

$\varphi(2)=1$; $\varphi'(z)=2z-2$; $\varphi'(2)=2$; $\varphi''(z)=2$; $\varphi''(2)=2$; $\varphi'''(z)=0$; $\varphi'''(2)=0$ ir toliau visos $\varphi(z)$ išvestinės $\varphi^{(m)}(z)$, kai $m=1, 2, 3, \dots$, yra lygios 0.

Todėl $\varphi(z)=z^2-2z+1=1+2(z-2)+\frac{2}{2!}(z-2)^2$ ir $f(z)=\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{2}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-2)^n$, kur, kai $n \geq 0$, visi $c_n=0$; $c_{-1}=1$; $c_{-2}=2$; $c_{-3}=1$; kai $n \leq -4$, visi $c_n=0$.

Gautas rezultatas sutampa su tuo, ką turėtume gauti, naudodamiesi formule $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}} dz$. Mūsų nagrinėtu atveju $f(z) = \frac{z^2-2z+1}{(z-2)^3}$ ir $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{z^2-2z+1}{(z-2)^{n+4}} dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} (z-2)^m}{(z-2)^{n+4}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} \cdot \int_C \frac{dz}{(z-2)^{n+4-m}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} \cdot \int_C (z-2)^{m-n-4} dz.$$

Integralai $\int_C (z-2)^{m-n-4} dz$, kai $m-n-4 \neq -1$, yra lygūs 0 ir $\int_C (z-2)^{m-n-4} dz = 2\pi i$ tada ir tik tada, kai

$m-n-4=-1$, t. y., kai $n=m-3$, kur $m=0, 1, 2$. Todėl sumoje $c_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} \cdot \int_C (z-2)^{m-n-4} dz$, kai numeris

n yra duotas, gali būti nelygi 0 ne daugiau negu viena iš sandaugų $\frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} \cdot \int_C (z-2)^{m-n-4} dz$, nes

daugiklis $\int_C (z-2)^{m-n-4} dz$ nelygus 0 tik tada, kai $m=n+3$.

Kai $m=3, 4, 5, \dots$, tai $\frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} = 0$ ir todėl sumoje $c_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(2)}{m!} \cdot \int_C (z-2)^{m-n-4} dz$, kai $n+3 \geq 3$,

visi dėmenys yra lygūs 0. Iš to išplaukia, kad $c_0=c_1=c_2=c_3=\dots$ yra lygūs 0.

Todėl $c_n \neq 0$ tik tada, kai $m=0, 1$ ir 2 , t. y. tik tada, kai $n=0-3=-3$, $n=1-3=-2$, $n=2-3=-1$:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\varphi^{(2)}(2)}{2!} \cdot \int_C \frac{dz}{(z-2)^{-1+4-2}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2}{2} \cdot 2\pi i = 1,$$

$$c_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\varphi^{(1)}(2)}{1!} \cdot \int_C \frac{dz}{(z-2)^{-2+4-1}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2\pi i = 2,$$

$$c_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \varphi(2) \cdot \int_C \frac{dz}{(z-2)^{-3+4-0}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot 1 \cdot 2\pi i = 1. \text{ Tai sutampa su anksčiau gautais rezultatais.}$$

10. Kai $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, kur $f_1(z)$ – analizinė funkcija bet kurioje baigtinėje kompleksinės plokštumos srityje, o $f_2(z)=0$ yra lygtis, turinti r skirtingų kartotinių šaknų $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_r$, t. y. kai $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-z_1)^{m_1} (z-z_2)^{m_2} \dots (z-z_k)^{m_k} \dots (z-z_r)^{m_r}}$, kur $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_r$ – sveiki teigiami skaičiai, tai funkcija $\varphi(z)=f(z) \cdot (z-z_k)^{m_k}$ yra holomorfinė taške $z=z_k$ ir ją galima išreikšti Teiloro eilute $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_k)}{n!} (z-z_k)^n$.

$$\begin{aligned} \text{Todėl } \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_k} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z)(z-z_k)^{m_k}}{(z-z_k)^{m_k}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(z)}{(z-z_k)^{m_k}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_k} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_k)}{n!} (z-z_k)^n}{(z-z_k)^{m_k}} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_k)}{n!} \cdot \int_{C_k} (z-z_k)^{n-m_k} dz, \text{ kur } C_k - \text{ uždaras} \end{aligned}$$

kontūras aplink tašką z_k , neturintis savo viduje kitų ypatingųjų funkcijos $f(z)$ taškų (pavyzdžiui, pakankamai mažo spindulio r apskritimas, turintis centrą taške $z=z_k$).

$$\text{Kaip jau buvo anksčiau parodyta, } \int_{C_k} (z-z_k)^{n-m_k} dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{kai } n-m_k = -1 \\ 0, & \text{kai } n \neq m_k - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Todėl } \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_k} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi^{(m_k-1)}(z_k)}{(m_k-1)!} \cdot 2\pi i = \frac{1}{(m_k-1)!} \times \\ \times \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [f(z)(z-z_k)^{m_k}].$$

Kai kontūras C yra toks, kad į jo vidinę sritį patenka visi ypatingieji funkcijos $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2} \dots (z-z_k)^{m_k} \dots (z-z_r)^{m_r}}$ taškai $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_r$, tai,

$$\text{pasinaudodami reziduų teorema, gauname: } \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_k} f(z) = \\ = \sum_{k=1}^r \left[\frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [f(z)(z-z_k)^{m_k}] \right].$$

11. Tarkime, jog funkcijos $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, turinčios r polių z_k , kurių koordinatės yra baigtiniai dydžiai, skaitiklis $f_1(z)$ yra sveikas daugianaris $A_\mu z^\mu + A_{\mu-1} z^{\mu-1} + \dots + A_2 z^2 + A_1 z + A_0$, o jos vardiklis $f_2(z) = (z-z_1)^{m_1} \cdot (z-z_2)^{m_2} \dots (z-z_k)^{m_k} \dots (z-z_r)^{m_r}$, kur $\sum_{k=1}^r m_k = m$ ir $m-\mu \geq 2$.

