

1.11.10. Elektromagnetinių virpesių kontūro funkcionavimo matematinis aprašymas ir sisteminis nagrinėjimas

Perdavimo funkcijos metodo ir operacinio skaičiavimo taikymą pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu. Kartu tai bus ir **sisteminės analizės** pavyzdys.

Nagrinėsime elektromagnetinių virpesių kontūrą, pavaizduotą 43 pav. Jo išorinis matematinis modelis buvo sudarytas 1.4.8. skyrelyje.

$$\text{Iš Kirchhofo antrojo dėsnio išplaukia: } u_{\text{iėj.}} = u_L + u_C + u_R, \text{ kur } u_R = Ri(t) = R \frac{dq_C(t)}{dt}, \quad u_C = \frac{q_C(t)}{C}, \\ u_L = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d^2 q_C(t)}{dt^2}.$$

Procesus, vykstančius kontūre, matematiškai galima aprašyti įvairiai:

- kondensatoriaus krūvio q_C kitimo atžvilgiu: $L \frac{d^2 q_C(t)}{dt^2} + R \frac{dq_C(t)}{dt} + \frac{q_C(t)}{C} = E(t)$, kur $E(t)$ – įėjimo įtampa $u_{\text{iėj.}}$;
- kondensatoriaus įtampos $u_C(t)$ kitimo atžvilgiu: $LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E(t)$;
- srovės $i(t)$, tekančios kontūre, kitimo atžvilgiu: $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} (q_C(0) + \int_0^t i(t) dt) = E(t)$.

Visos trys lygtys aprašo tą patį procesą ir skiriasi tik savo panaudojimo patogumu, išsirinkus tą ar kitą virpesių kontūro charakteristiką kaip jo išėjimo charakteristiką.

Kai kontūro išėjimu laikoma įtampa $u_C(t)$, „nuimama“ voltmetru nuo kontūro kondensatoriaus, tai patogiausia yra antroji lygtis, kuri tuomet gali būti perrašyta taip: $LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$.

Kai kontūro išėjimu laikoma srovė $i(t)$, tekanti kontūre ir „nuimama“ ampermetru nuo varžos R , ar įtampa $u_R = Ri(t)$, tai patogesnė yra trečioji lygtis.

Pirmoji lygtis, būdama teoriškai ekvivalenti trečiajai ir antrajai, būtų labiausiai patogi, jei kontūro išėjimu laikytume kondensatoriaus elektrinį krūvį q_C . Tačiau šią charakteristiką matuoti praktikoje nėra taip patogų, kaip matuoti įtampą u_C arba srovę i .

Elektromagnetinis virpesių kontūras – dar pakankamai paprasta sistema, ir todėl matematinius eksperimentus dar galima vykdyti, naudojantis tik tradicinės (klasikinės) matematinės analizės metodais, tame tarpe perdavimo funkcijų ir operacinio skaičiavimo bei diferencialinių lygčių sistemų sprendimo metodais. Sudėtingesnių sistemų atveju tokių metodų jau nebepakaktų ir tektų naudotis imitacinio modeliavimo metodais, apie kuriuos bus kalbama 1.13. ir 1.14. skyriuose. Tačiau, prieš pereinant prie imitacinio modeliavimo metodų panaudojimo sudėtingų sistemų funkcionavimo sisteminėje analizėje, naudinga panagrinėti paprastesnį sisteminės analizės atvejį, kada galime apsiriboti klasikinės matematikos aparatu. Tuo tikslu ir buvo pasirinktas toks nagrinėjimo objektas kaip elektromagnetinių virpesių kontūras.

Kadangi šio skyrelio tikslas – kuo pilniau pailiustruoti perdavimo funkcijų ir operacinio skaičiavimo panaudojimą sisteminėje analizėje, o taip pat – parodyti, kad tokią analizę galima atlikti įvairiais būdais, gaunant vienas kitą papildančius ir vienas kitam neprieštaraujančius rezultatus, tai mes analizės metu šiame skyrelyje naudosimės įvairiais elektromagnetinių virpesių kontūro matematiniais modeliais (įvairiomis jį aprašančiomis diferencialinėmis lygtimis) ir nagrinėsime, kaip keičiasi kontūro išėjimo trajektorija $y(t)$, keičiantis įėjimo trajektorijai $x(t)$, modelio parametrų R , C ir L reikšmėms bei pradinėms sąlygoms.

Pradžioje nagrinėsime kontūre galinčius vykti procesus tuo atveju, kai $x(t) = U_0 = \text{const.}$ ir $y(t) = u_C(t)$, t. y., kada patogiausia naudotis antrąja kontūrą aprašančia formule $LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{q_C(t)}{C} = U_0$.

Šį atvejį pažymėsime numeriu 1.11.10.1. ir, keisdami modelio parametrų reikšmes bei pradines sąlygas, iš jo gausime atvejus 1.11.10.1.1., 1.11.10.1.2., 1.11.10.1.3. ir 1.11.10.1.4.

Po to pereisime prie atvejo 1.11.10.2., kuriame kontūro išėjimu $y(t)$ pasirinksiame elektros srovę $i(t)$ kontūre, dėl ko mums bus patogiau naudotis trečiąja lygtimi, aprašančia elektromagnetinių virpesių kontūrą.

Keisdami kontūro parametrų reikšmes, iš atvejo 1.11.10.2 gausime atvejus 1.11.10.2.1, 1.11.10.2.2 ir 1.11.10.2.3.

1.11.10. skyrelio pabaigoje pereisime prie šiek tiek sudėtingesnio atvejo, kai $x(t)=E_0\sin\omega t$, $y(t)=u_c(t)$, kuri pažymėsime numeriu 1.11.10.3.

Keisdami modelio parametrų reikšmes, iš šio atvejo gausime atvejus 1.11.10.3.1, 1.11.10.3.2, 1.11.10.3.3 ir 1.11.10.3.4, o apibendrindami gautus rezultatus – atvejį 1.11.10.3.5.

1.11.10.1. Atvejis $y(t)=u_c(t)$, $x(t)=U_0=const$

Laikysime kontūro išėjimu $y(t)$ įtampą $u_c(t)$ ir todėl naudosimės antrąja lygtimi, t. y. lygtimi „b“.

Tuomet, pereidami nuo funkcijų – originalų prie jų Laplaso atvaizdų, gausime:

$$1) LC[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+RC[sY(s)-y(0)]+Y(s)=X(s),$$

$$2) Y(s)=\frac{X(s)+LC[sy(0)+y'(0)]+RCy(0)}{LCs^2+RCs+1}=\frac{X(s)+T_2^2[sy(0)+y'(0)]+T_1y(0)}{T_2^2s^2+T_1s+1}=$$

$$=\frac{X(s)+T_2^2[sy(0)+y'(0)]+T_1y(0)}{T_2^2(s-s_1)(s-s_2)}.$$

$$\text{Čia } T_2^2=LC, T_1=RC, s_1=-\frac{T_1-\sqrt{T_1^2-4T_2^2}}{2T_2^2}=-\alpha-\beta, s_2=-\frac{T_1+\sqrt{T_1^2-4T_2^2}}{2T_2^2}=-\alpha+\beta, \alpha=\frac{T_1}{2T_2^2},$$

$$\beta=\frac{\sqrt{T_1^2-4T_2^2}}{2T_2^2}.$$

Kaip matome, virpesių kontūrą aprašančios antros eilės diferencialinės lygties konkretaus sprendinio išrinkimui reikia žinoti dvi pradinės sąlygas, t. y. $y(0)$ ir $y'(0)$ reikšmes. Tai sutampa su šios priemonės pradžioje (žiūr. 1.3. skyrių) suformuluotu teiginiu, kad **sistemų, aprašomų n – osios eilės diferencialine lygtimi, būsenos vektorius turi turėti n nepriklausomų koordinačių**. Todėl virpesių kontūro pradinę būseną gali aprašyti vektorius $\bar{z}(0)=(z_1(0), z_2(0))$, kur $z_1(0)=y(0)$, $z_2(0)=y'(0)$.

Žinodami $y(0)$, $y'(0)$ ir įėjimo atvaizdą $X(s)$, mes galėtume, grįždami nuo atvaizdų prie funkcijų – originalų, surasti ir išėjimo trajektoriją $y(t)$.

$$\text{Kai } x(t)=E(t)=U_0=const, \text{ tai } X(s)=\frac{U_0}{s} \text{ ir } Y(s)=\frac{U_0}{T_2^2} \cdot \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} + y(0) \frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)} +$$

$$+ \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} \cdot \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Priklausomai nuo lygties $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$ diskriminanto $T_1^2 - 4T_2^2$ reikšmės galimi įvairūs virpesių kontūro išėjimai $y(t)$. **Išnagrinėsime galimus du atvejus: a) $T_1^2 - 4T_2^2 \neq 0$, b) $T_1^2 - 4T_2^2 = 0$.**

$$\text{a) Kai } T_1^2 - T_2^2 \neq 0, \text{ tai } s_1 \neq s_2 \text{ ir } Y(s)=\frac{U_0}{T_2^2} \cdot \left(\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} \right) + y(0) \times$$

$$\times \left(\frac{B_1}{s-s_1} + \frac{B_2}{s-s_2} \right) + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} \cdot \left(\frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} \right), \text{ kur } A_0 = \frac{1}{s_1 \cdot s_2} = T_2^2, A_1 = \frac{1}{s_1(s_1-s_2)} =$$

$$= \frac{1}{2\beta(\alpha+\beta)}, A_2 = \frac{1}{s_2(s_2-s_1)} = -\frac{1}{2\beta(\alpha-\beta)}, B_1 = \frac{s_1}{s_1-s_2} = \frac{\alpha+\beta}{s_1-s_2} = \frac{\alpha+\beta}{2\beta}, B_2 = \frac{s_2}{s_2-s_1} = \frac{-\alpha+\beta}{2\beta},$$

$$C_1 = \frac{1}{s_1-s_2} = -\frac{1}{2\beta}, C_2 = \frac{1}{s_2-s_1} = \frac{1}{2\beta}.$$

$$\text{Todėl } y(t)=\frac{U_0}{T_2^2} \cdot (A_0 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}) + y(0) (B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}) + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} \times$$

$$\begin{aligned} \times (C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}) &= U_0 + e^{s_1 t} \left(\frac{U_0}{T_2^2} A_1 + y(0) B_1 + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} C_1 \right) + e^{s_2 t} \left(\frac{U_0}{T_2^2} A_2 + y(0) B_2 + \right. \\ &\left. + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} C_2 \right) = U_0 + Q_1(0) e^{s_1 t} + Q_2(0) e^{s_2 t} = U_0 + e^{-\alpha t} [Q_1(0) e^{-\beta t} + Q_2(0) e^{\beta t}], \text{ kur } Q_1(0) = \\ &= \frac{U_0}{T_2^2} A_1 + y(0) B_1 + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} C_1 = \frac{[U_0 - y(0)] T_1 - 2 T_2^2 y'(0)}{2 \sqrt{T_1^2 - 4 T_2^2}} - \frac{U_0 - y(0)}{2}, Q_2(0) = \frac{U_0}{T_2^2} A_2 + \\ &+ y(0) B_2 + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2} C_2 = -\frac{(U_0 - y_0) T_1 - 2 T_2^2 y'(0)}{2 \sqrt{T_1^2 - 4 T_2^2}} - \frac{U_0 - y(0)}{2}. \end{aligned}$$

Pasižymėję $\frac{[U_0 - y(0)] T_1 - 2 T_2^2 y'(0)}{2 \sqrt{T_1^2 - 4 T_2^2}} = \frac{[U_0 - y(0)] \alpha - y'(0)}{2 \beta} = M$ ir $\frac{U_0 - y(0)}{2} = N$, gauname:

$$Q_1(0) = M - N, Q_2(0) = -(M + N), y(t) = U_0 + e^{-\alpha t} [(M - N) e^{-\beta t} - (M + N) e^{\beta t}] = U_0 - e^{-\alpha t} [(M + N) e^{\beta t} - (M - N) e^{-\beta t}] = U_0 - e^{-\alpha t} [M(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) + N(e^{\beta t} + e^{-\beta t})] = U_0 - 2 e^{-\alpha t} [M \sinh \beta t + N \cosh \beta t].$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= Q_1(0) s_1 e^{s_1 t} + Q_2(0) s_2 e^{s_2 t} = e^{-\alpha t} [(M - N)(-\alpha - \beta) e^{-\beta t} - (M + N)(-\alpha + \beta) e^{\beta t}] = \\ &= e^{-\alpha t} [(M + N)(\alpha - \beta) e^{\beta t} - (M - N)(\alpha + \beta) e^{-\beta t}] = e^{-\alpha t} [(M \alpha - N \beta)(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) - (M \beta - N \alpha)(e^{\beta t} + e^{-\beta t})], \\ y''(t) &= Q_1(0) s_1^2 e^{s_1 t} + Q_2(0) s_2^2 e^{s_2 t}. \end{aligned}$$

Gautas sprendinys tenkina pradines sąlygas ir diferencialinę lygtį $LCy''(t) + RCy'(t) + y(t) = U_0$:

$$1) y(0) = U_0 - 2N = U_0 - 2 \frac{U_0 - y(0)}{2} = y(0);$$

$$2) y'(0) = -2(M\beta - N\alpha) = [U_0 - y(0)] \cdot \frac{T_1}{2T_2^2} - \frac{(U_0 - y(0))T_1 - 2T_2^2 y'(0)}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2} = \frac{1}{2T_2^2} \{ [U_0 - y(0)]T_1 - [U_0 - y(0)]T_1 + 2T_2^2 y'(0) \} = y'(0);$$

$$\begin{aligned} 3) LCy''(t) + RCy'(t) + y(t) &= LC[Q_1(0)s_1^2 e^{s_1 t} + Q_2(0)s_2^2 e^{s_2 t}] + RC[Q_1(0)s_1 e^{s_1 t} + \\ &+ Q_2(0)s_2 e^{s_2 t}] + U_0 + Q_1(0)e^{s_1 t} + Q_2(0)e^{s_2 t} = U_0 + e^{s_1 t} Q_1(0)[LCs_1^2 + RCs_1 + 1] + e^{s_2 t} Q_2(0) \times \\ &\times [LCs_2^2 + RCs_2 + 1] = U_0, \text{ nes } LCs_1^2 + RCs_1 + 1 = 0 \text{ ir } LCs_2^2 + RCs_2 + 1 = 0, \text{ kadangi } s_1 \text{ ir } s_2 \text{ yra lygties} \\ &LCs^2 + RCs + 1 = 0 \text{ šaknys.} \end{aligned}$$

Šis atvejis, t. y. atvejis $(T_1^2 - 4T_2^2) \neq 0$, priklauso nuo diskriminanto ženklo, t. y. nuo to, ar β yra realus, ar menamas skaičius, suskyla dar į du atvejus:

$$1) T_1^2 - 4T_2^2 > 0, \text{ t. y. } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$2) T_1^2 - 4T_2^2 < 0, \text{ t. y. } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Juos nagrinėsime 1.11.10.1.1. ir 1.11.10.1.2. skyreliuose.

b) Kai $T_1^2 - 4T_2^2 = 0$, tai daugianaris $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$ turi dvi vienodus šaknis $s_1 = s_2 = -$

$$\alpha = -\frac{T_1}{2T_2^2} = -\frac{1}{T_2}, \text{ ir iš formulės } Y(s) = \frac{U_0}{T_2^2 s(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{y(0)s}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{T_2^2 y'(0) + T_1 y(0)}{T_2^2 (s-s_1)(s-s_2)}$$

$$\text{gauname } Y(s) = \frac{U_0 + s[T_2^2 (sy(0) + y'(0)) + T_1 y(0)]}{T_2^2 s(s + \alpha)^2}.$$

Šiuo atveju, norint rasti išėjimo trajektoriją $y(t)$, tenka naudotis jau apibendrinta Hevisaido teorema (žiūr. reziduų formulę 1.11.6.16. skyrelyje) arba suskaidyti $Y(s)$ į tokių trupmenų sumą, kurių originalai mums jau yra žinomi.

Šį atvejį, t. y. atvejį „b“, nagrinėsime 1.11.10.1.3. skyrelyje.

Pereisime prie atvejo 1.11.10.1. dalinių atvejų 1.11.10.1.1., 1.11.10.1.2., 1.11.10.1.3. ir 1.11.10.1.4. nagrinėjimo.

1.11.10.1.1. Atvejis, kai $T_1^2 - 4T_2^2 > 0$, t. y., kai $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Šiuo atveju, t. y. atveju, kai kontūro aktyvioji varža R yra didesnė už dvigubą to kontūro varžą bangoms $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, **daugianario** $LCs^2 + RCs + 1$ **šaknys** s_1 ir s_2 , būdamas lygios $s_1 = -\alpha - \beta = \frac{-T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$ ir $s_2 = -\alpha + \beta = \frac{-T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$, yra **skirtingi realūs neigiami skaičiai** $s_1 < s_2 < 0$.

Todėl $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [U_0 + Q_1(0)e^{s_1 t} + Q_2(0)e^{s_2 t}] = U_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [Q_1(0)s_1 e^{s_1 t} + Q_2(0)s_2 e^{s_2 t}] = 0$ ir $\lim_{t \rightarrow \infty} y''(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [Q_1(0)s_1^2 e^{s_1 t} + Q_2(0)s_2^2 e^{s_2 t}] = 0$.

Tai rodo, jog procesai, vykstantys kontūre, šiuo atveju bus **ekvifinalūs**: nepriklausomai nuo to, kokios bus pradinės sąlygos, t. y. nuo to, kokios bus dydžių $y(0)$ ir $y'(0)$ reikšmės, galutinė (finalinė) kontūro būseną visada bus viena ir ta pati – kondensatoriaus įtampa $u_c(t) = y(t)$ po pakankamai ilgo laiko taps praktiškai lygi tai įtampai U_0 , kurią turi elektros srovės šaltinis, maitinantis šią elektros grandinę, o elektros srovės stipris $i(t)$ grandinėje taps lygus 0.

Kadangi dydžiai s_1 ir s_2 – realūs neigiami skaičiai, tai **jokių periodinių virpesių kontūre nebus**. Kondensatoriaus pasikrovimo **procesas vyks monotoniškai ar beveik monotoniškai** ir jo eiga priklausys nuo pradinių sąlygų.

Išsiaiškinsime tas priklausomybes.

Kaip jau esame nustatę 1.11.10.1. skyrelyje, $y(t) = U_0 + (M-N)e^{s_1 t} - (M+N)e^{s_2 t}$, t. y. kontūro išėjimą sudaro trys komponentės: pastovus dydis U_0 , lygus kontūro įėjimui $x(t)$, ir du monotoniškai slopstantys procesai $(M-N)e^{s_1 t}$ ir $(M+N)e^{s_2 t}$, atsirandantys (ar neatsirandantys) kontūre, sujungus jį su elektros srovės šaltiniu.

Šie eksponentiniai procesai atsiranda, kai $(M-N) \neq 0$ ir $(M+N) \neq 0$. Kai $(M-N) = 0$, t. y., kai $\frac{[U_0 - y(0)](\alpha - \beta) - y'(0)}{2\beta} = 0$, o $M + N = \frac{[U_0 - y(0)](\alpha + \beta) - y'(0)}{2\beta} \neq 0$, tai $y(t) = U_0 - (M-N)e^{s_2 t}$.

Analogiškai gauname, jog $y(t) = U_0 + (M-N)e^{s_1 t}$, kai $(M-N) \neq 0$, o $(M+N) = 0$. Abiem šiais atvejais kontūre vyksta monotoniiniai procesai, neturintys nei ekstremumo, nei linkio taškų.

Kai $(M-N) = 0$ ir $(M+N) = 0$, t. y., kai $U_0 - y(0) + \frac{y'(0)}{s_2} = 0$ ir $U_0 - y(0) + \frac{y'(0)}{s_1} = 0$, iš kur išplaukia, jog šiuo atveju $y'(0) = 0$ ir $y(0) = U_0$, tai gauname, jog $y(t) = U_0 = \text{const}$. Tai ir natūralu: kai kondensatorius jau pačioje pradžioje yra pakrautas iki įtampos U_0 ir kontūre pradinis srovės stipris $i(0) = Cy'(0) = 0$, tai kontūras yra pusiausvyros būsenoje ir jokie pokyčiai jame nevyksta.

Panagrinėsime dabar atvejus, kai nei $M-N$, nei $M+N$ nėra lygūs 0, t. y., kai galioja nelygybės:

$$y(0) \neq U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} \text{ ir } y(0) \neq U_0 + \frac{y'(0)}{s_2}.$$

Nustatysime, ar visada šiais atvejais egzistuoja ekstremumo ir linkio taškai t^* ir t^{**} .

Ekstremumo taške $t = t^*$ turi būti tenkinama lygybė $y(t^*) = (M-N)s_1 e^{s_1 t^*} - (M+N)s_2 e^{s_2 t^*} = e^{-\alpha t^*} [(M-N)s_1 e^{-\beta t^*} - (M+N)s_2 e^{\beta t^*}] = 0$. Kadangi $e^{-\alpha t^*} \neq 0$, tai turi būti tenkinama lygybė $\frac{(M-N)(\alpha + \beta)}{(M+N)(\alpha - \beta)} = (e^{\beta t^*})^2$, iš kurios išplaukia, jog $t^* = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha + \beta)}{(M+N)(\alpha - \beta)}}$.

