje išvesta sąsūkos savybe, gauname, jog

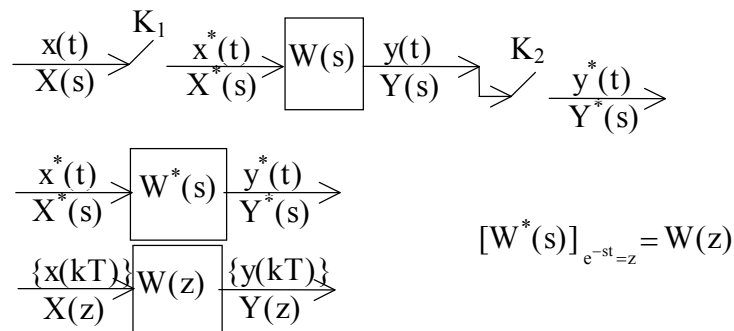
$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT)e^{-iT_s} \cdot w[(k-i)T]e^{-(k-i)Ts} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} w(kT)e^{-kTs} \right] = \\ = X^*(s) \cdot W^*(s), \text{ kur } W^*(s) = \int_0^{\infty} w^*(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w(kT)\delta(t-kT)e^{-st} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) e^{-kTs}, \text{ o } X^*(s) = \int_0^{\infty} x^*(t) e^{-st} dt = \\ = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}.$$

Tokiu būdu gavome, jog $Y^*(s) = X^*(s) \cdot W^*(s)$, kur diskrečios perdavimo funkcijos $W^*(s)$ originalas $w^*(t)$ yra gaunamas iš impulsinės perėjimo charakteristikos $w(t)$: $w^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) \delta(t-kT)$.

Jei formulėse $Y^*(s)$, $W^*(s)$ ir $X^*(s)$ pakeistume e^{-sT} į z , tai gautume $Y(z)$, $W(z)$ ir $X(z)$, o taip pat ryšį tarp jų: $Y(z) = W(z)X(z)$. Galioja ir atvirkštinis perėjimas.

Gautos išvados apie ryšį tarp Laplaso ir z -transformacijų iliustruojamos 266 pav., kuriame K_1 ir K_2 – momentiniai jungikliai, leidžiantys, juos atitinkamais momentais staigiai perjunginėjant, iš tolydžių funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ gauti impulsines funkcijas $x^*(t)$ ir $y^*(t)$, o iš atvaizdų $X(s)$ ir $Y(s)$ – atvaizdus $X^*(s)$ ir $Y^*(s)$.



266 pav.

Žinodami $W(s)$, mes galime surasti ją atitinkančią $W(z)$. Tai galima padaryti, suradus $w(t)$ ir sudarius $w^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) \delta(t-kT)$, o po to pereinant prie $W^*(s)$ ir $W(z)$, kaip tai buvo ką tik parodyta.

$$\text{Pavyzdžiui, jei } W(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ tai } w(t) = e^{-at}; w^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) \delta(t-kT) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \delta(t-kT); W^*(s) = \int_0^{\infty} w^*(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(a+s)kT} = \frac{1}{1 - e^{-(a+s)T}};$$

$$W(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z} = \frac{1}{1 - \alpha z}, \text{ kur } \alpha = e^{-aT}, \text{ t. y. } W(z) \text{ gaunama iš } W^*(s), \text{ pakeičiant } e^{-st} \text{ į } z.$$

Kai perdavimo funkcija sudėtinga, tai ji pradžioje dekomponuojama (pavyzdžiui, į sumą paprastesnių), o jau po to pervedama į $W^*(s)$ ir į $W(z)$, kaip tai buvo parodyta $X(s)$ pervedimo į $X^*(s)$ ir į $X(z)$ atveju.

Kai nuo diskrečių trajektorijų ir perdavimo funkcijų reikia pereiti prie tolydžių (ar bent dalimis tolydžių), tai tuomet naudojamosi interpoliacijos metodais.

Vienas iš paprasčiausių interpoliatorių – fiksatorius. Jis pveda impulsinę trajektoriją $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)$ į trajektoriją $\bar{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(t-kT) - u[t-(k+1)T]\}$, t. y. į laiptuotą funkciją, turinčią Laplaso atvaizdą

$$\begin{aligned}
\bar{X}(s) &= \int_0^{\infty} \bar{x}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(t-kT) - u[t-(k+1)T]\} e^{-st} dt = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left\{ \int_0^{\infty} u(t-kT) e^{-st} dt - \int_0^{\infty} u[t-(k+1)T] e^{-st} dt \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\int_{kT}^{\infty} e^{-st} dt - \int_{(k+1)T}^{\infty} e^{-st} dt \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[-\frac{1}{s} (e^{-st})_{kT}^{\infty} + \frac{1}{s} (e^{-st})_{(k+1)T}^{\infty} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{1}{s} (e^{-skT} - e^{-s(k+1)T}) \right] = \\
&= \frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT}. \text{ Kadangi } e^{-sT}=z, \text{ tai } L[x(t)] = \frac{1-z}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^k = \frac{1-z}{s} X(z).
\end{aligned}$$

Atsižvelgdami į tai, kad $u(t) = \begin{cases} 1, & \text{kai } t \geq 0, \\ 0, & \text{kai } t < 0, \end{cases}$ nesunkiai galime įsitikinti, kad

laiptuotoji funkcija $\bar{x}(t)$ yra tokia funkcija, kurios reikšmė taškuose $t=0, T, 2T, 3T, \dots, kT, \dots$ (o taip pat ir intervaluose $[0, T), [T, 2T), [2T, 3T), \dots, [kT, (k+1)T), \dots$) sutampa su funkcijos $x(t)$ reikšme kaip tik tuose taškuose $0, T, 2T, 3T, \dots, kT, \dots$.

Įrodysime tai, apskaičiuodami $\bar{x}(t)$ reikšmes taškuose $t=0, T, 2T, \dots, kT$.

$$\begin{aligned}
\bar{x}(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(0-kT) - u[0-(k+1)T]\} = x(0 \cdot T) \{u(0-0 \cdot T) - u(0-T)\} + \\
&+ x(T) \{u(0-T) - u(0-2T)\} + x(2T) \{u(0-2T) - u(0-3T)\} + \dots = x(0)(1-0) + x(T)(0-0) + \\
&+ x(2T)(0-0) + \dots = x(0); \\
\bar{x}(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(T-kT) - u[T-(k+1)T]\} = x(0 \cdot T) \{u(T-0) - u(T-T)\} + \\
&+ x(T) \{u(T-T) - u(T-2T)\} + x(2T) \{u(T-2T) - u(T-3T)\} + \dots = x(0)(1-1) + x(T)(1-0) + \\
&+ x(2T)(0-0) + \dots = 0 + x(T) + 0 + \dots = x(T); \\
\bar{x}(2T) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(2T-kT) - u[2T-(k+1)T]\} = x(0 \cdot T) \{u(2T-0) - u(2T-T)\} + \\
&+ x(T) \{u(2T-T) - u(2T-2T)\} + x(2T) \{u(2T-2T) - u(2T-3T)\} + x(3T) \{u(2T-3T) - \\
&- u(2T-4T)\} + \dots = x(0)(1-1) + x(T)(1-1) + x(2T)(1-0) + x(3T)(0-0) + \dots = x(2T).
\end{aligned}$$

Analogiškai gausime, jog $\bar{x}(kT) = x(kT)$, nes $\bar{x}(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(kT-kT) - u[kT-(k+1)T]\} = x(0)(1-1) + x(T)(1-1) + \dots + x[(k-1)T](1-1) + x(kT)(1-0) + x[(k+1)T] \times$
 $\times (0-0) + x[(k+2)T](0+0) + \dots = 0 + 0 + \dots + 0 + x(kT) + 0 + 0 + \dots = x(kT)$.

Tai ir įrodo teiginį, kad **taškuose $t=0, T, 2T, \dots$ funkcija $\bar{x}(t) = x(t)$.**

Rasime **fiksatoriaus perdavimo funkciją $\bar{V}(s)$.**

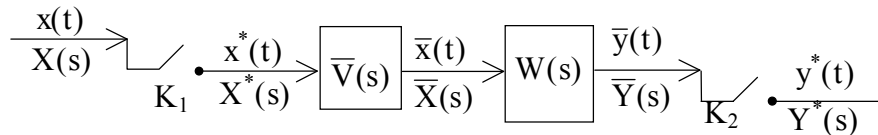
$$\bar{V}(s) = \frac{Y_v(s)}{X_v(s)} = \frac{\bar{X}(s)}{X^*(s)} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{x}(t) e^{-st} dt}{\int_0^{\infty} x^*(t) e^{-st} dt} = \frac{\frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}}{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}} = \frac{1-e^{-sT}}{s}.$$

267 pav. parodyta, kaip, naudodamiesi interpoliatoriumi, turinčiu perdavimo funkciją $\bar{V}(s)$, impulsinę funkciją $x^*(t)$ galime pervesti į laiptuotą funkciją $\bar{x}(t)$, kurią, naudodamiesi bloku, turinčiu perdavimo funkciją $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ir pervedančiu duotąją

įėjimo trajektoriją $x(t)$ į duotąją išėjimo trajektoriją $y(t)$ bei pervedančiu impulsus $\delta(t)$ į išėjimus $w(t)$, o taip pat vienetinius šuoliukus $u(t)$ į išėjimus $h(t)$, galime pervesti į

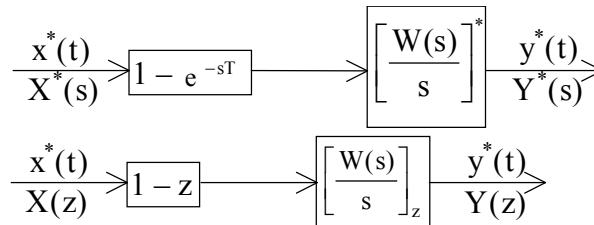
funkciją $\bar{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\}$. Tos trajektorijos Hevisaido atvaizdas $H[\bar{y}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kpT} (1 - e^{-pT}) W(p)$ tenkina formulę $\bar{Y}(p) = W(p) \bar{X}(p)$, nes $\bar{X}(p) = H[\bar{x}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kpT} (1 - e^{-pT})$.

Naudodamiesi perjungėju K_2 , jį staigiai įjungdami ir tuoj pat staigiai išjungdami, iš funkcijos $\bar{y}(t)$ gausime impulsinę išėjimo funkciją $y^*(t)$.



267 pav.

Nesunku įrodyti, jog vietoje sistemos, parodytos 267 pav., galima nagrinėti ekvivalenčią jai sistemą, parodytą 268 pav.



268 pav.

$$\text{Čia } \left[\frac{W(s)}{s} \right]^* = H^*(s) = \int_0^{\infty} h^*(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) e^{-kTs};$$

$$\left[\frac{W(s)}{s} \right]_z = \left[\frac{W(s)}{s} \right]_{e^{-sT}=z}^* = [H^*(s)]_{e^{-sT}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^k.$$

Blokas, turintis perdavimo funkciją $\left[\frac{W(s)}{s} \right]^*$, gaunamas, sujungus bloką, turintį perdavimo funkciją $\frac{W(s)}{s}$, su impulsiniu perjungėju K_2 , sujungiančiu (ir tuoj pat išjungiančiu) šio bloko išėjimą su visos sistemos išėjimu momentais $t=0, T, 2T, 3T, \dots$

Šiame skyrelyje aprašytas matematinis bei techninis aparatas leidžia permesti „tiltą“ tarp sistemų, turinčių tolydų, ir sistemų, turinčių diskretų kalendorių, vaizduoti sistemų funkcionavimo trajektorijas tolydžiomis, impulsinėmis ir laiptuotomis funkcijomis.

1.11.15. Perdavimo funkcijų metodo taikymas stacionariems stochastiniams procesams. Koreliaciniai atvaizdai

Perdavimo funkcijomis galima naudotis, nagrinėjant ne tik determinuotas tolydžias ir diskrečias, bet ir stochastines trajektorijas.

Kai determinuoto bloko, kurio perdavimo funkcija yra $W(s)$ (ar $W(z)$), įėjimo trajektorija yra stochastinė, tai įėjimo ir išėjimo trajektorijų atvaizdai bei jų vidurkių atvaizdai $X(s)$, $X(z)$, $Y(s)=W(s)X(s)$, $Y(z)=W(z)X(z)$,

$$M_x(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f(x) dx \right) e^{-st} dt, \quad M_x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(kT) z^k, \quad M_y(s) = W(s) M_x(s),$$

$M_y(z) = W(z) M_x(z)$ randami analogiškai, kaip ir determinuotų trajektorijų atvaizdai.

Suradę stochastinių išėjimo trajektorijų bei jų vidurkių atvaizdus, naudodamiesi mūsų jau išnagrinėtais atvirkštinių transformacijų metodais galime rasti ir pačias išėjimo trajektorijas bei jų vidurkius.

Kadangi stochastiniai procesai, turintys tuos pačius vidurkius ir tas pačias dispersijas, gali žymiai skirtis, tai vien tik vidurkių ir dispersijų žinojimo dar nepakanka stochastinių procesų apibūdinimui. Gana daug informacijos apie stochastinį procesą gali suteikti koreliacijos tarp stochastinio proceso charakteristikų, apskaičiuotų skirtingais momentais t_i ir t_j , tyrimas ir **autokovariacijos bei autokoreliacijos funkcijų** sudarymas. Todėl šalia jau minėtų stochastinių įėjimo ir išėjimo trajektorijų bei jų vidurkių atvaizdų naudojami dar ir taip vadinamieji **koreliaciniai atvaizdai**.

Tarkime, jog turime N stochastinio proceso realizacijų $\{x^{(1)}(kT)\}$, $\{x^{(2)}(kT)\}$, ..., $\{x^{(n)}(kT)\}$, ..., $\{x^{(N)}(kT)\}$, kur $k=0, 1, 2, 3, \dots$. Rasime **vidurkio $m_x(kT)$ įvertį** $= \hat{m}_x(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^{(n)}(kT)$ ir „individualių“ stochastinių trajektorijų nuokrypius nuo jo: $\ell_x^{(n)}(kT) = x^{(n)}(kT) - m_x(kT)$, kur $n=1, 2, \dots, N$; $k=0, 1, 2, \dots$.

Po to apskaičiuosime **kovariacijos įverčius** $\hat{\phi}_x(i, j)$: $\hat{\phi}_x(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell_x^{(n)}(iT) \ell_x^{(n)}(jT)$, kur $i=0, 1, 2, \dots, j=0, 1, 2, \dots$.

Kai **stochastinis procesas stacionarus**, o šiame skyrelyje nagrinėsime tik tokius procesus, tai kovariacijos $\phi_x(i, j)$ reikšmės **priklauso tik nuo indeksų i ir j skirtumo r** , t. y. $\phi_x(i, j) = \psi_x(i-j) = \psi_x(r)$.

Kovariacijos koeficientų seka yra simetrinė, nes $\hat{\phi}_x(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell_x^{(n)}(iT) \ell_x^{(n)}(jT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell_x^{(n)}(jT) \ell_x^{(n)}(iT) = \hat{\phi}_x(j, i)$. Todėl $\psi_x(r) = \psi_x(-r)$.

Nulinis kovariacijos koeficientas $\psi_x(0)$ vadinamas **dispersija**. Kai N yra nedidelis skaičius, tai vietoje dispersijos įverčio $\hat{\psi}_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell_x^{(n)}(iT) \ell_x^{(n)}(iT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\ell_x^{(n)}(iT)]^2$ dažnai naudojama taip vadinamąja **nepastumtąja dispersija** bei jos įverčiu $\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\ell_x^{(n)}(iT))^2$.

Koreliaciniu stacionaraus stochastinio įėjimo proceso (stacionarios stochastinės įėjimo trajektorijos) z atvaizdu vadinama Lorano eilutė $\Psi_x(z) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \psi_x(r) z^r$, o taip pat funkcija, į kurią ši eilutė konverguoja.

Stacionaraus stochastinio proceso koreliacinio atvaizdo $\Psi_x(z)$ apskaičiavimui tikslinga pasinaudoti jau minėtąja kovariacijos koeficientų simetriškumo savybe.

Iš pradžių apskaičiuojamas $\Psi_x^{(+)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_x(r) z^r$. Po to apskaičiuojamas

$\Psi_x^{(-)}(z) = \sum_{r=-1}^{-\infty} \psi_x(r) z^r = \Psi_x^{(+)}(z^{-1}) - \psi_x(0)$ ir galų gale, randamas **koreliacinis**

stochastinės įėjimo trajektorijos atvaizdas $\Psi_x(z) = \Psi_x^{(+)}(z) + \Psi_x^{(-)}(z)$.

Pavyzdžiui, rasime stochastinio proceso, kurio kovariacijos koeficientai yra $\psi_x(r) = \alpha^r$, kur $|\alpha| < 1$, koreliacinį atvaizdą:

$$\begin{aligned} 1) \quad \Psi_x^{(+)}(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r z^r = \frac{1}{1-\alpha z}; \\ 2) \quad \Psi_x^{(-)}(z) &= \Psi_x^{(+)}(z^{-1}) - \psi_x(0) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - 1 = \frac{\alpha}{z-\alpha}; \\ 3) \quad \Psi_x(z) &= \frac{1}{1-\alpha z} + \frac{\alpha}{z-\alpha} = \frac{(1-\alpha^2)z}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}. \end{aligned}$$

Nesunku įrodyti, kad **koreliacinis stacionarios stochastinės trajektorijos atvaizdas**, kaip ir determinuotų trajektorijų atvaizdai, **turi tiesiškumo savybę**, t. y. jog **stacionarių nepriklausomų stochastinių procesų sumos koreliacinis atvaizdas lygus tų procesų koreliacinių atvaizdų sumai**.

Taip pat galima įrodyti (žiūr. [117]), jog **išėjimo trajektorijos koreliacinis atvaizdas** $\Psi_y(z)$ yra lygus $W(z)W(z^{-1})\Psi_x(z)$.

Tai leidžia, žinant įėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą, rasti išėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą.

Pavyzdžiui, kai sistemos, turinčios perdavimo funkciją $W(z) = \frac{3z(1+1,4z)}{(1-0,6z)(1+0,9z)}$ įėjimą veikia stacionarus stochastinis procesas, kurio koreliacinis atvaizdas yra $\Psi_x(z) = \frac{0,6z}{(1-0,5z)(z-0,5)}$, tai tos sistemos išėjimo trajektorijos koreliacinis atvaizdas $\Psi_y(z)$ bus lygus $W(z)W(z^{-1})\Psi_x(z)$, t. y.

$$\begin{aligned} \Psi_y(z) &= \frac{3z(1+1,4z)3(z+1,4)0,6z}{(1-0,6z)(1+0,9z)(z-0,6)(z+0,9)(1-0,5z)(z-0,5)} = \\ &= \frac{5,4z^2(1+1,4z)(z+1,4)}{(1-0,6z)(1+0,9z)(z-0,6)(z+0,9)(1-0,5z)(z-0,5)}. \end{aligned}$$

Žinodami stochastinės išėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą $\Psi_y(z)$, galime rasti kovariacinius išėjimo trajektorijos $\{y(kT)\}$ koeficientus $\psi_y(r)$.

Tarkime, jog mes norime surasti stochastinės išėjimo trajektorijos, kurios koreliacinį atvaizdą $\Psi_y(z)$, naudodamiesi formule $\Psi_y(z) = W(z)W(z^{-1})\Psi_x(z)$, ką tik gavome, kovariacinius koeficientus $\psi_y(r)$.

Trupmeną $\Psi_y(z) = \frac{5,4z^2(1+1,4z)(z+1,4)}{(1-0,6z)(1+0,9z)(z-0,6)(z+0,9)(1-0,5z)(z-0,5)}$ suskaidysime į paprastesnių trupmenų $\frac{A(1-\alpha^2)z}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}$ sumą.