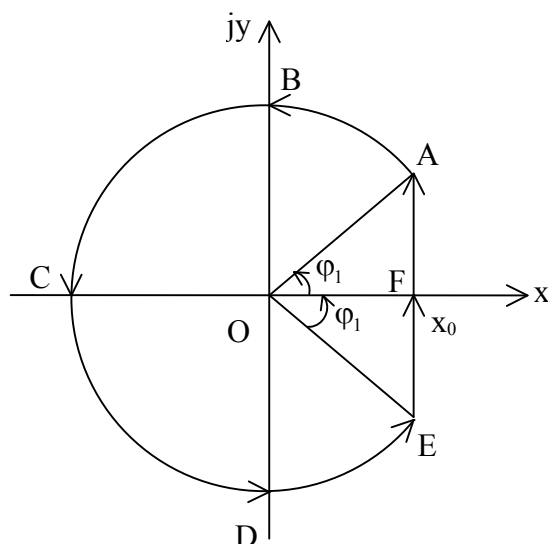
Tuomet nesunku įrodyti, jog funkcijos $f(z)$ Lorano eilutės $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ koeficientai c_n , atitinkantys $n=-1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, bus lygūs 0, nes iš tapatybės $\frac{A_\mu z^\mu + A_{\mu-1} z^{\mu-1} + \dots + A_1 z + A_0}{B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + B_0} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ išplaukia tapatybė $A_\mu z^\mu + A_{\mu-1} z^{\mu-1} + \dots + A_1 z + A_0 \equiv (B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + B_0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, ir, sulygindami koeficientus prie vienodų kintamojo z laipsnių abiejose tapatybės pusėse, gauname, jog sandaugos $B_m c_n$, kai $m+n > \mu$, turi būti lygios 0, o tai reiškia, jog koeficientai c_n , kai $n > \mu - m$, t. y., kai $n > -2$, turi būti lygūs 0.

Gauname, jog mūsų nagrinėjamo atveju funkcijos $f(z)$ Lorano eilutė yra $f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \dots$, kur $c_{-2}, c_{-3}, \dots$ yra pastovūs baigtiniai dydžiai.

Pasirinksimė tokį $x=x_0$, kad jis visų funkcijos $f(z)$ ypatingųjų taškų z_k atžvilgiu tenkintų sąlygą $\forall k (x_0 > \operatorname{Re} z_k)$, kur $\operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re}(x_k + i y_k) = x_k$, ir pravesime kompleksinėje plokštumoje tiesę $x=x_0$ (žiūr. 234 pav. tiesę, einančią per taškus E, F ir A). Tai padaryti galima, kadangi visi funkcijos $f(z)$ poliai z_k yra baigtiniai.

Iš koordinačių pradžios taško O pravesime apskritimą C **tokiu dideliu spinduliu, kad į jo vidų patektų visi ypatingieji funkcijos $f(z)$ taškai**, ir priimsime sąlygą, kad to apskritimo spindulį R galima, kiek norime, didinti.

Tarsime, kad apskritimas kerta tiesę $x=x_0$ simetriniuose taškuose E ir A, kurių atstumas nuo tiesės $y=0$, didinant spindulį R , galima, kiek nori, didinti.



234 pav.

Visi funkcijos $f(z)$ ypatingieji taškai pateks į kontūro EFABCDE vidų ir pasiliks jame, didinant R .

$$\text{Todėl } \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\text{EFABCDE}} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \left\{ \text{Res}_{z \rightarrow z_k} f(z) \right\} = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [f(z) \cdot (z - z_k)^{m_k}] \right\}.$$

Suskaidysime kontūrą $C = \text{EFABCDE}$ į dvi dalis EFA ir ABCDE. Gausime, kad $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\text{EFA}} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\text{ABCDE}} f(z) dz$, ir įrodysime, kad $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{ABCDE}} f(z) dz = 0$ ir

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{x_0 - j\infty}^{x_0 + j\infty} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \left\{ \text{Res}_{z \rightarrow z_k} f(z) \right\}. \text{ Gana ilgą įrodymą suskaidysime į 14 žingsnių.}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_{\text{ABCDE}} f(z) dz &\leq \int_{\text{ABCDE}} |f(z)| \cdot |dz| = \int_{\text{ABCDE}} \left| \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \dots \right| \cdot |dz| \leq \\ &\leq \int_{\text{ABCDE}} \left(\left| \frac{c_{-2}}{z^2} \right| + \left| \frac{c_{-3}}{z^3} \right| + \left| \frac{c_{-4}}{z^4} \right| + \dots \right) \cdot |dz|. \end{aligned}$$

$$2) \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{x + iy} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho}.$$

3) Kadangi ABCDE – apskritimo, turinčio spindulį R , dalis, tai, judant lanku ABCDE, z keičiasi taip, kad $\rho = R = \text{const}$.