Kadangi $t = t^{**}$ turi tenkinti lygybę $y''(t^{**}) = (M-N)s_1^2 e^{s_1 t^{**}} - (M+N)s_2^2 e^{s_2 t^{**}} = e^{-\alpha t^{**}} [(M-N)s_1^2 e^{-\beta t^{**}} - (M+N)s_2^2 e^{\beta t^{**}}] = 0$, tai gauname, jog $t^{**} = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha + \beta)^2}{(M+N)(\alpha - \beta)^2}}$.

$$= \frac{1}{\beta} \left[\ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)}} + \ln \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} \right] = t^* + \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} = t^* + \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha^2-\beta^2)}} = t^* + \frac{1}{\beta} \ln T_2 (\alpha+\beta) =$$

$$= t^* + \frac{1}{\beta} \ln \frac{T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2} = t^* + \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2 - 1} \right].$$

$$\text{Skirtumas } t^{**} - t^* = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2 - 1} \right] = \text{const. yra teigiamas, nes } \frac{T_1}{2T_2} > 1.$$

Kad procese, vykstančiame kontūre, egzistuotų ekstremumo taškas $t=t^*>0$, būtina ir pakankama, kad būtų tenkinama sąlyga $\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)} > 1$.

Galimi du atvejai: a) $(M-N)(\alpha+\beta) > (M+N)(\alpha-\beta) > 0$ ir b) $(M-N)(\alpha+\beta) < (M+N)(\alpha-\beta) < 0$.

Atveju „a“ gauname:

- 1) $M\alpha + M\beta - N\alpha - N\beta > M\alpha - M\beta + N\alpha - N\beta > 0$,
- 2) $M\beta - N\alpha > N\alpha - M\beta > N\beta - M\alpha$,
- 3) $2M\beta > 2N\alpha > M\beta + N\alpha + N\beta - M\alpha$.

Kadangi $2M\beta = [U_0 - y(0)]\alpha - y'(0)$, o $2N\alpha = [U_0 - y(0)]\alpha$, tai iš nelygybės $2M\beta > 2N\alpha$ išplaukia, jog atveju „a“ privalo galioti nelygybė $[-y'(0)] > 0$, t. y. $y'(0) < 0$.

Iš nelygybės $N\alpha - M\beta > N\beta - M\alpha$, įstatę į ją M ir N reikšmes, gauname, jog $y(0) < U_0 + \frac{y'(0)}{s_1}$.

Kadangi $s_1 < 0$ ir atveju „a“ $y'(0) < 0$, tai $\frac{y'(0)}{s_1} > 0$ ir $U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} > U_0$. Kadangi atveju „a“ $y'(t) < 0$ ir taške

$t^* = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)}} > 0$ išvestinė $y'(t)$ pirmą ir vienintelį kartą tampa lygi 0, tai taške $t=t^*$ funkcija $y(t)$ pasiekia minimumo tašką ir toliau pradeda monotoniškai didėti, artėdama prie reikšmės, lygios U_0 .

Intervale $[t^*; t^{**}]$ jos didėjimas spartėja, taške $t=t^{**} = t^* + \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2 - 1} \right]$ funkcijos $y(t)$ grafikas

daro linkį, ir funkcija toliau didėja, bet jau vis lėčiau, asimptotiškai artėdama prie reikšmės U_0 . Atstumas tarp taškų t^* ir t^{**} nepriklauso nuo pradinių sąlygų, o tik nuo kontūro parametrų, kai tuo tarpu tų taškų padėtis laiko ašyje ir net tų taškų egzistavimas ar neegzistavimas priklauso ir nuo kontūro parametrų, ir nuo pradinių sąlygų.

Atveju „b“, kai galioja nelygybės $(M-N)(\alpha+\beta) < (M+N)(\alpha-\beta) < 0$, atlikdami analogiškus pertvarkymus kaip ir atveju „a“, gauname, jog pradinės sąlygos turi tenkinti nelygybes $y'(0) > 0$ ir $y(0) > U_0 + \frac{y'(0)}{s_1}$.

Kai atvejais „a“ ir „b“ $y(0)$ artėja prie $U_0 + \frac{y'(0)}{s_1}$, tai, kaip jau matėme šio skyrelio pradžioje, suma $M+N$ artėja prie nulio. Dėl šios priežasties dydžiai t^* ir t^{**} didėja, artėdami prie begalybės. Kai $y(0)$ reikšmė tampa lygi $U_0 + \frac{y'(0)}{s_1}$, suma $M+N$ tampa lygi 0, ir mes gauname mūsų jau nagrinėtą monotoniško artėjimo prie U_0 atvejį $y(t) = U_0 + (M-N)e^{s_1 t}$.

Apibendrinami ką tik atliktos atvejo $T_1^2 - 4T_2^2 > 0$ sisteminės analizės rezultatus, galime teigti:

1) visais atvejais, išskyrus atvejus, kai pradinės sąlygos yra tokios, jog

- a) $[y'(0) < 0] \wedge \left[y(0) < U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} \right]$ arba
- b) $[y'(0) > 0] \wedge \left[y(0) > U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} \right],$

elektromagnetinių virpesių kontūro išėjimo trajektorija $y(t)=u_c(t)$ monotoniškai artėja prie savo asimptotės $y=U_0=\text{const}$, nes visais tokiais atvejais funkcijos $y(t)$ ekstremumo taškai $t^*=\frac{1}{\beta} \times$

$\times \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)}}$ arba priklauso sričiai $[0;\infty)$ (tai atsitinka atvejais, kai pradinės sąlygos tenkina

predikatą $\left\{ [y'(0) \leq 0] \wedge \left[y(0) > U_0 + \frac{y'(0)}{s_2} \right] \right\} \vee \left\{ [y'(0) \geq 0] \wedge \left[y(0) < U_0 + \frac{y'(0)}{s_2} \right] \right\}$), arba iš viso neegzistuoja;

2) atveju „a“, kai pradinės sąlygos $y(0)$ ir $y'(0)$ tenkina predikatą $[y'(0) < 0] \wedge \left[y(0) < U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} \right]$,

funkcija $y(t)$ pradžioje monotoniškai mažėja, taške $t^* = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)}}$ pasiekia minimumą,

o po to monotoniškai didėja, pereidama linkio tašką ir $t^{**} = t^* + \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2 - 1} \right]$ ir

asimptotiškai artėdama prie $y=U_0$;

3) atveju „b“, kai pradinės sąlygos $y(0)$ ir $y'(0)$ tenkina predikatą $[y'(0) > 0] \wedge \left[y(0) > U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} \right]$, funkcija $y(t)$ pradžioje monotoniškai didėja, taške $t=t^*$ pasiekia maksimumą,

o po to monotoniškai mažėja, pereidama linkio tašką t^{**} ir asimptotiškai artėdama prie $y=U_0$;

4) visais atvejais, kai egzistuoja teigiamas ar neigiamas baigtinis ekstremumo taškas t^* , egzistuoja ir baigtinis linkio taškas t^{**} , pastumtas pastoviu atstumu $t^{**} - t^* = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2 - 1} \right]$ i

dešinę nuo ekstremumo taško t^* ; kai $t^{**} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \sqrt{\frac{M-N}{M+N}} \leq 0$, tai jis kontūre vykstančiame procese nėra stebimas ir $y(t)$ artėjimo prie $y=U_0$ procesas yra ne tik monotoninis, bet ir be linkio, t. y. funkcijos $y(t)$ išvestinė $y'(t)$ artėja prie 0 monotoniškai.

Pailiustruosiu gautas išvadas konkrečiais pavyzdžiais, nagrinėdamas kontūrą, kurio rezistoriaus varža $R=100 \Omega$, kondensatoriaus talpa $C=0,05 \text{ F}$ ir ritelės induktyvumas $L=80 \text{ H}$.

Pasinaudodami šiais duomenimis, gauname $T_1=RC=100 \cdot 0,005=5(\text{s})$; $T_2^2=LC=80 \cdot 0,005=4(\text{s}_2)$;

$$T_1^2 - 4LC = 25 - 4 \cdot 4 = 9 > 0; \alpha = \frac{T_1}{2T_2^2} = \frac{5}{8}(\text{s}^{-1}); \beta = \frac{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2} = \frac{3}{8}(\text{s}^{-1}); s_1 = -\alpha - \beta = -1(\text{s}^{-1}); s_2 = -\alpha + \beta = -\frac{1}{4}(\text{s}^{-1}).$$

Kai $U_0=240 \text{ V}$, tai $y(t) = U_0 + (M-N)e^{s_1 t} - (M-N)e^{s_2 t} = 240 + (M-N)e^{-t} - (M+N)e^{-\frac{1}{4}t}$.

Koeficientai $Q_1(0)=M-N$ ir $Q_2(0)=-(M+N)$ priklauso nuo pradinių sąlygų:

$$M-N = \frac{[U_0 - y(0)](\alpha - \beta) - y'(0)}{2\beta}, \quad M+N = \frac{[U_0 - y(0)](\alpha + \beta) - y'(0)}{2\beta}.$$

$$\text{Pavyzdžiui, kai } y(0)=270 \text{ V, } y'(0)=-45 \text{ V/s, tai } M-N = \frac{(240-270)\frac{1}{4} + 45}{\frac{3}{4}} = \frac{-30+180}{3} = 50,$$

$$M+N = \frac{(240-270) \cdot 1 + 45}{\frac{3}{4}} = \frac{-120+180}{3} = 20 \quad \text{ir} \quad y(t) = 240 + 50e^{-t} - 20e^{-\frac{1}{4}t}, \quad y'(0) = -50e^{-t} + 5e^{-\frac{1}{4}t},$$

$$y''(t) = 50e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Rasime t^* ir t^{**} iš lygybių $y'(t^*)=0$ ir $y''(t^{**})=0$ ir apskaičiuosime $y(t^*)$ bei $y''(t^*)$:

$$\begin{aligned}
& 1) 50e^{-t^*} = 5e^{-\frac{t^*}{4}}; 2) e^{\frac{3}{4}t^*} = 10; 3) t^* = \frac{4}{3}\ln 10 \approx 3,07(s); 4) 50e^{-t^{**}} = \frac{5}{4}e^{-\frac{t^{**}}{4}}; 5) e^{\frac{3}{4}t^{**}} = 40; \\
& 6) t^{**} = \frac{4}{3}\ln 40 \approx 4,92(s); 7) t^{**} - t^* = \frac{4}{3}[\ln 40 - \ln 10] = \frac{4}{3}\ln 4 \approx 1,85; 8) y(t^*) = U_0 + (M-N)e^{-t^*} - \\
& -(M+N)e^{-\frac{t^*}{4}} = 240 + 50e^{-\frac{4}{3}\ln 10} - 20e^{-\frac{1}{3}\ln 10} = 240 + 50 \cdot 10^{-\frac{4}{3}} - 20 \cdot 10^{-\frac{1}{3}} = 240 + 10^{-\frac{1}{3}}(50 \cdot 10^{-1} - 20) = \\
& = 240 - \frac{15}{\sqrt[3]{10}} \approx 233,04 < U_0; 9) y''(t^*) = (M-N)s_1^2 e^{s_1 t^*} - (M+N)s_2^2 e^{-\frac{t^*}{4}} = 50 \cdot 10^{-\frac{4}{3}} - 20 \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{-\frac{1}{3}} = \\
& = 10^{-\frac{1}{3}}(5 - \frac{5}{4}) = \frac{15}{4 \cdot \sqrt[3]{10}} \approx 1,74 > 0. \text{ Vadinasi, taškas } t^* = \frac{4}{3}\ln 10 \text{ yra funkcijos } y(t) \text{ minimumo taškas.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Gauti rezultatai atitinka teorines išvadas: } y'(0) = -45 \frac{V}{s} < 0; y(0) = 270 \text{ V} < U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} = \\
& = 240 \text{ V} + 45 \text{ V} = 285 \text{ V}; t^* = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)}} = \frac{8}{3} \ln \sqrt{\frac{50(5+3)}{20(5-3)}} = \frac{4}{3} \ln \frac{50,8}{20,2} = \frac{4}{3} \ln 10; \\
& t^{**} - t^* = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2 - 1} \right] = \frac{8}{3} \ln \left[\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1} \right] = \frac{8}{3} \ln \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{8}{3} \ln 2 = \frac{4}{3} \ln 4. \\
& \text{Jei būtume pakeitę pradinės sąlygas, pavyzdžiui, jei būtume priėmę, jog } y(0) = 300 \text{ V,} \\
& \text{nekeisdami visų kitų matematinio modelio parametrų ir tokiu būdu pažeisdami reikalavimą} \\
& [y'(0) < 0] \wedge \left[y(0) < U_0 + \frac{y'(0)}{s_1} \right], \text{ tai būtume gavę } M-N = \frac{[240-300]\frac{1}{4} + 45}{\frac{3}{4}} = \frac{-60+180}{3} = 40, \quad M+N = \\
& = \frac{[240-300] \cdot 1 + 45}{\frac{3}{4}} = \frac{-240+180}{3} = -20. \text{ Tuomet } y(t)U_0 + (M-N)e^{s_1 t} - (M+N)e^{s_2 t} = 240 + 40e^{-t} + 20e^{-\frac{1}{4}t} \text{ jau} \\
& \text{negalėtų turėti ekstremumo taško, nes negalėtų egzistuoti tokia } t=t^* \text{ reikšmė, jog išvestinė} \\
& y'(t^*) = -40e^{-t^*} - 5e^{-\frac{t^*}{4}} \text{ būtų lygi 0. Vadinasi, šiuo atveju } y(t) \text{ monotoniškai mažėtų nuo } y(0)=300 \text{ V iki} \\
& \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 240 \text{ V.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Jei pradinės sąlygos būtų tokios, kad būtų tenkinamos sąlygos } [y'(0) > 0] \wedge \left[y(0) < U_0 + \frac{y'(0)}{s_2} \right], \\
& \text{pavyzdžiui, jei } y'(0) = 45 \frac{V}{s}, \text{ o } y(0) = 30 \text{ V, tai gautume, jog } M-N = \frac{(240-30)\frac{1}{4} - 45}{\frac{3}{4}} = \frac{210-180}{3} = 10, \\
& M+N = \frac{(240-30) \cdot 1 - 45}{\frac{3}{4}} = \frac{840-180}{3} = 220.
\end{aligned}$$

Šiuo atveju, kaip tai išplaukia iš šiamo skyrelyje šiek tiek ankščiau atliktos sisteminės analizės, turėtų egzistuoti $t=t^*$ reikšmė, tačiau ji turėtų būti neigiama.

$$\text{Nesunku įsitikinti, kad taip ir yra: } t^* = \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)}{(M+N)(\alpha-\beta)}} = \frac{8}{3} \ln \sqrt{\frac{10(5+3)}{220(5-3)}} = \frac{4}{3} \ln \frac{2}{11} \approx -2,27.$$

$$\text{Neigiama bus ir } t^{**} \text{ reikšmė: } t^{**} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(M-N)(\alpha+\beta)^2}{(M+N)(\alpha-\beta)^2}} = \frac{4}{3} \ln \frac{10(5+3)^2}{220(5-3)^2} = \frac{4}{3} \ln \frac{8}{11} \approx -0,42.$$

Atstumas tarp taškų t^* ir t^{**} turėtų ir šį kartą išlikti pastovus ir lygus $\frac{4}{3}\ln 4$. Nesunku įsitikinti, kad taip ir yra, nes $\frac{4}{3}\ln \frac{8}{11} - \frac{4}{3}\ln \frac{2}{11} = \frac{4}{3}\ln 4$.

Šiuo atveju stebimoji (nuo momento $t=0$) išėjimo trajektorija $y(t)=240+10e^{-t}-220e^{-\frac{t}{4}}$ monotoniškai ir be linkio taškų, didindama kondensatoriaus įtampą $y(t)$, asimptotiškai artės prie $y=U_0=240$ V.

Jei pradinės sąlygos būtų buvusios tokios, kad $y'(0)=30$ V/s ir $y(0)=45$ V, tai būtume gavę, jog

$$M-N=\frac{(240-45)\frac{1}{4}-30}{\frac{3}{4}}=\frac{195-120}{3}=25, \quad M+N=\frac{195\cdot 4-120}{3}=220, \quad t^*=\frac{4}{3}\ln \frac{25(5+3)}{220(5-3)}=\frac{4}{3}\ln \frac{5}{11}\approx -1,05,$$

t. y. būtume gavę ekstremumo tašką neigiamoje zonoje. Tačiau linkio taškas t^{**} šiuo atveju būtų jau

$$\text{teigiamoje zonoje, nes } t^{**}=\frac{1}{2\beta}\ln \frac{(M-N)(\alpha+\beta)^2}{(M+N)(\alpha-\beta)^2}=\frac{4}{3}\ln \frac{25\cdot 64}{220\cdot 4}=\frac{4}{3}\ln \frac{20}{11}\approx 0,80.$$

Todėl stebimoji išėjimo trajektorija $y(t)=240+25e^{-t}-220e^{-\frac{t}{4}}$, monotoniškai didėjant $y(t)$ nuo $y(0)=45$ V iki $\lim_{t\rightarrow\infty} y(t)=240$ V, momentu $t=t^{**}=\frac{4}{3}\ln \frac{20}{11}$ padarys linkį, pereidama nuo greitėjančio prie lėtėjančio didėjimo.

Čia pateiktos nagrinėjamo proceso sisteminės analizės rezultatai ir pavyzdžiai dar kartą patvirtina šios mokymo priemonės „Ivade“ suformuluotą teiginį, kad, **sudarę proceso matematinį modelį ir atlikdami su tuo modeliu matematinius eksperimentus, mes galime gauti daug įvairių rezultatų, sutampančių su natūrinių eksperimentų rezultatais bei pakankamai artimų jiems, o taip pat ir naujų, mums dar nežinomų, rezultatų.**

1.11.10.1.2. Atvejis, kai $T_1^2 - 4T_2^2 < 0$, t. y., kai $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Kai $T_1 < 2T_2$, t. y., kai $RC < 2\sqrt{LC}$, tai $\beta = \frac{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$ tampa menamu dydžiu.

Šiuo atveju dydis $\frac{4T_2^2 - T_1^2}{4T_2^4} = \frac{1}{T_2^2} - \frac{T_1^2}{4T_2^4} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ yra teigiamas. Pažymėję jį ω_0^2 ,

gausime, jog šiuo atveju $\beta = i\omega_0$ ir $s_1 = -\alpha - i\omega_0$, $s_2 = -\alpha + i\omega_0$, kur $i = \sqrt{-1}$.

Tuomet, naudodamiesi viena iš $y(t)$ formulių iš 1.11.10.1. skyrelio, gausime, jog $y(t) = U_0 - e^{-\alpha t} [M(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) + N(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})] = U_0 - e^{-\alpha t} \left[\frac{(U_0 - y(0))T_1 - 2T_2^2 y'(0)}{4iT_2^2 \omega_0} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) + \frac{U_0 - y(0)}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \right] = U_0 - e^{-\alpha t} \left[\frac{(U_0 - y(0))T_1 - 2T_2^2 y'(0)}{2T_2^2 \omega_0} \sin \omega_0 t + (U_0 - y(0)) \cos \omega_0 t \right] = U_0 - \frac{U_0 - y(0)}{2T_2^2 \omega_0} e^{-\alpha t} [T_1 \sin \omega_0 t + 2T_2^2 \omega_0 \cos \omega_0 t] + e^{-\alpha t} \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$

Pasinaudodami formule $a \sin \varphi + b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \varphi \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\varphi + \varphi_0)$, kur $\varphi_0 = \arctg \frac{b}{a}$, gausime, jog $y(t) = U_0 - \frac{(U_0 - y(0))\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}}{2T_2^2 \omega_0} \times$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\alpha t} \left[\frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}} \sin \omega_0 t + \frac{2T_2^2 \omega_0}{\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}} \cos \omega_0 t \right] + e^{-\alpha t} \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t = U_0 - \\
& - e^{-\alpha t} \frac{(U_0 - y(0)) \sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}}{2T_2^2 \omega_0} [\cos \varphi \sin \omega_0 t + \sin \varphi \cos \omega_0 t] + e^{-\alpha t} \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t = U_0 - \\
& - e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi) \frac{(U_0 - y(0)) \sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}}{2T_2^2 \omega_0} + e^{-\alpha t} \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t = U_0 - e^{-\alpha t} \times \\
& \times \left[\frac{(U_0 - y(0)) \sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}}{2T_2^2 \omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right], \text{ kur } \varphi = \arctg \frac{2T_2^2 \omega_0}{T_1}, \text{ o } \frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}} = \\
& = \cos \varphi \text{ ir } \frac{2T_2^2 \omega_0}{\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4 \omega_0^2}} = \sin \varphi.
\end{aligned}$$

$$\text{Todėl } y(t) = U_0 - e^{-\alpha t} \left[(U_0 - y(0)) \frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\sin \varphi} - \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right].$$

Nesunku patikrinti, jog ir šiuo atveju tenkinamos pradinės sąlygos:

$$\begin{aligned}
\text{a) } y(0) &= U_0 - \left[(U_0 - y(0)) \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - \frac{y'(0)}{\omega_0} \cdot 0 \right] = U_0 - U_0 + y(0) = y(0). \\
\text{b) } y'(t) &= \alpha e^{-\alpha t} \left[(U_0 - y(0)) \frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\sin \varphi} - \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right] - e^{-\alpha t} [(U_0 - y(0)) \times \\
& \times \frac{\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}{\sin \varphi} - y'(0) \cos \omega_0 t]. \\
\text{c) } y'(0) &= \alpha \left[(U_0 - y(0)) \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} - 0 \right] - \left[(U_0 - y(0)) \frac{\omega_0 \cos \varphi}{\sin \varphi} - y'(0) \cdot 1 \right] = (U_0 - y(0)) \left(\alpha - \frac{\omega_0}{\operatorname{tg} \varphi} \right) + \\
& + y'(0) = (U_0 - y(0)) \left(\frac{T_1}{2T_2^2} - \frac{\omega_0 T_1}{2T_2^2 \omega_0} \right) + y'(0) = y'(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Taip pat nesunku įsitikinti, jog } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ U_0 - e^{-\alpha t} \left[(U_0 - y(0)) \frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\sin \varphi} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right] \right\} = U_0, \text{ nes } \alpha = \frac{T_1}{2T_2^2} = \frac{RC}{2LC} = \frac{R}{2L} > 0 \text{ ir } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} = 0.
\end{aligned}$$

Tačiau kondensatoriaus įtampos $u_C(t)$ artėjimas prie pastovios įėjimo įtampos U_0 šiuo atveju yra jau ne monotoninis ar su vienu maksimumu ar minimumu tašku, kaip kad buvo atveju, išnagrinėtu 1.11.10.1. skyrelyje, o silpstančių (gėstančių) svyravimų, turinčių ciklinį dažnį

$\omega_0 = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}$, procesas, kurio svyravimų amplitudei artėjant prie 0, dydis $y(t)$ konverguoja į pastovų dydį U_0 .