Tokią paprastesnės trupmenos formą pasirinkime būtent todėl, kad tuo atveju, kai $\psi_y(r) = A\alpha^r$, kur $|\alpha| < 1$, koreliacinis šios išėjimo trajektorijos atvaizdas yra $\Psi_y(z) = \Psi_y^{(+)}(z) + \Psi_y^{(-)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_y(r) z^r +$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \psi_y(r) (z^{-1})^r - \psi_y(0) = \sum_{r=0}^{\infty} A\alpha^r z^r + \sum_{r=0}^{\infty} A\alpha^r (z^{-1})^r - A\alpha^0 = A \frac{1}{1-\alpha z} + A \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - A = \frac{A(1-\alpha^2)z}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}.$$

Trupmeną $\Psi_y(z)$ mūsų nagrinėjamu atveju suskaidysime į tris trupmenas $\frac{A_i(1-\alpha_i^2)z}{(1-\alpha_i z)(z-\alpha_i)}$, kur $\alpha_1=0,6$; $\alpha_2=0,9$; $\alpha_3=0,5$, o pastovūs koeficientai A_1, A_2, A_3 gali būti surasti neapibrėžtųjų koeficientų metodu iš tapatybės:

$$\frac{5,4z^2(1+1,4z)(z+1,4)}{(1-0,6z)(z-0,6)(1+0,9z)(z+0,9)(1-0,5z)(z-0,5)} \equiv \frac{A_1(1-0,6^2)z}{(1-0,6z)(z-0,6)} + \frac{A_2(1-0,9^2)z}{(1+0,9z)(z+0,9)} +$$

$\frac{A_3(1-0,5^2)}{(1-0,5z)(z-0,5)}$. Tai reiškia, kad mes ieškosime išėjimo trajektorijos kaip trijų paprastesnių trajektorių sumos, kurioje tos paprastesnės trajektorijos turi koreliacinius atvaizdus $\Psi_{y_1}(z) = \frac{A_1(1-0,6^2)z}{(1-0,6z)(z-0,6)}$, $\Psi_{y_2}(z) = \frac{A_2(1-0,9^2)z}{(1+0,9z)(z+0,9)}$, $\Psi_{y_3}(z) = \frac{A_3(1-0,5^2)}{(1-0,5z)(z-0,5)}$, iš kur išplaukia, jog išėjimo trajektorijos kovariacijos koeficientų įverčiai yra $\hat{\psi}_y(r) = \hat{\psi}_{y_1}(r) + \hat{\psi}_{y_2}(r) + \hat{\psi}_{y_3}(r) = A_1(0,6)^r + A_2(-0,9)^r + A_3(0,5)^r$.

Belieka surasti neapibrėžtųjų koeficientų A_1, A_2, A_3 reikšmes. Iš jau minėtos tapatybės gauname tapatybę $A_1 \cdot 0,64z(1+0,9z)(z+0,9)(1-0,5z)(z-0,5) + A_2 \cdot 0,19z \cdot (1-0,6z)(z-0,6)(1-0,5z)(z-0,5) + A_3 \cdot 0,75z(1-0,6z)(z-0,6)(1+0,9z)(z+0,9) = 5,4z^2(1+1,4z)(z+1,4)$, iš kurios išplaukia 5 lygčių sistema su 3 nežinomaisiais.

Dėl dauginamųjų struktūros simetriškumo abiejose tapatybės pusėse koeficientų sumos prie z^5 sutampa su koeficientų sumomis prie z , o taip pat koeficientų sumos prie z^4 sutampa su koeficientų sumomis prie z^2 . Todėl iš 5 lygčių nepriklausomos bus tik 3 lygtys:

$$\begin{cases} -0,288A_1 + 0,057A_2 - 0,405A_3 = 0 \\ 0,1408A_1 - 0,2717A_2 + 0,1035A_3 = 7,56 \\ 0,872A_1 + 0,437A_2 + 1,0362A_3 = 15,984 \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gausime: $A_1 \approx 115,21$, $A_2 \approx 1,70$, $A_3 \approx -81,83$; $\hat{\psi}_y(r) \approx 115,21 \cdot (0,6)^r + 1,7 \cdot (-0,9)^r - 81,83 \cdot (0,5)^r$.

Įstatę į $\hat{\psi}_y(r)$ vietoj r nulį, gausime dispersijos įvertį $\hat{\psi}_y(0) \approx 35,1$. Padaliję autokovariacijos funkcijos $\psi_y(r)$ įvertį $\hat{\psi}_y(r)$ iš dispersijos įverčio $\hat{\psi}_y(0)$, gauname autokoreliacijos funkcijos

$$r_y(r) = \frac{\psi_y(r)}{\psi_y(0)} \text{ įvertį } \hat{r}_y(r) = \frac{\hat{\psi}_y(r)}{\hat{\psi}_y(0)} \approx 3,28 \cdot (0,6)^r + 0,048 \cdot (-0,9)^r - 2,33 \cdot (0,5)^r.$$

Galima išspręsti ir atvirkštinį uždavinį: suradus kokių nors būdu išėjimo trajektorijos kovariacijos koeficientus, sudaryti išėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą, o po to, pasinaudojant nagrinėjamo bloko perdavimo funkcija $W(z)$, rasti įėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą

$$\Psi_x(z) = \frac{\Psi_y(z)}{W(z)W(z^{-1})}, \text{ iš kurio galima gauti ir pačius įėjimo trajektorijos kovariacijos koeficientus.}$$

Pavyzdžiui, žinodami, kad $\Psi_y(z) = \frac{5,4z^2(1+1,4z)(z+1,4)}{(1-0,6z)(1+0,9z)(z-0,6)(z+0,9)(1-0,5z)(z-0,5)}$ ir $W(z) = \frac{3z(1+1,4z)}{(1-0,6z)(1+0,9z)}$, galėtume gauti, jog $W(z^{-1}) = \frac{3z^{-1}(1+1,4z^{-1})}{(1-0,6z^{-1})(1+0,9z^{-1})} = \frac{3(z+1,4)}{(z-0,6)(z+0,9)}$, $\Psi_x(z) = \frac{\Psi_y(z)}{W(z)W(z^{-1})} = \frac{0,6z}{(1-0,5z)(z-0,5)}$, iš kur, pastebėję, jog šiuo atveju $\alpha=0,5$, ir pasinaudoję lygybe $A(1-\alpha^2)z=0,6z$, galėtume rasti kovariacinius įėjimo trajektorijos koeficientus $\psi_x(r) = A\alpha^r = A \cdot (0,5)^r = \frac{0,6}{1-0,5^2} \cdot (0,5)^r = 0,8 \cdot (0,5)^r$ ir jos dispersiją $\psi_x(0)=0,8$. Įėjimo trajektorijos autokoreliacijos funkcija šiuo atveju yra $r_x(r)=(0,5)^r$.

Prie stochastinių procesų ir jų kovariacinių ir koreliacinių funkcijų nagrinėjimo grįšime 1.14.12.3.2. skyrelyje.

1.11.16. Matricinės perdavimo funkcijos

Kai tiesinė sistema turi keletą įėjimų ir išėjimų, tai, kaip jau buvo parodyta 1.11.9. skyrelyje, galima rasti kiekvieno įėjimo i poveikio į išėjimą j dalinę perdavimo funkciją $W_{j,i}(s)$ ir išėjimo trajektorių $y_j(t) = \sum_{i=1}^n y_{j,i}(t)$ sudedamųjų dalių $y_{j,i}(t)$ atvaizdus

$$Y_{j,i}(t)=W_{j,i}(s)X_i(s), \text{ o po to ir išėjimo trajektorijų } y_j(t) \text{ atvaizdus } Y_j(s)=\sum_{i=1}^n Y_{j,i}(s)= \\ =\sum_{i=1}^n W_{j,i}(s)X_i(s).$$

Šią procedūrą galima formalizuoti ir unifikuoti, įvedant **matricinės perdavimo funkcijos sąvoką**. Naudojantis matricinės algebros aparatu, išėjimų atvaizdų $Y_j(s)$ gavimo procedūrą galima aprašyti kompaktiškiau ir tų atvaizdų apskaičiavimą galima lengviau kompiuterizuoti, pritaikant standartinių programų paketus (pavyzdžiui, MAPLE, MATHCAD ir pan.).

Tarkime, kad sistemos, turinčios n įėjimų x_i ir m išėjimų y_j , perėjimų ir išėjimų funkcijos yra tiesinės vektorinės funkcijos:

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{z}(t), \vec{x}(t)) = A\vec{z}(t) + B\vec{x}(t), \quad \vec{y} = \vec{\phi}(\vec{z}, \vec{x}) = C\vec{z} + D\vec{x} \text{ kur}$$

$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t))^T$ – įėjimų reikšmių vektorius stulpelis,

$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_j(t), \dots, y_m(t))^T$ – išėjimų reikšmių vektorius stulpelis,

$\vec{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t), \dots, z_r(t))^T$ – būsenų reikšmių vektorius stulpelis,

A – pastovių koeficientų $a_{k,q}$ matrica, turinti r eilučių ir r stulpelių:

$$A = (a_{k,q}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,r} \\ - & - & - & - \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,r} \end{pmatrix},$$

B – pastovių koeficientų $b_{k,i}$ matrica, turinti r eilučių ir n stulpelių:

$$B = (b_{k,i}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ - & - & - & - \\ b_{r,1} & b_{r,2} & \dots & b_{r,n} \end{pmatrix},$$

C – pastovių koeficientų $c_{j,k}$ matrica, turinti m eilučių ir r stulpelių:

$$C = (c_{j,k}) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,r} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,r} \\ - & - & - & - \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,r} \end{pmatrix},$$

D – pastovių koeficientų $d_{j,i}$ matrica, turinti m eilučių ir n stulpelių:

$$D = (d_{j,i}) = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,n} \\ - & - & - & - \\ d_{m,1} & d_{m,2} & \dots & d_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Įvykdę vektorinių perėjimo ir išėjimo funkcijų Laplaso transformaciją, integruodami kiekvieną tų funkcijų skaliarinę komponentą, gausime:

$$\begin{cases} s\vec{Z}(s) - \vec{z}(0) = A\vec{Z}(s) + B\vec{X}(s), \\ \vec{Y}(s) = C\vec{Z}(s) + D\vec{X}(s) \end{cases}.$$

Pažymėję vienetinę kvadratinę $r \times r$ matricą žymeniu I_r , kur

$$I_r = \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0; & \dots & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 0; & \dots & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 1; & \dots & 0; & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0; & 0; & 0; & \dots & 1; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & \dots & 0; & 1 \end{pmatrix},$$

gausime iš lygybės $s\vec{Z}(s) - A\vec{Z}(s) = B\vec{X}(s) + \vec{z}(0)$ lygybę $(sI_r - A)\vec{Z}(s) = B\vec{X}(s) + \vec{z}(0)$,

$$\text{kur matrica } sI_r - A = \begin{pmatrix} s-a_{1,1}; & -a_{1,2}; & -a_{1,3}; & \dots & -a_{1,r-1}; & -a_{1,r} \\ -a_{2,1}; & s-a_{2,2}; & -a_{2,3}; & \dots & -a_{2,r-1}; & -a_{2,r} \\ -a_{3,1}; & -a_{3,2}; & s-a_{3,3}; & \dots & -a_{3,r-1}; & -a_{3,r} \\ - & - & - & - & - & - \\ -a_{r-1,1}; & -a_{r-1,2}; & -a_{r-1,3}; & \dots & s-a_{r-1,r-1}; & -a_{r-1,r} \\ -a_{r,1}; & -a_{r,2}; & -a_{r,3}; & \dots & -a_{r,r-1}; & s-a_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Kai ši matrica nesusinguliacinė, t. y., kai $s \neq \lambda_i$, kur λ_i – matricos A nuosavi skaičiai, ir kai nagrinėjamoji sistema tenkina pradines nulines sąlygas $\vec{z}(0) = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$, tai $\vec{Z}(s) = (sI_r - A)^{-1} B\vec{X}(s)$, kur $(sI_r - A)^{-1}$ matricos $(sI_r - A)$ atvirkštinė matrica, tenkinanti sąlygą $(sI_r - A)^{-1} (sI_r - A) = I_r$.

Išstatę $\vec{Z}(s)$ į lygybę $\vec{Y}(s) = C\vec{Z}(s) + D\vec{X}(s)$, gauname $\vec{Y}(s) = (sI_r - A)^{-1} \cdot B\vec{X}(s) + D\vec{X}(s)$, iš kur $W(s) = \frac{\vec{Y}(s)}{\vec{X}(s)} = C(sI_r - A)^{-1} B + D$ – matrica, turinti m eilučių ir n stulpelių

ir nepriklausanti nuo įėjimo trajektorijų bei jų pokyčių. Ši matrica ir **vadinama tiesinės sistemos, turinčios n įėjimų ir m išėjimų, matricine perdavimo funkcija**. Ją sudaro dalinės perdavimo funkcijos $W_{j,i}(s)$:

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{1,1}(s); & W_{1,2}(s); & \dots & W_{1,n}(s) \\ W_{2,1}(s); & W_{2,2}(s); & \dots & W_{2,n}(s) \\ - & - & - & - \\ W_{m,1}(s); & W_{m,2}(s); & \dots & W_{m,n}(s) \end{pmatrix}.$$

Sudauginę šią matricą su įėjimo vektoriaus atvaizdu – vektoriumi $\vec{X}(s)$, gausime išėjimo vektoriaus atvaizdą – vektorių $\vec{Y}(s)$, o po to, naudodamiesi atvirkštine transformacija, – ir išėjimo trajektorijų vektorių $\vec{y}(t)$.

Tuo atveju, kai mus domina tik išėjimo trajektorijų $y(t)$ vektorius $\vec{y}(t)$ ir nedomina dalinės perdavimo funkcijos, vietoje matricos $W(s) = C(sI_r - A)^{-1} B + D$ galima apsiriboti matricos $C(sI_r - A)^{-1} B$ radimu ir $\vec{y}(t)$ apskaičiuoti, naudojantis formule $\vec{y}(t) = L[C(sI_r - A)^{-1} B\vec{X}(s)]^{-1} + D\vec{x}(t)$.

Pailiustruosiu matricinės perdavimo funkcijos radimo algoritmą ir išėjimo trajektorijų vektoriaus atvaizdo $\vec{Y}(s)$ ir paties vektoriaus $\vec{y}(t)$ radimą konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime, kad $n=3$ ir $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$; $m=2$ ir $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$; $r=2$ ir $\vec{z} = (z_1, z_2)^T$, $\vec{z}(0) = (0, 0)$;

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = A\vec{z}(t) + B\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1; & 2 \\ 2; & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1; & 2; & 3 \\ 3; & 2; & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \text{ t. y.}$$

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = z_1(t) + 2z_2(t) + x_1(t) + 2x_2(t) + 3x_3(t), \quad \frac{dz_2(t)}{dt} = 2z_1(t) + z_2(t) + 3x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t);$$

$$\vec{y} = C\vec{z}(t) + D\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1; & -1 \\ -1; & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1; & 2; & 1 \\ 2; & 1; & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

t. y. $y_1 = z_1 - z_2 + x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = -z_1 + 2z_2 + 2x_1 + x_2 + 2x_3$.

$$\begin{aligned} \text{Tuomet } W(s) &= C(sI_r - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1; & -1 \\ -1; & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} s-1; & -2 \\ -2; & s-1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1; & 2; & 3 \\ 3; & 2; & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1; & 2; & 1 \\ 2; & 1; & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1; & -1 \\ -1; & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)^2 - 4} \cdot \begin{pmatrix} s-1; & 2 \\ 2; & s-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1; & 2; & 3 \\ 3; & 2; & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1; & 2; & 1 \\ 2; & 1; & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \cdot \begin{pmatrix} 1; & -1 \\ -1; & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+5; & 2s+2; & 3s-1 \\ 3s-1; & 2s+2; & s+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1; & 2; & 1 \\ 2; & 1; & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \cdot \begin{pmatrix} -2s+6; & 0; & 2s-6 \\ 5s-7; & 2s+2; & -s+11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1; & 2; & 1 \\ 2; & 1; & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 - 2s - 3}; & 2; & \frac{s^2 - 9}{s^2 - 2s - 3} \\ \frac{2s^2 + s - 13}{s^2 - 2s - 3}; & \frac{s^2 - 1}{s^2 - 2s - 3}; & \frac{2s^2 - 5s + 5}{s^2 - 2s - 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1}; & 2; & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{2s^2 + s - 13}{(s+1)(s-3)}; & \frac{s-1}{s-3}; & \frac{2s^2 - 5s + 5}{(s+1)(s-3)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pereidami nuo lygybės $\vec{Y}(s) = W(s)\vec{X}(s)$ vektorinės formos prie skaliarinės matricinės formos,

gauname lygybę: $\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1}; & 2; & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{2s^2 + s - 13}{(s+1)(s-3)}; & \frac{s-1}{s-3}; & \frac{2s^2 - 5s + 5}{(s+1)(s-3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix}$, iš kurios išplaukia

skaliarinės lygybės:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{s-1}{s+1} X_1(s) + 2X_2(s) + \frac{s+3}{s+1} X_3(s) = \left(1 - \frac{2}{s+1}\right) X_1(s) + 2X_2(s) + \left(1 + \frac{2}{s+1}\right) X_3(s) = X_1(s) + \\ &+ 2X_2(s) + X_3(s) - \frac{2}{s+1} X_1(s) + \frac{2}{s+1} X_3(s); \quad Y_2(s) = \frac{2s^2 + s - 13}{s^2 - 2s - 3} X_1(s) + \frac{s-1}{s-3} X_2(s) + \frac{2s^2 - 5s + 5}{s^2 - 2s - 3} X_3(s) = \\ &= \left(2 + \frac{5s-7}{(s+1)(s-3)}\right) X_1(s) + \left(1 + \frac{2}{s-3}\right) X_2(s) + \left(2 - \frac{s-11}{(s+1)(s-3)}\right) X_3(s). \end{aligned}$$

Ivykdę atvirkštinę Laplaso transformaciją, gausime:

$$y_1(t) = L \left[-\frac{2}{s+1} X_1(s) + \frac{2}{s+1} X_2(s) \right]^{-1} + x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t),$$

$$y_2(t) = L \left[\frac{5s-7}{(s+1)(s-3)} X_1(s) + \frac{2}{s-3} X_2(s) - \frac{s-11}{(s+1)(s-3)} X_3(s) \right]^{-1} + 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t).$$

Tą patį rezultatą būtume gavę greičiau, pasinaudodami formule

$$\vec{y}(t) = L[C(sI_r - A)^{-1}B\vec{x}(s)]^{-1} + D\vec{x}(t).$$

Matricą $C(sI_k - A)^{-1}B$ mes jau esame gavę, skaičiuodami matricą $W(s)$:

$$C(sI_k - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \cdot \begin{pmatrix} -2s+6; & 0; & 2s-6 \\ 5s-7; & 2s+2; & -s+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{s+1}; & 0; & \frac{2}{s+1} \\ \frac{5s-7}{(s+1)(s-3)}; & \frac{2}{s-3}; & \frac{-s+11}{(s+1)(s-3)} \end{pmatrix}, \text{ iš kur iš}$$

$$\text{karto gauname } \vec{y}(t) = L \left[\begin{pmatrix} \frac{-2}{s+1}; & 0; & \frac{2}{s+1} \\ \frac{5s-7}{(s+1)(s-3)}; & \frac{2}{s-3}; & \frac{-s+11}{(s+1)(s-3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix} \right]^{-1} + D\vec{x}(t).$$

Žinoma, tą patį perdavimo rezultatą buvo galima gauti ir nesinaudojant matricine perdavimo funkcija.

Iš skaliarinių perdavimo funkcijų, pereinant prie atvaizdų ir atsižvelgiant, kad $\vec{z}(0) = \vec{0} = (0,0)$, galima gauti algebrinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} sZ_1(s) = Z_1(s) + 2Z_2(s) + X_1(s) + 2X_2(s) + 3X_3(s), \\ sZ_2(s) = 2Z_1(s) + Z_2(s) + 3X_1(s) + 2X_2(s) + X_3(s). \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą $Z_1(s)$ ir $Z_2(s)$ atžvilgiu, gauname:

$$Z_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2 - 4} [(s+5)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (3s-1)X_3(s)],$$

$$Z_2(s) = \frac{1}{(s-1)^2 - 4} [(3s-1)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (s+5)X_3(s)].$$

Iš skaliarinių išėjimo funkcijų, pereinami prie jų atvaizdų, gauname formules: $Y_1(s) = Z_1(s) - Z_2(s) + X_1(s) + 2X_2(s) + X_3(s)$, $Y_2(s) = -Z_1(s) + 2Z_2(s) + 2X_1(s) + X_2(s) + 2X_3(s)$, į kurias, įstatę gautas $Z_1(s)$ ir $Z_2(s)$ išraiškas, surandame atvaizdų $Y_1(s)$ ir $Y_2(s)$ priklausomybę nuo $X_1(s)$, $X_2(s)$, $X_3(s)$:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{(s+5)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (3s-1)X_3(s)}{s^2 - 2s - 3} - \frac{(3s-1)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (s+5)X_3(s)}{s^2 - 2s - 3} + X_1(s) + \\ &+ 2X_2(s) + X_3(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{(s+1)(s-3)} X_1(s) + 2X_2(s) + \frac{s^2 - 9}{(s+1)(s-3)} X_3(s) = \frac{s-1}{s+1} X_1(s) + 2X_2(s) + \frac{s+3}{s+1} X_3(s); \\ Y_2(s) &= -\frac{(s+5)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (3s-1)X_3(s)}{s^2 - 2s - 3} + 2\frac{(3s-1)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (s+5)X_3(s)}{s^2 - 2s - 3} + \\ &+ 2X_1(s) + X_2(s) + 2X_3(s) = \frac{(5s-7)X_1(s) + (2s+2)X_2(s) + (-s+11)X_3(s)}{s^2 - 2s - 3} + 2X_1(s) + X_2(s) + 2X_3(s) = \\ &= \frac{2s^2 + s - 13}{(s+1)(s-3)} X_1(s) + \frac{s-1}{s-3} X_2(s) + \frac{2s^2 - 5s + 5}{(s+1)(s-3)} X_3(s). \end{aligned}$$

Naudojantis matricine perdavimo funkcija, lygčių sistemos sprendimas ir lygybių pertvarkymai, įstatant į jas gautus sprendinius, pakeičiami standartiniais veiksmiais su matricomis, kuriuos patogiu atlikti kompiuteriu.