4) Kadangi $|z^n| = |z|^n$, $|z^n| = |z|^n = \rho^n$, tai ant lanko ABCDE turime, jog $|z^n| = R^n = \text{const}$.

$$\begin{aligned} 5) \text{ Todėl ant lanko ABCDE: } &\left| \frac{c_{-2}}{z^2} \right| + \left| \frac{c_{-3}}{z^3} \right| + \left| \frac{c_{-4}}{z^4} \right| + \dots = \frac{|c_{-2}|}{R^2} + \frac{|c_{-3}|}{R^3} + \frac{|c_{-4}|}{R^4} + \dots = \frac{|c_{-2}|}{R^2} + \\ &+ \frac{1}{R^2} \left(\frac{|c_{-3}|}{R} + \frac{|c_{-4}|}{R^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

6) Kadangi funkcijos $f(z)$ Lorano eilutės koeficientai c_n yra pastovūs dydžiai, tai, didinant R , suma $\frac{|c_{-3}|}{R} + \frac{|c_{-4}|}{R^2} + \dots$ mažėja ir, esant pakankamai didelei R reikšmei,

artėdama prie 0, gali tapti mažesnė už vieneta, kadangi $\frac{|c_{-3}|}{R} + \frac{|c_{-4}|}{R^2} + \frac{|c_{-5}|}{R^3} + \dots \leq \frac{\max_i |c_i|}{R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{R}} = \frac{\max_i |c_i|}{R-1}$. Todėl $\frac{|c_{-2}|}{R^2} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{|c_{-3}|}{R} + \frac{|c_{-4}|}{R^2} + \dots \right) < \frac{|c_{-2}|+1}{R^2}$.

$$7) |dz| = |d(x+iy)| = |d(\sqrt{x^2+y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi))| = |d(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))|.$$

Ant lanko ABCDE $\rho=R=\text{const}$ ir keičiasi tik $\varphi=\arctg\frac{y}{x}$, todėl $dz=d[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \rho(-\sin\varphi d\varphi + i\cos\varphi d\varphi) = \rho(i\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi$ ir $|dz| = \rho\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}|d\varphi| = R|d\varphi|$.

Kadangi, judėdami kryptimi ABCDE, judame prieš laikrodžio rodyklę ir didiname kampą φ , tai $d\varphi > 0$, ir $d\varphi = |d\varphi|$. Todėl $|dz| = R d\varphi$.

8) Atsižvelgdami į tai, kas buvo gauta punktuose (1)÷(7), ir pasinaudodami 234 pav. bei jo žymėjimais, galime užrašyti nelybę:

$$0 \leq \int_{ABCDE} |f(z)| \cdot |dz| < \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} \frac{|c_{-2}|+1}{R^2} R d\varphi = \frac{|c_{-2}|+1}{R} (2\pi - 2\varphi_1) = \frac{|c_{-2}|+1}{R} (2\pi - 2 \arccos \frac{x_0}{R}), \text{ t. y.}$$

$$\text{nelybę } 0 \leq \int_{ABCDE} |f(z)| \cdot |dz| < \frac{|c_{-2}|+1}{R} 2(\pi - \arccos \frac{x_0}{R}).$$

9) Kai x_0 yra baigtinis dydis, tai $\lim_{R \rightarrow \infty} \arccos \frac{x_0}{R} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, o taip pat, kadangi $|c_{-2}|+1$ – baigtinis dydis, tai $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|c_{-2}|+1}{R} (2\pi - 2 \arccos \frac{x_0}{R}) = 0$, todėl iš nelyybės (8) išplaukia, jog $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{ABCDE} |f(z)| \cdot |dz| = 0$.

10) Kadangi $\left(- \int_{ABCDE} |f(z)| \cdot |dz| \right) \leq \int_{ABCDE} f(z) dz \leq \int_{ABCDE} |f(z)| \cdot |dz|$, tai iš (9) išplaukia, jog $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{ABCDE} f(z) dz = 0$.

11) Todėl, pažymėję uždara kontūrą EFABCDE sutrumpintai C, galime užrašyti: $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{EFA} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{EFA} f(z) dz + 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-j\infty}^{x_0+j\infty} f(z) dz$.

12) Kadangi x_0 buvo pasirinktas taip, kad $x_0 > \max_k \operatorname{Re} z_k = \max_k x_k$, kur z_k – funkcijos $f(z)$ poliai, ir apskritimo spindulys R buvo didinamas iki begalybės, tai kontūras C galų gale turėjo aprėpti visus funkcijos $f(z) = \frac{f_1(z)}{\prod_{k=1}^r (z-z_k)^{m_k}}$ polius.

13) Todėl iš reziduų teoremos išplaukia, jog $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^r \operatorname{Res} f(z)_{z \rightarrow z_k} =$

$$= \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} \left[\frac{f_1(z) \cdot (z - z_k)^{m_k}}{\prod_{k=1}^r (z - z_k)^{m_k}} \right] \right\}.$$

14) Iš (11) ir (13) gauname, jog tuo atveju, kai $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \dots$,

kur $f_1(z)$ – racionalus daugianaris, o $f_2(z) = \prod_{k=1}^r (z - z_k)^{m_k}$, kur $m_k \geq 1$ – sveiki skaičiai, tai

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - j\infty}^{x_0 + j\infty} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [f(z)(z - z_k)^{m_k}] \right\}, \text{ ką ir reikėjo įrodyti.}$$

12. Galima įrodyti, jog gautoji formulė liktų galiojanti ir funkcijai $\varphi(t) = f(z)e^{zt}$, kur $f(z) = \frac{f_1(z)}{\prod_{k=1}^r (z - z_k)^{m_k}}$ – ką tik nagrinėtas racionalių daugianarių santykis, kuriame

vardiklio laipsnis yra ne mažiau kaip dviem vienetais didesnis negu skaitiklio laipsnis, t. y. galima įrodyti formulę

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - j\infty}^{x_0 + j\infty} f(z) \cdot e^{zt} dz = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [f(z) \cdot e^{zt} (z - z_k)^{m_k}] \right\}, \text{ kur } x_0 > \max_k \operatorname{Re} z_k = \max_k x_k, \text{ o } z_k - \text{funkcijos } f(z) \text{ poliai.}$$

Įrodysime tai, suskaidydami įrodymą į 5 žingsnius.