Tokie svyravimai, kurie atsiranda virpesių kontūre, kai į jo įėjimą paduodama kokia nors pastovi įtampa ar koks nors jos impulsas, išvedantis sistemą iš pusiausvyros būsenos, vadinami

nuosavais svyravimais, o jų periodas $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi T_2^2}{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}$ – **nuosavų svyravimų periodu**.

Jei virpesių kontūro aktyvioji varža R būtų lygi 0 (t. y. praktiškai tokia maža, kad ją su pakankamai maža paklaida būtų galima laikyti lygia 0), tai $T_1 = RC$ būtų lygus 0 ir $\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}$ – taip pat lygus 0.

$$\text{Tuomet gautume, jog } \omega_0 = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{LC}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi T_2^2}{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}} = 2\pi T_2 = 2\pi \sqrt{LC},$$

$$\cos\varphi = \frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4\omega_0^2}} = \frac{0}{\sqrt{0 + 4T_2^4\omega_0^2}} = 0, \quad \sin\varphi = \frac{2T_2^2\omega_0}{\sqrt{T_1^2 + 4T_2^4\omega_0^2}} = \frac{2T_2^2\omega_0}{\sqrt{4T_2^4\omega_0^2}} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{iš kur}$$

$$\begin{aligned} \text{išplauktų, jog } y(t) &= U_0 - (U_0 - y(0)) \sin\left(\frac{t}{T_2} + \frac{\pi}{2}\right) + y'(0)T_2 \sin\frac{t}{T_2} = U_0 - (U_0 - y(0)) \cos\frac{t}{T_2} + \\ &+ y'(0)T_2 \sin\frac{t}{T_2} = U_0 - \sqrt{(U_0 - y(0))^2 + (y'(0))^2 T_2^2} \cos\left(\frac{t}{T_2} + \psi\right), \text{ kur } \psi = \arctg \frac{y'(0)T_2}{U_0 - y(0)}, \\ \frac{U_0 - y(0)}{\sqrt{(U_0 - y(0))^2 + (y'(0))^2 T_2^2}} &= \cos\psi, \quad \frac{y'(0)T_2}{\sqrt{(U_0 - y(0))^2 + (y'(0))^2 T_2^2}} = \sin\psi. \end{aligned}$$

Tai reikštų, jog virpesių kontūro aktyviai varžai R tapus lygiai 0, kontūre vyktų nesilpstantys nuosavi svyravimai (virpesiai) su pastovia amplitude ir pastoviu dažniu: kondensatoriaus potencialinė (elektrostatinė) energija periodiškai virstų kinetine (ritelės elektromagnetine) energija, ši – vėl elektrostatine ir t. t.

Tuo atveju, kai tie svyravimai prasidėtų nuo nulinių pradinių sąlygų ($y(0)=0$, $y'(0)=0$), gautume $\psi = \arctg 0 = 0$, $\sqrt{(U_0 - y(0))^2 + (y'(0))^2 T_2^2} = U_0$ ir $y(t) = U_0 - U_0 \cos \frac{t}{T_2} = 2U_0 \sin^2 \frac{t}{2T_2} = 2U_0 \sin^2 \frac{t}{2\sqrt{LC}}$.

Momentais $t = 2k\pi\sqrt{LC}$, kur $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gautume, jog $y(t)=0$, momentais $t = (2k+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$, kur $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, išėjimas taptų lygus įėjimui, t. y. $y(t)=U_0$, o momentais $t = (2k+1)\pi\sqrt{LC}$ gautume, jog $y(t)=2U_0$. Svyravimai kartotųsi su periodu, lygiu $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Kaip tik todėl virpesių kontūras ir vadinamas virpesių kontūru, nes jis, suteikęs jam energijos, gali generuoti nuosavus virpesius, kai jo įėjime jokių virpesių nėra.

Žinoma, kontūre gali atsirasti ir taip vadinamų priverstinių svyravimų, kuriuos iššaukia įėjimo įtampos svyravimai. Tokius atvejus nagrinėsime 1.11.10.3. skyrelyje. Priverstinių svyravimų dažnis ω priklauso nuo įėjimo svyravimų dažnio ir gali nesutapti su nuosavų svyravimų dažniu ω_0 . Kai dažniai ω ir ω_0 sutampa arba yra kartotiniai vienas kito atžvilgiu, atsiranda taip vadinami rezonanso reiškiniai, kurių metu galima pastebėti stiprų svyravimų amplitudės padidėjimą. Tokius reiškinius nagrinėsime 1.11.10.3.3. ir 1.11.10.3.4. skyreliuose.

1.11.10.1.3. Atvejis, kai $T_1^2 - 4T_2^2 = 0$, t. y., kai $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Gali atsitikti ir taip, kad $RC=2\sqrt{LC}$, t. y. kad $T_1=2T_2$. Tuomet $\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}=0$, ir kvadratinio trinario $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1$ šaknys s_1 ir s_2 tampa vienodos: $s_1=s_2=-\frac{T_1}{2T_2^2}=-\alpha=-\frac{2T_2}{2T_2^2}=-\frac{1}{T_2}=-\frac{1}{\sqrt{LC}}=-\frac{2}{RC}=-\frac{2}{T_1}$. Tada, pasinaudodami 1.11.10.1. skyrelio pradžios rezultatu, gauname, jog $Y(s)=$

$$= \frac{\frac{U_0}{s} + T_2^2 s y(0) + T_1 y(0) + T_2^2 y'(0)}{T_2^2 (s + \alpha)^2} = \frac{U_0}{T_2^2} \cdot \frac{1}{s(s + \alpha)^2} + y(0) \frac{s}{(s + \alpha)^2} + (y'(0) + \frac{2}{T_2} y(0)) \frac{1}{(s + \alpha)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Kadangi } \frac{1}{(s + \alpha)^2} &= L[te^{-\alpha t}], \quad \frac{s}{(s + \alpha)^2} = \frac{s + \alpha - \alpha}{(s + \alpha)^2} = \frac{1}{s + \alpha} - \alpha \frac{1}{(s + \alpha)^2} = L[e^{-\alpha t} - \alpha te^{-\alpha t}] \text{ ir} \\ \frac{1}{s(s + \alpha)^2} &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{s(s + \alpha)^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{s + \alpha - s}{s(s + \alpha)^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{s(s + \alpha)} - \frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{s(s + \alpha)} - \frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{s + \alpha - s}{s(s + \alpha)} - \frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right) - \frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] = L \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} te^{-\alpha t} \right], \text{ tai} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{U_0}{T_2^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} - e^{-\alpha t} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} t \right) \right] + y(0)e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) + (y'(0) + \frac{2}{T_2} y(0)) t e^{-\alpha t} = U_0 - e^{-\frac{t}{T_2}} \left(1 + \frac{t}{T_2} \right) \times$$

$$\times U_0 + y(0)e^{-\frac{t}{T_2}} \left(1 - \frac{t}{T_2} \right) + (y'(0) + \frac{2}{T_2} y(0)) t e^{-\frac{t}{T_2}} = U_0 - \left[(U_0 - y(0)) \left(1 + \frac{t}{T_2} \right) - t y'(0) \right] e^{-\frac{t}{T_2}} = U_0 +$$

$$+ [(y(0) - U_0) \left(1 + \frac{t}{T_2} \right) + t y'(0)] e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Gauta išėjimo trajektorijos formulė ir šį kartą tenkina pradines sąlygas:

$$1) \quad y(0) = U_0 + y(0) - U_0 = y(0); \quad 2) \quad y'(t) = [(y(0) - U_0) \frac{1}{T_2} + y'(0)] e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{T_2} [(y(0) - U_0) \left(1 + \frac{t}{T_2} \right) +$$

$$+ t y'(0)] e^{-\frac{t}{T_2}} = [(U_0 - y(0)) \frac{t}{T_2^2} + y'(0) \left(1 - \frac{t}{T_2} \right)] e^{-\frac{t}{T_2}}; \quad 3) \quad y'(0) = [(U_0 - y(0)) \cdot 0 + y'(0) (1 - 0)] e^0 = y'(0).$$

Kadangi $T_2 > 0$, tai $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = U_0$, kaip ir atvejais, išnagrinėtais 1.11.10.2. ir 1.11.10.3. skyreliuose.

$$\text{Kadangi iš formulės } y'(t) = \left\{ \frac{t}{T_2^2} [U_0 - y(0) - y'(0)T_2] + y'(0) \right\} e^{-\frac{t}{T_2}} \text{ gauname, kad } y'(t) = 0, \text{ kai}$$

$$t = t^* = \frac{y'(0) \cdot T_2^2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}, \text{ tai iš formulės } y''(t) = \left[\frac{U_0 - y(0)}{T_2^2} \left(1 - \frac{t}{T_2} \right) - \frac{y'(0)}{T_2^2} (2T_2 - t) \right] e^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$\text{išplaukia, kad } y''(t^*) = \frac{e^{-\frac{t^*}{T_2}}}{T_2^2 [y'(0)T_2 + y(0) - U_0]} [(U_0 - y(0)) \times (y(0) - U_0) - y'(0) (y'(0)T_2^2 + y(0)2T_2 -$$

$$- U_0 2T_2)] = e^{-\frac{t^*}{T_2}} \frac{-y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0} \frac{-(y(0) - U_0)^2 - 2T_2 y'(0)(y(0) - U_0) - (y'(0))^2 T_2^2}{T_2^2 [y'(0)T_2 + y(0) - U_0]} = e^{-\frac{t^*}{T_2}} \times$$

$$\times \left(- \frac{(y'(0)T_2)^2 + 2y'(0)T_2(y(0) - U_0) + (y(0) - U_0)^2}{T_2^2 [y'(0)T_2 + y(0) - U_0]} \right) = e^{-\frac{t^*}{T_2}} \frac{-y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0} \left(- \frac{T_2 y'(0) + y(0) - U_0}{T_2^2} \right) =$$

$$= \frac{U_0 - T_2 y'(0) - y(0)}{T_2^2} \cdot e^{-\frac{t^*}{T_2}}.$$

Kai $y'(0) > 0$, tai $t^* > 0$ tada ir tik tada, kai $y'(0)T_2 + y(0) - U_0 > 0$, todėl tuomet taške $t = t^*$ antroji išvestinė $y''(t^*) < 0$, iš kur išplaukia, jog momentu $t = t^*$ išėjimo trajektorija $y(t)$ pasieks maksimumo tašką, kurio ordinatė $y(t^*) = U_0 + [y'(0)T_2 + y(0) - U_0] \cdot e^{-\frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}} > U_0$.

Tai reiškia, jog tuo atveju, kai $y'(0) > 0$, kondensatoriaus įtampa $U_C(t) = y(t)$ nuo momento $t = 0$ iki momento t^* didės ir pasieks dydį $y(t^*) = U_0 + [y'(0)T_2 + y(0) - U_0] \cdot e^{-\frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}}$, po to pradės eksponentiškai mažėti, artėdama prie U_0 .

Kai $y'(0) < 0$, tai $t^* > 0$ tik tada, kai $y'(0)T_2 + y(0) - U_0 < 0$, todėl tuomet taške $t = t^*$ gausime, jog $y''(t^*) > 0$, o tai reiškia, kad išėjimo trajektorija $y(t)$, pradžioje mažėdama, tame taške pasiekia minimumą $y(t^*) = U_0 - [(U_0 - y(0)) - y'(0)T_2] \cdot e^{-\frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}} < U_0$ ir po to įtampa $U_C(t) = y(t)$ pradeda eksponentiškai didėti, artėdama prie U_0 .

Pavyzdžiui, kai $y(0) = U_0$ ir $y'(0) > 0$, tai $t^* = T_2$ yra funkcijos $y(t)$ maksimumo taškas, kuriame $y(t^*) = U_0 + \frac{y'(0)T_2}{e} > U_0$, o kai $y'(0) < 0$ ir $y(0) = U_0$, tai taške $t^* = T_2$ funkcija $y(t)$ pasiekia minimumą,

kuris lygus $y(t^*) = U_0 + \frac{y'(0)T_2}{e} < U_0$.

Kai $y(0) < U_0$ ir $y'(0) > 0$, tai momentu $t_1 = \frac{(U_0 - y(0))T_2}{T_2 y'(0) + y(0) - U_0} < t^*$ išėjimas $y(t)$ bedidėdamas

tampa lygus U_0 ir intervale $[t_1, t^*]$ toliau didėja iki $y(t^*) = U_0 + [y'(0)T_2 + y(0) - U_0] \times e^{-\frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}}$.

Kai $y(0) > U_0$ ir $y'(0) < 0$, tai išėjimas $y(t)$ momentu $t_1 = \frac{(y(0) - U_0)T_2}{U_0 - y(0) - T_2 y'(0)}$ bemažėdamas

tampa lygus U_0 ir intervale $[t_1, t^*]$ toliau mažėja iki $y(t^*) = U_0 - [U_0 - y(0) - y'(0)T_2] \cdot e^{-\frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}}$.

Kai $y'(0)T_2 + y(0) - U_0$ artėja prie nulio, tai funkcijos $y(t)$ ekstremumo taškas t^* , jei tik $y'(0) \neq 0$, artėja prie ∞ , o $y(t^*)$ reikšmė – prie U_0 .

Išėjimo trajektorija $y(t)$ gali turėti ne tik ekstremumo (maksimumo ar minimumo), bet ir linkio tašką, kurio abscisę $t^{**} = T_2 \left(1 + \frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0} \right)$ galima surasti iš lygties $y''(t^{**}) = 0$. Linkio taško

ordinatė $y(t^{**}) = U_0 + 2[y'(0)T_2 + y(0) - U_0] e^{-\left(1 + \frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0} \right)}$.

Kaip nesunku pastebėti, $t^{**} - t^* = T_2$, t. y. **linkio taškas visada yra vienodai nutolęs į dešinę nuo ekstremumo taško.**

Jo ordinatė $y(t^{**})$ skiriasi nuo ekstremumo taško ordinaatės $y(t^*)$ dydžiu $y(t^{**}) - y(t^*) =$

$$= U_0 + 2[y'(0)T_2 + y(0) - U_0] e^{-\left(1 + \frac{y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0} \right)} - U_0 - [y'(0)T_2 + y(0) - U_0] \times e^{\frac{-y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}} =$$

$$= [y'(0)T_2 + y(0) - U_0] e^{\frac{-y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}} (2e^{-1} - 1) = -\frac{e-2}{e} [y'(0)T_2 + y(0) - U_0] \times e^{\frac{-y'(0)T_2}{y'(0)T_2 + y(0) - U_0}}. \text{ Kai}$$

ekstremumas yra $y(t)$ maksimumas, tas skirtumas yra neigiamas, o kai ekstremumas yra funkcijos $y(t)$ minimumas – teigiamas.

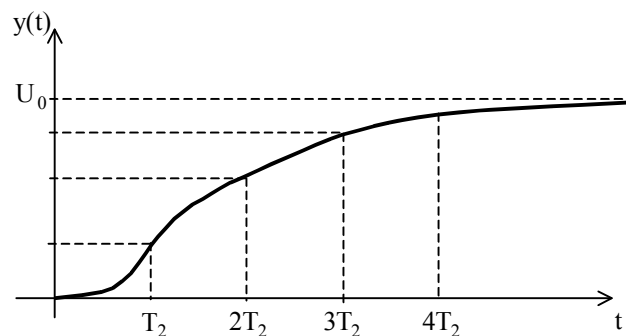
Kai pradinės sąlygos yra nulinės, tai, kaip ir atveju, išnagrinėtu 1.11.10.2. skyrelyje, $t^* = 0$. Tai reiškia, jog kondensatoriaus įtampa $U_C(t) = y(t)$ monotoniškai didėja nuo $y(0) = 0$ iki U_0 . Didėjimo greitis

$$y'(t) = \frac{U_0}{T_2^2} t e^{-\frac{t}{T_2}} \text{ iš pradžių (nuo } t=0 \text{ iki } t=t^{**}=T_2) \text{ didėja, pasiekia maksimumą } y'(T_2) = \frac{U_0}{eT_2} \text{ ir pradeda}$$

mažėti, artėdamas prie nulio, kai t artėja prie ∞ , o $y(t)$ – prie U_0 .

Linkio taške, esant pradinėms nulinėms sąlygoms, $y(t^{**}) = y(T_2) = U_0 - 2U_0 e^{-1} = U_0 \frac{e-2}{e} \approx \frac{U_0}{4}$, o

$$y(2T_2) = U_0 - 3U_0 e^{-2} = U_0 \frac{e^2 - 3}{e^2} \approx 0,6U_0 \text{ ir, bendrai, } y(nT_2) = U_0 [1 - (n+1)e^{-n}], \text{ (žiūr. 256 pav.)}.$$



256 pav.

Lygindami 1.11.10.1.1. – 1.11.10.1.3. skyreliuose gautus rezultatus, matome, jog **atvejais, kai $T_1 \geq 2T_2$, virpesių kontūre vyksta aperiodinis procesas, o kai $T_1 < 2T_2$ – periodiniai svyravimai.** Kai

$T_1 > 0$, tai tie svyravimai, didėjant t , silpnėja, o jei T_1 taptų lygus 0, tai svyravimai turėtų pastovią amplitudę.

1.11.10.1.4. Atvejai $T_1 > 2T_2$, $T_1 < 2T_2$, $T_1 = 2T_2$, kai pradinės sąlygos yra nulinės ($y(0)=0$, $y'(0)=0$)

Esant nulinėms pradinėms sąlygoms, virpesių kontūro išėjimo trajektoriją $y(t)=U_C(t)$ buvo galima apskaičiuoti žymiai greičiau ir paprasčiau, negu tai buvo padaryta 1.11.10.1.1. – 1.11.10.1.3. skyreliuose.