1.11.17. Perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodų vaidmuo sistemoje, tų metodų taikymo apribojimai

Perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodai gana gerai išvystyti ir plačiai taikomi. Ypatingai plačiai jie taikomi automatinio valdymo sistemų projektavime ir jų funkcionavimo nagrinėjime. Tačiau reikia pastebėti, jog **šių metodų taikymo sfera potencialiai yra siauresnė, negu tiesioginio išorinių ir vidinių matematinių modelių taikymo sfera**, nes perdavimo funkcijų metodą galima taikyti tik tada, kai tenkinamos dvi svarbios sąlygos.

Pirma, tam tikrus apribojimus iššaukia reikalavimas **tenkinti pradines nulines sąlygas**, o tai visiškai nebūtina, taikant tiesioginio išorinių ir vidinių modelių panaudojimo metodą. Žinoma, šį reikalavimą, taikant perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodus, galima „apeiti“, tačiau tuomet formulės tampa gremėzdiškesnės ir sumažėja perdavimo funkcijų bei perėjimo charakteristikų metodų patogumas.

Antra, ir tai svarbiausia, **perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodai remiasi procesų tiesiškumo savybe**, o juk ne visi procesai yra tiesiški.

Pavyzdžiui, kaip jau buvo parodyta 1.11.8. skyrelyje, priklausomybė tarp hidrodinaminės sistemos išėjimo ir įėjimo trajektorijų, esant fiksuotoms pradinėms sąlygoms, negali būti išreikšta tiesine diferencialine lygtimi, ir santykis tarp tų trajektorijų atvaizdų keičiasi, keičiantis įėjimo trajektorijoms. Todėl, suradę to santykio reikšmę kokiai nors įėjimo ir ją atitinkančiai išėjimo trajektorijai, mes negalime tuo pasinaudoti kitos išėjimo trajektorijos, atitinkančios kitą įėjimo trajektoriją, apskaičiavimui.

Kitas pavyzdys – daugybės blokas, vykdamas operaciją $y(t)=x_1(t)x_2(t)$, kur $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ – nepriklausomos dviejų to bloko įėjimo trajektorijos, o $y(t)$ – išėjimo trajektorija, vaizduojanti dydžių $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ sandaugą. Daugybės blokui taip pat negali egzistuoti pastovi charakteristika lygi išėjimo ir įėjimo atvaizdų santykiui. Ir tokių pavyzdžių galima parinkti labai daug. Juk sistemotyra ypač domina kaip tik netiesinės sistemos.

Tuo tarpu išorinių ir vidinių matematinių modelių ir eksperimentų su jais metodą galima taikyti bet kokiems procesams: tiesiniams ir netiesiniams, tolydiems ir diskretiems, o taip pat ir mišriems, aprašomiems analizinėmis ir loginėmis funkcijomis, lentelėmis ir grafikais, determinuotiems ir stochastiniams, tenkinantiems bet kokias pradines (nebūtinai nulines) ir kraštines (pavyzdžiui, kai matematiniai modeliai aprašomi diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistemomis) sąlygas. Be to, išorinių ir vidinių matematinių modelių metodas vienodai patogus tiek tikslųjų, tiek ir artutinių skaičiavimo metodų taikymui, kas labai svarbu modeliuojant ir analizuojant sudėtingų sistemų funkcionavimą.

Iš to, kas čia pasakyta, nereikėtų perdėm skeptiškai vertinti perdavimo funkcijų ir perėjimo bei amplitudinių dažnuminių ir fazinių dažnuminių charakteristikų metodų. Tais atvejais, kai tuos metodus galima taikyti, jie leidžia žymiai paprasčiau rasti ir analizuoti sistemų funkcionavimo trajektorijas, o taip pat spręsti visą eilę kitų uždavinių (įdomių ir naudingų šių metodų taikymo pavyzdžių gausu literatūroje: žiūr., pavyzdžiui, knygas [114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125]). Labai svarbu, jog **netiesiniai modeliai gali būti aproksimuojami tiesiniais modeliais**.

Lygindami objektų išorinius matematinius modelius ir iš jų gaunamas perdavimo funkcijas, kada tie modeliai yra tiesiniai ir santykis $\frac{\bar{Y}(s)}{\bar{X}(s)}$, nepriklausydamas

nuo $\bar{x}(t)$, tampa paties nagrinėjamo objekto charakteristika, galime pastebėti įdomią savybę: **iš objekto tiesinio išorinio matematinio modelio jo perdavimo funkcija visada gaunama vienareikšmiškai, o turint perdavimo funkciją ir įvairiai pasirenkant tai, ką laikysime objekto būseną, galima gauti skirtingus išorinius matematinius modelius**. Kitaip tariant, atvirkštinis perėjimas nuo perdavimo funkcijos prie išorinio matematinio modelio ne visada yra vienareikšmiškas, nes iš galimų skirtingų išorinių to paties objekto matematinių modelių galima gauti tik vieną ir tą pačią perdavimo funkciją.

Pavyzdžiui, iš diferencijavimo grandelės perėjimo funkcijos $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t)-z(t)}{T}$ ir išėjimo funkcijos $y=x-z$, eliminuojant būseną z , vienareikšmiškai

išplaukia diferencialinė lygtis $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{y(t)}{T}$, iš kurios vienareikšmiškai gaunama

perdavimo funkcija $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{T_s}{1+T_s}$. Tuo tarpu atvirkštinis perėjimas nuo

perdavimo funkcijos prie išorinio matematinio modelio ir išėjimo funkcijų nėra vienareikšmis: skirtingai pasirinkdami dydžius, kuriuos laikysime būsenos koordinatėmis, o taip pat skirtingai pasirinkdami tų dydžių matavimo vienetus bei matavimo kryptis, mes galime gauti perėjimo ir išėjimo funkcijas, kurios skiriasi savo forma.

Pavyzdžiui, nesunku įsitikinti, kad matematinį modelį, kuriame perėjimo funkcija yra $\frac{dz(t)}{dt} = -x(t) - \frac{z(t)}{T}$ ir išėjimo funkcija yra $y = x + \frac{z}{T}$, atitinka ta pati perdavimo funkcija $W(s) = \frac{T_s}{1+T_s}$.

Tačiau šią perdavimo funkcijų savybę nederėtų laikyti perdavimo funkcijų metodo trūkumu. Galime teigti net atvirkščiai: perdavimo funkcija charakterizuoja tokią nagrinėjamo objekto savybę, kuri nepriklauso ne tik nuo įėjimo trajektorijos $\bar{x}(t)$, bet ir nuo to, kaip bus pasirenkama ir matuojama objekto būseną $\bar{z}(t)$ bei kaip ji keisis, priklausomai nuo įėjimo $\bar{x}(t)$ ir nuo to, kokia ta būseną buvo iki tol. Tai reiškia, kad perdavimo funkcija yra svarbi objekto, turinčio tiesinį matematinį modelį, **invariantė**, glaustai charakterizuojanti pagrindinių to objekto savybių visumą. Gaila tik, kad **tokios invariantės egzistuoja ne visoms, o tik tiesinėms sistemoms**. Tai ir yra pagrindinis perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodų taikymo apribojimas.

1.11. skyriaus santrauka

1.11. skyriaus pagrindinė paskirtis – supažindinti studentus su **sistemų išoriniu bei vidiniu funkcionavimu ir su to funkcionavimo matematinio aprašymo bei sisteminės analizės metodais**.

Sistemos **išorinį funkcionavimą** vaizduoja jos **įėjimų, išėjimų ir fazinės trajektorijos**, matematiškai aprašančios sistemos įėjimo, išėjimo ir būsenos vektorių koordinačių reikšmių priklausomybę nuo laiko.

Sistemos **vidinį funkcionavimą** vaizduoja sistemos elementų bei jos posistemų įėjimų, išėjimų ir fazinės trajektorijos, matematiškai aprašančios sistemoje vykstančius procesus.

Sistemos įėjimų trajektorijos nustatomos **pasyvių eksperimentų** metu, t. y. stebint egzistuojančios sistemos funkcionavimą, arba gali būti pasirenkamos, atliekant **aktyvius eksperimentus** su sistema.

Sistemos išėjimų ir fazinės trajektorijos taip pat gali būti nustatomos eksperimentaliai, tačiau, turint sistemos deskriptinį ar normatyvinį modelį bei žinant sistemos pradinę būseną ir jos įėjimų trajektorijas, jos gali būti apskaičiuotos, t. y. išvestos teoriškai.

Šiame skyriuje parodytas **fazinių ir išėjimo trajektorijų apskaičiavimas** diferencijavimo grandelei, hidrodinaminei sistemai, baigtiniam determinuotam automatui ir gamybinės įmonės medžiagų sandėliui.

Sistemos vidinį funkcionavimą vaizduojančios tos sistemos elementų trajektorijos taip pat gali būti nustatomos pasyviųjų ir aktyviųjų eksperimentų metu bei gali būti apskaičiuotos, turint sistemos vidinį matematinį modelį ir žinant jos pradinę būseną bei jos įėjimų trajektorijas.

Šiame skyriuje parodytas sistemos elementų įėjimų, išėjimų ir fazinių trajektorijų apskaičiavimas diferencijavimo grandelei, medžiagų sandėliui, baigtiniam determinuotam automatui ir dvejetainiam nuoseklaus veikimo sumatoriui.

Nagrinėjant determinuotų objektų išorinį funkcionavimą, nesunku įsitikinti, jog **determinuoto objekto išėjimo trajektorija, esant fiksuotai to objekto pradinei būsenai, vienareikšmiškai priklauso nuo objekto įėjimo trajektorijos**.

Kai determinuotas objektas yra dar ir tiesinis, o jo pradinė būseną $z(0)$ yra lygi 0, tai tą priklausomybę pavyksta išreikšti matematiškai kaip objekto išėjimo ir įėjimo trajektorijų tam tikrų integralų santykį, vadinamą tiesinio objekto perdavimo funkcija.

Kad studentai išėjimo trajektorijų apskaičiavimui galėtų naudotis **perdavimo funkcijų metodu**, jie supažindinami su **operacinio skaičiavimo** pagrindais – su **Laplaso bei Hevisaido transformacijomis** ir tų transformacijų savybėmis.

Laplaso transformacija vadinamas kokios nors tolydžios ar dalimis tolydžios funkcijos $f(t)$, galinčios didėti ne greičiau negu eksponentiškai, Laplaso atvaizdo $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ gavimas.

Funkcija $f(t)$ vadinama to **atvaizdo originalu** arba **pirmavaizdžiu**.

Analogiškai gaunamas tos funkcijos Hevisaido atvaizdas $H[f(t)] = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$.

Laplaso ir Hevisaido transformacijos turi visą eilę svarbių ir naudingų savybių, leidžiančių ne tik formalizuoti tiesinių determinuotų objektų išėjimo trajektorijų apskaičiavimą, bet ir **suvesti tiesinių diferencialinių, integralinių bei integrodiferencialinių lygčių bei jų sistemų sprendimą į algebrinių lygčių bei jų sistemų sprendimą**.

Svarbiausios tų transformacijų savybės yra šios:

$$1) \text{ tiesiškumo savybė: } L\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n a_k L[f_k(t)], \quad H\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n a_k H[f_k(t)];$$

$$2) \text{ originalo diferencijavimo savybė: } L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0), \quad H[f'(t)] = pH[f(t)] - pf(0);$$

iš šių formulų išplaukia apibendrinančios formulės:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$H[f^{(n)}(t)] = p^n H[f(t)] - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - p^{n-3}f''(0) - \dots - p^2f^{(n-2)}(0) - pf^{(n-1)}(0);$$

kai funkcija – originalas $f(t)$ ir jos išvestinės tenkina nulines pradines sąlygas $f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$, tai originalo diferencijavimo formulės supaprastėja: $L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)]$, $H[f^{(n)}(t)] = p^n H[f(t)]$;

$$3) \text{ originalo integravimo savybė: } L\left[\int_0^t f(z)dz\right] = \frac{1}{s}L[f(t)], \quad H\left[\int_0^t f(z)dz\right] = \frac{1}{p}H[f(t)];$$

$$4) \text{ sąsūkos savybė: } L\left[\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau\right] = L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau)d\tau\right] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)],$$

$$H\left[\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau\right] = H\left[\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}H[f_1(t)] \cdot H[f_2(t)];$$

$$5) \text{ vėlinimo savybė: } L[f(t-\tau) \cdot u(t-\tau)] = e^{-s\tau}L[f(t)], \quad H[f(t-\tau) \cdot u(t-\tau)] = e^{-p\tau}H[f(t)].$$

Kai determinuotas objektas yra tiesinis, t. y. kai jo perėjimo ir išėjimo funkcijos yra tiesinės:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = Ax(t) + Bz(t), \\ y(t) = Cx(t) + Dz(t), \end{cases} \text{ kur } A, B, C, D \text{ yra konstantos, tai tuo atveju, kai pradinė būsena } z(0) \text{ yra lygi } 0,$$

$$\text{pereidami prie Laplaso atvaizdų, gauname: } \begin{cases} sL[z(t)] = AL[x(t)] + BL[z(t)], \\ L[y(t)] = CL[x(t)] + DL[z(t)]. \end{cases}$$

$$\text{Iš šios algebrinių lygčių sistemos gauname, jog } \frac{L[y(t)]}{L[x(t)]} = \frac{Cs + DA - BC}{s - B}, \text{ t. y. gauname jog}$$

tiesinio determinuoto objekto išėjimo ir įėjimo atvaizdų santykis yra argumento s funkcija, priklausanti tik nuo objekto išorinio matematinio modelio konstantų A, B, C, D ir todėl esanti vienoda visoms galimoms to objekto įėjimo ir tą įėjimą atitinkančioms išėjimo trajektorijų poroms.

Ta funkcija $\frac{L[y(t)]}{L[x(t)]}$ vadinama **objekto perdavimo funkcija** ir žymima $W(s)$. Ją galima žymėti

$$\text{ir } W(p), \text{ nes } W(p) = \frac{H[y(t)]}{H[x(t)]} = \frac{Cp + DA - BC}{p - B} \text{ skiriasi nuo } W(s) \text{ tik tuo, kad joje argumento žymėjimas}$$

raide s pakeistas į žymėjimą raide p .

Iš formulės $\frac{L[y(t)]}{L[x(t)]} = W(s)$ išplaukia formulė $L[y(t)] = W(s)L[x(t)]$, leidžianti labai paprastai

gauti išėjimo trajektorijos $y(t)$ atvaizdą $L[y(t)]$ (arba $H[y(t)] = W(p)H[x(t)]$), atitinkantį bet kurią objekto įėjimo trajektoriją $x(t)$.

Tačiau norint gauti ne tik išėjimo trajektorijos atvaizdą, bet ir pačią išėjimo trajektoriją, reikia mokėti atlikti **atvirkštinę Laplaso (arba Hevisaido) transformaciją**, t. y. mokėti rasti funkciją – originalą, atitinkančią duotąjį (gautąjį) jos atvaizdą.

Šią atvirkštinės transformacijos procedūrą, kai atvaizdai yra elementarūs bei tipiniai, galima atlikti **naudojantis tiesioginės transformacijos formulėmis atvirkštine tvarka**, panašiai kaip gaunamos kai kurios integravimo formulės, naudojantis diferencijavimo formulėmis.

Kai atvaizdai yra sudėtingi, galima juos skaidyti į elementarių atvaizdų sumas, naudojantis **neapibrėžtųjų koeficientų metodu** bei **Hevisaido teoremomis**.

Tačiau ne visada šių metodų pakanka. Pavyzdžiui, kai ieškomo originalo $f(t)$ Laplaso atvaizdas

$L[f(t)]$ yra tokia funkcija $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$, kurios vardiklis $F_2(s) = \prod_{k=1}^r (s - s_k)^{m_k}$ yra toks, jog lygtis $F_2(s) = 0$

turi kartotinių šaknų $s = s_k$ (t. y. tokių šaknų, kurių eilė $m_k > 1$), tai tenka naudotis **reziduumų formule**.

Įrodyta, jog tuo atveju, kai $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, funkciją – originalą, žinant jos atvaizdą $F(s)$, galima

apskaičiuoti naudojantis formule: $f(t) = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(s)(s - s_k)^{m_k}}{F_2(s)} e^{st} \right] \right\}$.

Reziduumų formulę galima taikyti ir Hevisaido transformacijai:

$f(t) = \sum_{k=0}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(p)(p - p_k)^{m_k}}{p F_2(p)} e^{pt} \right] \right\}$, kur $m_0 = 1$, $p_0 = 0$, o p_k , kai $k = 1, 2, \dots, r$, yra lygties

$F_2(p) = 0$ šaknys, tarp kurių gali būti ir kartotinių, nes $m_k \geq 1$. Svarbu tik, kad $H[f(t)] = F(p)$ tenkintų sąlygą

$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0$.

Tačiau ir reziduumų formulės aprėpia ne visus galimus atvejus. Pavyzdžiui, kai atvaizdas $F(p)$ turi **šakojimosi taškų**, tai apskaičiuodami $f(t)$ turime iš aukščiau pateiktos reziduumų sumos atimti sumą kontūrinių integralų, gaunamų apeinant šakojimosi taškus taip, kad jie liktų tų kontūrų išorėje.

Kaip jau buvo minėta, operacinis skaičiavimas taikomas ne tik perdavimo funkcijų ir sistemų išėjimo trajektorijų apskaičiavimui, bet ir tiesinių diferencialinių, integralinių ir integrodiferencialinių lygčių ir jų sistemų sprendimo suvedimui į algebrinių lygčių ir jų sistemų sprendimą.

Šiai temai skiriamas specialus 1.11.7. skyrelis, kuriame pateikti tokių lygčių ir jų sistemų sprendimo pavyzdžiai. Išnagrinėtas ir toks pavyzdys, kuriame **įėjimo trajektorija $x(t)$ pateikiama ne analizinėje, o grafinėje formoje**, dėl ko tenka atsižvelgti į vėlinimo faktą ir naudotis atitinkamomis formulėmis, išvestomis 1.11.5. skyrelyje, skirtame operacinio skaičiavimo įvadui.

1.11.8. skyrelyje, naudojantis įėjimo ir išėjimo trajektorijų atvaizdų sąvokomis, įvedama **perdavimo funkcijos sąvoka** ir apskaičiuojamos tokių tipinių blokų kaip diferencijavimo grandelės, integravimo grandelės, elektromagnetinių virpesių kontūro, idealaus stiprintuvo, idealaus integratoriaus, idealaus diferenciatoriaus, lėto reagavimo grandies bei forsavimo grandies perdavimo funkcijos, nagrinėjamas svorinės sumos gavimo blokas.

1.11.9. skyrelyje nagrinėjamos **perdavimo funkcijų savybės**, leidžiančios rasti nuosekliai ir lygiagrečiai sujungtų blokų bei blokų su neigiamais ir teigiamais grįžtamaisiais ryšiais perdavimo funkcijas, o taip pat dalines perdavimo funkcijas schemose, turinčiose kelis įėjimus ir kelis išėjimus.

Išvestos formulės $W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s)$, $W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$, $W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$,

$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}$ gali būti taikomos sudėtingų sistemų perdavimo funkcijų apskaičiavime ir sudėtingų sistemų projektavime.

1.11.10. skyrelyje perdavimo funkcijų metodas taikomas **elektromagnetinių virpesių kontūro funkcionavimo sisteminiai analizei**. Tos analizės metu nustatomos sąlygos, kurioms esant kontūre vyksta **monotoniniai procesai, gęstantys harmoniniai nuosavi svyravimai, priverstiniai svyravimai ir rezonansas**, apskaičiuojamos kontūre vykstančių procesų charakteristikos. Išnagrinėtas pavyzdys gali būti taikomas ne tik elektromagnetiniams, bet ir visiems bet kurios prigimties svyravimams, nes jie aprašomi izomorfiškais formulėmis.