1) Visų pirma, funkcijų $f(z)$ ir $\varphi(z) = f(z)e^{zt}$ ypatingųjų taškų aibė bus ta pati – funkcijos $f(z)$ poliai $z_1, z_2, \dots, z_r$, nes funkcija e^{zt} nė viename baigtiniame kompleksinės plokštumos taške ypatingųjų taškų neturi.

$$2) |e^{zt}| = |e^{tp(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{tp \cdot \cos\varphi} |e^{itp \cdot \sin\varphi}| = e^{t \cdot \operatorname{Re} z} \sqrt{\cos^2(tp \cdot \sin\varphi) + \sin^2(tp \cdot \sin\varphi)} = e^{tx}.$$

3) Uždaras kontūras EFABCDE (žiūr. 234 pav.), kurį sutrumpintai pažymėjome C, susideda iš dviejų dalių: atviro lanko (ABCDE), priklausančio apskritimui, turinčiam spindulį R, ir tiesės segmento [EFA], kertančio realiąją ašį Ox taške x_0 , pasirinktame taip, kad $x_0 > \max_k \operatorname{Re} z_k = \max_k x_k$, kur z_k – funkcijos $f(z)$ poliai.

Kai $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, kur $f_2(z)$ – sveikas daugianaris, turintis baigtinį laipsnį

$m = \sum_{k=1}^r m_k$, tai funkcijos $f(z)$ Lorano eilutė bet kurio jos poliaus aplinkoje turi tik

baigtinį dėmenų su neigiamais laipsniais $\frac{c_{-n}}{(z - z_k)^n}$ skaičių ir todėl tokiu atveju tokį x_0

parinkti visada galima. Tuomet visuose apskritimo lanko (ABCDE) taškuose bus tenkinama nelygybė $|e^{zt}| < e^{x_0 t}$, t. y., esant fiksuotai t reikšmei, $|e^{zt}|$ liks baigtinis skaičius, ne didesnis už $e^{x_0 t}$, kiek bedidintume apskritimo spindulį R.

$$4) \text{ Todėl } \left(- \int_{(ABCDE)} |f(z)| \cdot |e^{zt}| \cdot |dz| \right) \leq \int_{(ABCDE)} f(z) e^{zt} dz \leq \int_{(ABCDE)} |f(z)| \cdot |e^{zt}| \cdot |dz| < e^{x_0 t} \frac{|c_{-2}| + 1}{R} \cdot \int_{\varphi_1}^{2\pi - \varphi_1} d\varphi.$$

5) Kadangi $e^{x_0 t}$ – baigtinis dydis, tai $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{x_0 t} \frac{|c_{-2}|+1}{R} \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} d\varphi = 0$ ir

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(ABCDE)} f(z) e^{zt} dz = 0$, iš kur, naudodamiesi 234 pav., gauname, jog $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{EFA} f(z) e^{zt} dz =$
 $= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-j\infty}^{x_0+j\infty} f(z) \cdot e^{zt} dz = \sum_{k=1}^r \text{Res}[f(z) \cdot e^{zt}] = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}} [f(z) \cdot e^{zt} (z-z_k)^{m_k}] \right\}$, ką ir
 reikėjo įrodyti.

13. Formulė $\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-j\infty}^{x_0+j\infty} f(z) \cdot e^{zt} dz = \sum_{k=1}^r \text{Res}[f(z) \cdot e^{zt}]$, kaip ir prieš tai įrodyta formulė

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-j\infty}^{x_0+j\infty} \frac{f_1(z)}{\prod_{k=1}^r (z-z_k)^{m_k}} dz = \sum_{k=1}^r \text{Res} \left[\frac{f_1(z)}{\prod_{k=1}^r (z-z_k)^{m_k}} \right], \text{ bendrai paėmus, yra daliniai}$$

reziduų teoremos atvejai.

Tai nesunku suprasti, prisiminus, kad kompleksinėje plokštumoje be galo nutolęs taškas, kurį atitinka Rymano sferos polius P, yra tik vienas. O tai reiškia, jog taškai $x_0-i\infty$ ir $x_0+i\infty$ turi sutapti, ir integralą $\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} f(z) dz$ galime interpretuoti kaip

uždaro kontūro C, apripiančio visus ypatinguosius funkcijos f(z) taškus, integralą, turintį būti lygų visų tų taškų reziduų sumai.

14. Dabar jau galima grįžti prie Rymano–Melino formulės $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$ ir apibendrinti antrąją Hevisaido teoremą tam atvejui, kai

$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, kur lygtis $F_2(p) = 0$ gali turėti ir nulinių $p=0$ ir kartotinių šaknų, t. y.,

kai $F_2(p) = \sum_{k=1}^r (p-p_k)^{m_k}$, kur $m_k \geq 1$, o p_k – funkcijos F(p) poliai, kurie gali būti bet kokie realūs ar kompleksiniai skaičiai, tame tarpe – ir lygūs 0 bei kartotiniai.

Visų pirma priimsime, kad daugianario $F_2(p)$ laipsnis $\sum_{k=1}^r m_k$ yra didesnis už daugianario $F_1(p)$ laipsnį.

Jeigu būtų ne taip, tai visuomet būtų galima, dalinant $F_1(p)$ iš $F_2(p)$, išskirti sveikąją dalį.

$$\text{Pavyzdžiui, jei } F(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 - 2p + 4}{(p-2)^2}, \text{ tai } F(p) = 2p + 11 + \frac{34p + 40}{(p-2)^2}.$$

Rasti atvaizdo sveikosios dalies originalą nėra sunku, nes $H[11] = 11$ ir $H[\delta(t)] = H[u'(t)] = p$, kaip tai buvo parodyta 1.11.5. skyrelyje.

Ir bendrai $p^n = H[u^{(n)}(t)]$, kur $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Todėl, naudojantis šiomis formulėmis ir Hevisaido transformacijos tiesiškumo savybe, visuomet galima surasti atvaizdo F(p) sveikąją dalį atitinkančią funkcijos originalo dalį.