Tuomet iš karto buvo galima gauti lygtį:

$$Y(p) = \frac{X(p)}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{X(p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{X(p)}{T_2^2 (p - p_1)(p - p_2)}, \text{ kur } p_1 = s_1 = -\alpha - \beta, \quad p_2 = s_2 = -\alpha + \beta, \text{ o}$$

$$\frac{1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} - \text{virpesių kontūro perdavimo funkcija } W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

$$\text{Kai } x(t) = U_0 = \text{const, tai } Y(p) = \frac{U_0}{T_2^2} \cdot \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{U_0}{T_2^2} \cdot \frac{p}{p(p - p_1)(p - p_2)}.$$

$$\text{Pasinaudosime trupmenos } \frac{1}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{p(p - p_1)(p - p_2)} \text{ skaidiniu } \frac{1}{p(p - p_1)(p - p_2)} =$$

$$= A_0 \frac{1}{p} + A_1 \frac{1}{p - p_1} + A_2 \frac{1}{p - p_2}, \text{ gautu 1.11.10.1. skyrelyje. Gausime, jog } \frac{p}{p(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A_0 p}{p} +$$

$$+ \frac{A_1 p}{p - p_1} + \frac{A_2 p}{p - p_2}, \text{ kur } A_0 = T_2^2, \quad A_1 = \frac{1}{(\alpha + \beta)2\beta} = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha^2 - \beta^2)2\beta} = T_2^2 \frac{\alpha - \beta}{2\beta}, \quad A_2 = -\frac{1}{(\alpha - \beta)2\beta} =$$

$$= -\frac{\alpha + \beta}{(\alpha^2 - \beta^2)2\beta} = -T_2^2 \frac{\alpha + \beta}{2\beta}.$$

$$\text{Todėl } Y(p) = \frac{U_0}{T_2^2} \left[T_2^2 + A_1 \frac{p}{p - p_1} + A_2 \frac{p}{p - p_2} \right] = U_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2\beta} \left[(\alpha - \beta) \frac{p}{p - p_1} - (\alpha + \beta) \frac{p}{p - p_2} \right] \right\}, \text{ iš kur}$$

$$\text{išplaukia, jog } y(t) = U_0 \left[1 + \frac{1}{2\beta} \left[(\alpha - \beta)e^{p_1 t} - (\alpha + \beta)e^{p_2 t} \right] \right], \text{ nes } \frac{p}{p - a} = H[e^{at}].$$

$$\text{Kadangi } p_1 = -\alpha - \beta \text{ ir } p_2 = -\alpha + \beta, \text{ tai } y(t) = U_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} \left[(\alpha - \beta)e^{\beta t} - (\alpha + \beta)e^{-\beta t} \right] \right] =$$

$$= U_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} \left[\beta(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) + \alpha(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \right] \right]. \text{ Tai sutampa su rezultatu, gautu 1.11.10.1. skyrelyje, nes,}$$

$$\text{kai } y(0) = 0 \text{ ir } y'(0) = 0, \text{ tai } M = \frac{U_0 T_1}{2\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} = \frac{U_0 \alpha}{2\beta}, \quad N = \frac{U_0}{2}, \quad M + N = \frac{U_0}{2\beta} (\alpha + \beta), \quad M - N = \frac{U_0}{2\beta} (\alpha - \beta),$$

$$y(t) = U_0 + e^{-\alpha t} [(M - N)e^{-\beta t} - (M + N)e^{\beta t}] = U_0 + e^{-\alpha t} \left[\frac{U_0}{2\beta} (\alpha - \beta)e^{-\beta t} - \frac{U_0}{2\beta} (\alpha + \beta)e^{\beta t} \right] = U_0 \left\{ 1 + \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} \left[(\alpha - \beta)e^{-\beta t} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - (\alpha + \beta)e^{\beta t} \right] \right\} = U_0 \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} \left[\beta(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) + \alpha(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \right] \right\} = U_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} (\beta \cosh \beta t + \alpha \sinh \beta t) \right].$$

$$\text{Tuomet } y'(t) = U_0 e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = \frac{U_0}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = \frac{U_0}{2T_2^2 \beta} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}), \text{ iš}$$

kur išplaukia, jog pirmosios išvestinės $y'(t)$ nulio taškas yra $t^* = 0$.

$$\text{Kadangi } y''(t) = \frac{U_0}{2T_2^2 \beta} e^{-\alpha t} \left[(\beta - \alpha)e^{\beta t} + (\alpha + \beta)e^{-\beta t} \right], \text{ tai, kai } T_1 > 2T_2 \text{ ir todėl } \beta - \text{realus}$$

skaičius, iš lygties $y''(t^*) = 0$ gauname, jog $t^* = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\beta} \ln [T_2(\alpha + \beta)]$ – linkio taško abscisė.

Kai $T_1 < 2T_2$, tai $\beta = i\omega_0$. Tuomet gauname, jog

$$\begin{aligned} y(t) &= U_0 \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right] \right\} = U_0 \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{\alpha}{\omega_0} \cdot \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \right] \right\} = \\ &= U_0 \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[\cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right] \right\} = U_0 \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_0} [\omega_0 \cos \omega_0 t + \alpha \sin \omega_0 t] \right\} = \\ &= U_0 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}}{\omega_0} e^{-\alpha t} \left[\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} \cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} \sin \omega_0 t \right] \right\} = U_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right], \text{ kur} \\ \varphi &= \arctg \frac{\omega_0}{\alpha}, \sin \varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{T_1^2}{4T_2^2}}, \cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} = \frac{T_1}{2T_2}. \end{aligned}$$

Gauti rezultatai sutampa su 1.11.10.1.2. skyrelio rezultatais.

Kai $T_1 = 2T_2$, tai $p_1 = p_2 = -\alpha = -\frac{1}{T_2}$ ir $Y(p) = \frac{U_0}{T_2^2 (p + \alpha)^2}$. Tuomet, pasinaudodami reziduumų

formule, gauname:

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{p \rightarrow -\alpha} \frac{d}{dp} \left[\frac{U_0}{T_2^2} \cdot \frac{e^{pt} (p + \alpha)^2}{p(p + \alpha)^2} \right] + \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{U_0}{T_2^2} \cdot \frac{e^{pt} (p - 0)}{p(p + \alpha)^2} \right] = \frac{U_0}{T_2^2} \left[\lim_{p \rightarrow -\alpha} \frac{te^{pt} p - e^{pt}}{p^2} + \frac{1}{(0 + \alpha)^2} \right] = \\ &= \frac{U_0}{T_2^2} \left[\frac{-\alpha te^{-\alpha t} - e^{-\alpha t}}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right] = \frac{U_0}{T_2^2 \alpha^2} [1 - \alpha te^{-\alpha t} - e^{-\alpha t}] = U_0 \left[1 - \frac{t}{T_2} e^{\frac{-t}{T_2}} - e^{\frac{-t}{T_2}} \right]. \text{ Tai sutampa su} \end{aligned}$$

1.11.10.1.3. skyrelyje gautu rezultatu, kai $y(0) = 0$ ir $y'(0) = 0$.

1.11.10.2. Atvejis $y(t) = i(t)$

Kai išėjimu $y(t)$ pasirenkama ne $U_C(t)$, o kontūre tekanti srovė $i(t)$, tai, esant pradinėms nulinėms sąlygoms, gaunama diferencialinė lygtis $L \frac{dy(t)}{dt} + R y(t) + \frac{1}{C} \int_0^t y(t) dt = x(t)$, iš kurios, pereidami

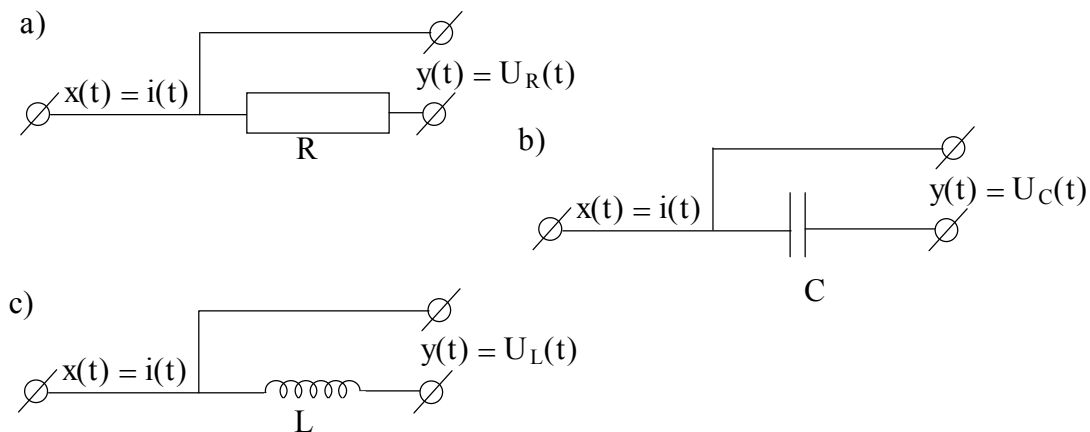
prie atvaizdų, gauname algebrinę lygtį $L p Y(p) + R Y(p) + \frac{1}{C p} Y(p) = X(p)$ ir perdavimo funkciją

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = W(p) = \frac{1}{L p + R + \frac{1}{C p}} = \frac{C p}{L C p^2 + R C p + 1}.$$

Šiuo atveju virpesių kontūro perdavimo funkcija $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{I(p)}{U_{\text{įėj.}}(p)}$ yra **virpesių kontūro laidumo atvaizdas**, o dydį, atvirkštinį jam, galima laikyti **virpesių kontūro pilnos varžos (impedanso) atvaizdu**, kurį žymėsime $Z(p)$: $Z(p) = L p + R + \frac{1}{C p} = Z_L(p) + Z_R(p) + Z_C(p)$. Čia $Z_L(p) = L p$ – ritelės induktyvinės varžos atvaizdas, $Z_R(p) = R$ – rezistoriaus aktyviosios varžos atvaizdas, sutampantis su originalu – varža R , $Z_C(p) = \frac{1}{C p}$ – kondensatoriaus talpuminės varžos atvaizdas. Šiuos rezultatus

jau esame gavę (tik šiek tiek kitu būdu) 1.11.8. skyrelyje.

Į šiuos varžos atvaizdus irgi galima žiūrėti kaip į savo rūšies **kontūro vidinių elementų perdavimo funkcijas**, kai $x(t) = i(t)$ – kontūro elemento įėjimo srovė, $y(t) = U(t)$ – to elemento išėjimo įtampa (žiūr. 257 pav.):



257 pav.

a) 257^a pav.: $U_R(t) = Ri(t)$, iš kur gauname, pereidami prie atvaizdų, jog $U_R(p) = RI(p)$ ir $W_R(p) = \frac{Y_R(p)}{X_R(p)} = \frac{U_R(p)}{I_R(p)} = R$, t. y. $Z_R(p) = R$.

b) 257^b pav.: $U_C(t) = \frac{1}{C}q_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt$; kai pradinės sąlygos yra nulinės, tai $q_C(0) = 0$ ir $U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt$, iš kur, pereidami prie atvaizdų, gauname: $U_C(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$ ir $W_C(p) = \frac{Y_C(p)}{X_C(p)} = \frac{U_C(p)}{I_C(p)} = \frac{\frac{1}{Cp} I(p)}{I(p)} = \frac{1}{Cp}$, t. y. $Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$.

c) 257^c pav.: $U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, iš kur, kai $i(0) = 0$, pereidami prie atvaizdų, gauname: $U_L(t) = LpI(p)$ ir $W_L(p) = \frac{Y_L(p)}{X_L(p)} = \frac{LpI(p)}{I(p)} = Lp$, t. y. $Z_L(p) = Lp$.

Kadangi virpesių kontūre (žiūr. 43 pav.) rezistorius, kondensatorius ir ritelė sujungti nuosekliai, tai, ieškant bendros kontūro varžos, šių elementų varžas reikia sudėti, o kadangi Laplaso ir Hevisaido transformacijos yra tiesinės, tai, ieškant bendros kontūro varžos atvaizdo, reikia sudėti elementų varžų atvaizdus.

Todėl lygybę $Y(p) = W(p)X(p)$, kai $X(p) = U_{\text{įėj.}}(p) = U_0$, $Y(p) = I(p)$, $W(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Lp + R + \frac{1}{Cp}}$,

galima užrašyti ir taip: $I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{Z_L(p) + Z_R(p) + Z_C(p)}$, kas primena Omo dėsnį ir yra jo apibendrinimas atvaizdams.

Tai rodo, kad šitaip apibendrintą Omo dėsnį galima taikyti ne tik funkcijoms, vaizduojančioms įtampas $U(t)$ ir sroves $i(t)$, bet ir jų atvaizdams $U(p)$ ir $I(p)$, pakeičiant kontūro elementų aktyvias, induktyvias ir talpumines varžas jų atvaizdais $Z_R(p) = R$, $Z_L(p) = Lp$ ir $Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$, t. y. kompleksiniais dydžiais, kadangi $p = \sigma + i\omega$.

Kai ritelės varžą galima laikyti grynai induktyvine, t. y. neturinčią aktyviosios sudedamosios dalies, tai $\text{Re } Z_L(p) = \text{Re } Lp = L \text{Re } p = 0$. Tuomet $\sigma = 0$ ir $Z_L(p) = Li\omega$, kur $i = \sqrt{-1}$.

Analogiškai, kai kondensatoriaus varžą galima laikyti grynai talpumine, gauname, kad $Z_C(p) = \frac{1}{iC\omega}$.

Tuomet viso virpesių kontūro impedanso atvaizdas $Z(p)$ bus lygus $Li\omega + R + \frac{1}{iC\omega} = R + \frac{1}{iC\omega} + Li\omega$.

$$+i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + i \frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} \left[T_1\omega + i(T_2^2\omega^2 - 1)\right], \text{ iš kur gauname } |Z(p)| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2},$$

$$\arg Z(p) = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \arctg \frac{T_2^2\omega^2 - 1}{T_1\omega}.$$

Priklausomai nuo to, kuri iš varžų – **aktyvioji** R ar **reaktyvioji** $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ – yra dominuojančioji pilnoje kontūro varžoje, gauname skirtingus procesus, vykstančius kontūre.

a) **Kai dominuoja aktyvioji varža**, t. y., kai $R > 2L$, kur $L = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – jau minėtoji „banginė“ varža, gauname, jog $\frac{T_1}{2T_2} > 1$, iš kur išplaukia, kad $T_1^2 - 4T_2^2 > 0$.

$$\text{Tuomet } I(p) = \frac{U(p)}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)Cp}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{U(p)Cp}{T_2^2p^2 + T_1p + 1} = \frac{U(p)Cp}{T_2^2(p - p_1)(p - p_2)} \text{ turi du}$$

realius skirtingus polius $p_1 = -\alpha - \beta$ ir $p_2 = -\alpha + \beta$, kur $\alpha = \frac{RC}{2LC}$, $\beta = \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$.

b) **Kai dominuoja reaktyvioji varža**, t. y., kai $R < 2L$, gauname, kad $T_1^2 - 4T_2^2 < 0$. Tuomet β yra menamas skaičius $\frac{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2} = \frac{i\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2} = i\omega_0$ ir $I(p)$ turi du skirtingus kompleksinius polius:

$$p_1 = -\alpha - i\omega_0 \text{ ir } p_2 = -\alpha + i\omega_0, \text{ kur } \omega_0 = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}, \text{ o } \alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}.$$

c) **Kai $R = 2L$** , tai $T_1^2 - 4T_2^2 = 0$ ir $I(p)$ turi du vienodus realius polius $p_1 = p_2 = -\alpha$. Išnagrinėsime visus tris atvejus, pradžioje laikydami, jog $x(t) = u_{i\epsilon j}(t) = U_0 = \text{const}$.

1.11.10.2.1. Atvejis $T_1 > 2T_2$

$$\begin{aligned} \text{Šiuo atveju gauname, jog } I(p) &= \frac{U_0 Cp}{T_2^2} \cdot \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{U_0 Cp}{T_2^2} \cdot \left(\frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_2} \right) = \frac{U_0 C}{T_2^2(p_2 - p_1)} \left(-\frac{p}{p - p_1} + \frac{p}{p - p_2} \right) = \frac{U_0 C}{T_2^2(p_2 - p_1)} H[e^{p_2 t} - e^{p_1 t}] = \\ &= \frac{U_0 C}{T_2^2 2\beta} H[e^{p_2 t} - e^{p_1 t}] = \frac{U_0 C}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} H[e^{p_2 t} - e^{p_1 t}]. \end{aligned}$$

$$\text{Todėl } i(t) = \frac{U_0 C}{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}).$$

A. Rasime tokią $t = t^*$ baigtinę reikšmę, kad $i'(t^*) = 0$.

$$1) \quad i'(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \cdot (p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} e^{-\alpha t} (p_2 e^{\beta t} - p_1 e^{-\beta t}).$$

$$2) \quad \text{Kadangi } \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} e^{-\alpha t} > 0 \text{ visoms baigtinėms } t \text{ reikšmėms, tai } i'(t) = 0, \text{ kai}$$

$$(-\alpha + \beta)e^{\beta t} = -(\alpha + \beta)e^{-\beta t}, \text{ t. y., kai } e^{2\beta t} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}.$$

$$3) \quad \text{Kadangi } \alpha + \beta > 0 \text{ ir } \alpha - \beta > 0, \text{ tai } t^* = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}. \text{ Kadangi } \alpha + \beta > \alpha - \beta, \text{ tai } t^* > 0.$$

B. Rasime $i''(t^*)$ ir nustatysime taško t^* tipą.

$$1) i''(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \cdot (p_2^2 e^{p_2 t} - p_1^2 e^{p_1 t}) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} e^{-\alpha t} \left((-\alpha + \beta)^2 e^{\beta t} - (\alpha + \beta)^2 e^{-\beta t} \right).$$

$$2) \text{ Kadangi } \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} e^{-\alpha t} > 0, \text{ tai } i''(t) \text{ ženklas priklauso nuo skirtumo}$$

$$(\alpha - \beta)^2 e^{\beta t} - (\alpha + \beta)^2 e^{-\beta t} \text{ ženklų, t. y. nuo skirtumo } \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 e^{2\beta t} - 1 \text{ ženklų.}$$

$$3) \text{ Taške } t=t^* \text{ tenkinama lygybė } p_2 e^{p_2 t^*} = p_1 e^{p_1 t^*}, \text{ iš kurios išplaukia lygybė}$$

$$(-\alpha + \beta) e^{\beta t^*} = -(\alpha + \beta) e^{-\beta t^*} \text{ arba } \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} e^{2\beta t^*} = 1.$$

$$4) \text{ Todėl taške } t=t^* \text{ gauname, jog } \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 e^{2\beta t^*} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \text{ ir } \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 e^{2\beta t^*} - 1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} - 1 =$$

$$= \frac{-2\beta}{\alpha + \beta} < 0.$$

$$5) \text{ Tai reiškia, kad } i''(t^*) < 0 \text{ ir funkcija } i(t) \text{ taške } t=t^* = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \text{ pasiekia maksimalią}$$

$$\text{reikšmę } i(t^*) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} (e^{p_2 t^*} - e^{p_1 t^*}) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \cdot \left(e^{\frac{p_2}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} - e^{\frac{p_1}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \right) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{-\alpha + \beta}{2\beta}} - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{-\alpha - \beta}{2\beta}} \right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{-\alpha}{2\beta}} \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right)^{\frac{-\alpha}{\beta}} \left[\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha + \beta} \right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \left(\frac{2T_2}{T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} \right)^{\frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}} \times$$

$$\times \left[\frac{T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2} - \frac{2T_2}{T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} \right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \left(\frac{T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2} \right)^{\frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}} \times$$

$$\times \left[\frac{T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2} - \frac{T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2} \right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \cdot \left(\frac{RC - \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2\sqrt{LC}} \right)^{\frac{RC}{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{\sqrt{LC}} = \frac{U_0}{/} \left(\frac{R}{2/} - \sqrt{\left(\frac{R}{2/} \right)^2 - 1} \right)^{\frac{1}{1 - \left(\frac{2/}{R} \right)^2}}.$$

$$6) \text{ Kaip matome, funkcijos } i(t^*) \text{ reikšmė priklauso nuo santykio } \frac{R}{2/}, \text{ kuris mūsų nagrinėjamu}$$

atveju yra didesnis už 1.

Pavyzdžiui, kai $R=5k\Omega$, $\rho=2k\Omega$, $U_0=200V$, tai $i(t^*) \approx 31,5mA$.

C. Rasime funkcijos $i(t)$ linkio tašką $t=t^{**}$.

$$1) \text{ Iš lygybės } i''(t^{**})=0 \text{ išplaukia lygybės } (\alpha - \beta)^2 e^{\beta t^{**}} = (\alpha + \beta)^2 e^{-\beta t^{**}} \text{ ir } t^{**} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = 2t^*.$$

2) Funkcijos $i(t)$ reikšmę linkio taške t^{**} galima apskaičiuoti naudojantis formule

$$i(t^{**}) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{-\alpha}{\beta}} \left[\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4/L^2}} \cdot \left(\frac{T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2} \right)^{\frac{2T_1}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}} \times$$

$$\times \frac{T_1 \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{T_2^2} = \frac{U_0 R}{\rho^2} \left(\frac{R}{2\rho} - \sqrt{\left(\frac{R}{2\rho}\right)^2 - 1} \right)^{\frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\rho}{R}\right)^2}}} = \frac{U_0 R}{\rho^2} \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^{\frac{2}{\sqrt{1 - \xi^{-2}}}}, \text{ kur } \xi = \frac{R}{2\rho} - \text{slopavimo}$$

koeficientas.

3) Kaip nesunku pastebėti, santykis $\frac{i(t^{**})}{i(t^*)} = 2\xi \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^{\frac{2}{\sqrt{1 - \xi^{-2}}}}$ priklauso tik nuo virpesių kontūro charakteristikos – slopinimo koeficiento ξ – ir nepriklauso nuo pradinių sąlygų.

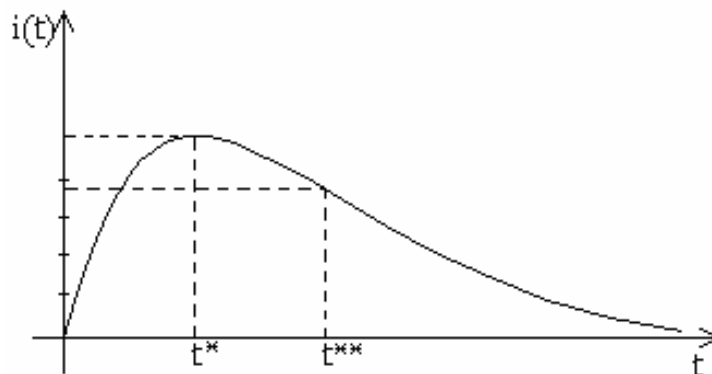
$$\text{Kai } R=5\text{k}\Omega, \rho=2\text{k}\Omega, \text{ tai } \frac{i(t^{**})}{i(t^*)} = 2,5 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \approx 0,787.$$

4) Po linkio taško t^{**} funkcija $i(t)$, didėjant t , eksponentiškai artėja prie 0, nes, kai $p_1 < 0$ ir $p_2 < 0$, tai $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_1 t} = 0$ ir $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_2 t} = 0$.