1.11.11. ir 1.11.12. skyreliuose aprašomas iš perdavimo funkcijų metodo išplaukiantis **perėjimo charakteristikų metodas**, įvedamos impulsinės perėjimo charakteristikos $w(t)$ ir perėjimo charakteristikos $h(t)$ sąvokos ir išvedamos Diuamelio integralų formulės.

Sistemos **impulsinė perėjimo charakteristika $w(t)$** vadinamas tos sistemos atsakas (sistemos išėjimas) į impulsinį poveikį (sistemos įėjimą) $\delta(t)=u'(t)$, kai sistemos pradinė būsena $z(0)=0$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, jog **impulsinės perėjimo charakteristikos Laplaso atvaizdas yra tos sistemos**

perdavimo funkcija, t. y., jog $L[w(t)]=W(s)=\frac{L[y(t)]}{L[x(t)]}$.

Sistemos **perėjimo charakteristika $h(t)$** vadinamas tos sistemos atsakas (sistemos išėjimas) į įėjimą $x(t)$, lygų vienetiniam šuoliukui $u(t)$ tuo atveju, kai sistemos pradinė būsena $z(0)=0$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, jog **perėjimo charakteristikos $h(t)$ Hevisaido atvaizdas yra lygus sistemos perdavimo funkcijai**, t. y., jog $H[h(t)]=W(p)$.

Tarp perėjimo charakteristikų $w(t)$ ir $h(t)$ egzistuoja sąryšis, kurį matematiškai išreiškia formulė $w(t)=h'(t)+h(0)\delta(t)$.

Naudojantis perėjimo charakteristikų metodu išvedama **bendroji Diuamelio integralo formulė** $y(t)=x(t)h(0)+\int_0^t x(\tau)h'(t-\tau)d\tau=x(0)h(t)+\int_0^t h(\tau)x'(t-\tau)d\tau$ bei **dalinių Diuamelio integralų**

formulės: $y(t)=\int_0^t x(t-\tau)w(\tau)d\tau=\int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau$ ir $y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$,

galiojančios tuo atveju, kai pradinės sąlygos yra nulinės.

Diuamelio integralai leidžia apskaičiuoti sistemos išėjimo trajektoriją $y(t)$, žinant jos įėjimo trajektoriją $x(t)$ ir jos perėjimo charakteristiką, tiesiogiai, nesinaudojant Laplaso ar Hevisaido transformacijomis. Tai reikšmingai palengvina išėjimo trajektorijos $y(t)$ apskaičiavimą, nes leidžia išvengti atvirkštinės transformacijos, t. y. funkcijos – originalo, atitinkančios duotąjį atvaizdą, radimo operacijos, kuri neretai būna gana sudėtinga.

1.11.11. skyrelyje įrodoma, jog tuo atveju, kai sistemos įėjimas $x(t)$ yra harmoniniai svyravimai, t. y., kai $x(t)=A_x \sin(\omega t + \varphi_x)$, $x(t)=A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$ arba $x(t)=A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)}$, tai sistemos išėjimo trajektorija $y(t)$ susideda iš dviejų dalių: $y(t)=\bar{y}(t)-\tilde{y}(t)$, kur $\bar{y}(t)=W(i\omega)x(t)$ a – **nusistovėję**

priverstiniai svyravimai, o $\tilde{y}(t)=x(t)\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau$ – **silpstantis pereinamasis procesas**, kuris

ilgainiui užgستا. Todėl po kurio laiko sistemos išėjimo trajektoriją sudaro nusistovėję priverstiniai svyravimai $\bar{y}=A_y e^{i(\omega t + \varphi_y)}$. Tuos svyravimus (jų amplitudę A_y , ciklinį dažnį ω ir pradinę fazę φ_y) apskaičiuoti gana paprasta. Tereikia sudauginti du kompleksinius dydžius: įėjimo trajektoriją $x(t)=A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)}$ ir sistemos **amplitudinę – fazinę charakteristiką $W(i\omega)$** .

Kadangi dviejų kompleksinių skaičių sandaugos modulis lygus dauginamųjų modulių sandaugai, o sandaugos argumentas – dauginamųjų argumentų sumai, tai $A_y=A_x \cdot |W(i\omega)|=A_x \cdot \sqrt{[\operatorname{Re} W(i\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(i\omega)]^2}$, o $\varphi_y=\varphi_x + \psi=\varphi_x + \arg W(i\omega)=\varphi_x + \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}$.

Amplitudinės – fazinės charakteristikos $W(i\omega)$ modulis $|W(i\omega)|$ vadinamas **amplitudine dažnine charakteristika**, o jos argumentas $\arg W(i\omega)$ – **fazine dažnine charakteristika**. 1.11.11. skyrelyje pateiktas šių formulių išvedimas ir šių charakteristikų apskaičiavimo pavyzdys. 1.11.12. skyrelyje parodyta, jog perėjimo charakteristikų metodą galima taikyti ne tik tolydžioms, bet ir „laiptuotoms“ funkcijoms.

1.11.13. skyrelyje įvedama **z – transformacijos sąvoka** ir aprašomas **perdavimo funkcijų metodo taikymas diskrečioms trajektorijoms**.

Pavyzdžiui, jei diskrečią įėjimo trajektoriją sudaro to įėjimo $x(t)$ momentinių reikšmių seka – skaičiai $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(kT), \dots$, tai įėjimo trajektorijos z – transformacija $X(z)$ – trajektorijos $x(t)$ atvaizdas – yra kompleksinio kintamojo $z=e^{-sT}$ daugianaris $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k$. Tai žymima taip:

$\{x(kT)\}_{k=0}^{\infty} \longleftrightarrow X(z)$, kur $\{x(kT)\}_{k=0}^{\infty}$ – skaičių seka $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(kT), \dots$, $\longleftrightarrow$ – z -

transformacijos ženklas, $X(z)$ – skaičių sekos $\{x(kT)\}_{k=0}^{\infty}$ z-atvaizdas $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}$.

1.11.13. skyrelyje pateikti z – atvaizdų sudarymo pavyzdžiai ir aprašytos z – transformacijos savybės, kurios yra analogiškos Laplaso ir Hevisaido transformacijų savybėms, tik diferencijavimas pakeičiamas skirtumo apskaičiavimu, o integravimas – sumavimu.

Analogiškai įvedama ir **perdavimo funkcija diskrečioms sistemoms**: $W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k}, \text{ pateikti perdavimo funkcijų } W(z) \text{ apskaičiavimo ir jų taikymo pavyzdžiai, taip pat}$$

atvirkštinės z-transformacijos pavyzdžiai.

Parodyta, kad **perdavimo funkcijos $W(z)$ turi tas pačias savybes kaip ir perdavimo funkcijos $W(s)$ ir $W(p)$** : jungiant blokus nuosekliai, perdavimo funkcijos dauginamos, jungiant lygiagrečiai – sudedamos ir t. t.

1.11.14. skyrelyje parodoma, kad tarp z-transformacijos ir Laplaso transformacijos egzistuoja ne tik 1.11.13. skyrelyje aprašytoji analogija, bet ir tiesioginis ryšys, leidžiantis gauti iš Laplaso atvaizdų z-atvaizdus ir atvirkščiai: nuo diskrečių trajektorijų ir perdavimo funkcijų pereiti prie tolydžių (ar bent dalimis tolydžių) trajektorijų ir perdavimo funkcijų.

Algoritmizuojant perėjimą nuo Laplaso atvaizdų prie z – atvaizdų įsivedama **impulsinės trajektorijos sąvoka**.

Pavyzdžiui, **impulsinė įėjimo trajektorija** $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ sudaroma iš tolydžios įėjimo trajektorijos $x(t)$ reikšmių taškuose $t=kT$, t. y. iš diskrečios trajektorijos reikšmių sekos $\{x(kT)\}$, surišant tas reikšmes funkcija $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$.

Analogiškai sudaroma ir **impulsinė išėjimo trajektorija** $y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT)$.

Nagrinėjant impulsines trajektorijas, įrodoma, jog trajektorijos $x^*(t)$ Laplaso atvaizdas $L[x^*(t)]$, kuris pažymimas kaip $X^*(s)$, yra lygus $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}$.

Taip pat įrodoma, jog bloko, turinčio perdavimo funkciją $W(s)$ ir įėjimą $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$, išėjimas $y(t)$ yra lygus $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)w(t-kT)$, kur $w(t)$ yra atvaizdo $W(s)$ pirmavaizdis (originalas).

$$\text{Iš formulės } y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot w(t-kT) \text{ gaunama, jog } y(kT) = \sum_{i=0}^k x(iT) \cdot w[(k-i)T] \text{ ir}$$

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT) \cdot w[(k-i)T] \cdot \delta(t-kT).$$

Apskaičiuojant $y^*(s) = L[y^*(t)]$ ir pasinaudojant 1.11.13. skyrelyje aprašytąja z-transformacijos sąsūkos savybe, išvedama formulė

$$y^*(s) = L[y^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT) \cdot w[(k-i)T] e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(iT) e^{-iT s} \cdot w[(k-i)T] e^{-(k-i)Ts} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} w(kT) e^{-kTs} \right] = X^*(s) \cdot W^*(s) = X(z) \cdot W(z).$$

Šiame skyrelyje taip pat pateikiamas **z-atvaizdo gavimo iš Laplaso atvaizdo algoritmas**, kai Laplaso atvaizdas yra argumento s daugianarių santykis.

Pavyzdžiui, kai $X(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ ir lygtis $B(s)=0$ neturi kartotinių šaknų, tai išskaidę $\frac{A(s)}{B(s)}$ į sumą

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-s_i}, \text{ kur } s_i \text{ yra lygties } B(s)=0 \text{ šaknys, gauname, jog } X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-e^{s_i T} z}.$$

Išnagrinėtas ir atvejis, kai daugianario $B(s)$ šaknys yra kartotinės.

1.11.14. skyrelyje taip pat parodyta, kaip, pasinaudojant laiptuotąja funkcija

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(t-kT) - u[t-(k+1)T]\}, \text{ gaunamas diskrečią trajektoriją } \{x(kT)\}_{k=0}^{\infty} \text{ atitinkantis}$$

$$\text{Laplaso atvaizdas } L[\bar{x}(t)] = \bar{X}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} = \frac{1-z}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^k = \frac{1-z}{s} X(z).$$

Irenginys, iš impulsinės trajektorijos $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)$ gaunantis laiptuotąją

$$\text{trajektoriją } \bar{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{u(t-kT) - u[t-(k+1)T]\}, \text{ vadinamas } \mathbf{fiksatoriumi}.$$
 Kadangi

$$L[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT}, \text{ o } L[\bar{x}(t)] = \frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT}, \text{ tai } \mathbf{fiksatoriaus V perdavimo funkcija}$$

$$\text{yra lygi } \frac{Y_v(s)}{X_v(s)} = \frac{L[\bar{x}(t)]}{L[x^*(t)]} = \frac{1-e^{-sT}}{s}.$$

Kai laiptuotoji funkcija $\bar{x}(t)$ tampa bloko, turinčio perdavimo funkciją $W(s)$ ir perdavimo charakteristiką $h(t)$, įėjimu, tai įėjimas $\bar{x}(t)$ transformuojasi į to bloko išėjimo trajektoriją

$$\bar{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\}, \text{ turinčią Hevisaido atvaizdą } H[\bar{y}(t)] = (1-e^{-pT}) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kpT} W(p).$$

1.11.15. skyrelyje parodyta, kad **perdavimo funkcijų metodą tiesiniams blokams galima taikyti ne tik tuo atveju, kai įėjimų ir išėjimų trajektorijos yra determinuotos, bet ir tuo atveju, kai tos trajektorijos yra stochastinės**. Gali būti apskaičiuojami tolydūs ir diskretūs stochastinių trajektorijų ir jų vidurkių atvaizdai ir, žinant tiesinio bloko perdavimo funkciją ir įėjimo trajektorijos ar jos vidurkio atvaizdą, analogiškai, kaip tai buvo daroma determinuotų trajektorijų atveju, apskaičiuojamas išėjimo trajektorijos ar jos vidurkio atvaizdas, iš kurio, atlikus atvirkštinę transformaciją, randama pati išėjimo trajektorija ar jos vidurkis.

Stochastinių procesų aprašyme ir nagrinėjime naudojami dar ir taip vadinamieji **koreliaciniai atvaizdai**. 1.11.15. skyrelyje įvedama koreliacinio atvaizdo sąvoka, pateikiama jo apskaičiavimo formulė ir parodoma, kaip, žinant tiesinio bloko perdavimo funkciją ir jo įėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą, apskaičiuoti to bloko išėjimo trajektorijos koreliacinį atvaizdą, o po to – ir išėjimo trajektorijos **koreliacijos koeficientų įverčius**.

1.11.16. skyrelyje nagrinėjamos **matricinės perdavimo funkcijos** ir jų taikymas tiesiniams blokams, turintiems vektorinius įėjimus, išėjimus ir būsenas, aprašomus nepriklausomų koordinačių reikšmėmis.

Skyrelyje parodyta, kaip apskaičiuojami sistemos, turinčios n įėjimų ir m išėjimų, kurios matematinį modelį sudaro tiesinės vektorinės funkcijos $\frac{d\bar{z}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{z}(t), \bar{x}(t)) = A\bar{z}(t) + B\bar{x}(t)$, $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{z}, \bar{x}) = C\bar{z} + D\bar{x}$, išėjimų trajektorijų atvaizdai, iš kurių, atlikus atvirkštinę transformaciją, galima rasti pačias išėjimų trajektorijas.

Šis uždavinys skyrelyje išspręstas **dviem būdais**:

1) apskaičiuojant sistemos matricinę perdavimo funkciją – sistemos atskirų išėjimų ir atskirų įėjimų dalinių perdavimo funkcijų matricą, ir, naudojantis ta matricine perdavimo funkcija bei įėjimo vektoriaus atvaizdu, apskaičiuojant išėjimo vektoriaus atvaizdą;

2) tiesiogiai sprendžiant atskiras skaliarines lygčių sistemas, išplaukiančias iš atskirų skaliarinių modelių, atitinkančių kiekvieną sistemos skaliarinių įėjimų ir skaliarinių išėjimų porą.

1.11.17. skyrelyje **perdavimo funkcijų bei perėjimo charakteristikų metodas lyginamas su sistemų išorinių ir vidinių matematinių modelių tiesioginio taikymo metodu.**

Nors sistemų matematinių modelių tiesioginio taikymo metodas yra universalesnis už perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodus, tačiau, nagrinėjant tiesines sistemas, perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodai gana dažnai leidžia gauti ieškomus rezultatus žymiai paprasčiau.

Pažymėtina, kad perdavimo funkcijos ir perėjimo charakteristikos, būdamos tiesinių blokų invariantėmis, surištos su savo blokais vienareikšmiškai, kai tuo tarpu vienai ir tai pačiai sistemai, skirtingai pasirenkant tai, kas bus laikoma sistemos būsena, galima sudaryti skirtingus matematinius modelius. Kitaip tariant, vieną ir tą pačią sistemos perdavimo funkciją galima gauti iš kelių tos sistemos modelių, taip pat iš vienos ir tos pačios perdavimo funkcijos galima išvesti kelis matematinius modelius, kuriuos atitiks ta perdavimo funkcija, būdama tai tiesinei sistemai vienintele.

Išsiaiškinamos sąvokos

aktyvioji energija	atvaizdas
aktyvioji varža	atvaizdo diferencijavimo teorema
aktyvusis eksperimentas	atvaizdo integravimo teorema
algoritminis modelis	atvaizdo ypatingieji taškai
amplitudinė dažninė charakteristika	atvaizdo originalas – atvaizdo pirmavaizdis
amplitudinė fazinė charakteristika	atvaizdo poliai
analizinė funkcija	atvirkštinė Hevisaido transformacija
analizinis modelis	atvirkštinė Laplaso transformacija
antroji Hevisaido teorema	atvirkštinės transformacijos reziduumų formulė
aperiodinis procesas	atvirkštinė z-transformacija
baigtinio automato funkcionavimo išorinis matematinis aprašymas	bendroji atvirkštinės Laplaso transformacijos formulė
baigtinio automato vidinio funkcionavimo matematinis aprašymas	bloko, turinčio tolydžią perdavimo funkciją, reakcija į impulsinę įėjimo trajektoriją
baigtinis automatas	bloko, turinčio tolydžią perdavimo funkciją, reakcija į vienetinį impulsą
bendrasis Diuamelio integralas	bloko, turinčio tolydžią perdavimo funkciją, reakcija į vienetinį šuoliuką $u(t)$
bendroji atvirkštinės Hevisaido transformacijos formulė	
dalinė perdavimo funkcija	diferencijavimo grandelės vidinio funkcionavimo matematinis aprašymas
daliniai Diuamelio integralai	Dirako delta funkcija
daugiareikšmė funkcija	Dirichlė formulė
delta funkcija	diskrečios trajektorijos z – atvaizdas
diferencialinių lygčių sprendimas taikant operacinį skaičiavimą	diskreti trajektorija
diferencijavimo graudelė	dispersija
diferencijavimo grandelės impulsinė perėjimo charakteristika	Diuamelio integralai
diferencijavimo grandelės išorinio funkcionavimo matematinis aprašymas	dvejetaus nuoseklaus veikimo sumatoriaus išorinio funkcionavimo aprašymas
diferencijavimo grandelės perdavimo funkcija	dvejetaus nuoseklaus veikimo sumatoriaus vidinio funkcionavimo aprašymas
diferencijavimo grandelės perėjimo charakteristika	
eksperimentų planavimas	elektromagnetinių virpesių kontūras (EVK)
eksponentinė funkcija	EVK funkcionavimo matematinis aprašymas
eksponentinis mažėjimas	EVK funkcionavimo sisteminis nagrinėjimas
ekstremumo taškas	EVK varža bangoms
ekvifinaliniai procesai	elektrostatinė energija
elektromagnetinė energija	

fazinė dažninė charakteristika
fazinė trajektorija
fiksatoriaus perdavimo funkcija
fiksatorius
forsavimo grandies perdavimo funkcija

gęstantys svyravimai

harmoniniai svyravimai
Hevisaido atvaizdas
Hevisaido teoremos

idealaus diferenciatoriaus perdavimo funkcija
idealaus integratoriaus perdavimo funkcija
idealaus stiprintuvo perdavimo funkcija
idealios forsavimo grandies perdavimo funkcija
įėjimo trajektorija
įėjimo trajektorijos atvaizdas
imitacinis modelis
impedansas
impedanso atvaizdas
impulsinė perėjimo charakteristika
impulsinės trajektorijos Laplaso atvaizdas
impulsinė trajektorija

kartotinės daugianario šaknys
kartotiniai funkcijos poliai
kinetinė energija
klasikinės matematinės analizės metodai
kompleksinio kintamojo funkcija
kompleksinio kintamojo funkcijų teorija
kompleksinis perdavimo koeficientas

„laiptuota“ funkcija
Laplaso atvaizdas
Laplaso transformacija
Laplaso transformacijos savybės

maksimumo taškai ir jų radimo algoritmas
matricinė perdavimo funkcija
medžiagų sandėlio funkcionavimo išorinis matematinis aprašymas

neapibrėžtųjų koeficientų metodas
neigiamojo grįžtamojo ryšio perdavimo funkcija
nuosavi pereinamojo proceso svyravimai
nuosavi svyravimai

Omo dėsnis
operacinio skaičiavimo taikymai
operacinis skaičiavimas

funkcijos ypatingieji taškai
funkcijos poliai
funkcijos reziduumas taške
funkcijų – originalų ir jų atvaizdų lentelė