Pavyzdžiui, $2p+11$ atitinka $f(t) = 2\delta(t) + 11 = 2u'(t) + 11u(t)$.

Kartais sveikojoje F(p) dalyje gali atsirasti dėmenų, turinčių pavidalą $a \cdot e^{-p\tau} p^k$, kur $a = \text{const}$, $\tau > 0$, k – sveikas teigiamas skaičius.

Tuomet, pasinaudodami jau mums žinoma vėlinimo teorema ir kitais anksčiau gautais rezultatais, nustatytume, jog tokius atvaizdo dėmenis atitinka funkcijos – originalo dėmenys $a \cdot u^{(k)}(t-\tau) = a \cdot \delta^{(k-1)}(t-\tau)$.

Todėl ieškant atvaizdą $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ atitinkančio originalo, kur $F_2(p) = \prod_{k=1}^r (p-p_k)^{m_k}$ ir m_k – sveiki teigiami skaičiai, mums, išskyrus kompleksinio argumento funkcijos $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ sveikąją dalį, belieka surasti tik tos atvaizdo dalies originalą, kurioje daugianario $F_2(p)$ laipsnis yra didesnis už likusio trupmenos skaitiklio, kurį toliau žymėsime (kaip ir anksčiau) $F_1(p)$, laipsnį.

Tokiu atveju kompleksinio argumento funkcijos $\frac{F(p)}{p} = \frac{F_1(p)}{p F_2(p)}$ vardiklio $p F_2(p)$ ir skaitiklio $F_1(p)$ laipsnių skirtumas bus nemažesnis už 2.

Todėl funkcijos $\frac{F(p)}{p}$ Lorano eilutės $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_n$ koeficientai c_n , kai $n \geq -1$, būtinai bus lygūs 0. Gali būti lygūs 0 ir kai kurie kiti c_n , tačiau tai mums netrukdo taikyti

neseniai išvestą formulę $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{k=0}^r \text{Res}_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)}{p \prod_{k=1}^r (p-p_k)^{m_k}} e^{pt} \right]$, kur $p_0=0$, o

kitos p_k reikšmės, kai $k=1, 2, \dots, r$, yra lygties $F_2(p)=0$ šaknų reikšmės.

Iš šios formulės išplaukia:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{k=0}^r \text{Res}_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)}{p \prod_{k=1}^r (p-p_k)^{m_k}} e^{pt} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^r \left\{ \frac{1}{(m_k-1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(p)(p-p_k)^{m_k}}{p \prod_{k=1}^r (p-p_k)^{m_k}} e^{pt} \right] \right\}, \text{ kur } m_0=1, p_0=0.$$

Pavyzdžiui, kai $F(p) = \frac{34p+40}{(p-2)^2}$, tai funkcijos $\frac{F(p)}{p}$ charakteristikos bus tokios: $r=2$; $p_0=0$; $m_0=1$; $p_1=2$; $m_1=2$.

$$\text{Todėl } f(t) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{(34p-40)p}{p(p-2)^2} e^{pt} \right] + \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 2} \frac{d}{dp} \left[\frac{(34p-40)(p-2)^2}{p(p-2)^2} e^{pt} \right] =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{(34p-40)}{(p-2)^2} e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow 2} \frac{d}{dp} \left[\left(34 - \frac{40}{p} \right) e^{pt} \right] = -\frac{40}{4} + \lim_{p \rightarrow 2} \left[e^{pt} \cdot \frac{40}{p^2} + \left(34 - \frac{40}{p} \right) \cdot t \cdot e^{pt} \right] = -10 + e^{2t}(10+14t).$$

Nesunku įsitikinti, kad surastoji funkcija $f(t)$ tikrai turi atvaizdą $H[f(t)] = \frac{34p+40}{(p-2)^2}$:

$$H[-10 + e^{2t}(10+14t)] = -10p \int_0^\infty e^{-pt} dt + 10p \int_0^\infty e^{-(p-2)t} dt + 14p \int_0^\infty t \cdot e^{-(p-2)t} dt = -\frac{10p}{-p} e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{10p}{-(p-2)} e^{-(p-2)t} \Big|_0^\infty +$$

$$+ 14p \left[t \frac{1}{-(p-2)} e^{-(p-2)t} \Big|_0^\infty - \frac{1}{-(p-2)} \int_0^\infty e^{-(p-2)t} dt \right] = -10 + \frac{10p}{(p-2)} + 14p \left[0 - 0 + \frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{-(p-2)} e^{-(p-2)t} \Big|_0^\infty \right] =$$

$$= -10 + \frac{10p}{(p-2)} + 14p \frac{1}{(p-2)^2} = \frac{-10p^2 + 40p - 40 + 10p^2 - 20p + 14p}{(p-2)^2} = \frac{34p + 40}{(p-2)^2}, \text{ ką ir turėjome gauti.}$$

15. Taip pat nesunku įsitikinti, jog formulė

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)} e^{pt} (p - p_k)^{m_k} \right] \right\} \text{ tinka ir tuo atveju, kai lygties}$$

$F_2(p)=0$ šaknys nėra kartotinės.

Pavyzdžiui, kai $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_k)\dots(p-p_r)}$, kur visos šaknys p_k yra skirtingos ir nelygios 0, tai, naudojantis antrąja Hevisaido teorema, galima gauti, jog šį atvaizdą atitinka originalas $f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^r \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}$.