D. Apibendrinami pirmojo atvejo (t. y. atvejo $T_1 > 2T_2$) nagrinėjimo rezultatus, galime padaryti išvadą, kad **kai $x(t) = U_0 = \text{const}$ ir $\xi > 1$, tai virpesių kontūre atsiranda aperiodinis procesas:** įjungus įtampą U_0 , srovė $i(t)$ iš pradžių pradeda didėti nuo $i(0) = 0$ iki $i(t^*) = i \left(\frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) =$

$$= \frac{U_0}{\rho} \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{-2}}}}, \text{ o po to pradeda mažėti, taške } t^{**} = 2t^* \text{ pasiekia linkį } i(t^{**}) = \frac{U_0 R}{\rho^2} \times$$

$$\times \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^{\frac{2}{\sqrt{1 - \xi^{-2}}}} \text{ ir toliau eksponentiškai mažėja, artėdama prie 0 (žiūr. 258 pav.).}$$



258 pav.

1.11.10.2.2. Atvejis $T_1 < 2T_2$

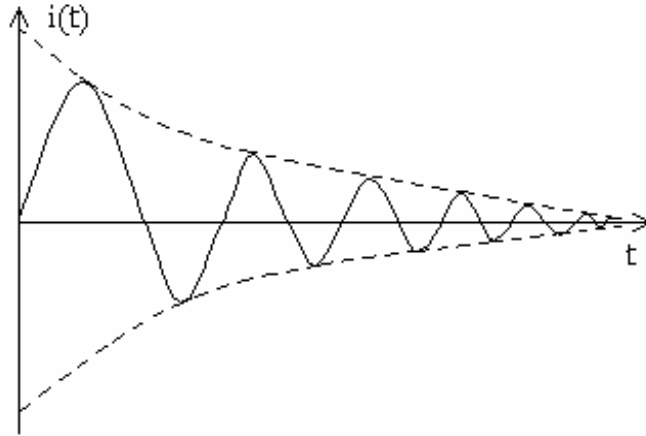
Antruoju atveju, kai $\xi < 1$ ir kontūro pilnoje varžoje dominuoja reaktyvioji varža, dydis

$$T_1^2 - 4T_2^2 \text{ tampa neigiamu ir todėl } \beta = i\omega_0, \text{ kur } i = \sqrt{-1} \text{ ir } \omega_0 = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}.$$

$$\text{Tuomet } i(t) = \frac{U_0 C}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = \frac{U_0 C}{i\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}} e^{-\alpha t} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) = \frac{2U_0}{\sqrt{4\rho^2 - R^2}} \times$$

$$\times e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t, \text{ t. y. virpesių kontūre atsiranda nuosavi svyravimai su pastoviu cikliniu dažniu}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2} \text{ ir eksponentiškai mažėjančia amplitude } A(t) = \frac{2U_0}{\sqrt{4\rho^2 - R^2}} e^{\frac{-T_1}{2T_2^2} t} \text{ (žiūr. 259 pav.).}$$



259 pav.

Jei aktyvioji varža R taptų lygi 0 , tai gautume, jog $\alpha=0$, $\omega_0=\frac{1}{T_2}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, ir **nuosavi svyravimai taptų svyravimais ne tik su pastoviu periodu $T=2\pi\sqrt{LC}$, bet ir su pastovia amplitude $A=\frac{U_0}{L}=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$. Tuomet gautume, jog $i(t)=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$.**

1.11.10.2.3. Atvejis $T_1=2T_2$

Trečiuoju atveju, kai $\xi=1$, gauname, jog $T_1^2-4T_2^2=0$. Tuomet $p_1=p_2=-\alpha=-\frac{T_1}{2T_2^2}=-\frac{2T_2}{2T_2^2}=-\frac{1}{T_2}=-\frac{1}{\sqrt{LC}}=-\frac{R}{2L}=-\frac{2}{RC}$.

A. 1) $I(p)=\frac{U_0 C p}{T_2^2(p+\alpha)^2}=\frac{U_0}{L}\cdot\frac{p}{(p+\alpha)^2}$; 2) $i(t)=\frac{U_0}{L}te^{-\alpha t}$; 3) $i'(t)=\frac{U_0}{L}(e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t})=\frac{U_0}{L}e^{-\alpha t}(1-\alpha t)$; 4) $i''(t)=\frac{U_0}{L}(-\alpha e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\alpha t}+\alpha^2 te^{-\alpha t})=\frac{U_0}{L}\alpha e^{-\alpha t}(\alpha t-2)$.

B. Rasime t^* ir t^{**} .

1) $i(t^*)=0$, kai $1-\alpha t^*=0$, t. y. kai $t^*=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{LC}$. 2) $i''(t^*)=\frac{U_0}{L}\alpha e^{-\alpha t^*}(\alpha t^*-2)=\frac{U_0}{L}\alpha e^{-1}\times(1-2)=-\frac{U_0}{L}\alpha e^{-1}=-\frac{U_0}{eL\sqrt{LC}}<0$.

3) Reiškia, taške $t=t^*=\sqrt{LC}$ funkcija $i(t)$ pasiekia maksimalią reikšmę $i(t^*)=\frac{U_0}{L}\cdot\frac{1}{\alpha}e^{-1}=\frac{U_0}{e}\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}$.

4) t^{**} rasime iš lygybės $i''(t^{**})=0$, t. y. iš lygybės $\alpha t^{**}-2=0$. Gauname, jog $t^{**}=\frac{2}{\alpha}=2t^*=2\sqrt{LC}$.

5) $i(t^{**})=\frac{U_0}{L}t^{**}e^{-\alpha t^{**}}=\frac{2U_0}{e^2}\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}$; 6) $\frac{i(t^{**})}{i(t^*)}=\frac{2}{e}\approx 0,74$.

7) Kadangi $\alpha=\frac{1}{\sqrt{LC}}>0$, tai $\lim_{t\rightarrow\infty}i(t)=\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{U_0}{L}te^{-\alpha t}=0$, $i(0)=0$.

C. Funkcijos $i(t)$ kitimo grafikas panašus į 258 pav. ir skiriasi nuo jo tik tuo, kad $i(t)$ artėjimas prie 0 yra šiek tiek lėtesnis. Reiškia, **kai $x(t)=U_0=\text{const}$ ir $\xi \geq 1$, kontūre vyksta aperiodinis procesas, o kai $\xi < 1$ – nuosavi svyravimai.**

1.11.10.3. Atvejis $x(t)=U(t)=E_0 \sin \omega t$

Išnagrinėsime šiek tiek sudėtingesnę atvejį, kai virpesių kontūro įėjimo trajektorija $x(t)=u(t)=E_0 \sin \omega t$, kur $E_0=\text{const}$, $\omega=\text{const}$.

Apskaičiuojame įėjimo atvaizdą $X(p)=p \int_0^\infty x(t)e^{-pt} dt = E_0 p \int_0^\infty \sin \omega t \cdot e^{-pt} dt = \frac{E_0 p \omega}{p^2 + \omega^2}$, galime rasti

kontūro išėjimo trajektorijos $y(t)=i(t)$ atvaizdą $Y(p)=W(p)X(p)=\frac{Cp}{LC(p-p_1)(p-p_2)} \cdot \frac{E_0 p \omega}{p^2 + \omega^2} =$

$$= \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{p^2}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)}, \text{ kur}$$

$$p_1 = \frac{-RC - \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}, p_2 = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}, p_3 = -i\omega, p_4 = i\omega.$$

Pradžioje nagrinėsime atvejį, kai $\xi \neq 1$. Tuomet $p_1 \neq p_2$.

Išskaidę $\frac{p^2}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)}$ į paprastų trupmenų sumą ir suradę tas trupmenas

atitinkančius originalus, rasime išėjimo trajektoriją $y(t)=i(t)$ – elektros srovės kitimo kontūre dėsnį tuo atveju, kai $x(t)=E_0 \sin \omega t$.

$$1) \frac{p^2}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \frac{A_3}{p-p_3} + \frac{A_4}{p-p_4}.$$

2) Koeficientų A_1, A_2, A_3, A_4 reikšmės galima rasti, naudojantis neapibrėžtųjų koeficientų metodu arba pritaikius metodą, kuriuo naudojamos įrodydami antrąją Hevisaido teoremą:

$$\text{Gauname: } A_1 = \frac{p_1^2}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)(p_1-p_4)}, A_2 = \frac{p_2^2}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)(p_2-p_4)},$$

$$A_3 = \frac{p_3^2}{(p_3-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_4)}, A_4 = \frac{p_4^2}{(p_4-p_1)(p_4-p_2)(p_4-p_3)}.$$

$$\text{Kadangi } p_2-p_1=-(p_1-p_2)=\frac{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{LC}, p_4-p_3=-(p_3-p_4)=2i\omega, (p_1-p_3)(p_1-p_4)=p_1^2 + \omega^2,$$

$$(p_2-p_3)(p_2-p_4)=p_2^2 + \omega^2, (p_3-p_1)(p_3-p_2)=(-i\omega-p_1)(-i\omega-p_2)=(i\omega+p_1)(i\omega+p_2)=i^2\omega^2+i\omega(p_1+p_2)+p_1p_2=$$

$$=-\omega^2+i\omega\left(-\frac{R}{L}\right)+\frac{1}{LC}=\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)-i\omega\frac{R}{L}, (p_4-p_1)(p_4-p_2)=\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)+i\omega\frac{R}{L}, \text{ tai gauname:}$$

$$A_1 = \frac{-LCp_1^2}{(p_1^2 + \omega^2)\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}, A_2 = \frac{LCp_2^2}{(p_2^2 + \omega^2)\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}, A_3 = \frac{-LCp_3^2}{2i\omega[(1-LC\omega^2)-i\omega RC]},$$

$$A_4 = \frac{LCp_4^2}{2i\omega[(1-LC\omega^2)+i\omega RC]}.$$

$$\text{Todėl } Y(p)=I(p)=\frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p-p_2} + \frac{A_3}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p-p_3} + \frac{A_4}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p-p_4} \right), \text{ iš kur,}$$

atsižvelgdami, jog $H[e^{p_k t} - 1] = \frac{p_k}{p - p_k}$, gauname:

$$y(t)=i(t)=\frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} (e^{p_1 t} - 1) + \frac{A_2}{p_2} (e^{p_2 t} - 1) + \frac{A_3}{p_3} (e^{p_3 t} - 1) + \frac{A_4}{p_4} (e^{p_4 t} - 1) \right) = \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t} + \right.$$

$$+ \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} - \left(\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} \right) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) - i_5, \text{ kur } i_1(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t},$$

$$i_2(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t}, i_3(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t}, i_4(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t}, i_5 = \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \left(\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} \right) = \text{const.}, \text{ kuri}$$

šiuo atveju yra lygi 0.

$$\text{Gautoji formulė rodo, jog } i(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t} + \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} \right) \text{ ir } i(0) = 0.$$

Išnagrinėsime proceso, vykstančio kontūre, priklausomybę nuo slopinimo koeficiento

$$\xi = \frac{T_1}{2T_2} = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{L/C}}.$$

1.11.10.3.1. Atvejis, kai $\xi > 1$, t. y., kai $R^2 C^2 > 4LC$, ir p_1, p_2 – realūs neigiami skaičiai

Kadangi šiuo atveju $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_1 t} = 0$ ir $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_2 t} = 0$, tai $\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = 0$ ir $\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = 0$, t. y. srovės $i(t)$ pirmos dvi sudėtinės dalys ilgainiui užgesa. Rasime kitas srovės $i(t)$ sudėtinės dalis $i_3(t)$, $i_4(t)$ bei jų sumą:

$$\frac{A_3}{p_3} = -\frac{LC(-i\omega)}{2i\omega[(1-LC\omega^2)-i\omega RC]} = \frac{LC[(1-LC\omega^2)+i\omega RC]}{2[(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2]}, \quad \frac{A_4}{p_4} = \frac{LC[(1-LC\omega^2)-i\omega RC]}{2[(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2]},$$

$$\frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} = \frac{LC(1-LC\omega^2)}{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}, \quad \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} = \frac{LC(1-LC\omega^2)}{2[(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2]} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) +$$

$$+ \frac{i\omega RC \cdot LC}{2[(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2]} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) = \frac{LC}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \times \left[\frac{1-LC\omega^2}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \times \right.$$

$$\times \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \left. \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right] = \frac{LC}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \times$$

$$\times \left[\frac{1-LC\omega^2}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos \omega t + \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin \omega t \right].$$

Pažymėję $1-LC\omega^2=a$ ir $\omega RC=b$, gauname, jog koeficientas prie $\cos \omega t$ yra lygus $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, o

koeficientas prie $\sin \omega t$ yra lygus $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Kadangi šių koeficientų kvadratų suma lygi 1 ir yra

tenkinamos sąlygos: $-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$, $-1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$, tai egzistuoja toks kampas $\varphi = \arctg \frac{a}{b} =$

$= \arctg \frac{1-LC\omega^2}{\omega RC}$, kuris tenkina lygybes $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi$.

$$\text{Tuomet } \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} = \frac{LC}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} [\sin \varphi \cdot \cos \omega t + \cos \varphi \cdot \sin \omega t] =$$

$$= \frac{LC}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

$$\text{Todėl } i_3(t) + i_4(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} \right) = \frac{E_0 \omega C}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Šios sudėtinės srovės $i(t)$ dalys – tai negestantys priverstiniai svyravimai (virpesiai), turintys pastovią amplitudę, proporcingą įėjimo amplitudei E_0 , ir tą patį dažnį, kaip ir įėjimo svyravimai $E_0 \sin \omega t$, tačiau pasikeitusią („pastumtą“) pradinę fazę.

Rekomenduoju skaitytojui įsitikinti, jog fazės „postūmio“ dydis $\varphi = \arctg \frac{1 - LC\omega^2}{\omega RC} \equiv \arg W(i\omega)$, o srovės $i_3(t) + i_4(t)$ svyravimų amplitudės santykis su įėjimo svyravimų amplitude yra lygus $\frac{\omega C}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} = |W(i\omega)|$, kur $W(i\omega)$ – kompleksinis dydis, gautas iš virpesių kontūro perdavimo funkcijos $W(p) = \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1}$, pakeitus p į $i\omega$, t. y. priėmus, kad kompleksinio parametro $p = \sigma + i\omega$ realioji dalis σ yra lygi 0.

Įsitikinsime, jog $i_5 = 0$. Sumą $\frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} = \frac{LC(1 - LC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$ esame suradę jau anksčiau.

Belieka surasti sumą $\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2}$.

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} &= \frac{LC}{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}} \left(\frac{p_2}{p_2^2 + \omega^2} - \frac{p_1}{p_1^2 + \omega^2} \right) = \frac{LC}{\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}} \times \\ &\times \frac{p_2 p_1^2 - p_2^2 p_1 + \omega^2 (p_2 - p_1)}{(p_2^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)} = \frac{LC(p_2 - p_1)(\omega^2 - p_1 p_2)}{(p_2^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}} = \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{(p_2^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{LC\omega^2 - 1}{LC(p_2^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)} = \frac{LC\omega^2 - 1}{LC[(p_1 p_2)^2 + \omega^2(p_1^2 + p_2^2) + \omega^4]} = \frac{LC(LC\omega^2 - 1)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}. \\ i_5 &= \frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} = \frac{LC(LC\omega^2 - 1) + LC(1 - LC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} = 0. \end{aligned}$$

Reiškia, $i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \frac{E_0 \omega C}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi)$, o kadangi sudedamoji srovės $i(t)$ dalis $i_1(t) + i_2(t)$ ilgainiui užgęsta, tai ilgainiui kontūre nusistovi srovė $i_3(t) + i_4(t) = \frac{E_0 \omega C}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi)$, kartojanti įėjimo svyravimus. Pasikeičia tik išėjimo svyravimų amplitudė, tapdama $\frac{E_0 \omega C}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$, ir svyravimų pradinė fazė, pasistumdama kampu $\varphi = \arctg \frac{1 - LC\omega^2}{\omega RC}$. Šie svyravimai, kaip jau buvo minėta, vadinami priverstiniais svyravimais, nes jie atsiranda kaip išorinio poveikio $x(t) = E_0 \sin \omega t$ pasekmė.

1.11.10.3.2. Atvejis kai $\xi = 1$, t. y., kai $R^2 C^2 = 4LC$ ir $p_1 = p_2 = p_0 = -\frac{R}{2L} < 0$

$$\text{Tuomet } I(p) = \frac{E_0 \omega}{L} \times \frac{p^2}{(p - p_0)^2 (p^2 + \omega^2)}.$$

Pasinaudodami atvirkštine transformacija, t. y. pasinaudodami reziduų formule ir Koši teorema, gausime:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 + p_0^2)^2} \left\{ (\omega^2 - p_0^2) + tp_0(\omega^2 + p_0^2) \right\} e^{p_0 t} + \left[(p_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2p_0 \omega \sin \omega t \right], \text{ kur } \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 + p_0^2)^2} \times \\ &\times \left[(\omega^2 - p_0^2) + tp_0(\omega^2 + p_0^2) \right] e^{p_0 t} \text{ ilgainiui užgęsta, nes } p_0 = -\frac{R}{2L} < 0 \text{ ir išlieka tik } \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 + p_0^2)^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \left[(p_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2p_0 \omega \sin \omega t \right] &= \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 + p_0^2)} \cdot \left[\frac{p_0^2 - \omega^2}{p_0^2 + \omega^2} \cos \omega t - \frac{2p_0 \omega}{p_0^2 + \omega^2} \sin \omega t \right] = \frac{E_0 \omega}{L \left(\omega^2 + \frac{R^2}{4L^2} \right)} \times \\ &\times \left[\frac{\frac{R^2}{4L^2} - \omega^2}{\frac{R^2}{4L^2} + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\frac{R}{L} \omega}{\frac{R^2}{4L^2} + \omega^2} \sin \omega t \right] = \frac{E_0 \omega}{L \left(\omega^2 + \frac{1}{LC} \right)} \cdot \left[\frac{1 - LC \omega^2}{1 + LC \omega^2} \cos \omega t + \frac{RC \omega}{1 + LC \omega^2} \sin \omega t \right] = \\ &= \frac{E_0 C \omega}{LC \omega^2 + 1} [\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t] = \frac{E_0 C \omega}{LC \omega^2 + 1} \sin(\omega t + \varphi), \text{ kur } \varphi = \arctg \frac{1 - LC \omega^2}{\omega RC}. \end{aligned}$$

Gavome tokį patį priverstinių svyravimų pradinės fazės postūmį, kaip ir atveju, kada $R^2 C^2 > 4LC$. Išėjimo ir įėjimo amplitudžių santykis $\frac{C\omega}{1 + LC\omega^2}$ taip pat sutampa su anksčiau gautu, nes, galiojant lygybei $R^2 C^2 = 4LC$, santykis $\frac{C\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$ gali būti supaprastintas ir tampa lygus $\frac{C\omega}{1 + LC\omega^2}$.

1.11.10.3.3. Atvejis kai $\xi < 1$, t. y., kai $R^2 C^2 < 4LC$

Tuomet p_1, p_2 – kompleksiniai skaičiai su neigiamomis realiomis dalimis: $p_1 = -\frac{R}{2L} - i\omega_0$, $p_2 = -\frac{R}{2L} + i\omega_0$, o p_3 ir p_4 , kaip ir anksčiau, – menami skaičiai: $p_3 = -i\omega$, $p_4 = i\omega$.