Hevisaido transformacija
Hevisaido transformacijos savybės
holomorfinė funkcija

induktyvinė varža
induktyvinės varžos atvaizdas
integralinės funkcijos diferencijavimo formulė
integralinis operatorius
integravimo tvarkos pakeitimo formulė
invariantė
išėjimo trajektorija
išėjimo trajektorijos atvaizdas
išėjimo trajektorijos priklausomybė nuo įėjimo trajektorijos
išorinis funkcionavimas ir jo matematinis aprašymas

kompleksinis skaičius
koreliacijos koeficientas
koreliacijos koeficiento įvertis
koreliacinis atvaizdas
koreliacinis stochastinės trajektorijos atvaizdas
Koši teorema

lėto reagavimo grandies perdavimo funkcija
lygiagrečiai sujungtų blokų perdavimo funkcija
linkio taškai ir jų radimo algoritmas
Lorano eilutė

medžiagų sandėlio vidinio funkcionavimo aprašymas
minimumo taškai ir jų radimo algoritmas

nuosavų svyravimų atsiradimo sąlyga
nuosavų svyravimų periodas
nuosekliai sujungtų blokų perdavimo funkcija
nusistovėję priverstiniai svyravimai

originalas
originalo diferencijavimo formulės
originalo integravimo formulė

panašumo teorema	perėjimas nuo tolydžių trajektorijų ir
pasyvūs eksperimentas	perdavimo funkcijų prie diskrečių
perdavimo funkcija	perėjimo charakteristikos $h(t)$ ir $w(t)$
perdavimo funkcija diskrečioms trajektorijoms	perėjimo charakteristikų metodo taikymai
perdavimo funkcijos egzistavimo sąlygos	pereinamasis procesas
perdavimo funkcijos eksperimentinis	pereinamojo proceso svyravimai
nustatymas	periodiniai svyravimai
perdavimo funkcijų metodas	pilnoji varža
perdavimo funkcijų metodo taikymo	pirmavaizdis
apribojimai	pirmoji Hevisaido teorema
perdavimo funkcijų savybės	postūmio teorema
perdavimo funkcijų taikymas sistemų analizėje	potencialinė energija
perdavimo funkcijų taikymas sistemų	pradinė fazė
projektavime	pradinės fazės postūmis
perdavimo funkcijų taikymas stacionariams	pradinės sąlygos
stochastiniams procesams	priverstiniai svyravimai
perėjimas nuo diskrečių trajektorijų ir	
perdavimo funkcijų prie tolydžių	
sąsūka	stacionarus stochastinis procesas
sąsūkos atvaizdas	sveikosios atvaizdo dalies išskyrimas
sąsūkos savybės	svyravimų amplitudė
silpstantys nuosavi pereinamojo proceso	svyravimų ciklinis dažnis
svyravimai	svyravimų fazė
sistemos, turinčios keletą įėjimų, išėjimo	svyravimų pradinė fazė
trajektorijų apskaičiavimas	svorinė suma
sistemos vidinio funkcionavimo aprašymas	svorinės sumos apskaičiavimo blokas
slopinimo koeficientas	
talpuminė varža	tolydi trajektorija
talpuminės varžos atvaizdas	tolydžių trajektorijų Laplaso ir Hevisaido
teigiamojo grįžtamojo ryšio perdavimo	atvaizdai
funkcija	trajektorijų vidurkių atvaizdai
vėlinimas	vidinis funkcionavimas
vėlinimo savybė	vienetinio šuoliuko funkcija $u(t)$
vidinė kontūro sritis	virpesių kontūro perdavimo funkcija
vidinio funkcionavimo matematinis aprašymas	
z-transformacija	z-transformacijos skirtumo savybė
z-transformacijos postūmio savybė	z-transformacijos sumavimo savybė
z-transformacijos sąsūkos savybė	z-transformacijos tiesiškumo savybė
z-transformacijos savybių analogiškumas	
Laplaso transformacijos savybės	

UŽDUOTYS

1.11.1. Sudarykite atviros diferencijavimo grandelės (žiūr. 17 pav.) išorinio funkcionavimo ir uždaros diferencijavimo grandelės, turinčios 4 vidinius elementus (žiūr. 227 pav.), vidinio funkcionavimo aprašymus, atitinkančius įvairias įėjimo trajektorijas (pavyzdžiui 1) $x_1(t)=U_0=\text{const}$, 2) $x_2(t)=at+b$, $x_3(t)=A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$, kai pradinė grandelės būseną $z(0)=0$).

Raskite išorines ir vidines trajektorijas įvairiais būdais: naudodamiesi matematinio sisteminio modeliavimo metodu, perdavimo funkcijų ir perėjimo charakteristikų metodu, amplitudinių – dažnuminių ir fazinių – dažnuminių charakteristikų metodu. Kuriuo atveju kuris metodas yra patogesnis?

1.11.2. Sudarykite kavos ar gazuoto vandens pardavimo automato išorinio ir vidinio funkcionavimo matematinį aprašymą.

1.11.3. Suraskite automato, aprašyto 1.3.13. užduotyje (žiūr. 13 lentelę), išorines ir vidines trajektorijas, atitinkančias kokią nors, Jūsų pasirinktą, išorinio įėjimo trajektoriją ir kokią nors pradinę būseną.

Pakeiskite pradinę būseną ar/ir įėjimo trajektoriją ir pažiūrėkite, kaip pasikeis visos kitos trajektorijos.

1.11.4. Sudarykite sandėlio, kuriam medžiagas tiekia keli tiekėjai (žiūr. 1.10.2. užduotį) išorinio ir vidinio funkcionavimo aprašymą, laikydami, jog sandėlio pradinės būsenos vektoriaus koordinatės bei sandėlio išorinių įėjimų trajektorijos yra duotos.

Raskite sandėlio fazinių ir išorinių išėjimų trajektorijų atkarpas mėnesiui, o taip pat sandėlio vidinių elementų įėjimų, išėjimų ir fazinių trajektorijų mėnesines atkarpas, kai duota:

- 1) medžiagų rūšių i skaičius $n=4$;
- 2) cechų j , kuriuos aptarnauja medžiagų sandėlis, skaičius $m=3$;
- 3) tiekėjų k , kurie pristato medžiagas į sandėlį, papildydami jo atsargas, skaičius $r=3$;
- 4) medžiagos i likučiai sandėlyje pirmosios mėnesio darbo dienos ryte $\bar{z}_1(1)=(z_{1,1}(1); \dots;$

$z_{1,1}(1); \dots; z_{1,N}(1)=(150; 200; 100; 50);$

5) cechų j iš sandėlio paimtos medžiagos i nuo mėnesio pradžios iki mėnesio pirmosios darbo dienos ryto kiekiai $\bar{z}_2(1)=(z_{2,1,1}(1); z_{2,1,2}(1); \dots; z_{2,2,1}(1); z_{2,2,2}(1); \dots; z_{2,i,j}(1); \dots; z_{2,n,m}(1))=(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0);$

6) medžiagų i limitai cechams j nagrinėjamam mėnesiui $\bar{z}_3=(z_{3,1,1}; z_{3,1,2}; \dots; z_{3,2,1}; z_{3,2,2}; \dots; z_{3,i,j}; \dots; z_{3,n,m})=(500; 400; 600; 300; 600; 500; 700; 400; 300; 250; 350; 200);$

7) įėjimo vektorių trajektorijos:

a) $\bar{x}_1(t)=(x_{1,1,1}(t); x_{1,1,2}(t); \dots; x_{1,2,1}(t); x_{1,2,2}(t); \dots; x_{1,i,k}(t); \dots; x_{1,n,r}(t))$, kur $x_{1,i,k}(t)$ – medžiagos i kiekis, kurį tiekėjas k pristatė į sandėlį per darbo dieną t ,

b) $\bar{x}_2(t)=(x_{2,1,1}(t); x_{2,1,2}(t); \dots; x_{2,2,1}(t); x_{2,2,2}(t); \dots; x_{2,i,j}(t); \dots; x_{2,n,m}(t))$, kur $x_{2,i,j}(t)$ – informacija apie tai, kiek medžiagos i cechams j norėtų gauti iš sandėlio darbo dienai t .

Šių trajektorijų mėnesinės atkarpos duotos 99-je ir 100-joje lentelėse:

99. lentelė

koordinatė \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_{1,1,1}(t)$	80	90	60	0	0	100	0	0	50	100	50
$x_{1,1,2}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,1,3}(t)$	20	10	20	100	50	0	50	0	0	0	50
$x_{1,2,1}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,2,2}(t)$	0	0	100	0	0	100	200	100	0	0	0
$x_{1,2,3}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,3,1}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,3,2}(t)$	100	0	0	200	0	200	200	0	0	0	100
$x_{1,3,3}(t)$	80	90	0	50	200	100	0	50	50	0	50
$x_{1,4,1}(t)$	50	0	30	100	0	50	0	0	50	50	50
$x_{1,4,2}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,4,3}(t)$	0	50	20	0	50	0	0	0	50	0	50

koordinatė \ t	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$x_{1,1,1}(t)$	100	100	200	100	50	200	200	100	0	50
$x_{1,1,2}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,1,3}(t)$	0	100	50	0	0	0	50	50	100	0
$x_{1,2,1}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,2,2}(t)$	0	50	0	50	0	100	200	200	200	0
$x_{1,2,3}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,3,1}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,3,2}(t)$	100	0	50	100	200	0	100	0	100	50
$x_{1,3,3}(t)$	0	50	50	0	0	100	0	50	100	0
$x_{1,4,1}(t)$	100	0	50	50	0	100	200	100	50	0
$x_{1,4,2}(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_{1,4,3}(t)$	0	50	0	0	50	50	0	50	0	50

100. lentelė

koordinatė \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_{2,1,1}(t)$	100	50	60	20	40	30	50	20	40	30	50
$x_{2,1,2}(t)$	100	100	80	20	120	20	30	50	40	20	20
$x_{2,1,3}(t)$	100	50	60	20	80	50	20	30	40	50	30
$x_{2,2,1}(t)$	50	40	20	30	20	40	60	50	30	20	50
$x_{2,2,2}(t)$	50	30	50	40	30	50	80	70	50	30	20
$x_{2,2,3}(t)$	50	30	30	20	40	50	60	80	20	40	30
$x_{2,3,1}(t)$	50	40	20	50	100	80	40	120	20	50	40
$x_{2,3,2}(t)$	100	50	30	40	100	100	60	80	30	20	40
$x_{2,3,3}(t)$	100	60	20	60	100	70	100	100	50	30	20
$x_{2,4,1}(t)$	70	20	75	40	50	30	50	40	40	40	50
$x_{2,4,2}(t)$	80	30	45	10	20	50	20	30	50	25	30
$x_{2,4,3}(t)$	100	50	60	50	30	20	30	50	30	35	20

koordinatė \ t	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$x_{2,1,1}(t)$	30	20	30	50	20	20	20	40	30	40
$x_{2,1,2}(t)$	50	20	40	40	30	20	30	60	50	20
$x_{2,1,3}(t)$	20	20	20	50	50	60	20	100	20	40
$x_{2,2,1}(t)$	20	30	20	10	20	20	40	60	80	40
$x_{2,2,2}(t)$	50	20	10	20	20	40	30	80	60	80
$x_{2,2,3}(t)$	30	40	20	30	10	20	30	60	40	60
$x_{2,3,1}(t)$	40	20	10	60	40	50	90	100	70	50
$x_{2,3,2}(t)$	20	40	20	50	50	80	60	80	20	100
$x_{2,3,3}(t)$	30	30	20	40	60	40	50	90	60	100
$x_{2,4,1}(t)$	40	50	10	20	20	10	50	80	70	20
$x_{2,4,2}(t)$	20	50	10	10	20	20	60	40	30	10
$x_{2,4,3}(t)$	40	50	20	10	10	20	40	80	50	20

Sudarykite programą kompiuteriui, skirtą sandėlio išorinių ir vidinių trajektorijų atkarpų apskaičiavimui, leidžiančią keisti medžiagų rūšių, cechų ir tiekėjų skaičius n , m , r , o taip pat ir trajektorijų atkarpų ilgius. Patikrinkite sudarytą programą, pasinaudodami šiuo konkrečiu sandėlio funkcionavimo pavyzdžiu kaip testu.

Ar galima medžiagų sandėlio atveju taikyti perdavimo funkcijų metodą?

1.11.5. Sudarykite autobusų bilietų pardavimo automato (žiūr. 1.4.8. ir 1.10.4. užduotis) išorinio ir vidinio funkcionavimo aprašymus. Ar galima šio automato trajektorijų nagrinėjimui taikyti perdavimo funkcijų metodą?

1.11.6. Sudarykite vamzdžių paskirstymo automato (žiūr. 1.4.9. ir 1.10.5. užduotis) išorinių ir vidinių trajektorijų pavyzdžius.

1.11.7. Sudarykite sandėlio saugyklos, turinčios n stelažų (žiūr. 1.4.10. ir 1.10.6. užduotis), funkcionavimo matematinį aprašymą.

1.11.8. Sudarykite dvejetainio lygiagretaus veikimo sumatoriaus (žiūr. 1.10.8. užduotis) išorinių ir vidinių trajektorijų pavyzdžius.

1.11.9. Sudarykite dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus vidinių elementų trajektorijų atkarpas, atitinkančias 97 lentelėje duotas įėjimo trajektorijų atkarpas ir pradinę būseną $z(0)=0$. Sudarykite trajektorijų atkarpų z – atvaizdus.

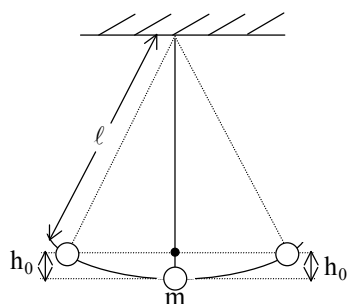
1.11.10. Sudarykite integravimo grandelės (žiūr. 240 pav.) išėjimo trajektorijas $y(t)$, atitinkančias pradinės nulines sąlygas $z(0)=0$ ir įėjimo trajektorijas 1) $x_1(t)=a=\text{const}$, 2) $x_2(t)=at+b$, 3) $x_3(t)=A \sin(\omega t+\varphi)$, naudodamiesi įvairiais metodais. Kuriuo atveju kuris metodas yra patogesnis?

1.11.11. Raskite elektromagnetinių virpesių kontūro (žiūr. 43 pav.) išėjimo ir fazinę trajektorijas, atitinkančias pradinės nulines sąlygas ir įėjimo trajektorijas: 1) $x_1(t)=at+b$, 2) $x_2(t)=A \cos(\omega t+\varphi)$, 3) $x_3(t)=at+b+A \sin(\omega t+\varphi)$, 4) $x_4(t)=A \sin(\omega_1 t+\varphi_1) \cos(\omega_2 t+\varphi_2)$.

Kuriuo atveju kurie metodai patogesni? Kuriais atvejais gali atsirasti rezonanso reiškiny? Kada išėjimo procesai bus aperiodiniai, kada – periodiniai, kada – gęstantys, kada – negęstantys?

1.11.12. Raskite procesų P_1 ir P_2 (žiūr. 10 pav.) fazines trajektorijas, atitinkančias pradinės nulines sąlygas ir įėjimo trajektorijas: 1) $x_1(t)=U_0=\text{const}$, 2) $x_2(t)=at+b$, kur $a=\text{const}$, $b=\text{const}$, 3) $x_3(t)=A \sin(\omega t+\varphi)$, kur $A=\text{const}$, $\omega=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$. Raskite trajektorijų atvaizdus.

1.11.13. Sudarykite matematinės švytuoklės (žiūr. 269 pav.) fazines trajektorijas ir jų portretus tais atvejais, kai: 1) pradinė švytuoklės būseną $\bar{z}(0)=(z_1(0);z_2(0))=(W^{(p)}(0);W^{(k)}(0))=(mgh_0;0)$ ir trinties bei oro pasipriešinimo nėra; 2) $\bar{z}(0)=(z_1(0);z_2(0))=(W^{(p)}(0);W^{(k)}(0))=(0;\frac{mv^2}{2}=mgh_0)$ ir trinties bei oro



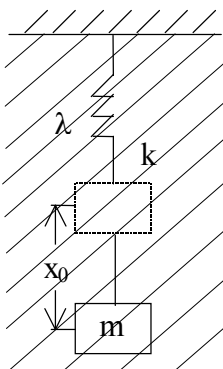
269 pav.

pasipriešinimo nėra; 3) $\bar{z}(0)=(0;\frac{mv^2}{2}=mgh_0)$ ir yra pasipriešinimo (trinties) jėga $F_t=kv$; 4) $\bar{z}(0)=(mgh_0;0)$ ir yra pasipriešinimo jėga $F_t=kv$, kur $k=\text{const}$ – trinties koeficientas, m – švytuoklės svorelio masė, h_0 – švytuoklės, turinčios ilgį ℓ , svorelio pakilimo aukštis kraštutinėse pozicijose, $v(t)$ – svorelio judėjimo greitis momentu t .

Raskite fazinių trajektorijų atvaizdus kiekviename iš čia išvardintų keturių atvejų.

1.11.14. Sudarykite spyruoklės, pavaizduotos 270 pav., fazinę trajektoriją ir jos portretą, jei proceso pradžioje svorelis, turintis masę m , buvo pastumtas žemyn atstumu x_0 nuo tos padėties, kurioje spyruoklė, turinti stangrumą λ , buvo pusiausvyroje su pakabintu svoreliu, ir momentu $t_0=0$, stūmimo jėgai išnykus, svorelis pradėjo judėti į viršų, veikiamas spyruoklės stangrumo jėgos F_s , įveikdamas svorio ir trinties jėgas $F_1=mg$ ir $F_2=kv$.

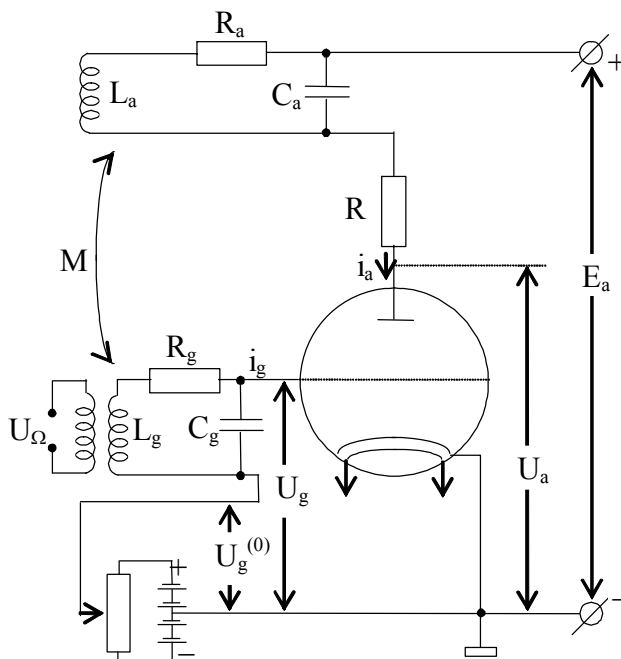
Pastaba. Laikykite, kad spyruoklės deformacija nedidelė ir todėl galioja Huko dėsnis: $F_s=\lambda\Delta x$, kur Δx – absoliuti spyruoklės ilgio deformacija (pokytis).



270 pav.

1.11.15.* Aprašykite elektromagnetinių virpesių generatoriaus, pavaizduoto 271 pav., funkcionavimą, kai moduliavimo signalų įėjimo trajektorija $x_{\text{mod}}(t)=U_{\Omega}(t)=0$, anodo grandinės elektrovaros jėga $E_a=\text{const}$, katodo kaitinimo grandinės įtampa $U_k=\text{const}$, anodo srovės amplitudės I_a dydžio priklausomybė $I_a=f_a(U_g, U_a)$ nuo radijo lempos tinklelio („gridliko“) potencialo U_g ir anodo potencialo U_a katodo atžvilgiu yra tokia, kaip parodyta 272 pav. (t. y. kai galime laikyti, jog žinome funkciją $I_a=f_a(U_g, U_a)$ ir jos dalines išvestines $\frac{\partial I_a}{\partial U_g}=\frac{\partial f_a}{\partial U_g}=S(U_g, U_a)$ visoms U_a ir U_g reikšmėms), o indukcinis ryšys tarp

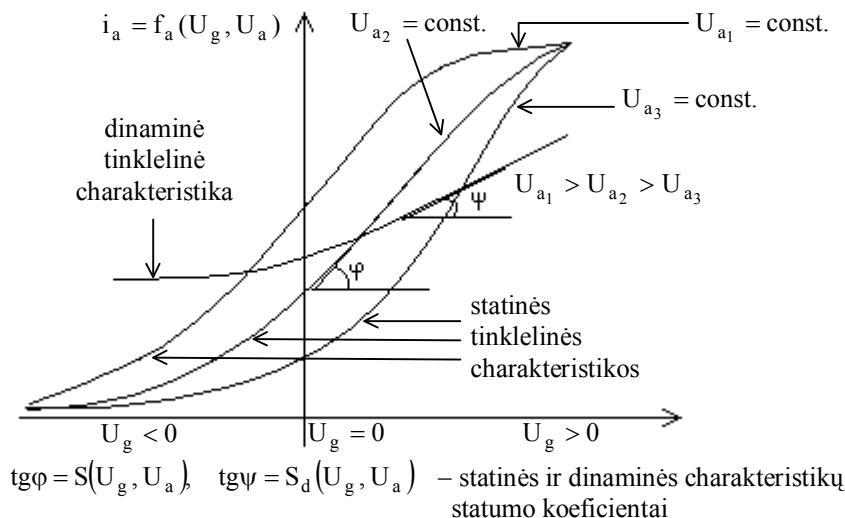
anodo ir tinklelio kontūrų $L_a C_a R_a$ bei $L_g C_g R_g$ yra pastovus ir charakterizuojamas tarpusavio indukcijos koeficientu M (t. y. kad tinklelio grandinėje dėl anodo grandinės elektromagnetinio lauko pakitimo atsiranda indukcinė e.v.j. $E_i=M\frac{di_a(t)}{dt}$, kur M yra žinomas).