Pasinaudodami formule $f(t) = \sum_{k=0}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(p)(p - p_k)^{m_k}}{p \cdot F_2(p)} e^{pt} \right] \right\}$, kur $p_0=0$, ir atsižvelgdami, jog šiuo atveju visi $m_k=1$, gautume:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)(p - p_k)}{(p - 0) \cdot F_2(p)} e^{pt} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{F_1(p)(p - 0)}{(p - 0) \cdot F_2(p)} e^{pt} \right] + \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)(p - p_k)}{p \cdot F_2(p)} e^{pt} \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} \right] + \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)}{p \frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p - p_k}} e^{pt} \right] = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)}{p \frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p - p_k}} e^{pt} \right] = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \\ &\sum_{k=1}^r \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \text{ kas sutampa su rezultatu, išplaukiančiu iš antrosios Hevisaido teoremos.} \end{aligned}$$

16. Todėl dabar **antrąją Hevisaido teoremą galima apibendrinti:**

kai $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, kur $F_1(p)$ yra mažesnio laipsnio daugianaris negu $F_2(p)$, tai **atvaizdą**

$F(p)$ atitinka funkcija – originalas

$$f(t) = \sum_{k=0}^r \operatorname{Res}_{p \rightarrow p_k} \frac{F(p)}{p} = \sum_{k=0}^r \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(p)(p - p_k)^{m_k}}{p \cdot F_2(p)} e^{pt} \right] \right\}, \text{ kur } p_1, p_2, \dots,$$

$p_k, \dots, p_r$ – lygties $F_2(p)=0$ kartotinės eilės $m_k \geq 1$ šaknys, $p_0=0$, $m_0=1$.

Kai visos lygties $F_2(p)=0$ šaknys yra skirtingos, paprastos (t. y. $m_k=1$) ir nelygios 0, tai vietoj šios formulės, kurią **sutrumpintai vadinsime reziduumų formule**, galima naudotis ir paprastesne anksčiau įrodyta formule, vaizduojančia neapibendrintą antrąją Hevisaido teoremą $f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^r \frac{F_1(p)}{p_k \cdot F_2'(p)}$, nors, kaip jau

matėme, ir tuo atveju galioja taip pat ir reziduumų formulė $f(t) = \sum_{k=0}^r \operatorname{Res}_{p \rightarrow p_k} \frac{F(p)}{p}$.

17. Gilesnė analizė, kuria mes čia neužsiimsime, rodo, jog mūsų iškelti reikalavimai, išvedant reziduumų formulę, buvo net šiek tiek per griežti: **ne būtina, kad daugianario $F_1(p)$ laipsnis būtų mažesnis už daugianario $F_2(p)$ laipsnį, nes**

pakanka, kad būtų tenkinamas reikalavimas $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0$.

Pavyzdžiui 1.11.5 skyrelyje mes buvome gavę, jog $H[e^{-at}] = \frac{p}{p+a}$. Čia $F_1(p)=p$, $F_2(p)=p+a$ ir abiejų daugianarių laipsniai yra vienodi.

Tačiau $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{(p+a)p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p+a} = 0$, todėl galima taikyti reziduumų formulę, atsižvelgiant į tai, kad $p_0=0$, $m_0=1$, $p_1=-a$; $m_1=1$.

$$f(t) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p(p-0)}{p(p+a)} e^{pt} + \frac{1}{(1-1)!} \lim_{p \rightarrow -a} \frac{p(p+a)}{p(p+a)} e^{pt} = e^{-at}.$$

$\frac{F(p)}{p}$ galima buvo, dar prieš pradedant taikyti reziduumų formulę, supaprastinti:

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{p}{p(p+a)} = \frac{1}{p+a}. \text{ Tuomet būtume gavę } r=1; p_1=-a; m_1=1 \text{ ir } f(t) = \lim_{p \rightarrow -a} \frac{1(p+a)}{(p+a)} e^{pt} = e^{-at}. \text{ Tai}$$

sutampa su ką tik gautu rezultatu ir su 1.11.5 skyrelyje gautu rezultatu.

18. Reziduumų formulę galima taikyti ir Laplaso transformacijai, vartojant vietoj $\frac{F(p)}{p} = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)}$ atvaizdą $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$, jei tik tenkinama sąlyga

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Tuomet gauname:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{s=s_k} F(s) \cdot e^{st} = \sum_{k=1}^r \left\{ \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}} \left[\frac{F_1(s)(s-s_k)^{m_k}}{F_2(s)} e^{st} \right] \right\}.$$

19. Reziduumų formulę galima taikyti, ieškant atvaizdą $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$

atitinkančios funkcijos – originalo, **ne tik tuo atveju, kai $F_1(p)$ ir $F_2(p)$ – daugianariai**, t. y., kai $F(p)$ turi baigtinį skaičių polių – lygties $F_2(p)=0$ šaknų, nesusiprastinančių su lygties $F_1(p)=0$ šaknimis, **bet ir kai kuriais atvejais, kai $F_1(p)$ ir $F_2(p)$ – sveikos ir vienareikšmės transcendentinės funkcijos**. Tuomet funkcija $F(p)$, priklausydama meromorfinių funkcijų klasei, gali turėti **be galo daug polių**, tačiau neturi jokių kitų ypatingų taškų.

Galima įrodyti, jog tokiai $F(p)$ galima taikyti reziduumų formulę, **kai tenkinamos sąlygos:**

1) visų polių p_k realiosios dalys **$\operatorname{Re} p_k$ yra baigtinės**, t. y., galima pravesti tokią tiesę EA (žiūr. 234 pav.), parinkus $x_0 = \sigma_0 > \max_k \operatorname{Re} p_k$, kad visi $F(p)$ poliai atsidurtų kompleksinės plokštumos dalyje į kairę nuo tiesės EA;