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{E_0 \omega}{L} \cdot \frac{p^2}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)} = \frac{E_0 \omega}{L} \left[\frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3} + \frac{A_4}{p - p_4} \right] = \\ &= \frac{E_0 \omega}{L} \left[\frac{A_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p - p_3} + \frac{A_4}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p - p_4} \right], \text{ kur } \frac{A_1}{p_1} = \frac{p_1}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)}, \\ \frac{A_2}{p_2} &= \frac{p_2}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)}, \frac{A_3}{p_3} = \frac{p_3}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_4)}, \frac{A_4}{p_4} = \frac{p_4}{(p_4 - p_1)(p_4 - p_2)(p_4 - p_3)}. \\ i(t) &= \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} (e^{p_1 t} - 1) + \frac{A_2}{p_2} (e^{p_2 t} - 1) + \frac{A_3}{p_3} (e^{p_3 t} - 1) + \frac{A_4}{p_4} (e^{p_4 t} - 1) \right) = \\ &= \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t} + \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} - \left(\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} \right) \right) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) - i_5. \\ i_5 &= \frac{p_1(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)(p_3 - p_4) - p_2(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)(p_3 - p_4)}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)(p_3 - p_4)} + \\ &+ \frac{p_3(p_1 - p_2)(p_1 - p_4)(p_2 - p_4) - p_4(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)(p_3 - p_4)} \equiv 0. \\ i_1(t) + i_2(t) &= \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t} \right) = \frac{E_0 \omega}{L} e^{\frac{-R}{2L} t} \left(\frac{A_1}{p_1} e^{-i\omega_0 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{i\omega_0 t} \right) - \text{kontūro nuosavi} \end{aligned}$$

gęstantys svyravimai su dažniu $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$. Šie svyravimai ilgainiui užgęsta, nes $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{-R}{2L} t} = 0$.

$$i_3(t) + i_4(t) = \frac{E_0 \omega}{L} \left(\frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} \right) = \frac{E_0 \omega}{L} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{-i\omega}{\left(-i\omega + \frac{R}{2L} + i\omega_0\right)\left(-i\omega + \frac{R}{2L} - i\omega_0\right)(-2i\omega)} e^{-i\omega t} + \frac{i\omega}{\left(i\omega + \frac{R}{2L} + i\omega_0\right)\left(i\omega + \frac{R}{2L} - i\omega_0\right)2i\omega} e^{i\omega t} \right] = \\
& = \frac{E_0\omega \left\{ \left[\left(\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2 - \omega^2 \right) - i \frac{R}{L} \omega \right] e^{i\omega t} + \left[\left(\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2 - \omega^2 \right) + i \frac{R}{L} \omega \right] e^{-i\omega t} \right\}}{2L \left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2 \right] \cdot \left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega + \omega_0)^2 \right]} = \\
& = \frac{E_0\omega}{2L \left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2 \right] \cdot \left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega + \omega_0)^2 \right]} \cdot \left[\left(\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2 - \omega^2 \right) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{R\omega}{iL} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] \times \\
& \times \frac{E_0\omega}{L(A^2 + B^2)} = [A \cos \omega t + B \sin \omega t] = \frac{E_0\omega}{L\sqrt{A^2 + B^2}} \left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right] = \\
& = \frac{E_0\omega}{L\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t + \varphi), \text{ kur } A = \frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2 - \omega^2, B = \frac{R\omega}{L}, \varphi = \arctg \frac{A}{B} = \frac{\frac{R^2}{4L} + L\omega_0^2 - L\omega^2}{R\omega} = \\
& = \frac{\frac{R^2}{4L} + L \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right) - L\omega^2}{R\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}.
\end{aligned}$$

Ir ši kartą gavome, jog pradinės fazės postūmis toks pat, kaip ir tais atvejais, kai $\xi > 1$ ir $\xi = 1$. Išėjimo ir įėjimo amplitudžių santykis taip pat išlieka toks pat, kaip ir ankstesniais atvejais:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{L\sqrt{A^2 + B^2}} &= \frac{\omega}{L \sqrt{\left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2 \right] \cdot \left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega + \omega_0)^2 \right]}} = \\
&= \frac{\omega}{L \sqrt{\frac{R^4}{16L^4} + \frac{R^2}{4L^2} [(\omega - \omega_0)^2 + (\omega + \omega_0)^2] + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} = \frac{\omega}{L \sqrt{\frac{R^4}{16L^4} + 2 \frac{R^2}{4L^2} (\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} = \\
&= \frac{\omega}{L \sqrt{\left(\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{R\omega}{L} \right)^2}} = \frac{\omega}{L \sqrt{\left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 \right)^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2}}} = \\
&= \frac{C\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}.
\end{aligned}$$

Nagrinėdami šį santykį, galime pastebėti, jog tais atvejais, kai įėjimo dažnis yra $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

dydis $1 - LC\omega^2$ tampa lygus 0 ir amplitudžių santykis tampa lygus $\frac{1}{R}$. Tai reiškia, jog, esant tokiam dažniui, induktyvinė ir talpuminė varža kompensuoja viena kitą ir kontūre belieka tik aktyvioji varža R. Tokį reiškinį vadina rezonansu, o dažnį $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – kontūro rezonansiniu dažniu.

Susidarius sąlygoms rezonansui atsirasti, žymiai padidėja srovės amplitudė kontūre. Ji tampa ypatingai didelė, jai aktyvioji varža R – maža.

Tuo atveju, kai $\xi < 1$, aktyvioji varža R gali būti arti 0, ir tada rezonansas pasireikštų ypatingai ryškiai, nes, artėjant R prie 0, srovės amplitudė artėtų prie begalybės.

1.11.10.3.4. Atvejis, kai $\xi < 1$ ir varža R artėja prie 0 ir net tampa lygi 0

Pradžioje surasime $i(t)$ tuo atveju, kai rezonanso dar nėra, t. y. kai $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Jei $R=0$, tai

$$p_1 = \frac{\sqrt{-4LC}}{2LC} = -i \frac{1}{\sqrt{LC}} = -i\omega_0, \quad p_2 = -\frac{\sqrt{-4LC}}{2LC} = i \frac{1}{\sqrt{LC}} = i\omega_0, \text{ kur } \omega_0 - \text{rezonansinis kontūro dažnis.}$$

Kadangi $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tai visi $I(p)$ poliai p_1, p_2, p_3, p_4 – skirtingi ir $I(p) = \frac{E_0\omega}{L} \times$

$$\times \frac{p^2}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)} = \frac{E_0\omega}{L} \left[\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \frac{A_3}{p-p_3} + \frac{A_4}{p-p_4} \right].$$

Tuomet, atsižvelgdami į tai, jog šiuo atveju $\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} = 0$, gauname jog $i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = \frac{E_0\omega}{L} \left(\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t} + \frac{A_3}{p_3} e^{p_3 t} + \frac{A_4}{p_4} e^{p_4 t} \right)$, kur

$$\frac{A_1}{p_1} = \frac{p_1}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)(p_1-p_4)} = \frac{-i\omega_0}{(-i\omega_0-i\omega_0)(-i\omega_0+i\omega_0)(-i\omega_0-i\omega_0)} =$$

$$= \frac{1}{-2i(\omega-\omega_0)i(\omega+\omega_0)} = \frac{1}{2(\omega^2-\omega_0^2)}, \quad \frac{A_2}{p_2} = \frac{p_2}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)(p_2-p_4)} =$$

$$= \frac{i\omega_0}{(i\omega_0+i\omega_0)(i\omega_0-i\omega_0)(i\omega_0-i\omega_0)} = \frac{1}{2(\omega^2-\omega_0^2)}, \quad \frac{A_3}{p_3} = \frac{p_3}{(p_3-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_4)} =$$

$$= \frac{-i\omega}{(-i\omega+i\omega_0)(-i\omega-i\omega_0)(-i\omega-i\omega_0)} = \frac{1}{2(\omega_0^2-\omega^2)}, \quad \frac{A_4}{p_4} = \frac{p_4}{(p_4-p_1)(p_4-p_2)(p_4-p_3)} =$$

$$= \frac{i\omega}{(i\omega+i\omega_0)(i\omega-i\omega_0)(i\omega-i\omega_0)} = \frac{1}{2(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Gavome, jog $\frac{A_1}{p_1} = \frac{A_2}{p_2} = -\frac{A_3}{p_3} = -\frac{A_4}{p_4}$, kas dar kartą parodo, jog ir šiuo atveju

$$\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2} + \frac{A_3}{p_3} + \frac{A_4}{p_4} = 0.$$

Apskaičiuosime $i(t)$.

$$i(t) = \frac{E_0\omega}{L(\omega^2-\omega_0^2)} \left[\frac{e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}}{2} - \frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2} \right] = \frac{E_0\omega}{L(\omega^2-\omega_0^2)} (\cos\omega_0 t - \cos\omega t) = \frac{E_0\omega}{L(\omega^2-\omega_0^2)} \times$$

$$\times 2 \sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2} t\right).$$

Gauta formulė rodo, jog šiuo atveju **kontūre vyks sudėtingas procesas: ant „greitų“ virpesių, turinčių dažnį, lygų $\frac{\omega+\omega_0}{2}$, „užsidės“ juos moduliuojantys „lėti“ virpesiai, turintys dažnį $\frac{\omega-\omega_0}{2}$** . Į tokį procesą galima žiūrėti kaip į virpesius su dažniu $\frac{\omega+\omega_0}{2}$, kurių amplitudė

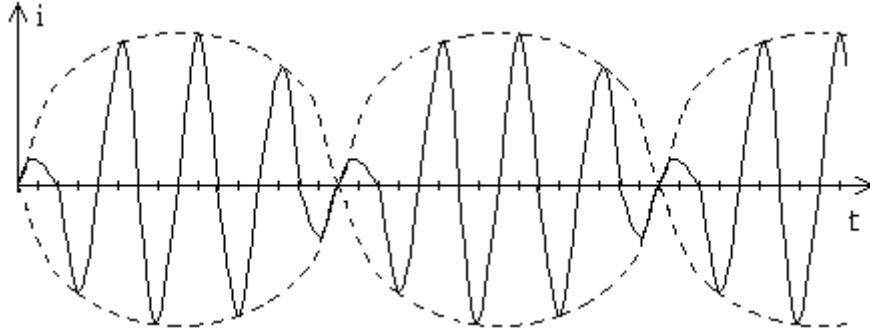
$$\frac{2E_0\omega}{L(\omega^2-\omega_0^2)} \sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2} t\right) \text{ nėra pastovus dydis, o lėtai svyruoja su dažniu } \frac{\omega-\omega_0}{2} \text{ (žiūr. 260 pav.)}.$$

Artėjant ω prie ω_0 , „greitųjų“ svyravimų dažnis artės prie ω_0 , o „lėtųjų“ – prie 0. Tuo pačiu metu didės virpesių amplitudės „lėtųjų“ svyravimų maksimumai, nes mažės dydis $\omega^2 - \omega_0^2$.

$$\text{Kadangi } i(t) = \frac{2E_0\omega}{L(\omega^2-\omega_0^2)} \sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2} t\right) = \frac{E_0\omega t}{L(\omega+\omega_0)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2} t\right)}{\frac{\omega-\omega_0}{2} t} \cdot \sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2} t\right)$$

ir $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t}{\frac{\omega - \omega_0}{2}} = 1$, tai $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} i(t) = \frac{E_0 t}{2L} \sin \omega_0 t$, o tai reiškia, jog, artėjant ω prie ω_0 , **svyravimų**

maksimumai, didėjant t, turi artėti prie begalybės, o svyravimų dažnis – prie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



260 pav.

Šį rezultatą reikėtų patikrinti, nes jis gautas, naudojantis formule $I(p) = \frac{E_0 \omega}{L} \times \frac{p^2}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)} = \frac{E_0 \omega}{L} \left[\frac{A_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p - p_3} + \frac{A_4}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p - p_4} \right]$, kuri, esant lygybei $\omega = \omega_0$, negali būti taikoma, kadangi tuomet $I(p) = \frac{E_0 \omega_0}{L} \cdot \frac{p^2}{(p - p_1)^2 (p - p_2)^2} = \frac{E_0 \omega_0}{L} \cdot \frac{p^2}{(p + i\omega_0)^2 (p - i\omega_0)^2}$.

Pasinaudodami reziduų formule, gausime: $\frac{L}{E_0 \omega_0} i(t) = \lim_{p \rightarrow -i\omega_0} \frac{d}{dp} \left[\frac{p}{(p - i\omega_0)^2} e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow i\omega_0} \frac{d}{dp} \left[\frac{p}{(p + i\omega_0)^2} e^{pt} \right] = \lim_{p \rightarrow -i\omega_0} \left[\frac{(p - i\omega_0)^2 - 2p(p - i\omega_0)}{(p - i\omega_0)^4} e^{pt} + \frac{p}{(p - i\omega_0)^2} t e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow i\omega_0} \left[\frac{(p + i\omega_0)^2 - 2p(p + i\omega_0)}{(p + i\omega_0)^4} e^{pt} + \frac{p}{(p + i\omega_0)^2} t e^{pt} \right] = \frac{i}{4\omega_0} t e^{-i\omega_0 t} - \frac{i}{4\omega_0} t e^{i\omega_0 t} = \frac{t}{2\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} = \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$, iš kur $i(t) = \frac{E_0 \omega_0}{L} \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{E_0}{2L} t \sin \omega_0 t$. Gautas rezultatas

rodo, jog $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} i(t)$ sutampa su anksčiau gautąja $i(t)$ reikšme, kai $\omega = \omega_0$.

I šrovę $i(t) = \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t + \frac{E_0 \omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$ galima žiūrėti kaip į **dvejų harmoninių**

virpesių – nuosavųjų (laisvųjų) su dažniu ω_0 ir priverstinių su dažniu ω – sumą. Šie virpesiai, vektoriškai susidedami (kitais tariant, susidedami kaip kompleksiniai dydžiai), ir **sudaro moduluotus virpesius su pagrindiniu dažniu $\frac{\omega + \omega_0}{2}$ ir su moduliavimo dažniu $\frac{\omega - \omega_0}{2}$.**

Priverstiniais virpesiams $i_{\text{priv.}}(t) = i_3(t) + i_4(t) = \frac{E_0 \omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{E_0 \omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ir

šiuo atveju, kaip ir visais kitais ankstesniais, galioja išėjimų ir įėjimų amplitudžių santykio bei pradinės fazės pastūmio formulės:

$$\frac{I_0}{E_0} = \frac{\frac{E_0 \omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}}{E_0} = \frac{\omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{C\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}} = \frac{C\omega}{1 - LC\omega^2} =$$

$$= \frac{C\omega}{LC\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)} = \frac{\omega}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}, \varphi = \arctg \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}, \lim_{R \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

1.11.10.3.5. Apibendrinimas

I srovę $i(t)$ kaip laisvųjų ir priverstinių virpesių sumą galima žiūrėti ir tada, kai, esant $\xi < 1$, aktyvioji varža R nėra lygi 0.

Skirtumas nuo jau išnagrinėto atvejo, kai $R=0$, bus tik toks, kad dabar laisvųjų virpesių amplitudė nebus pastovi, o eksponentiškai mažės, nes $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{-R}{2L}t} = 0$. Todėl palaipsniui mažės ir moduluojantis poveikis, kol galų gale jis praktiškai išnyks, ir beliks tik harmoniniai priverstiniai virpesiai su dažniu ω , pastovia amplitude, lygia $E_0 \frac{C\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}$, ir su pradinės fazės postūmiu $\varphi = \arctg \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}$.

Atvejais, kai $\xi > 1$ ir $\xi = 1$, laisvųjų virpesių neatsiras ir priverstiniai virpesiai kompleksiskai sumuosius su aperiodiniais eksponentiškai silpstančiais procesais. **Visais atvejais, kai ω artės prie $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, priverstinių virpesių amplitudė didės ir kontūre galėsime stebėti rezonanso reiškinių.**

Apibendrinami virpesių kontūre vykstančių procesų nagrinėjimo rezultatus, galime padaryti išvadą, kad, kai kontūro įėjimas – harmoniniai virpesiai, virpesių kontūro išėjimo priverstiniai virpesiai – taip pat harmoniniai to paties dažnumo virpesiai, galintys skirtis nuo įėjimo virpesių tik savo amplitude ir pradine fazės postūmiu. **Kai virpesių kontūro aktyvioji varža $R > 0$, tai nusistovėję išėjimo virpesiai savo dažniu sutampa su priverstiniais, ir todėl, žinodami įėjimo virpesių amplitudę ir pradinę fazę, mes galime iš perdavimo funkcijos rasti pradinės fazės postūmį bei amplitudės perdavimo koeficientą ir iš karto parašyti nusistovėjusios išėjimo trajektorijos formulę.**

1.11.10. skyrelyje gauti rezultatai gali būti interpretuojami ne tik elektromagnetinių virpesių kontūre vykstančių procesų terminais, bet ir žymiai plačiau: ne tik elektrotechnikoje bei radiotechnikoje, bet ir mechanikoje, biologijoje, ekonomikoje, sociologijoje ir t. t., t. y., visur, kur pasireiškia objektų, jų būsenų bei juose vykstančių procesų inercija, kur dalis sistemoje sukauptos aktyvios (galinčios būti panaudotos, vykdant kokį nors reikalingą darbą) energijos gali pereiti iš tos sistemos į aplinką ir išsisklaidyti joje (pavyzdžiui, virsti dalelių chaotiško judėjimo šilumine energija), kur aktyvūs poveikiai iššaukia priešingos krypties atoveiksmį, visokiose tokiose sistemose, jei tik aktyvios energijos išsisklaidymas nėra toks didelis, kad prasidėjęs procesas beveik tuoj pat pradėtų monotoniškai gesti, būtinai atsiranda svyravimai, kurių amplitudė laikui bėgant silpnėja ir, kai nėra pašalinės tuos svyravimus palaikančios jėgos, ilgainiui tampa lygi nuliui. Galima teigti, jog svyravimo procesai būdingi visoms tokioms sistemoms nepriklausomai nuo tų sistemų prigimties bei to substrato, iš kurio tos sistemos sudarytos.

Tai reiškia, jog formulės, išvestos nagrinėjant įvairius 1.11.9. skyrelio atvejus, turi ne tik lokalų, bet ir bendrasisteminių pobūdį, o tame skyrelyje panaudotus klasikinius matematinės analizės metodus galima taikyti, nagrinėjant ne tik elektromagnetinių virpesių kontūrus bei juose vykstančius procesus, bet ir kitas sistemas, aprašomas tiesinėmis diferencialinėmis antros eilės lygtimis (žiūr., pavyzdžiui, 1.14.12.2.3. skyrelį).

Tuos metodus galima taikyti ir sudėtingesniais atvejais, kai jau nebepavyksta sudaryti pakankamai adekvatų analizinį sudėtingos sistemos modelį ir tenka imituoti sistemos funkcionavimo algoritmus: norint susiaurinti eksperimentų su imitaciniu modeliu sritį ir sumažinti reikalaujančių daug kompiuterinio laiko eksperimentų skaičių, naudinga pradžioje sudaryti apytikrą (labai supaprastintą) nagrinėjamos sistemos analizinį modelį, išanalizuoti jį, nustatant sistemos imitacinio modelio parametrų reikšmių kitimo sritis, kurios galėtų būti mums įdomios bei svarbios, ir tik po to pradėti eksperimentuoti su imitaciniu modeliu.

Nors analizinių metodų jau nebepakanka, sprendžiant sudėtingas problemas, tačiau šie metodai nepraranda savo reikšmės, nes jie gali naudingai pasitarnauti planuojant matematinius eksperimentus su imitaciniais modeliais.

1.11.11. Impulsinė perėjimo charakteristika. Amplitudinė fazinė, amplitudinė dažnuminė ir fazinė dažnuminė charakteristikos

Iš perdavimo funkcijų metodo išplaukia perėjimo charakteristikų metodas, leidžiantis kai kuriais atvejais žymiai supaprastinti išėjimo trajektorijų apskaičiavimą.

Aprašysime šį metodą.

Tarkime, jog turime tiesinį bloką, kurio perdavimo funkcija yra $W(s)$, ir tuo momentu, kai to bloko būseną $z(t)$ yra lygi 0, paduodame į to bloko įėjimą **vienetinį impulsą** $x(t)=\delta(t)=u'(t)$, kur $u(t)=\begin{cases} 0, & \text{kai } t \leq -0, \\ 1, & \text{kai } t \geq +0. \end{cases}$

Apskaičiuosime to bloko išėjimą šiuo atveju.

Kadangi $X(s)=L[\delta(t)]=\int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt=1$, tai $Y(s)=X(s)W(s)=W(s)$. Tai reiškia, jog

bloko išėjimo funkcija $y(t)$ šiuo atveju bus tokia, kad jos Laplaso atvaizdas $Y(s)$ sutaps su bloko perdavimo funkcija $W(s)$.

Tokia išėjimo funkcija $y(t)$ buvo pavadinta bloko **impulsine perėjimo charakteristika**. Ji žymima specialiu žymeniu $w(t)$.

Taigi, $L[w(t)]=W(s)$, t. y. tiesinio bloko **impulsinė perėjimo charakteristika $w(t)$ yra to bloko perdavimo funkcijos originalas**.

Pavyzdžiui, integravimo grandelės, turinčios perdavimo funkciją $W(s)=\frac{1}{sT+1}=\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$,

impulsinę perėjimo charakteristiką galima rasti dviem būdais: 1) kaip perdavimo funkcijos originalą $w(t)=\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ ir 2) kaip bloko išėjimą $y(t)=z(0)e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{1}{RC} \int_0^t x(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau$, kai $z(0)=0$, $x(t)=\delta(t)$, pažymėję RC kaip T .

Analogiškai galima gauti, kad diferencijavimo grandelės, turinčios perdavimo funkciją $W(s)=\frac{sT}{sT+1}=\frac{sT+1-1}{sT+1}=1-\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$, impulsinė perėjimo charakteristika yra $w(t)=\delta(t)-\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, kur

$T=RC$. Nesunku įsitikinti, kad diferencijavimo grandelės išėjimo trajektorija $y(t)=x(t)-z(t)=x(t)-z(0)e^{-\frac{t}{T}}-\frac{1}{T} \int_0^t x(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau$, kai $z(0)=0$ ir $x(t)=\delta(t)$, tikrai yra lygi $\delta(t)-\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, t. y. $w(t)$.

Bendrai paėmus, **impulsinė perėjimo charakteristika kaip bloko atsakas (bloko išėjimo trajektorija $y(t)$) į vienetinį impulsą $x(t)=\delta(t)$ yra netgi platesnė ir bendresnė sąvoka už perdavimo funkcijos $W(s)$ originalo $w(t)$ sąvoką, nes impulsinė perėjimo charakteristika egzistuoja ir tokiems blokams, kurie nėra tiesiniai ir neturi perdavimo funkcijos $W(s)$ kaip pastovaus išėjimo ir įėjimo atvaizdų santykio $\frac{Y(s)}{X(s)}$. Tačiau, kai toks pastovus santykis $\frac{Y(s)}{X(s)}=W(s)$ egzistuoja, tai**

bloko atsako $y(t)$ į vienetinį impulsą $x(t)=\delta(t)$ ir perdavimo funkcijos $W(s)$ originalo $w(t)$ sąvokos sutampa.