271 pav.

Palyginkite Jūsų gautą generatoriaus matematinį modelį su tokio generatoriaus modeliu knygoje [32].

Paaiškinkite, kodėl generatoriaus fazinis portretas yra spiralė, turinti dvi pusiausvyros būsenas, iš kurių viena, atitinkanti didesnę U_g reikšmę, yra stabili, o antroji – nestabili.



272 pav.

Raskite generatoriaus išėjimų ir fazines trajektorijas tam atvejui, kai $U_{\Omega}(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega \ll \omega_g$, kur ω_g – generatoriaus nuosavų virpesių dažnis. Kaip pasikeistų rezultatas, jei atsižvelgtume į procesų trukmes ir įvestume vėluojančio argumento funkcijas?

1.11.16. Sudarant sistemų modelius bei nustatant sistemos būseną, galima naudotis kaip makro, taip ir mikro metodologija (žiūr. 1.10. skyrių). Ar galima tas metodologijas taikyti, sudarant procesų modelius, t. y., aprašant sistemų funkcionavimą? Raskite pavyzdžių, iliustruojančių Jūsų atsakymą.

1.11.17. Kurios iš 1.11. skyriuje ir 1.11.1.–1.11.15. užduotyse gautų bei išnagrinėtų trajektorijų gali būti pavadintos objektų bei sistemų funkcionavimo procesų matematinių modelių sudėtinėmis dalimis, o kurios priklauso tik informaciniais tų procesų modeliams? Kurios iš jų priklauso makromodeliams, kurios – mikromodeliams?

1.11.18. Nurodykite, kur Jūs, atlikdami 1.11.17. užduotį, susidūrėte su objektų ir sistemų, siaurąja prasme, modeliais, kur – su procesų išoriniais ir vidiniais modeliais, kur – su objektų ir sistemų modeliais plačiąja prasme. Ką, vykdydami 1.11.17. užduotį, Jūs galėjote pavadinti įėjimo, ką – išėjimo, o ką – fazinėmis trajektorijomis? Kuriais atvejais trajektorijų radimui galima buvo taikyti perdavimo funkcijų ir įvairių charakteristikų metodus, kuriais – ne?

1.11.19. Įrodykite, jog jei $L[f_i(t)] = F_i(s)$ ir a_i – kompleksinės ar realios konstantos (pastovūs koeficientai), tai $L\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i L[f_i(t)] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(s)$, t. y. įrodykite Laplaso transformacijos tiesiškumo teoremą.

1.11.20. Įrodykite panašumo teoremą: jei $L[f(t)] = F(s)$ ir $a = \text{const} > 0$, tai $L[f(at)] = F\left(\frac{s}{a}\right)$.

Žinodami, jog $L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$ ir $L[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$, raskite $L[\sin \omega t]$ ir $L[\cos \omega t]$, naudodamiesi panašumo

teorema. Patikrinkite gautas formules, tiesiogiai apskaičiuodami integralus $\int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt$ ir

$$\int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt.$$

1.11.21. Įrodykite originalo diferencijavimo teoremas, t. y. įrodykite, jog jei $L[f(t)] = F(s)$, tai $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(+0)$, $L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(+0) - f'(t=0)$ ir, bendrai, $L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1} \cdot f(+0) -$

$$-s^{n-2}f^{(2)}(+0) - \dots - s \cdot f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0), \text{ kur } f^{(k)}(+0) = \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right]_{t=+0}.$$

Iliustruokite pavyzdžiais originalo diferencijavimo formulių panaudojimą sudėtingų funkcijų atvaizdų apskaičiavime.

1.11.22. Ar skiriasi teoremos, įrodytos 1.11.19. ir 1.11.20. užduotyse Laplaso transformacijai, nuo analogiškų Karsono – Hevisaido transformacijos originalo diferencijavimo teoremų? Įrodykite Karsono – Hevisaido transformacijos originalo diferencijavimo teorema. Ar skiriasi Laplaso ir Karsono transformacijų originalų diferencijavimo teoremos, kai funkcija $f(t)$ ir jos išvestinės tenkina pradines nulines sąlygas?

1.11.23. Raskite funkcijos $y(t) = e^{2t} + e^{-2t} - 2\cos 2t$ Hevisaido atvaizdą.

1.11.24. Įrodykite, jog $L[e^{\lambda t} \cos \omega t] = \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$ ir raskite $H[e^{\lambda t} \sin \omega t]$.

1.11.25. Įrodykite, jog $H[x^n e^{\lambda x}] = \frac{n!}{(s - \lambda)^{n+1}}$ ir raskite $L[(2x)^{3n} e^{-2\lambda x}]$.

1.11.26. Raskite funkcijos $\phi(t) = 5\cos^3 4t$ Hevisaido atvaizdą.

1.11.27. Raskite $H[t^2 \sin \omega t]$.

1.11.28. Raskite $L[t^3 \cos \omega t]$.

1.11.29. Raskite funkcijos $f(t) = t^n \cos \omega t$ Laplaso atvaizdą.

1.11.30. Raskite funkcijos $e^{\lambda x} x^n \sin \omega x$ Hevisaido atvaizdą.

1.11.31. Raskite $L[2\sin^4 3t]$ ir $H[(\sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t)^2]$.

1.11.32. Įrodykite, jog $L\left[\frac{1}{2}(t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t)\right] = \frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$.

1.11.33. Įrodykite, jog funkcijos $f(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t)$ Laplaso atvaizdas yra

$$F(s) = \frac{\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

1.11.34.* Įrodykite atvaizdo diferencijavimo teorema $\frac{d^n F(s)}{ds^n} \stackrel{\bullet}{=} (-1)^n t^n f(t)$, t. y. įrodykite, jog atvaizdo diferencijavimą atitinka originalo dauginimas iš $(-t)$.

Ar skiriasi ši teorema Laplaso ir Karsono transformacijoms? Iliustruokite pavyzdžiais atvaizdo diferencijavimo formulės panaudojimą, atliekant atvirkštinę transformaciją, t. y. ieškant originalo pagal duotą atvaizdą.

1.11.35.* Įrodykite teorema: jei $F(p, \lambda) = p \int_0^\infty f(t, \lambda) \cdot e^{-pt} dt$, tai $\frac{\partial^n F(p, \lambda)}{\partial \lambda^n} = p \int_0^\infty \frac{\partial^n f(t, \lambda)}{\partial \lambda^n} e^{-pt} dt$, t. y.

$$\frac{\partial^n f(t, \lambda)}{\partial \lambda^n} \stackrel{\bullet}{=} \frac{\partial^n F(p, \lambda)}{\partial \lambda^n}.$$

Kaip atrodo ši teorema Laplaso transformacijai? Kuo naudinga ši teorema, ieškant originalų ir sudėtingų funkcijų atvaizdų?

1.11.36. Įrodykite originalo integravimo teorema $L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} L[f(t)] = \frac{F(s)}{s}$ ir bendrai

$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_0^t f(t) dt|_{t=+0}}{s}$. Ar skiriasi originalo integravimo teorema Laplaso ir Hevisaido transformacijose?

1.11.37.* Įrodykite atvaizdo integravimo teorema $\int_s^\infty F(s) ds = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$. Kuo skiriasi ši teorema

nuo analogiškos teoremos Hevisaido transformacijoje?

Iliustruokite pavyzdžiais atvaizdo integravimo teoremos naudą?

1.11.38.* Įrodykite formules $p \int_p^\infty \frac{F(p)}{p} dp \stackrel{\bullet}{=} \frac{f(t)}{t}$, $\int_p^\infty \frac{F(p)}{p} dp \stackrel{\bullet}{=} \int_0^t \frac{f(t)}{t} dt$, $\int_0^p \frac{F(p)}{p} dp \stackrel{\bullet}{=} \int_t^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ ir

$\int_0^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, kur paskutinioji formulė yra jau paprasta (o ne operacinė) lygybė. Kaip

paaikšintumėte tai, kad atvaizdo $\frac{F(p)}{p}$ integralas gali būti lygus originalo $\frac{f(t)}{t}$ integralui?

1.11.39.* Įrodykite formulę $p \int_p^{\infty} dp_n \int_{p_n}^{\infty} dp_{n-1} \dots \int_{p_2}^{\infty} \frac{F(p_1)}{p_1} dp_1 > t^{-n} f(t)$. Kaip atrodo $\frac{f(t)}{t}$ analogiška

formulė Laplaso transformacijoje?

1.11.40. Įrodykite vėlavimo (vėlinimo, delsos) teoremą: jei $\tau > 0$ ir $L[f(t)] = F(s)$, tai $L[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$. Ar skiriasi ši teorema Hevisaido transformacijai?

1.11.41. Įrodykite sąsukos teoremą: kai $L[f_1(t)] = F_1(s)$ ir $L[f_2(t)] = F_2(s)$, tai funkcijų $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ sąsukos $(f_1 * f_2) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$ Laplaso atvaizdas lygus funkcijų $f_1(t)$ ir $f_2(t)$

atvaizdų sandaugai, t. y. $L[(f_1 * f_2)] = L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$. Kuo skiriasi ši teorema nuo

analogiškos sąsukos teoremos Hevisaido transformacijai?

Iliustruokite pavyzdžiais sąsukos teoremos panaudojimą.

1.11.42. Įrodykite postūmio teoremą: jei $L[f(t)] = F(s)$, tai $F(s-s_0) = L[e^{s_0 t} f(t)]$. Įrodykite postūmio teoremą Karsono – Hevisaido transformacijai $\frac{p}{p+\lambda} F(p+\lambda) \stackrel{!}{=} e^{-\lambda t} f(t)$.

Iliustruokite pavyzdžiais postūmio teoremos panaudojimą, apskaičiuojant atvaizdus bei originalus.

1.11.43. Raskite funkcijos $f(t) = \int_0^t \sin \omega x dx$ Hevisaido atvaizdą dviem būdais. Ar jis skiriasi nuo šios funkcijos Laplaso atvaizdo? Įrodykite originalo integravimo teoremą.

1.11.44. Raskite funkcijos $y(x) = \int_0^x \cos^2 \omega t dt$ Laplaso atvaizdą $Y(s)$, o po to – ir Hevisaido atvaizdą $Y(p)$ dviem būdais: tiesiogiai ir transformuodami Laplaso atvaizdą $Y(s)$.

1.11.45. Raskite funkcijos $y(x) = \int_0^x \tau^n e^{\lambda \tau} d\tau$ Laplaso atvaizdą $Y(s)$, o po to – ir Hevisaido atvaizdą $Y(p)$ įvairiais būdais, tarp jų – ir naudodamiesi postūmio teorema.

1.11.46.* Raskite funkcijos $f(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ Hevisaido atvaizdą $F(p)$, o po to – ir Laplaso atvaizdą $F(s)$.

1.11.47. Raskite funkcijos $f(t) = \int_0^t \sin 2(t-\tau) \cos 3\tau d\tau$ Laplaso atvaizdą, o po to – ir Hevisaido atvaizdą.

1.11.48. Raskite vėluojančios funkcijos $\varphi(t-1) = (t-1)^2 e^{t-1}$ Laplaso atvaizdą $\Phi(s)$, o po to – ir Hevisaido atvaizdą $\Phi(p)$.

1.11.49. Raskite funkcijos $x(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } t \leq 1, \\ t-1, & \text{kai } 1 \leq t \leq 2, \\ 3-t, & \text{kai } 2 \leq t \leq 3, \\ 0, & \text{kai } t \geq 3, \end{cases}$ Laplaso atvaizdą $X(s)$. Kuo šis atvaizdas

skirsis nuo tos funkcijos Hevisaido atvaizdo $X(p)$? Įrodykite, jog $x(t) = (t-1)u(t-1) - 2(t-2)u(t-2) + 3(t-3)u(t-3)$.

1.11.50.* Raskite funkcijos $f(t) = t^\alpha$, kai $-1 < \alpha < 0$, Laplaso atvaizdą $F(s)$. Apskaičiuokite šios funkcijos Hevisaido atvaizdą, kai $\alpha = -0,5$.

1.11.51. Įrodykite pirmąją Hevisaido teoremą apie atvaizdų skaidymą į paprastas trupmenas ir jų originalų radimą: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p_k} \stackrel{L}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!}$.

Pasinaudodami šia teorema, raskite atvaizdo $F(p) = e^{\frac{-\tau}{p}}$ originalą $f(t)$, kur $\tau = \text{const} > 0$.

1.11.52.* Įrodykite, kad jei $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ – tikroji racionali trupmena, turinti r polių s_k (polinomo $B(s)$ šaknų) su kartotinumais laipsniais $m_k \geq 1$, tai atvaizdžio $F(s)$ originalas $f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}} [F(s)(s - s_k)^{m_k} e^{st}]$.

Pasinaudodami šia teorema, raskite atvaizdo $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}$ originalą $f(t)$.

Suformuluokite analogišką teoremą Karsono transformacijai ir įrodykite ją.

1.11.53.* Iš teoremos, įrodytos 1.11.52.* užduotyje, gaukite tam atvejui, kai visi poliai paprasti ($m_k = 1, k = 1, 2, \dots, r$), antrąją Hevisaido teoremą $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} > \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^r \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t}$.

Iliustruokite antrosios Hevisaido teoremos panaudojimą, ieškant originalų pagal duotus atvaizdus.

Įrodykite, jog $\frac{A(s)}{B(s)} \stackrel{L}{=} \sum_{k=1}^r \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}$, kur $\frac{A(s)}{B(s)} = F(s)$ yra funkcijos $f(t)$ Laplaso atvaizdas.

1.11.54.* Pasinaudodami Furje integralu $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau$, išveskite Rymano –

Melino formulę $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp$, kur $F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, o $p = \sigma + i\omega$.

Suformuluokite ir įrodykite analogišką formulę Laplaso transformacijai.

1.11.55. Raskite Laplaso atvaizdo $F(s) = \frac{2,5}{s^4}$ originalą $f(t)$. Koks turėtų būti to originalo Hevisaido atvaizdas? Raskite Hevisaido atvaizdų $F_1(p) = \frac{2p}{p-p_1}$ ir $F_2(p) = \frac{2p_1}{p-p_1}$ originalus.

1.11.56.* Funkcijos $y(t)$ Hevisaido atvaizdas $Y(p)$ yra lygus $\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$. Raskite funkciją $y(t)$ ir jos Laplaso atvaizdą.

1.11.57. Prisimindami, kad $L[t^n e^{\lambda t}] = \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$, raskite funkciją $x(t)$, kurios Hevisaido atvaizdas yra $X(p) = 0,2(p+3)^{-5}$.

1.11.58. Funkcijos $f(t)$ Laplaso atvaizdas yra $F(s) = \frac{15s}{s^4 - 625}$. Raskite funkciją $f(t)$.

1.11.59. Funkcijos $y=y(x)$ Hevisaido atvaizdas yra $Y(p) = \frac{3p(p+5)}{(p+5)^2 + 3}$. Raskite funkciją $y=y(x)$.

Jei susidūrėte su funkcijos originalo radimo sunkumais, tai grįžkite prie 1.11.24. užduoties ir, atlikę ją, dar kartą pabandykite išspręsti šią užduotį.

1.11.60. Prisimindami, kaip sprendėte užduotis 1.11.32.–1.11.33., raskite funkcijų originalus $f_1(t)$, $f_2(t)$ ir $f_3(t)$, turinčias Laplaso atvaizdus $F_1(s) = \frac{3}{(s^2+4)^2}$, $F_2(s) = \frac{5s}{(s^2+9)^2}$ ir $F_3(s) = \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}$.

1.11.61. Funkcijos $f(t)$ Laplaso atvaizdas yra $F(s) = \frac{(s-5)^2 + 9}{[(s-5)^2 + 16]^2}$. Raskite funkciją $f(t)$. Jei susidūrėte su sunkumais, grįžkite prie užduočių 1.11.30. ir 1.11.60.

1.11.62. Išspręskite 1.11.61. uždutį, taikydami reziduų formulę.

1.11.63. Prisimindami sąskos atvaizdo formulę ir uždutį 1.11.60., raskite funkciją $x(t)$, turinčią Hevisaido atvaizdą $X(p) = \frac{15p^2}{(p^2+4)^2(p^2+9)^2}$.

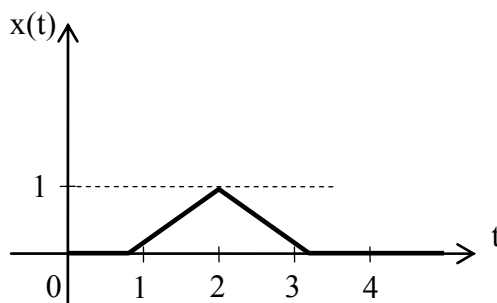
1.11.64. Išspręskite 1.11.63. uždutį, pasinaudodami reziduų formule. Palyginkite gautus rezultatus ir sprendimo metodus.

1.11.65. Raskite funkciją $y(t)$, turinčią Laplaso atvaizdą $Y(s) = \frac{1}{s^2+1}e^{-2s} - \frac{2}{(s^2+1)^2}e^{-s}$. Kuo ypatinga ši funkcija?

1.11.66. Išveskite diferencialinės lygties $a_0 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t)$ sprendinio $x(t)$ atvaizdžio $X(s)$ formulę $X(s) = \frac{F(s) + a_0 s x(0) + a_1 x'(0) + a_2 x(0)}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$ ir, pasinaudodami ja, išspręskite lygtį:

$x''(t) + x(t) = 2 \sin t$, kai $x(0) = 0$ ir $x'(0) = -1$.

1.11.67. Įėjimo trajektorija $x(t)$ vaizduojama grafiškai (žiūr. 273 pav.).



273 pav.

Raskite išėjimo trajektoriją $y(t)$, jei jos priklausomybę nuo įėjimo trajektorijos aprašo diferencialinė lygtis $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9y(t) = x(t)$, kur $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ar galima sudaryti šios sistemos perdavimo funkciją, jei pradinės sąlygos nėra nulinės?

1.11.68. Pasinaudodami operacinio skaičiavimo metodais, išspręskite diferencialinių lygčių sistemą: $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$ kai $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

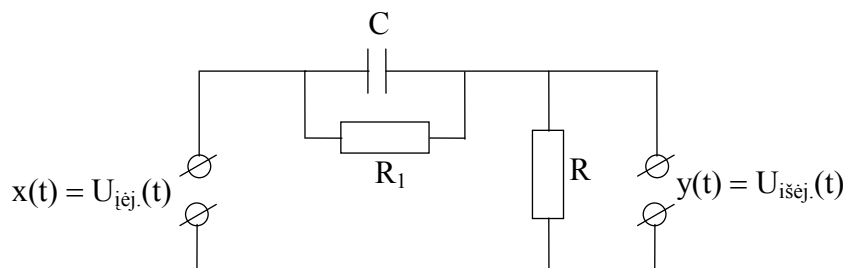
1.11.69. Pasinaudodami operaciniu skaičiavimu, išspręskite integralinę lygtį $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t) \cdot \varphi(t) dt$, t. y. raskite funkciją $\varphi(x)$.

1.11.70. Išspręskite diferencialinę lygtį su vėluojančiu argumentu $x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1$, kai $x(0) = x'(0) = 0$.

1.11.71. Pasinaudodami operacinio skaičiavimo metodais, išspręskite stygos diferencialinę lygtį $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ ir raskite stygos svyravimo dėsnį $u(x, t)$, jei stygos galai $x=0$ ir $x=\ell$ pritvirtinti ir judėti negali, o pradinė stygos taškų padėtis (jų nuokrypiai nuo pusiausvyros linijos) aprašoma lygybe $u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{\ell}$, $0 \leq \ell \leq 1$ ir pradiniai stygos taškų greičiai lygūs 0, t. y. $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$.

1.11.72. Sudarykite realios forsavimo (greito reagavimo) grandinės (žiūr. 274 pav.) perdavimo funkciją ir raskite jos išėjimo trajektoriją, kai, esant pradinėms nulinėms sąlygoms, jos įėjimo trajektorija yra $x(t) = A e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$, kur $A = \text{const} > 0$, $a = \text{const} > 0$, $\omega = \text{const} > 0$, $\varphi = \text{const}$.

Ar šiuo atveju gali būti taikomi amplitudinės – dažnuminės ir fazinės – dažnuminės charakteristikų metodai išėjimo amplitudei ir išėjimo pradinei fazei rasti?