2) egzistuoja tokia apskritimų su diskrečiai kintančiu ir didėjančiu iki begalybės spinduliu $R_k \left(R_k \rightarrow \infty \right)$ sistema (apskritimų seka), kad ant tų apskritimų lankų (ABCDE), papildančių atkarpą EFA (žiūr. 234 pav.) iki uždaro kontūro C ir nekertančių funkcijos $F(p)$ polių p_k , būtų tenkinama sąlyga $\frac{F(p)}{p} \rightarrow 0$, kai

$$R_k \rightarrow \infty.$$

Pavyzdžiui, kai $F(p) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 p}$, kur $\operatorname{sh} p$ – hiperbolinis sinusas $\operatorname{sh} p = \frac{e^p - e^{-p}}{2}$, tai funkcija $\frac{F(p)}{p} = \frac{4}{p(e^p - e^{-p})^2}$ turi vieną trečiosios eilės polių $p=0$ ir be galo daug antrosios eilės polių $p_k = ik\pi$, kur

$k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, nes kai $p=0$, tai $\frac{F(p)}{p}$ vardiklyje nuliu tampa ne tik daugiklis p , bet ir daugikliai $(e^p - e^{-p}) \cdot (e^p - e^{-p})$, o kai $p=i\pi$, tai $e^p - e^{-p} = e^{i\pi} - e^{-i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi - \cos(-\pi) - i\sin(-\pi) = 0$ visoms sveikoms k reikšmėms $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Jokių kitų polių, ir tuo labiau kitų ypatingų taškų funkcija $\frac{F(p)}{p}$ neturi.

Visų $\frac{F(p)}{p}$ polių realiosios dalys $\operatorname{Re} p_k=0$, todėl pirmoji sąlyga tenkinama, nes, jei pravestume tiesę EA (žiūr. 234 pav.) per bet kokią tašką $x_0=\sigma_0>0$, tai visi poliai atsidurtų kairiau tos tiesės.

Funkcijos $\frac{F(p)}{p} = \frac{4}{p(e^p - e^{-p})^2}$ poliai išsidėstę ant menamos ašies lygiais tarpais (atstumas nuo poliaus iki gretimų polių lygus π) ir yra izoliuoti, todėl visuomet galima pravesti didėjančio spindulio R_k apskritimus, nekertančius nė vieno poliaus.

Ant tų apskritimų lankų (ABCDE) turėsime, jog $p=R_k e^{i\varphi}$, kur φ keisis nuo φ_1 iki $2\pi-\varphi_1$ (žiūr. 234 pav.), o $|p|=|p e^{i\varphi}|=p$ išliks pastovus ir lygus R_k . Kadangi mūsų pravesti apskritimų lankai ABCDE nekirs polių, tai $e^p - p^{-p} \neq 0$. Nesunku įrodyti, jog egzistuoja didėjančio spindulio $R_k \rightarrow \infty$ apskritimų

sistema, ant kurių lankų (ABCDE), didėjant R_k , funkcija $\frac{F(p)}{p} = \frac{4}{p(e^p - e^{-p})^2}$ artės prie 0. Todėl,

norėdami rasti atvaizdą $F(p) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 p}$ atitinkantį originalą $f(t)$, galime taikyti reziduumų formulę:

$$f(t) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{e^{pt} (p-0)^3}{p \cdot \operatorname{sh}^2 p} \right] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow i\pi k} \frac{d}{dp} \left[\frac{e^{pt} (p-i\pi k)^2}{p \cdot \operatorname{sh}^2 p} \right] \right\} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} t^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1-ik\pi t}{k^2 \pi^2} e^{ik\pi t} =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} t^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1+ik\pi t}{k^2 \pi^2} \cdot e^{-jk\pi t} + \frac{1-ik\pi t}{k^2 \pi^2} \cdot e^{jk\pi t} \right] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} t^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos k\pi t}{k^2 \pi} + \frac{t \cdot \sin k\pi t}{k} \right).$$

Palieku skaitytojų įsitikinti, jog šios funkcijos $f(t)$ Hevisaido atvaizdas tikrai yra $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 p}$.

Suprantama, jog ne visos funkcijos $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, kur $F_1(p)$ ir $F_2(p)$ – vienareikšmės sveikos transcendentinės funkcijos, tenkina anksčiau išvardintas dvi sąlygas.

Pavyzdžiui, funkcija $\operatorname{tg} p = \frac{\sin p}{\cos p}$ netenkina pirmosios sąlygos, nes jos poliai $p_k = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$

išsidėstę ant realių skaičių ašies nuo $-\infty$ iki $+\infty$ ir nėra galimybės taip pravesti baigtiniame taške $x_0=s$ tiesę EA, kad visi funkcijos poliai atsidurtų kairiau tos tiesės.

Funkcija $F(p) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\sin p)}$ taip pat turi be galo daug polių. Surasime juos.

Iš ką tik nagrinėto pavyzdžio žinome, jog $\operatorname{sh} w = 0$, kai $w = i\pi k$, kur $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Belieka išspręsti lygtį $w = \sin p = jk\pi$, t. y. lygtį $\frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i} = ik\pi$. Pažymėsime $(-ip)=z$. Tuomet $p=iz$.

Gauname: $\frac{e^{-z} - e^z}{2i} = ik\pi$, iš kur $e^z - e^{-z} - 2k\pi = 0$. Kadangi $e^z \neq 0$, tai, padauginę lygybę $e^z - 2k\pi - e^{-z} = 0$

iš e^z , gauname: $(e^z)^2 - 2k\pi e^z - 1 = 0$, iš kur, kadangi $e^z > 0$, gauname $e^z = k\pi + \sqrt{k^2 \pi^2 + 1}$; $z = \ln(k\pi + \sqrt{k^2 \pi^2 + 1})$, $p_k = i \cdot \ln(k\pi + \sqrt{k^2 \pi^2 + 1})$, kur $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Kaip matome, funkcijos $\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p \cdot \operatorname{sh}(\sin p)}$ poliai pirmąją sąlygą tenkina, nes jie išsidėstę ant menamosios ašies.

Tačiau jie netenkina antrosios sąlygos, nes, kai $k \rightarrow \infty$, poliai artėja vienas prie kito ir atstumai tarp jų artėja prie 0, dėl ko tampa neįmanoma praveisti didėjančio spindulio apskritimų, nekertant polių. Įrodysime tai.