Kadangi, esant nulinėms pradinėms sąlygoms, $Y(s)=X(s)W(s)$, o dviejų atvaizdų sandauga, kaip anksčiau buvo įrodyta, yra lygi funkcijų originalų sąsūkos Laplaso atvaizdui, tai $Y(s)=X(s)W(s)=L[x(t) \cdot w(t)]=L\left[\int_0^t x(t-\tau)w(\tau)d\tau\right]$, iš kur

išplaukia, kad, esant nulinėms pradinėms sąlygoms, $y(t) = \int_0^t x(t-\tau)w(\tau)d\tau$, o taip pat,

$$\text{kad } y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Šios lygybės vadinamos daliniais **Diūamelio integralais**. Jomis naudojantis ir žinant perėjimo charakteristiką $w(t)$ bei įėjimo trajektoriją $x(t)$, galima apskaičiuoti bloko išėjimo trajektoriją, atitinkančią pradinės nulines sąlygas. Šiek tiek vėliau mes susipažinsime ir su bendroju Diūamelio integralu, kuris gali būti taikomas esant bet kurioms pradinėms sąlygoms. Dabar kol kas nagrinėsime tik atvejus, kai blokai – tiesiniai ir pradinės sąlygos – nulinės.

Pavyzdžiui, kai integravimo grandelės pradinė būseną $z(0)=0$ ir $x(t)=\begin{cases} 0, & \text{kai } t \leq -0 \\ t, & \text{kai } t \geq +0 \end{cases}$, tai

$$\begin{aligned} \text{grandelės išėjimo trajektorija } y(t) &= \int_0^t x(t-\tau)w(\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau) \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^t (t-\tau) e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = \\ &= \frac{t}{T} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau - \frac{1}{T} \int_0^t \tau e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = t \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + \left(t e^{-\frac{t}{T}} + T e^{-\frac{t}{T}} - T \right) = t - T + T e^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

Šis rezultatas tuo atveju, kai $z(0)=0$ ir $x(t)=t$, sutampa su išėjimo trajektorija $y(t)=z(0)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{T} \int_0^t x(t)e^{-\frac{t}{T}} dt$, gaunama tiesiogiai iš

integravimo grandelės matematinio modelio $\left(\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t)-z(t)}{RC} = \frac{1}{T} (x(t)-z(t)) \right)$, $y(t)=z(t)$, kai $x(t)=t$.

Kai bloko įėjimas – harmoniniai svyravimai $x(t)=A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} = A_x [\cos(\omega t + \varphi_x) + i \sin(\omega t + \varphi_x)]$, kur $A_x = \text{const} > 0$ – svyravimų amplitudė $|x(t)| = \sqrt{[\text{Re } x(t)]^2 + [\text{Im } x(t)]^2} = \sqrt{A_x^2 \cos^2(\omega t + \varphi_x) + A_x^2 \sin^2(\omega t + \varphi_x)} = A_x$, $\omega = \text{const} > 0$ – svyravimų ciklinis dažnis, $\varphi_x = \arg x(0) = \arctg \frac{\text{Im } x(0)}{\text{Re } x(0)} = \arctg \frac{\sin \varphi_x}{\cos \varphi_x} = \arctg(\tg \varphi_x) = \varphi_x$ – svyravimų pradinė fazė, tai iš

Diūamelio integralo išplaukia gana įdomus ir naudingas rezultatas:

$$\begin{aligned} y(t) &= A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t e^{-i\omega \tau} w(\tau) d\tau = \int_0^t A_x e^{i(\omega(t-\tau) + \varphi_x)} w(\tau) d\tau = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t e^{-i\omega \tau} w(\tau) d\tau = \\ &= x(t) \left[\int_0^\infty w(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau - \int_t^\infty w(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right] = x(t) W(i\omega) - x(t) \int_t^\infty w(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \bar{y}(t) - \tilde{y}(t). \end{aligned}$$

Kaip matome, tuo atveju **išėjimo trajektorija $y(t)$ susideda iš dviejų dalių:**

$$\bar{y}(t) = x(t)W(i\omega) \text{ ir } \tilde{y}(t) = x(t) \int_t^\infty e^{-i\omega \tau} w(\tau) d\tau.$$

Pirmoji dalis $\bar{y}(t)$ yra dviejų kompleksinių dydžių $x(t) = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)}$ ir $W(i\omega) =$

$$= \text{Re } W(i\omega) + i \text{Im } W(i\omega) = |W(i\omega)| e^{i \arg W(i\omega)} = \sqrt{[\text{Re } W(i\omega)]^2 + [\text{Im } W(i\omega)]^2} \cdot e^{i \arctg \frac{\text{Im } W(i\omega)}{\text{Re } W(i\omega)}}$$

sandauga $A_x |W(i\omega)| e^{i(\omega t + \varphi_x + \arg W(i\omega))}$, kurių tik pirmasis, būdamas įėjimo trajektorija $x(t)$, priklauso nuo t , o antrasis gaunamas iš bloko perdavimo funkcijos $W(s)$, tarus, jog parametras $s = \sigma + i\omega$ yra lygus $i\omega$, t. y., jog $\sigma = 0$, kas šiuo atveju gali būti leistina, apskaičiuojant ne tik $W(s) = \int_0^\infty w(t) e^{-st} dt$, bet ir $X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$, nes $|x(t)| = A_x$ –

baigtinis skaičius ir todėl integralas $\int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$ egzistuoja. Todėl $\bar{y}(t)$ yra harmoniniai svyravimai, kurie kartoja įėjimo trajektorijos $x(t)$ svyravimus ir gali skirtis nuo pastarųjų tik svyravimų amplitudė bei pradine faze.

Kadangi $\bar{y}(t) = |x(t)| \cdot |W(i\omega)| e^{i(\arg x(t) + \arg W(i\omega))} = A_x |W(i\omega)| e^{i(\omega t + \varphi_x + \arg W(i\omega))}$, tai svyravimų $\bar{y}(t)$ amplitudę $A_y = |\bar{y}(t)|$ galima apskaičiuoti kaip kompleksinių dydžių $x(t)$ ir $W(i\omega)$ sandaugos $x(t)W(i\omega)$ modulį $A_y = |\bar{y}(t)| = |x(t)W(i\omega)| = |x(t)| \cdot |W(i\omega)| = A_x \sqrt{[\operatorname{Re} W(i\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(i\omega)]^2}$, o pradinę fazę $\varphi_y = \arg \bar{y}(0)$ – kaip tos sandaugos argumentą: $\varphi_y = \arg[x(0)W(i\omega)] = \arg x(0) + \arg W(i\omega) = \varphi_x + \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)} = \varphi_x + \psi$, kur $\psi = \arg W(i\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}$.

Todėl, kai $x(t) = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)}$, tai $\bar{y}(t) = A_y e^{i(\omega t + \varphi_x + \psi)}$, kur $A_y = A_x |W(i\omega)|$ ir $\psi = \arg W(i\omega)$.

Antroji dalis $\tilde{y}(t)$ realiose sistemose, kuriose $w(t)$ – mažėjanti funkcija, didėjant t , artėja prie 0, nes tuomet $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} e^{-i\omega \tau} w(\tau) d\tau = 0$, o $|x(t)| = A_x$ – baigtinis dydis.

Antroji išėjimo trajektorijos $y(t)$ dalis $\tilde{y}(t)$ realiose sistemose vaizduoja perėjimo proceso silpstančius svyravimus, kurie, galų gale užgęsta, o pirmoji dalis – $\bar{y}(t)$ – nusistovėjusio proceso priverstinius svyravimus.

Kai mūsų nedomina perėjimo procesas, o svarbu nustatyti tik nusistovėjusio proceso svyravimus $\bar{y}(t)$, tai juos galima gana greitai ir gana lengvai apskaičiuoti naudojantis ką tik išvesta formule $\bar{y}(t) = x(t)W(i\omega) = A_y e^{i(\omega t + \varphi_x + \psi)}$ bei iš jos išplaukiančiomis formulėmis: $A_y = A_x |W(i\omega)|$ ir $\psi = \arg W(i\omega)$.

Funkcija $W(i\omega)$ vadinama bloko amplitudine – fazine charakteristika arba bloko kompleksiniu perdavimo koeficientu, o funkcijos $|W(i\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} W(i\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(i\omega)]^2}$ ir $\arg W(i\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}$ – atitinkamai – bloko amplitudine dažnumine (dažnine) ir fazine dažnumine (dažnine) charakteristikomis.

Pavyzdžiui, diferencijavimo grandelės, turinčios perdavimo funkciją $W(s) = \frac{Ts}{Ts+1}$, amplitudinė – fazinė charakteristika yra $W(i\omega) = \frac{Ti\omega}{Ti\omega+1} = \frac{Ti\omega(1-Ti\omega)}{1+T^2\omega^2} = \frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}(i+T\omega)$, amplitudinė dažnuminė charakteristika yra lygi $|W(i\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} W(i\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(i\omega)]^2} = \frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} \sqrt{1+T^2\omega^2} = \frac{T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$, o fazinė dažnuminė charakteristika yra $\arg W(i\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)} = \arctg \frac{1}{T\omega}$.

Todėl, kai diferencijavimo grandelės įėjimo trajektorija yra $x(t) = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} = A_x [\cos(\omega t + \varphi_x) + i \sin(\omega t + \varphi_x)]$, tai $\bar{y}(t) = A_x |W(i\omega)| [\cos(\omega t + \varphi_x + \psi) + i \sin(\omega t + \varphi_x + \psi)] = \frac{A_x T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} [\cos(\omega t + \varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega}) + i \sin(\omega t + \varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega})]$.

Tai sutampa su rezultatu, gaunamu tiesiogiai iš diferencijavimo grandelės išorinio matematinio modelio, kai $z(0)=0$: $y(t)=x(t)-z(t)=x(t)-\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t x(\tau) e^{\frac{\tau}{T}} d\tau = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t A_x e^{i(\omega \tau + \varphi_x)} e^{\frac{\tau}{T}} d\tau =$

$$= A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} - \frac{A_x}{T} e^{-\frac{t}{T} + i\varphi_x} \left(\frac{e^{\left(i\omega + \frac{1}{T}\right)t}}{i\omega + \frac{1}{T}} \right) \Big|_0^t = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} - A_x \frac{e^{\frac{1}{T} + i\varphi_x} [e^{(i\omega + \frac{1}{T})t} - 1]}{Ti\omega + 1} = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} \frac{Ti\omega}{1 + Ti\omega} +$$

$$+ \frac{A_x}{Ti\omega + 1} e^{-\frac{t}{T} + i\varphi_x} = x(t) \cdot W(i\omega) + \frac{A_x}{Ti\omega + 1} e^{-\frac{t}{T} + i\varphi_x} = \bar{y}(t) - \tilde{y}(t).$$

Taigi ir šį kartą gavome, jog $y(t) = \bar{y}(t) - \tilde{y}(t)$, kur $\bar{y}(t) = x(t)W(i\omega)$ – **nusistovėję priverstiniai svyravimai**, o $\tilde{y}(t) = -\frac{A_x}{Ti\omega + 1} e^{-\frac{t}{T} + i\varphi_x}$ – **silpstantys nuosavi pereinamojo proceso svyravimai**.

Nesunku įsitikinti, jog $-\frac{A_x}{Ti\omega + 1} e^{-\frac{t}{T} + i\varphi_x} = x(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$. Tikrai: $x(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau =$

$$= A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} \left[\delta(\tau) - \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} \right] d\tau = 0 - \frac{A_x}{T} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \int_t^\infty e^{-\left(i\omega + \frac{1}{T}\right)\tau} d\tau = \frac{A_x}{1 + Ti\omega} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \left(0 - e^{-\left(i\omega + \frac{1}{T}\right)t} \right) =$$

$$= -\frac{A_x}{1 + Ti\omega} e^{-\frac{t}{T} + i\varphi_x},$$

ką ir turėjome gauti.

Įdomu ir naudinga pastebėti, kad formulės $A_y = A_x |W(i\omega)|$ ir $\varphi_y = \varphi_x + \arg W(i\omega) = \varphi_x + \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}$, gautos iš formulių $y(t) = \bar{y}(t) - \tilde{y}(t) = x(t)W(i\omega) - x(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$, $\bar{y}(t) = x(t)W(i\omega)$, $\tilde{y}(t) = x(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$, kurios yra teisingos, kai $x(t) = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)}$, yra net universalesnės už tas formules, iš kurių jos buvo gautos.

Pasirodo, kad, kai $x(t) = x_1(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$ arba kai $x(t) = x_2(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x)$, tai, formulės $A_y = A_x \cdot |W(i\omega)|$ ir $\varphi_y = \varphi_x + \arg W(i\omega) = \varphi_x + \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}$ dar galioja, nors formulės $\bar{y}(t) = x(t)W(i\omega)$ ir $\tilde{y}(t) = x(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$ jau nebegalioja. Tuo nesunku įsitikinti:

1) į iš Diuamelio integralo išplaukiančią lygybę $y_1(t) = \int_0^t x_1(t-\tau)w(\tau) d\tau =$

$$= \int_0^t A_x \cos[\omega(t-\tau) + \varphi_x] w(\tau) d\tau = \frac{A_x}{2} \cdot \int_0^t [e^{i[\omega(t-\tau) + \varphi_x]} + e^{-i[\omega(t-\tau) + \varphi_x]}] w(\tau) d\tau = \frac{A_x}{2} [e^{i(\omega t + \varphi_x)} \times$$

$$\times \int_0^t e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \cdot \int_0^t e^{i\omega\tau} w(\tau) d\tau]$$

įvesdami dėmenį, paimtą iš figūrinius skliaustus,

kuris lygus nuliui, ir integralą $\int_0^t e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$, pakeisdami integralų $\int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$ ir $\int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau$ skirtumu, gauname, jog $y(t) = \frac{A_x}{2} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - \frac{A_x}{2} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \times$

$$\begin{aligned}
& \times \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + \left\{ \frac{A_x}{2} e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - \frac{A_x}{2} e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \left[\int_0^t e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau \right] \right\} + \\
& + \frac{A_x}{2} e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t e^{i\omega\tau} w(\tau) d\tau = \frac{A_x}{2} \left[e^{i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - e^{i(\omega t + \varphi_x)} \times \right. \\
& \times \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t e^{i\omega\tau} w(\tau) d\tau \left. \right] = \\
& \frac{A_x}{2} [e^{i(\omega t + \varphi_x)} + e^{-i(\omega t + \varphi_x)}] \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - \frac{A_x}{2} [e^{i(\omega t + \varphi_x)} + e^{-i(\omega t + \varphi_x)}] \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + \frac{A_x}{2} e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \times \\
& \times \int_0^t (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) w(\tau) d\tau = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + \\
& + i A_x e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot w(\tau) d\tau = x_1(t) W(i\omega) - x_1(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + i A_x e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \times \\
& \times \int_0^t \sin \omega \tau \cdot w(\tau) d\tau ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2) \quad \text{analogiškai galime rasti, kad} \quad y_2(t) = \int_0^t x_2(t-\tau) w(\tau) d\tau = \\
& = \int_0^t A_x \sin[\omega(t-\tau) + \varphi_x] w(\tau) d\tau = \frac{A_x}{2i} \left[e^{i(\omega t + \varphi_x)} \left(\int_0^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau \right) - e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t e^{i\omega\tau} w(\tau) d\tau \right] = \\
& = \frac{A_x}{2i} \left[(e^{i(\omega t + \varphi_x)} - e^{-i(\omega t + \varphi_x)}) \left(W(i\omega) - \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau \right) - e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) w(\tau) d\tau \right] = x_2(t) \times \\
& \times W(i\omega) - x_2(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - A_x e^{-i(\omega t + \varphi_x)} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot w(\tau) d\tau ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3) \text{ iš lygibių (1) ir (2) išplaukia, jog } y_1(t) \neq x_1(t) W(i\omega) - x_1(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau \text{ ir} \\
& y_2(t) \neq x_2(t) W(i\omega) - x_2(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau, \text{ kadangi tam tikra dalis nusistovėjusių} \\
& \text{priverstinių svyravimų, o taip pat tam tikra dalis silpstančių nuosavų svyravimų įeina į} \\
& \text{atsiradusius papildomus formulių } y_1(t) \text{ ir } y_2(t) \text{ trečiuosius narius, turinčius savo} \\
& \text{sudėtyje integralą } \int_0^t \sin \omega \tau \cdot w(\tau) d\tau. \text{ Taigi, } y_1(t) \neq x_1(t) W(i\omega) - x_1(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau \text{ ir} \\
& y_2(t) \neq x_2(t) W(j\omega) - x_2(t) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau, \text{ nors, kaip nesunku patikrinti } y_1(t) + j y_2(t) = [x_1(t) + \\
& + i x_2(t)] W(i\omega) - [x_1(t) + i x_2(t)] \int_t^\infty w(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = x(t) W(i\omega) - x(t) \int_t^\infty w(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Įrodysiu, kad formulės $A_y = A_x |W(i\omega)|$ ir $\varphi_y = \varphi_x + \arg W(i\omega)$, kaip ką tik buvo minėta, išlieka galiojančios ir todėl, kai $w(t)$ – mažėjanti funkcija, tai $\bar{y}_1(t) = A_x |W(i\omega)| \cos[\omega t + \varphi_x + \arg W(i\omega)]$ ir $\bar{y}_2(t) = A_x |W(i\omega)| \sin[\omega t + \varphi_x + \arg W(i\omega)]$.

Kai $x(t) = A_x e^{i(\omega t + \varphi_x)} = x_1(t) + ix_2(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) + iA_x \sin(\omega t + \varphi_x)$, tai, kaip jau buvo anksčiau įrodyta, $y(t) = \bar{y}(t) - \tilde{y}(t)$, kur $\bar{y}(t) = x(t)W(i\omega) = [x_1(t) + ix_2(t)][\operatorname{Re}W(i\omega) + i\operatorname{Im}W(i\omega)]$, o $\tilde{y}(t) = x(t) \int_t^\infty w(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = [x_1(t) + ix_2(t)] \int_t^\infty w(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$.

Naudodamiesi kompleksinių skaičių algebrinėje formoje daugybos taisykle, gauname, kad $\bar{y}(t) = [x_1(t)\operatorname{Re}W(i\omega) - x_2(t)\operatorname{Im}W(i\omega)] + i[x_1(t)\operatorname{Im}W(i\omega) + x_2(t)\operatorname{Re}W(i\omega)]$.

Tiesiniuose blokuose (o mes čia nagrinėjame kaip tik tiesinius blokus ir jų perdavimo funkcijas $W(s) = \int_0^\infty w(t) e^{-st} dt$, kur $w(t)$ – reali mažėjanti funkcija)

kompleksinis įėjimo vektorius transformuojasi į kompleksinį išėjimo vektorių taip, kad realioji įėjimo vektoriaus dalis transformuojasi į realiąją išėjimo vektoriaus dalį, o menamoji – į menamąją, t. y. taip, kad kompleksinis įėjimo vektorius $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ transformuojasi į išėjimo vektorių $y(t) = y_1(t) + iy_2(t)$, kuriame $y_1(t)$ yra įėjimo $x(t)$ realiosios dalies $x_1(t)$ transformacijos rezultatas, o $y_2(t)$ – menamosios įėjimo vektoriaus $x(t)$ dalies $x_2(t)$ transformacijos rezultatas.

Ši tiesinių blokų savybė išplaukia iš formulės $L[x_1(t) + ix_2(t)]W(s) = L[y(t)]$, t. y. iš formulės $Y(s) = [X_1(s) + iX_2(s)]W(s) = X_1(s)W(s) + iX_2(s)W(s) = Y_1(s) + iY_2(s)$, kur $Y_1(s) = X_1(s)W(s)$ ir $Y_2(s) = X_2(s)W(s)$.

Todėl iš formulės $\bar{y}(t) = [x_1(t) + ix_2(t)]W(i\omega)$ gauname, jog $\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + i\bar{y}_2(t)$, kur $\bar{y}_1(t) = \operatorname{Re} \bar{y}(t) = x_1(t)\operatorname{Re}W(i\omega) - x_2(t)\operatorname{Im}W(i\omega)$ ir $\bar{y}_2(t) = \operatorname{Im} \bar{y}(t) = x_1(t)\operatorname{Im}W(i\omega) + x_2(t)\operatorname{Re}W(i\omega)$, t. y. $\bar{y}_1(t) = \operatorname{Re} \bar{y}(t) = \operatorname{Re}[x(t)W(i\omega)] = \operatorname{Re}[(x_1(t) + ix_2(t))W(i\omega)] = x_1(t)\operatorname{Re}W(i\omega) - x_2(t)\operatorname{Im}W(i\omega) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \operatorname{Re}W(i\omega) - A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \operatorname{Im}W(i\omega)$, o $\bar{y}_2(t) = \operatorname{Im} \bar{y}(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \operatorname{Im}W(i\omega) + A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \operatorname{Re}W(i\omega)$.