274 pav.

1.11.73. Raskite greitojo reagavimo grandinės perėjimo charakteristiką $h(t)$ ir impulsinę perėjimo charakteristiką $w(t)$. Pasinaudodami Diuamelio integralu, raskite grandinės išėjimo trajektoriją, kai, esant pradinėms nulinėms sąlygoms, grandinės įėjimo trajektorija yra: 1) $x_1(t)=at+b$; 2) $x_2(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$.

1.11.74. Pasinaudodami Diuamelio formule, išspręskite diferencialinę lygtį: $x''-2x'=t^2e^2$, kai $x(0)=x'(0)=0$.

1.11.75. Raskite greito reagavimo grandinės amplitudinę – fazinę, amplitudinę – dažnuminę ir fazinę – dažnuminę charakteristikas. Pasinaudodami šiomis charakteristikomis, raskite greito reagavimo grandinės išėjimo trajektoriją nusistovėjusiame režime, kai grandinės įėjimo trajektorija yra $x(t)=A \sin(\omega t + \varphi)$.

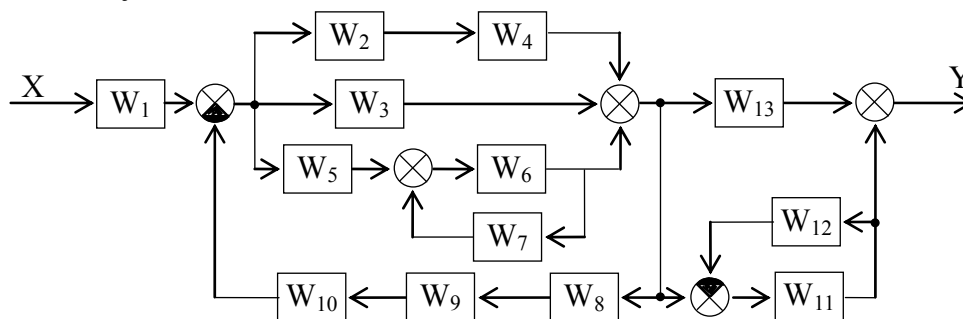
1.11.76. Integravimo grandelės (žiūr. 224 pav.) įėjimo trajektorija

$$x(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{jei } 2k\pi \leq t \leq (2k+1)\pi \\ -\sin t, & \text{jei } (2k+1)\pi \leq t \leq (2k+2)\pi \end{cases}, \text{ kur } k=0, 1, 2, 3, \dots$$

Sudarykite įėjimo trajektorijos $x(t)$ Furje eilutę ir, pasinaudodami amplitudine – dažnumine ir fazine – dažnumine integravimo grandelės charakteristikomis, raskite išėjimo trajektorijos nusistovėjusiame režime Furje eilutę.

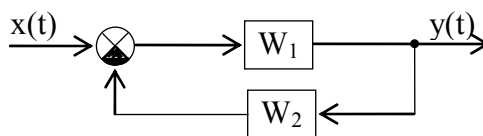
Raskite išėjimo trajektoriją perdavimo funkcijos metodu, o taip pat, pasinaudodami integravimo grandelės išoriniu matematiniu modeliu, ir palyginkite visus gautus rezultatus.

1.11.77. Raskite sudėtingos sistemos, pavaizduotos 275 pav., perdavimo funkciją, jei jos blokų perdavimo funkcijos W_1-W_{13} mums žinomos.



275 pav.

1.11.78. Raskite bloko W_1 (žiūr. 276 pav.) perdavimo funkciją $W_1(p)$, jei bloko W_2 ir visos sistemos perdavimo funkcijos $W_2(p)$ ir $W(p)$ mums žinomos.



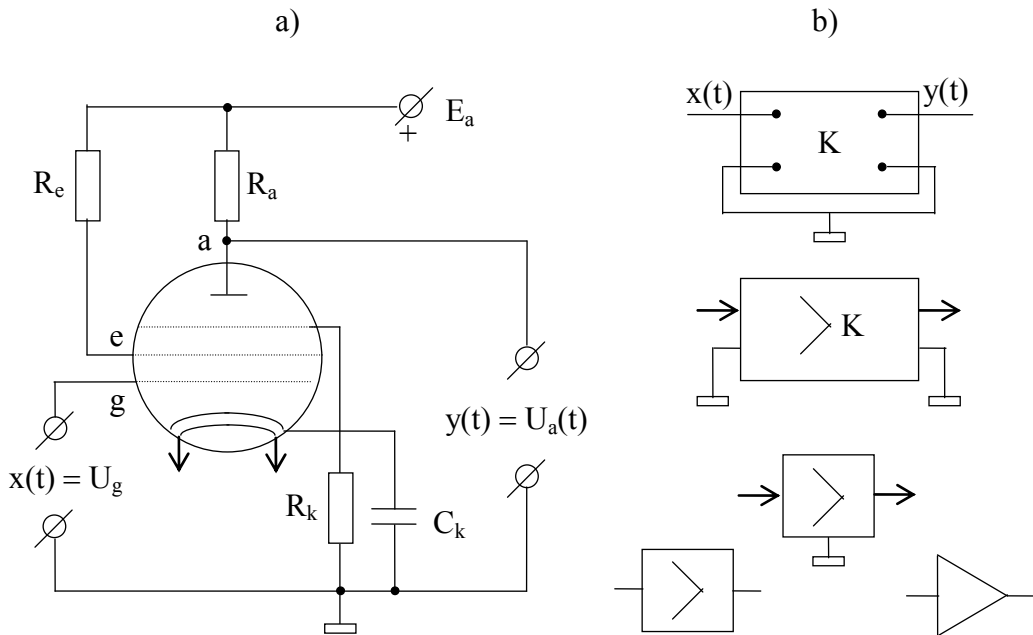
265 pav.

Raskite, kokia turėtų būti grįžtamojo ryšio bloko perdavimo funkcija $W_2(p)$, kad sistema taptų idealiu diferenciatoriumi su perdavimo funkcija $W(p)=p$, jei blokas $W_1(p)$ – diferencijavimo grandelė, kurioje $RC=1$. Kaip vadintųsi toks blokas $W_2(p)$? Koks jis šiuo atveju turėtų būti, jei sistemoje vietoje neigiamo grįžtamojo ryšio būtų teigiamas grįžtamasis ryšys? Kaip tuomet atrodytų sistemos $W(p)$ schema?

1.11.79.* Analoginėse skaičiavimo mašinose daugelio skaičiavimo blokų pagrindą sudaro pastovios srovės (pastovios įtampos) stiprintuvai – invertoriai. Jie stiprina įeinantį signalą (didina jo

amplitudę) K kartų ir keičia jo ženklą. Stiprintuvo – inverteriaus perdavimo funkcija $W(p)=-K$ (arba $W(p)=K$, kur $K=\text{const}<0$). Daugiakaskadiniai stiprintuvai gali stiprinti signalą tūkstančius ir net milijonus kartų, o jų įėjimo varža yra labai didelė, todėl jo įėjimo srovę praktiškai galima laikyti, lyginant su kitomis bloke tekančiomis srovėmis, lygiai nuliui.

277 „a“ pav. vaizduojama supaprastinta stiprintuvo – inverteriaus schema, susidedanti tik iš vieno stiprinimo kaskado. Jei nuosekliai sujungtume keletą kaskadų, tai bendras stiprinimo koeficientas K taptų lygus atskirų kaskadų stiprinimo koeficientų sandaugai: $K = \prod_{i=1}^n K_i$. Jei n – nelyginis skaičius, tai $K < 0$, o jei n – lyginis skaičius, tai $K > 0$.



277 pav.

277 „b“ pav. vaizduoja įvairius stiprintuvo žymėjimo būdus blokinėse schemose.

Įrodykite, kad stiprintuvas – inverterius, pavaizduotas 277 „a“ pav., keičia signalo ženklą, t. y., kad $\text{sgn}(\Delta y(t)) = -\text{sgn}(\Delta x(t))$, kur $\Delta x(t) = \Delta U_g(t)$, $\Delta y(t) = \Delta U_a(t)$ – radijo lempos tinklėlio g ir anodo a įtampų U_g ir U_a pokyčiai laiko intervale $(t, t + \Delta t)$.

Raskite, kaip stiprinimo koeficientas K priklauso nuo schemos parametrų: R_a – anodo grandinės varžos, R_k – katodo grandinės varžos, R_i – radijo lempos vidinės diferencialinės varžos (kur $R_i = \psi(U_a, U_g) = \lim_{\Delta i_a \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U_a}{\Delta i_a} \right)$, $U_g = \text{const}$), S – radijo lempos anodinės – tinklinės charakteristikos

$$i_a = f_a(U_g, U_a) \text{ (žiūr. 261 pav.) statumo koeficiento } S = \left[\frac{\partial f_a(U_g, U_a)}{\partial U_g} \right]_{U_a = \text{const}} = \varphi(U_a, U_g).$$

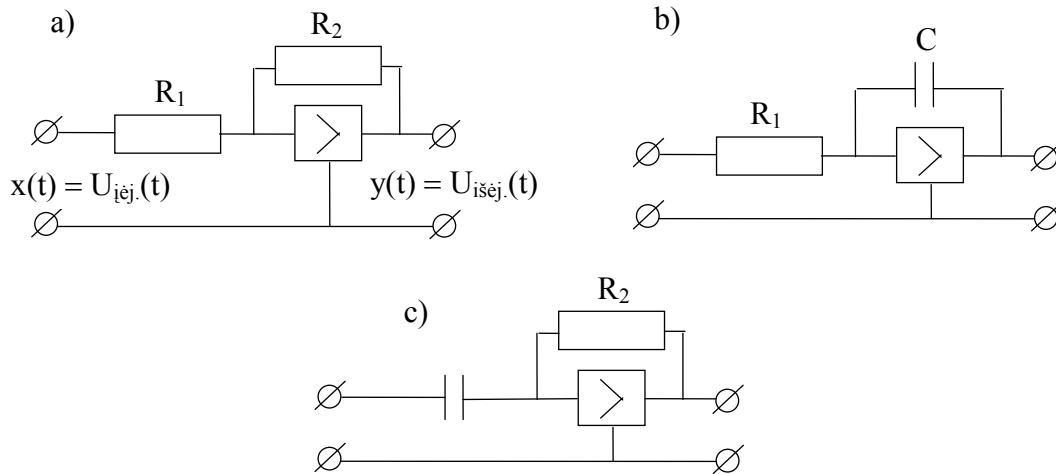
Paišinkite, kam schemeje, pavaizduotoje 277 „a“ pav. reikalingi: kondensatorius C_k , rezistorius R_k , ekranizuojančio tinklėlio grandinės rezistorius R_g , kam reikalingas antidinatroninis tinklėlis ir kodėl jis sujungtas su katodu, kodėl į radijo lempą virš valdančiojo tinklėlio g buvo įvestas ekranizuojantis tinklėlis e , kodėl kartais ekranizuojantį tinklėlį per kondensatorių C_e (277 pav. tas kondensatorius nepavaizduotas, nes pastovios srovės stiprintuvuose C_e gali ir nebūti, kaip gali kartais nebūti ir kondensatoriaus C_k) sujungia su katodu.

Po to pabandykite sudaryti realaus stiprintuvo, pavaizduoto 277 „a“ pav., realią perdavimo funkciją, atsižvelgdami į tai, kad radijo lempos elektrodai sudaro savo rūšies kondensatorius, su kurių talpa tenka skaitytis, ypač, jei stiprinamo įėjimo signalo Furje eilutėje yra aukšto dažnumo dėmenų, turinčių nemažą amplitudę.

Palyginkite gautąją realią perdavimo funkciją $W_r(p)$ su idealaus stiprintuvo – inverteriaus perdavimo funkcija $W_i = K$.

Įrodykite, jog blokų, pavaizduotų 278 pav., kuriuose stiprintuvas – inverterius įjungtas su neigiamu grįžtamojo ryšio (grįžtamojo ryšio neigiamumas atsiranda todėl, kad stiprintuvo – inverteriaus išėjimas turi priešingą ženklą, negu įėjimas), perdavimo funkcijos, esant pakankamai

dideliam stiprinimo koeficientui $|K|$ ir pakankamai didelei stiprintuvo įėjimo varžai, gali būti pakankamai tiksliai atvaizduotas formulėmis $W_a(p) = -\frac{R_2}{R_1}$, $W_b(p) = -\frac{1}{R_1 C p}$, $W_c(p) = -R_2 C p$.



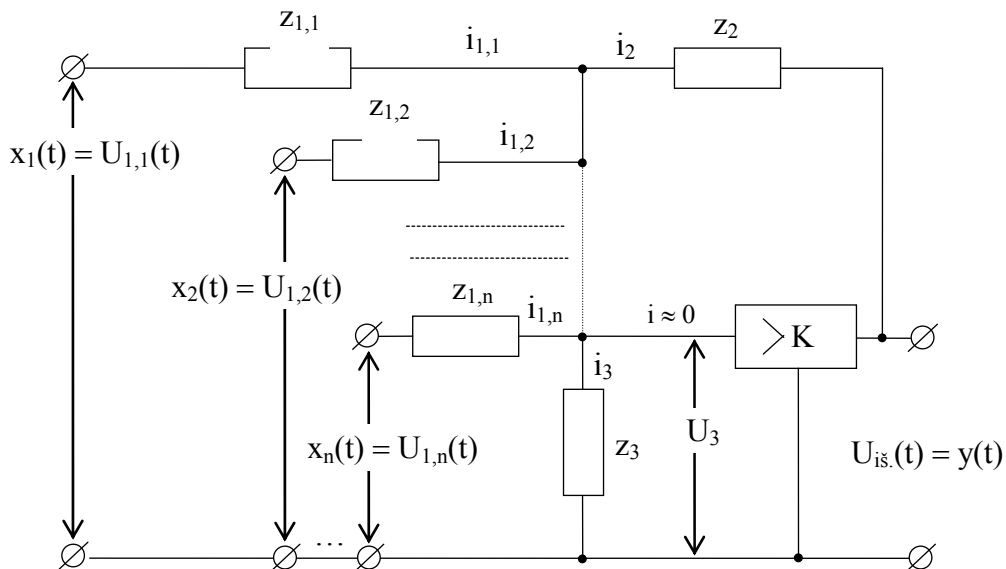
278 pav.

Kodėl pirmąjį bloką dažnai vadina masštabiniu (masštabavimo) bloku, antrąjį, jei $R_1 C = T_1 = 1$, – idealiu integratoriumi – invertoriumi, trečiąjį, jei $R_2 C = T_2 = 1$, – idealiu diferenciatoriumi – invertoriumi? Kaip pavadinti antrąjį ir trečiąjį blokus, kai $T_1 \neq 1$ ir $T_2 \neq 1$?

1.11.80. Įrodykite, kad schemas, pavaizduotos 279 pav., išėjimo atvaizdas $Y(p)$ gali būti

apskaičiuotas, naudojantis formule $Y(p) = U_{išėj.}(p) = \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{Z_2(p)}{Z_{1,i}(p)} x_i(p)}{1 - \frac{1}{K} \left(1 + \frac{Z_2(p)}{Z_3(p)} + \sum_{i=1}^n \frac{Z_2(p)}{Z_{1,i}(p)} \right)}$, kur $Z_{1,i}(p)$, $Z_2(p)$,

$Z_3(p)$ – „varžų“ $z_{1,i}$, z_2 , z_3 (jos gali būti rezistoriai, kondensatoriai, ritelės ir net sudėtingos kompleksinės „varžos“) atvaizdai.



279 pav.

Raskite $\lim_{|K| \rightarrow \infty} Y(p)$ ir nustatykite, kokią matematinę operaciją su savo įėjimo signalais vykdo schema, pavaizduota 279 pav., kai $|K| = \infty$, $z_{1,1} = z_{1,2} = \dots = z_{1,i} = \dots = z_{1,n} = z_2 = R$.

Kuo tampa ši operacija, kai $|K| = \infty$, elementai $z_{1,i}$ – vienodos aktyvios varžos, lygios R , o elementas z_2 – kondensatorius, kurio talpa C_2 , išreikšta faradais, yra lygi dydžiui $\frac{n}{R}$, išreikštam omais $^{-1}$?

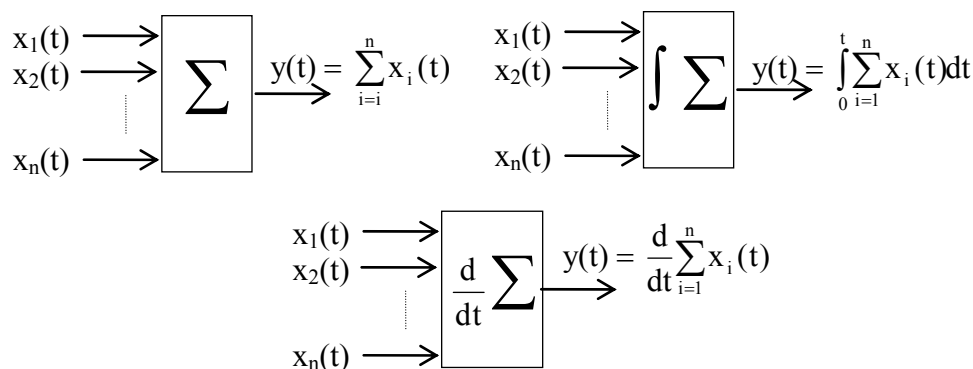
Raskite išėjimo trajektorijos priklausomybę nuo trajektorijų $x_i(t)$, kai $|K|=\infty$, $z_2=R_2$, o elementai $z_{1,i}$ – kondensatoriai, turintys vienodą talpą C , kurių kiekvienos dydis, išreikštas faradais, lygus dydžiui $\frac{1}{nR_2}$, išreikštam omais $^{-1}$.

Kokie turi būti schemas, pavaizduotos 279 pav., elementai, kad būtų tenkinamos šios lygybės:

$$1) y(t) = -\sum_{i=1}^n x_i(t); \quad 2) y(t) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) = -\bar{x}(t); \quad 3) y(t) = -\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t), \text{ kur } \alpha_i > 0 - \text{realūs skaičiai};$$

$$4) y(t) = -\int_0^t \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) dt; \quad 5) y(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)?$$

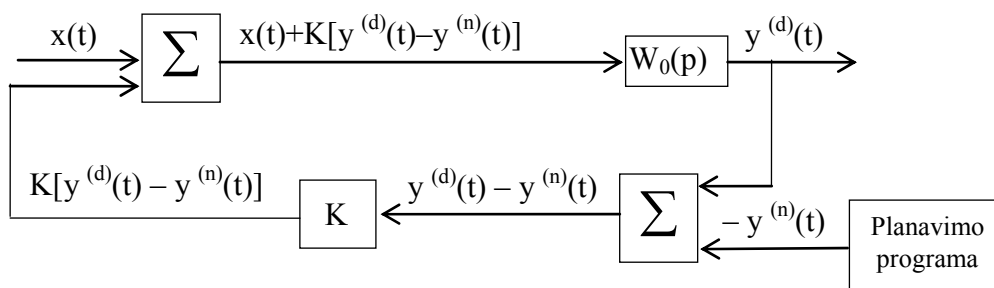
Ar galima schemoje, pavaizduotoje 279 pav., išmesti elementą z_3 , t. y. priimti, kad jis begaliniai didelė aktyvioji varža? Sudarykite blokų, pavaizduotų 280 pav., schemas.



280 pav.

Sudarykite bloko, realizuojančio operaciją $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$, schemą.

1.11.81. Įrodykite, jog sistemoje, susidedančioje iš objekto, turinčio perdavimo funkciją $W_0(p)$, kurio išėjimas grįžtamuoju ryšiu sujungtas su įėjimu taip, kaip parodyta 281 pav., kur $y^{(d)}(t)$ – deskriptyvioji (faktiškoji) objekto išėjimo trajektorija ir $y^{(n)}(t)$ – normatyvinė objekto išėjimo trajektorija, stiprinimo koeficiento K absoliučiai reikšmei artėjant prie begalybės, deskriptyvinė išėjimo trajektorija $y^{(d)}(t)$ artės prie normatyvinės $y^{(n)}(t)$.



281 pav.

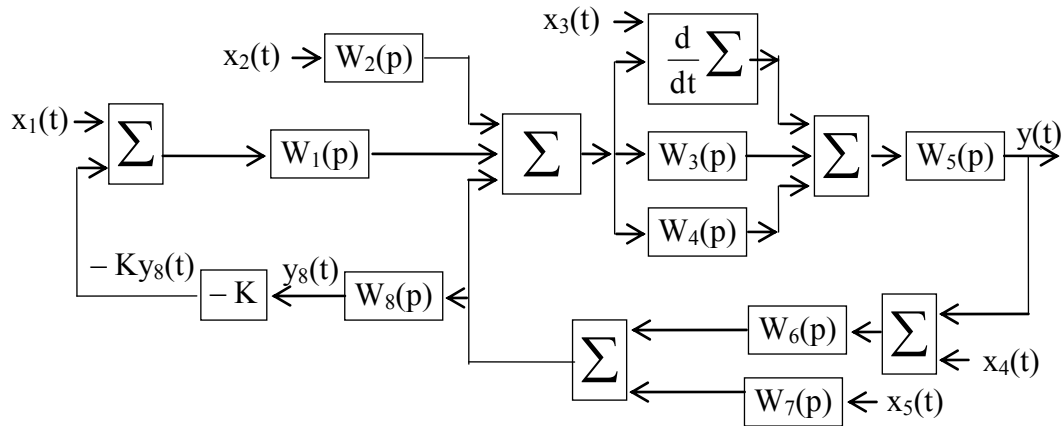
Sudarykite automatinio stabilizavimo, automatinio programinio valdymo ir automatinio sekimo sistemų blokines schemas.

1.11.82. Raskite sudėtingos sistemos, pavaizduotos 282 pav., išėjimo trajektorijos $y(t)$ atvaizdą $Y(p)$ dviem būdais: 1) tiesiogiai (nesinaudojant perdavimo funkcijų jungimo savybės), 2) raskdami kiekvieno įėjimo poveikį į kiekvieną išėjimą atskirai, o po to raskdami išėjimus, kaip tų poveikių algebrines sumas.

1.11.83. Atsižvelgdami į tai, jog $|z|<1$, raskite šias sumas: 1) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$; 2) $\sum_{k=r}^{\infty} z^k$, kur $r>0$;

$$3) \sum_{k=r}^n z^k, \text{ kur } n>r>0; \quad 4) \sum_{k=0}^{\infty} k z^k; \quad 5) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k; \quad 6) \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k; \quad 7) \sum_{k=0}^{\infty} k^4 z^k; \quad 8) \sum_{k=0}^{\infty} k^5 z^k; \quad 9) \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} z^k;$$

$$10) \sum_{k=0}^{\infty} k^n z^k.$$



282 pav.

1.11.84. Iš tolydžios funkcijos $x(t)$ galima gauti impulsinę funkciją $x_T^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$. Pavyzdžiui, jei $x_1(t)=t$, tai $x_{1,T}^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kT\delta(t-kT)$, o jei $x_2(t)=t^2$, tai $x_{2,T}^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2\delta(t-kT)$.

Jei pasirinktume $T=1$, tai gautume, jog $x_{1,1}^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\delta(t-k)$ ir $x_{2,1}^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\delta(t-k)$.

Kuo skiriasi $X_{1,T}^*(s)$ nuo $X_{1,1}^*(s)$ ir $X_{2,T}^*(s)$ nuo $X_{2,1}^*(s)$, o taip pat $X_{1,T}(z)$ nuo $X_{1,1}(z)$ ir $X_{2,T}(z)$ nuo $X_{2,1}(z)$?

Raskite perdavimo funkciją $W_T(z)$ tokio bloko, kuris transformuoja diskrečią įėjimo trajektoriją $\{kT\}$ į diskrečią išėjimo trajektoriją $\{(kT)^3\}$. Kuo skiriasi $W_T(z)$ nuo perdavimo funkcijos $W(z)$ tokio bloko, kuris transformuoja įėjimo trajektoriją $\{k^2\}$ į išėjimo trajektoriją $\{k^3\}$, kurios gaunamos iš trajektorijų $\{(kT)^2\}$ ir $\{(kT)^3\}$, kai $T=1$?

Tarkime, kad mes žinome perdavimo funkciją $W_T(z)$ bloko, kuris transformuoja diskrečią trajektoriją $\{x(kT)\}$ į diskrečią trajektoriją $\{y(kT)\}$, kur $\{x(kT)\}$ ir $\{y(kT)\}$ – kokios nors sekos. Kaip iš $W_T(z)$ gauti perdavimo funkciją $W(z)$, transformuojančią seką $\{x(k)\}$ į seką $\{y(k)\}$, kurios gaunamos iš sekų $\{x(kT)\}$ ir $\{y(kT)\}$, pakeitus t į 1 ? Ar galima žinant $W(z)$, rasti $W_T(z)$?

1.11.85. Nagrinėdami ryšį tarp Laplaso ir z – transformacijos, įrodėme, jog jei blokas, turintis perdavimo funkciją $W(s)$, transformuoja įėjimo trajektoriją $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ į išėjimo

trajektoriją $y(t)=y_1(t)$, tai blokas, turintis perdavimo funkciją $W^*(s)=L[w^*(t)]=L\left[\sum_{k=0}^{\infty} w(kT)\delta(t-kT)\right]$,

kur $L[w(t)]=W(s)$, transformuoja $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ į $y_1^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT)\delta(t-kT)$.

Iliustruokite šį teiginį pavyzdžiu, kai $W(s)=\frac{1}{s+a}$ ir $x(t)=t$, t. y., kai $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kT\delta(t-kT)$ ir $w(t)=e^{-at}$.

Kas pasikeis šioje iliustracijoje, jei įėjimo trajektorijomis taps $x(t)=t^2$ ir $x_T^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2\delta(t-kT)$?

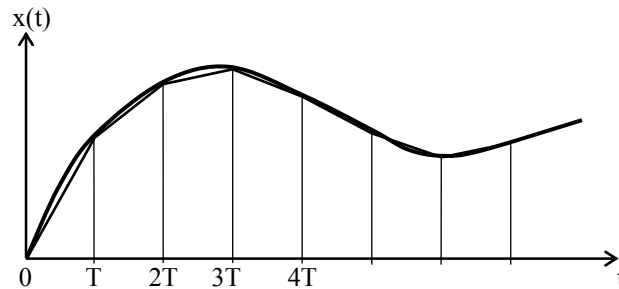
Kokie pasikeitimai įvyks, kai impulsinė įėjimo trajektorija taps $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\delta(t-k)$?

1.11.86. Jei blokas, turintis perdavimo funkciją $W(s)$, transformuoja $x(t)=t^2$ į $y(t)=t^3$, tai ar transformuos blokas, turintis perdavimo funkciją $W^*(s)=L\left[\sum_{k=0}^{\infty} w(kT)\delta(t-kT)\right]$, įėjimo trajektoriją

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2 \delta(t-kT) \text{ į išėjimo trajektoriją } y^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} (kT)^3 \delta(t-kT) ? \text{ Kodėl?}$$

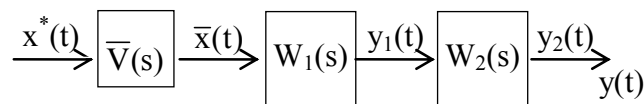
1.11.87. Interpoliatoriaus – fiksatoriaus perdavimo funkcija $\bar{V}(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$. Jis transformuoja įėjimo trajektoriją $x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ į išėjimo trajektoriją $y(t)=\bar{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\{u[t-kT]-u[t-(k+1)T]\}$. Į kokią išėjimo trajektoriją fiksatorius transformuos įėjimo trajektoriją $x(t)$, kur $x(t)$ – tolydi laiko funkcija?

Raskite interpoliatoriaus, transformuojančio įėjimą $x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ į išėjimą $y(t)=\hat{x}(t)$, perdavimo funkciją $\hat{V}(s)$, kur $\hat{x}(t)$ – laužtinė, aproksimuojanti trajektorijas $x^*(t)$ ir $x(t)$ (žiūr. 283 pav.).



283 pav.

1.11.88. Schema, pavaizduota 284 pav., transformuoja įėjimo trajektoriją $x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ į išėjimo trajektoriją $y(t)$.



284 pav.

Bendra visos sistemos perdavimo funkcija $W(s)=\bar{V}(s)\cdot W_1(s)\cdot W_2(s)$. Buvo įrodyta, jog jei $W(s)$ transformuoja $x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$ į $y(t)$, tai perdavimo funkcija $W^*(s)=L[w^*(t)]=L\left[\sum_{k=0}^{\infty} w(kT)\delta(t-kT)\right]$ transformuoja $x^*(t)$ į $y^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT)$. Raskite $W^*(s)$ šiuo atveju ir paaiškinkite, kodėl $W^*(s)=(1-e^{-sT})\cdot\left[\frac{W_1(s)W_2(s)}{s}\right]^*$. Raskite $\bar{V}^*(s)=\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\right]^*$.

Koks būtų sistemos, pavaizduotos 284 pav., kiekvieno bloko išėjimas, jei bendras sistemos (ir bloko $\bar{V}(s)$) įėjimas būtų lygus $\delta(t)$?

Raskite visos sistemos, turinčios perdavimo funkciją $W(s)=\bar{V}(s)\cdot W_1(s)\cdot W_2(s)$, perėjimo charakteristiką $h(t)$ ir impulsinę perėjimo charakteristiką $w(t)$. Pabandykite išreikšti $h(t)$ ir $w(t)$ per blokų, turinčių perdavimo funkcijas $W_1(s)$ ir $W_2(s)$, perėjimo charakteristikas $h_1(t)$ ir $h_2(t)$, o taip pat per $w_1(t)$ ir $w_2(t)$.

1.11.89. Sistemos, kurios perdavimo funkcija $W(s)=1-e^{-sT}$, įėjimo trajektorija yra $x(t)=a\sum_{k=0}^{\infty}u(t-kT)$, kur $u(t)=\begin{cases} 0, & \text{jei } t \leq -0 \\ 1, & \text{jei } t \geq +0 \end{cases}$.

Sudarykite įėjimo trajektorijos $x(t)$ grafiką, raskite įėjimo trajektorijos atvaizdą $X(s)=L\left[a\sum_{k=0}^{\infty}u(t-kT)\right]$, o taip pat šią įėjimo trajektoriją atitinkančią išėjimo trajektoriją $y(t)$.

Kokia bus sistemos $W(s)$ išėjimo trajektorija, jei įėjimo trajektorija bus $x(t)=a\sum_{k=0}^{\infty}(t-kT)$?

Nubrėžkite įėjimo ir išėjimo trajektorijų grafikus.

Kokia operacijos, kurią vykdo blokai $W(s)=1-e^{-sT}$ ir $W(z)=1-z$ su savo įėjimų trajektorijomis, esmė?

Kaip transformuos blokai, kurių perdavimo funkcijos yra „atvirkštinės“, t. y. $W(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}$ ir $W(z)=\frac{1}{1-z}$, įėjimo trajektorijas $x(t)=a\cdot u(t)$ ir $x(t)=\{a\}$? Raskite atitinkamas išėjimo trajektorijas.

Kaip blokas $W(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}$ transformuos įėjimo trajektoriją $x(t)=at\cdot u(t)$, o blokas $W(z)=\frac{1}{1-z}$ – įėjimo trajektoriją $\{x(kT)\}=\{akT\}$?

1.11.90. Sistema turi vieną įėjimą ir vieną išėjimą. Jos išorinio matematinio modelio perėjimo ir išėjimo funkcijos yra tiesinės, t. y. $\frac{dz}{dt}=f(z(t), x(t))=az(t)+bx(t)$ ir $y=\varphi(z, x)=cz+dx$, kur $a=\text{const}$, $b=\text{const}$, $c=\text{const}$, $d=\text{const}$, $z(0)=0$.

Raskite šios sistemos perdavimo funkciją $W(p)$ ir jos perėjimo charakteristiką $h(t)$ bei impulsinę perėjimo charakteristiką $w(t)$. Raskite šios sistemos išėjimo trajektorijos $y(t)$ priklausomybę nuo įėjimo trajektorijos $x(t)$. Kaip pasikeis ši priklausomybė, jei $z(0)=a>0$?

1.11.91. Sistemos įėjimai, išėjimai ir būsenos yra vektoriai $\vec{x}(t)=(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $\vec{y}(t)=(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$, $\vec{z}(t)=(z_1(t), z_2(t), \dots, z_r(t))$, todėl sistemos perėjimų ir išėjimų funkcijos taip pat yra vektorinės: $\frac{d\vec{z}}{dt}=\vec{f}(\vec{z}(t), \vec{x}(t))$, $\vec{y}=\vec{\varphi}(\vec{z}, \vec{x})$. Jei sistemos pradinė būsena $\vec{z}(0)=\vec{0}=(0, 0, \dots, 0)$ ir funkcijos $\vec{f}$ ir $\vec{\varphi}$ yra tiesinės, t. y., jei $\vec{f}(\vec{z}, \vec{x})=A\vec{z}+B\vec{x}$ ir $\vec{\varphi}(\vec{z}, \vec{x})=C\vec{z}+D\vec{x}$, kur A, B, C ir D –

pastovios matricos: $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,r} \\ - & - & - \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,n} \\ - & - & - \\ b_{r,1} & \dots & b_{r,n} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,r} \\ c_{2,1} & \dots & c_{2,r} \\ - & - & - \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,r} \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & \dots & d_{2,n} \\ - & - & - \\ d_{m,1} & \dots & d_{m,n} \end{pmatrix}$, tai galima sudaryti matricinę perdavimo funkciją $W(s)=\frac{\vec{Y}(s)}{\vec{X}(s)}$, kur $\vec{X}(s)=(X_1(s),$

$X_2(s), \dots, X_n(s))$, $\vec{Y}(s)=(Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_m(s))$.

Sudarykite matricinę perdavimo funkciją, kai $n=2$, $m=2$ ir $r=2$.

Raskite sistemos išėjimo trajektorijų $y_1(t)$ ir $y_2(t)$ atvaizdus $Y_1(s)$ ir $Y_2(s)$ tuo atveju, kai $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ir $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Raskite $y_1(t)$ ir $y_2(t)$, jei $x_1(t)=a\cdot u(t)$, $x_2(t)=bt\cdot u(t)$, kur $a=\text{const}$, $b=\text{const}$.

Sudarykite matricinę perdavimo funkciją bendram atvejui, t. y. išreikškite matricinę perdavimo funkciją $W(s)$ per matricas A, B, C ir D .

Išveskite formules išėjimo trajektorijoms $\vec{y}(t)=(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$, išreiškiančias šių trajektorijų priklausomybę nuo įėjimo trajektorijų $\vec{x}(t)=(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ir nuo matricių A, B, C ir D .

Kaip pasikeistų tos formulės, jei pradinė būseną $\bar{z}(0)$ nebūtų lygi $\bar{0}=(0, 0, \dots, 0)$?

1.11.92. Ar galima rasti sistemos, turinčios vieną įėjimą ir vieną išėjimą, perdavimo funkciją $W(s)$, kai tos sistemos perėjimo ir išėjimo funkcijos nėra tiesinės? Kodėl?

Savo atsakymą iliustruokite pavyzdžiais ir pagrįskite matematiniais įrodymais.

1.11.93. Ar galima sudaryti diskrečios sistemos perdavimo funkciją, jei $z(0)=0$ ir jos išorinis matematinis modelis yra tiesinis, t. y., jei $z[(k+1)T]=az(kT)+bx(kT)$, $y(kT)=cz(kT)+dx(kT)$, kur $a=\text{const}$, $b=\text{const}$, $c=\text{const}$, $d=\text{const}$?

Savo atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.11.94. Ar galima sudaryti diskrečios determinuotos sistemos matricinę perdavimo funkciją, jei tos sistemos išorinis matematinis modelis yra tiesinis, t. y., jei $\bar{z}[(k+1)T]=A\bar{z}(kT)+B\bar{x}(kT)$, $\bar{y}(kT)=C\bar{z}(kT)+D\bar{x}(kT)$, kur A , B , C ir D – pastovios matricos?

Savo atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.11.95. Įrodykite, kad dviejų nepriklausomų atsitiktinių procesų sumos koreliacinis atvaizdas yra lygus tų procesų koreliacinių atvaizdų sumai.

1.11.96. Įrodykite, kad determinuota sistema, turinti perdavimo funkciją $W(z)$, transformuoja atsitiktines įėjimo trajektorijas $\{x^{(i)}(kT)\}$ į atsitiktines išėjimo trajektorijas $\{y^{(i)}(kT)\}$ taip, jog tų

trajektorijų vidurkio $\{m_y(kT)\}=\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y^{(i)}(kT)\right\}$ atvaizdas $M_y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y^{(i)}(kT)\right]z^k=$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{k=0}^{\infty} y^{(i)}(kT)z^k=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y^{(i)}(z) \text{ yra lygus įėjimo trajektorijų vidurkio } \{m_x(kT)\}=\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x^{(i)}(kT)\right\}$$

atvaizdai $M_x(z)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X^{(i)}(z)$, padauginant iš perdavimo funkcijos $W(z)$.

1.11.97. Įrodykite, jog determinuota sistema, turinti perdavimo funkciją $W(z)$, transformuoja atsitiktines stacionarias įėjimo trajektorijas $\{x^{(i)}(kT)\}$ į atsitiktines išėjimo trajektorijas $\{y^{(i)}(kT)\}$ taip, jog išėjimo trajektorijų koreliacinis atvaizdas $\Psi_y(z)$ gali būti surastas, pasinaudojant formule $\Psi_y(z)=W(z)\cdot W(z^{-1})\cdot\Psi_x(z)$, kur $\Psi_x(z)$ – įėjimo trajektorijų koreliacinis atvaizdas.

1.11.98. Parodykite, kaip žinodami perdavimo funkciją $W(z)$, galime sudaryti programą, pagal kurią kompiuteris transformuotų įėjimo trajektorijas $\{x(kT)\}$ į išėjimo trajektorijas $\{y(kT)\}$ lygiai taip, kaip tas trajektorijas transformuotų blokas, turintis perdavimo funkciją $W(z)$.

Sudarykite programą, transformuojančią $\{x(kT)\}=\{(kT)^2\}$ į $\{y(kT)\}=\{(kT)^3\}$.

1.11.99. Tarkime, jog sistemos, pavaizduotos 282 pav., visi blokai diskretūs ir jų perdavimo funkcijos $W(z)$ bei įėjimų trajektorijos $\{x_1(kT)\}$, $\{x_2(kT)\}$, $\{x_3(kT)\}$, $\{x_4(kT)\}$ ir $\{x_5(kT)\}$ yra žinomos. Sudarykite programą, pagal kurią kompiuteris galėtų apskaičiuoti kiekvieną įėjimo trajektoriją atitinkantį išėjimo atvaizdą $Y(z)$, blokinę schemą.

1.11.100. Sudarykite programą, naudodamiesi kuria ir žinodami atsitiktines įėjimo trajektorijas $\{x^{(i)}(kT)\}$, galėtume apskaičiuoti koreliacijos koeficientus $\psi_x(r)$ ir rasti koreliacinį įėjimo atvaizdą $\Psi_x(z)$.

Patikrinkite programos darbą, naudodamiesi koku nors konkrečiu pavyzdžiu.

Kaip pasinaudoti šia programa, ieškant $\Psi_y(z)$.

1.11.101. Sudarykite programą, pagal kurią kompiuteris, turėdamas informaciją apie pradinę medžiagų sandėlio būseną ir apie visas išorines įėjimo trajektorijas, galėtų apskaičiuoti visų sandėlio elementų visas trajektorijas ir visas sandėlio išorinio išėjimo ir fazines trajektorijas.

Ar galima buvo sudaryti sandėlio ir jo elementų perdavimo funkcijas? Kodėl?

1.11.102.* Sudarykite dvejetainio nuoseklaus veikimo aritmetinio sumatoriaus schemą radijo elementų (rezistorių, kondensatorių, diodų ir triodų) lygyje ir parodykite, jog ši schema realizuoja dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus perėjimo ir išėjimo funkcijas ir išveda dviejų dvejetainių skaičių sumą. Ar galima tokiam sumatoriui sudaryti perdavimo funkciją?

1.11.103.* Sudarykite dvejetainę lygiagretaus veikimo aritmetinio sumatoriaus schemą rezistorių, kondensatorių, diodų ir triodų lygyje ir parodykite, jog ši schema realizuoja dviejų dvejetainių teigiamų n -skilčių skaičių sudėties algoritmą.

Papildykite šią schemą taip, kad sumatorius taptų algebriniu ir galėtų sudėti skirtingų ženklų dvejetainius n -skilčius skaičius, t. y. galėtų realizuoti ne tik dvejetainį n -skilčių skaičių sudėties, bet ir atimties algoritmą.

Ar galima tokiam algebriniam sumatoriui sudaryti perdavimo funkciją?

1.11.104. Susipažinkite su Aušros Bandzevičiūtės referatu „Operacinis skaičiavimas“. Ką naujo ir naudingo sužinojote, perskaitę šį referatą? Kuo, Jūsų nuomone, būtų tikslinga papildyti šį referatą? Parašykite recenziją A. Bandzevičiūtės referatui.