Padauginę ir padalinę $\bar{y}_1(t)$ formulę ir jos dėmenis iš $|W(i\omega)|$, kur $W(i\omega) = |W(i\omega)| \cdot \{\cos[\arg W(i\omega)] + i\sin[\arg W(i\omega)]\}$, $\operatorname{Re}W(i\omega) = |W(i\omega)| \cdot \cos[\arg W(i\omega)]$ ir $\operatorname{Im}W(i\omega) = |W(i\omega)| \cdot \sin[\arg W(i\omega)]$, gauname:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(t) &= A_x |W(i\omega)| \left[\cos(\omega t + \varphi_x) \frac{\operatorname{Re} W(i\omega)}{|W(i\omega)|} - \sin(\omega t + \varphi_x) \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{|W(i\omega)|} \right] = \\ &= A_x |W(i\omega)| \{ \cos(\omega t + \varphi_x) \cos[\arg W(i\omega)] - \sin(\omega t + \varphi_x) \sin[\arg W(i\omega)] \} = \\ &= A_x |W(i\omega)| \cos[\omega t + \varphi_x + \arg W(i\omega)]. \end{aligned}$$

Analogiškai gauname: $\bar{y}_2(t) = \operatorname{Im} \bar{y}(t) = \operatorname{Im}[(x_1(t) + ix_2(t))W(i\omega)] = x_1(t)\operatorname{Im}W(i\omega) + x_2(t)\operatorname{Re}W(i\omega) = A_x [\cos(\omega t + \varphi_x) \operatorname{Im}W(i\omega) + \sin(\omega t + \varphi_x) \operatorname{Re}W(i\omega)] =$
 $= A_x |W(i\omega)| \left[\cos(\omega t + \varphi_x) \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{|W(i\omega)|} + \sin(\omega t + \varphi_x) \frac{\operatorname{Re} W(i\omega)}{|W(i\omega)|} \right] =$
 $= A_x |W(i\omega)| \{ \cos(\omega t + \varphi_x) \sin[\arg W(i\omega)] + \sin(\omega t + \varphi_x) \cos[\arg W(i\omega)] \} =$
 $= A_x |W(i\omega)| \sin[\omega t + \varphi_x + \arg W(i\omega)],$ ką ir reikėjo įrodyti.

Nesunku įrodyti ir formules:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t) &= \operatorname{Re} \tilde{y}(t) = \operatorname{Re} \left[(x_1(t) + ix_2(t)) \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau \right] = x_1(t) \operatorname{Re} \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau - x_2(t) \times \\ &\times \operatorname{Im} \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau, \quad \tilde{y}_2(t) = \operatorname{Im} \tilde{y}(t) = x_1(t) \operatorname{Im} \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau + x_2(t) \operatorname{Re} \int_t^\infty e^{-i\omega\tau} w(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Kaip matome, iš formulės $y(t)=y_1(t)+iy_2(t)=[x_1(t)+ix_2(t)]W(i\omega)-[x_1(t)+ix_2(t)]\cdot\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau$ išplaukia formulės $y_1(t)=\operatorname{Re} y(t)=\operatorname{Re}\{[x_1(t)+ix_2(t)]W(i\omega)\}-\operatorname{Re}\{[x_1(t)+ix_2(t)]\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau\}=\bar{y}_1(t)-\tilde{y}_1(t)$, kur $\bar{y}_1(t)=\operatorname{Re}[x(t)\cdot W(i\omega)]$, o $\tilde{y}_1(t)=\operatorname{Re}[x(t)\cdot\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau]$, ir $y_2(t)=\operatorname{Im} y(t)=\operatorname{Im}\{[x_1(t)+ix_2(t)]W(i\omega)\}-\operatorname{Im}\{[x_1(t)+ix_2(t)]\times\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau\}=\bar{y}_2(t)-\tilde{y}_2(t)$, kur $\bar{y}_2(t)=\operatorname{Im}[x(t)\cdot W(i\omega)]$ ir $\tilde{y}_2(t)=\operatorname{Im}[x(t)\times\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau]$, o ne formulės $y_1(t)=x_1(t)W(i\omega)-x_1(t)\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau$ bei $y_2(t)=x_2(t)W(i\omega)-x_2(t)\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau$, t. y. išplaukia, kad $\bar{y}_1(t)$ yra lygi $\operatorname{Re}[x(t)\cdot W(i\omega)]$, o ne $x_1(t)\cdot W(i\omega)$, $\tilde{y}_1(t)=\operatorname{Re}[x(t)\cdot\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau]$, o ne $x_1(t)\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau$, $\bar{y}_2(t)=\operatorname{Im}[x(t)\cdot W(i\omega)]$, o ne $x_2(t)\cdot W(i\omega)$ ir $\tilde{y}_2(t)=\operatorname{Im}[x(t)\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau]$, o ne $x_2(t)\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}w(\tau)d\tau$, kaip galėjo iš pradžių atrodyti kai kuriems nelabai kritiškai besinaudojantiems analogijomis ir nelabai kritiškai mąstantiems skaitytojams.

Patikrinsime išvestas formules, pasinaudodami konkrečiu diferencijavimo grandelės pavyzdžiu.

1.11.1.1. ir 1.11.8. skyreliuose mes buvome tiesiogiai gavę, kad, kai diferencijavimo grandelės įėjimo trajektorija yra $x(t)=x_1(t)=A_x\cos(\omega t+\varphi_x)$, tai jos išėjimo trajektorija $y(t)=y_1(t)=$

$$=\frac{A_x T\omega}{1+T^2\omega^2} [T\omega\cos(\omega t+\varphi_x)-\sin(\omega t+\varphi_x)]+\frac{A_x}{1+T^2\omega^2} e^{\frac{-t}{T}} (\cos\varphi_x+T\omega\sin\varphi_x)=\frac{A_x T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \times \\ \times \cos(\omega t+\varphi_x+\arctg \frac{1}{T\omega})+\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \sin(\varphi_x+\arctg \frac{1}{T\omega}), \text{ o kai įėjimo trajektorija yra } x(t)=x_2(t)= \\ =A_x\sin(\omega t+\varphi_x), \text{ tai jos išėjimo trajektorija yra } y(t)=y_2(t)=\frac{A_x T\omega}{1+T^2\omega^2} [T\omega\sin(\omega t+\varphi_x)+\cos(\omega t+\varphi_x)]+ \\ +\frac{A_x}{1+T^2\omega^2} e^{\frac{-t}{T}} (\sin\varphi_x-T\omega\cos\varphi_x)=\frac{A_x T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t+\varphi_x+\arctg \frac{1}{T\omega})-\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \times \\ \times \cos(\varphi_x+\arctg \frac{1}{T\omega}).$$

Iš šių formulių išplaukia, jog $\bar{y}_1(t)=\frac{A_x T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \cos(\omega t+\varphi_x+\arctg \frac{1}{T\omega})$ ir

$$\bar{y}_2(t)=\frac{A_x T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t+\varphi_x+\arctg \frac{1}{T\omega}), \text{ kas atitinka ką tik įrodytas formules } \bar{y}_1(t)=A_x|W(i\omega)|\times \\ \times \cos[\omega t+\varphi_x+\arg W(i\omega)] \text{ ir } \bar{y}_2(t)=A_x|W(i\omega)|\sin[\omega t+\varphi_x+\arg W(i\omega)], \text{ nes, kaip ką tik buvome gavę prieš tai } \\ \text{ ką tik nagrinėtame pavyzdyje, diferencijavimo grandelės amplitudinė dažnuminė charakteristika yra } |W(i\omega)|= \\ =\frac{T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}, \text{ o fazinė dažnuminė charakteristika } \arg W(i\omega)=\arctg \frac{1}{T\omega}.$$

Belieka patikrinti, ar tikrai $\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \sin(\varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega}) = -\tilde{y}_1(t) = -\operatorname{Re} \tilde{y}(t)$ ir $\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \cos(\varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega}) = \tilde{y}_2(t) = \operatorname{Im} \tilde{y}(t)$.

Kadangi $\tilde{y}(t)$ reikšmę jau esame ką tik apskaičiavę prieš tai nagrinėtame pavyzdyje ir žinome, jog $\tilde{y}(t) = -\frac{A_x}{1+Ti\omega} e^{\frac{-t}{T}+i\varphi_x} = -\frac{A_x(1-T\omega i)}{1+T^2\omega^2} e^{\frac{-t}{T}} (\cos\varphi_x + i\sin\varphi_x) = -\frac{A_x}{1+Ti\omega} e^{\frac{-t}{T}} [(\cos\varphi_x + T\omega\sin\varphi_x) + i(\sin\varphi_x - T\omega\cos\varphi_x)] = -\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \cos\varphi_x + \frac{T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin\varphi_x \right) + i \left(\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin\varphi_x - \frac{T\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \cos\varphi_x \right) \right] = -\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} [(\sin(\arg W(j\omega))\cos\varphi_x + \cos(\arg W(i\omega))\sin\varphi_x) + i(\sin(\arg W(i\omega))\sin\varphi_x - \cos(\arg W(i\omega))\cos\varphi_x)] = -\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \times e^{\frac{-t}{T}} [\sin(\varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega}) - i\cos(\varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega})],$ tai gauname, jog $\tilde{y}_1(t) = \operatorname{Re} \tilde{y}(t) = -\frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \sin(\varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega})$ ir $\tilde{y}_2(t) = \operatorname{Im} \tilde{y}(t) = \frac{A_x}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{\frac{-t}{T}} \cos(\varphi_x + \arctg \frac{1}{T\omega})$, kas sutampa su rezultatais, gautais 1.11.1.1. ir 1.11.8. skyreliuose.

Apibendrinami ką tik įvykdytos analizės rezultatus, galime teigti, kad nusistovėjusių procesų tiesiniuose blokuose išėjimo trajektorijas $\bar{y}(t)$, kai įėjimo trajektorijos $x(t)$ yra harmoniniai svyravimai bei jų tiesinės kombinacijos, o blokų impulsinės charakteristikos $w(t)$ yra realios mažėjančios funkcijos, galime žymiai greičiau ir paprasčiau apskaičiuoti, naudodamiesi charakteristikomis $W(i\omega)$, $|W(i\omega)|$ ir $\arg W(i\omega)$ bei formulėmis $A_y = A_x |W(i\omega)|$ ir $\varphi_y = \varphi_x + \arg W(i\omega)$.

Pavyzdžiui, 1.11.10.8. skyrelyje nagrinėtojo elektromagnetinių virpesių kontūro nusistovėjusią išėjimo trajektoriją $\bar{y}(t) = \bar{i}(t)$, kai $U_C(0)=0$, $i(0)=0$ ir $x(t)=E_0\sin\omega t$, žinant kontūro perdavimo funkciją

$$W(p) = \frac{1}{Lp + R + \frac{1}{Cp}}, \text{ buvo galima apskaičiuoti labai paprastai ir greitai: } \bar{y}(t) = E_0 \left| \frac{1}{L\omega i + R + \frac{1}{C\omega i}} \right| \times \\ \times \sin\left(\omega t + \arg \frac{1}{L\omega i + R + \frac{1}{C\omega i}}\right) = \frac{E_0 C\omega i}{(1-LC\omega^2) + RC\omega i} \sin\left(\omega t + \arg \frac{C\omega i}{1-LC\omega^2 + iRC\omega}\right) = \\ = \left| \frac{E_0 C\omega [RC\omega + i(1-LC\omega^2)]}{(1-LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2} \right| \sin\left(\omega t + \arg \frac{C\omega [RC\omega + i(1-LC\omega^2)]}{(1-LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}\right).$$

Kadangi $W(i\omega) = \frac{C\omega [RC\omega + i(1-LC\omega^2)]}{(1-LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}$, tai $|W(i\omega)| = \frac{C\omega}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}$, $\arg W(i\omega) = \arctg \frac{1-LC\omega^2}{RC\omega}$, iš kur $\bar{y}(t) = \bar{i}(t) = \frac{E_0 C\omega}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}} \sin\left(\omega t + \arg \frac{1-LC\omega^2}{RC\omega}\right)$. Tai sutampa su

1.11.10.3.1., 1.11.10.3.2., 1.11.10.3.3., 1.11.10.3.4. skyreliuose gautais rezultatais.

Šiuo atveju kontūro amplitudinė fazinė charakteristika $W(i\omega) = \frac{1}{L\omega i + R + \frac{1}{C\omega i}} =$

$$= \frac{C\omega i}{1 - LC\omega^2 + iRC\omega} \text{ yra kontūro pilnas kompleksinis laidumas, o } W(i\omega) \text{ vardiklis } L\omega i + R + \frac{1}{C\omega i} = \\ = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \text{ yra to kontūro pilna kompleksinė varža.}$$

Norėdami apskaičiuoti ne tik nusistovėjusių priverstinių svyravimų trajektoriją $\bar{y}(t)$, bet ir kitas kontūro išėjimo trajektorijos sudėtinės dalis bei atsižvelgti į tai, kad pradinės sąlygos ne visada yra nulinės, mes privalėtume atlikti jau žymiai sudėtingesnius skaičiavimus, savo sudėtingumu prilygstančius tiems, kuriuos darėme 1.11.10. skyrelyje. Juk virpesių kontūro impulsinė perėjimo charakteristika $w(t)$ priklauso nuo funkcijos $W(s)$ polių s_1 bei s_2 , ir tektų nagrinėti įvairius atvejus, kas ir buvo daroma minėtame 1.11.10. skyrelyje.

Čia aprašytasis gana paprastas tiesinių blokų nusistovėjusių išėjimo trajektorijų $y(t)$ apskaičiavimo metodas yra taikomas žymiai plačiau, negu galėtų pasirodyti iš pirmo žvilgsnio. **Juk bet kuri funkcija, kuri yra absoliučiai integruojama kokiame nors savo apibrėžimo srities intervale, gali būti pateikta tame intervale Furje eilutės forma kaip elementarių harmonikų suma, kurios kiekvienam dėmeniui šis metodas gali būti taikomas.**

Kadangi Furje eilutės gali būti sudaromos ir tolydžioms, ir diskrečioms, ir determinuotoms, ir stochastinėms funkcijoms, tai **ši metodą galima laikyti universaliu sisteminės analizės instrumentu.** Apie tai detaliau pakalbėsime 1.14.12.3.2. skyrelyje, nagrinėdami laiko eilutes.

O čia apsiribosiu šio metodo taikymo pavyzdžiu, apskaičiuodamas nusistovėjusį elektros srovės stiprį $i(t)$ ką tik nagrinėtame elektromagnetinių virpesių kontūre, kai to kontūro įėjimo trajektorija yra idealaus dvipusio lygintuvo, išlyginančio kintamąją įtampą $E_0 \sin \omega t$, išėjimo trajektorija $E_0 |\sin \omega t|$.

Pradžioje sudarysime elektromagnetinių virpesių kontūro įėjimo trajektorijos $x(t) = E_0 |\sin \omega t|$ Furje eilutę $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$, atsižvelgdami į tai, jog $x(t) = E_0 |\sin \omega t|$ – periodinė

lyginė funkcija, kurios periodas T yra lygus $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$, o minimalus ciklinis dažnis $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\omega$.

$$\text{Kadangi ši funkcija yra lyginė, tai koeficientai } b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{2\omega E_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t \sin k\omega t dt$$

$$\text{bus lygūs 0. Koeficientas } a_0 \text{ yra lygus } \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E_0 \sin \omega t dt = -\frac{2E_0}{\pi} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{4E_0}{\pi}.$$

$$\text{Belieka apskaičiuoti koeficientus } a_k = \frac{2\omega E_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos k\omega t dt = \frac{\omega E_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} 2 \sin \omega t \cos k\omega t dt, \text{ kai}$$

$k=1, 2, 3, \dots$

$$\text{Kadangi } 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha + \sin \beta, \text{ tai } a_k = \frac{\omega E_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(2k+1)\omega t + \sin(1-2k)\omega t] dt = \\ = \frac{\omega E_0}{\pi} \left[\frac{-1}{(2k+1)\omega} \cos(2k+1)\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} + \frac{1}{(2k-1)\omega} \cos(2k-1)\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \right] = \frac{E_0}{\pi} \left\{ \frac{-1}{2k+1} [\cos(2k+1)\pi - 1] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k-1} [\cos(2k-1)\pi - 1] \right\} = \frac{E_0}{\pi} \left(\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k-1} \right) = -\frac{4E_0}{\pi(4k^2-1)}.$$

$$\text{Todėl } x(t) = E_0 |\sin \omega t| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \frac{E_0}{\pi} \left[2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2-1} \cos k\omega t \right].$$

Turėdami įėjimo trajektoriją Furje eilutės formoje, jau galime pritaikyti šiame skyrelyje išsivestą nusistovėjusios išėjimo trajektorijos apskaičiavimo metodą.

Pastovioji įėjimo trajektorijos $x(t)=E_0|\sin\omega t|$ Furje eilutės sudedamoji dalis $\frac{a_0}{2}=\frac{2E_0}{\pi}$ iššauks virpesių kontūro kondensatoriaus pakrovimo procesą, kuriam prasidėjus atsiradusi elektros srovė $i(t)$, kaip jau buvome nustatę 1.11.10.2.1., 1.11.10.2.2. ir 1.11.10.2.3. skyreliuose, laikui bėgant silpnės, artėdama prie 0. Todėl jos įnašas į nusistovėjusį procesą bus lygus 0. Tai buvo galima gauti ir formaliai, laikant, jog šiuo atveju $\omega=\omega_0=0$ ir todėl $|W(i\omega)|=0$, nes elektromagnetinių virpesių kontūro pilno kompleksinio laidumo $W(i\omega)$ modulis $|W(i\omega)|$, kaip jau esame neseniai nustatę, yra lygus $|W(i\omega)|=\frac{C\omega}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}}$.

Visos kitos įėjimo proceso $x(t)=E_0|\sin\omega t|$ Furje eilutės sudedamosios dalys, sudarančios harmoninių svyravimų sumą $\frac{E_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)}{4k^2-1}\cos 2k\omega t$, elektromagnetinių virpesių kontūre iššauks nusistovėjusius priverstinius srovės stiprio i svyravimus, turinčius tuos pačius ciklinius dažnius $2k\omega$ ($k=1, 2, \dots$). Tų priverstinių svyravimų amplitudes galima surasti, padauginus įėjimo $x(t)$ svyravimų amplitudes $a_{2k}=-\frac{4E_0}{\pi(4k^2-1)}$ iš daugiklių $|W(i2k\omega)|=\frac{2k\omega C}{\sqrt{(1-4k^2\omega^2LC)^2+4k^2\omega^2R^2C^2}}$.

Atsižvelgdami į tai, kad priverstinių svyravimų fazės bus pastumtos įėjimo svyravimų atžvilgiu kampais $\varphi=\arg W(i2k\omega)=\arctg\frac{1-4k^2\omega^2LC}{2k\omega RC}$, gauname, jog nusistovėjusį srovės stiprio kontūre priverstinių svyravimų procesą galima matematiškai aprašyti Furje eilute $\overline{i(t)}=-\frac{8\omega CE_0}{\pi}\times$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k}{(4k^2-1)\sqrt{(1-4k^2\omega^2LC)^2+4k^2\omega^2R^2C^2}} \cdot \cos\left(2k\omega t + \arctg\frac{1-4k^2\omega^2LC}{2k\omega RC}\right) \right].$$

Rekomenduočiau skaitytojui patikrinti savo sugebėjimus sudarinėti funkcijų Furje eilutes ir naudotis jomis, nustatant nusistovėjusias išėjimo trajektorijas. Tuo tikslu siūlyčiau apskaičiuoti integravimo grandelės nusistovėjusią išėjimo trajektoriją $\bar{y}(t)=\bar{u}_c(t)$, kai jos įėjimo trajektorija $x(t)$ yra idealaus vienpusio lygintuvo, išlyginančio kintamąją įtampą $E_0\sin\omega t$, išėjimo trajektorija

$$\begin{cases} 0, & \text{kai } t \in \left[\frac{\pi}{\omega}(2k-1); \frac{\pi}{\omega}2k\right], \\ E_0 \sin \omega t, & \text{kai } t \in \left[\frac{\pi}{\omega_0} \cdot 2k; \frac{\pi}{\omega}(2k+1)\right], k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Kad skaitytojas galėtų patikrinti savo skaičiavimus, pateikiu kai kuriuos tų skaičiavimų rezultatus.

Integravimo grandelės įėjimo trajektoriją vaizduojanti Furje eilutė yra $x(t)=\frac{E_0}{\pi}\left[1+\frac{\pi}{2}\sin\omega t - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\omega t}{4k^2-1}\right]$, integravimo grandelės perdavimo funkcija yra $W(p)=\frac{1}{1+Tp}$, jos amplitudinė – fazinė

charakteristika $W(i\omega)=\frac{1}{1+Ti\omega}=\frac{1-Ti\omega}{1+T^2\omega^2}$, amplitudinė – dažninė charakteristika $|W(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$,

fazinė – dažninė charakteristika $\arg W(i\omega)=\arctg(-T\omega)$, nusistovėjusi integravimo grandelės išėjimo trajektorija $\bar{y}(t)=\bar{u}_c(t)=\frac{E_0}{\pi}\left[1+\frac{\pi}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t - \arctg T\omega) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\omega t - \arctg 2k\omega T)}{(4k^2-1)\sqrt{1+4k^2\omega^2T^2}}\right]$.

Manau, jog studentas, sugebėjęs teisingai išspręsti šį uždavinį, sugebės teisingai spręsti ir kitus panašius uždavinius.