Iš formulės $p_k = i \ln(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 + 1})$ matyti, jog kai $k \rightarrow \infty$, tai $|p_k| \rightarrow \infty$, o $\lim_{k \rightarrow \infty} \{ |p_{k+1}| - |p_k| \} =$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \frac{(k+1)\pi + \sqrt{(k+1)^2\pi^2 + 1}}{k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 + 1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \frac{(1 + \frac{1}{k})\pi + \sqrt{(1 + \frac{1}{k})^2\pi^2 + \frac{1}{k^2}}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{k^2}}} = \ln 1 = 0.$$

Todėl funkcijai $F(p) = \frac{1}{\text{sh}(\sin p)}$ negalime taikyti reziduumų formulės, nes, didinant R , nepavyksta pasiekti, kad $\frac{F(p)}{p}$ artėtų prie 0.

Tačiau dauguma meromorfinių funkcijų, su kuriomis tenka susidurti, nagrinėjant realius fizikinius bei techninius procesus, tenkina minėtas sąlygas, ir tiems procesams nesunkiai surandami jų atvaizdai, o iš atvaizdų – funkcijos – originalai.

20. Reziduumų formule funkcijų – originalų atstatymui, žinant jų atvaizdus, galima naudotis, ne tik tada, kada $F(p)$ ypatingieji taškai yra tik poliai. Pasirodo, jog ir tais atvejais, kai funkcijos $F(p)$ ypatingasis taškas z_k yra **esmingai ypatingasis taškas**, t. y., **kai to taško aplinkoje funkcijos Lorano eilutė turi ne tik baigtinį dėmenų $\frac{c_{-n}}{(z-z_k)^n}$ su neigiamais $(z-z_k)$ laipsniais skaičių, bet ir begalinį jų skaičių, galima naudotis reziduumų formule.**

Pavyzdžiui, funkcijai $F(p) = \frac{1}{p^k} \cos \frac{1}{p^n}$, kur k ir n – sveiki teigiami skaičiai, taškas $p=0$ yra esmingai ypatingasis taškas, nes tame taške neegzistuoja $\lim_{p \rightarrow 0} F(p)$ ir to taško aplinkoje funkcijos

$$F(p) = \frac{1}{p^k} \cos \frac{1}{p^n} \text{ Lorano eilutė turi begalinį dėmenų } \frac{c_{-m}}{z^m} \text{ skaičių: } \frac{1}{p^k} \cos \frac{1}{p^n} = \frac{c_{-1}}{p} + \frac{c_{-2}}{p^2} + \frac{c_{-3}}{p^3} + \dots + \frac{c_{-m}}{p^m} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{p^{2nm+k}} \frac{1}{(2m)!}.$$

Kadangi taškas $p=0$ yra vienintelis funkcijos $\frac{1}{p^k} \cos \frac{1}{p^n}$ ypatingasis taškas, tai, taikydami reziduumų formulę, gausime: $f(t) = \text{Res}_{p \rightarrow 0} \frac{F(p)}{p} \cdot e^{pt} = \text{Res}_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt}}{p^{k+1}} \cos \frac{1}{p^n}.$

Funkcijos $\frac{e^{pt}}{p^{k+1}} \cos \frac{1}{p^n}$ reziduumą galima surasti, išskaidant ją į Lorano eilutę ir surandant tos eilutės koeficientą c_{-1} prie dėmens $\frac{1}{p}$, nes pagal reziduumo apibrėžimą $\text{Res}_{z \rightarrow z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C c_n (z-z_k)^n dz = \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}$, kur C – apskritimas, paimtas taško z_k aplinkoje su centru tame taške.

Funkcijos $\frac{1}{p^{k+1}} \cdot e^{pt} \cdot \cos \frac{1}{p^n}$ Lorano eilutę gausime, suskaidydami funkcijas e^{pt} ir $\cos \frac{1}{p^n}$ į

$$\text{Teiloro eilutės ir rasdami tų eilučių ir daugiklio } \frac{1}{p^{k+1}} \text{ sandaugą, t. y. } \frac{e^{pt}}{p^{k+1}} \cos \frac{1}{p^n} = \\ = \frac{1}{p^{k+1}} \left(1 + \frac{pt}{1!} + \frac{p^2 t^2}{2!} + \frac{p^3 t^3}{3!} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p^{2n}} + \frac{1}{p^{4n}} - \frac{1}{p^{6n}} + \dots \right) = \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(pt)^r}{r!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \frac{1}{p^{2nm}}.$$

Norėdami surasti šios eilutės koeficientą c_{-1} , atitinkantį funkcijos $\frac{1}{p^{k+1}} \cdot e^{pt} \cdot \cos \frac{1}{p^n}$ Lorano eilutės narį $c_{-1} \cdot p^{-1}$, turime surinkti sumų $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(pt)^r}{r!}$ ir $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \frac{1}{p^{2nm}}$ sandaugos dėmenis, turinčius pavidalą $A_s p^k$, kur įvairūs A_s – atitinkamų konstantų ir atitinkamų kintamojo t laipsnių sandaugos, atsirandančios dauginant $\frac{t^r}{r!}$ ir $(-1)^m \frac{1}{(2m)!}$ taip, kad $r-2nm=k$, kai, esant duotoms sveikoms k ir n reikšmėms, r ir m , būdami sveikais skaičiais, gali keistis nuo 0 iki $+\infty$.

Kadangi k ir n – sveiki skaičiai, tai pirmąjį $A_s = A_1 = -\frac{t^k}{k!}$ gausime, kai $r=k$, o $m=0$. Antrąjį $A_s = A_2 = -\frac{t^{k+2n}}{2!(k+2n)!}$ gausime, kai $m=1$, o $r=k+2n$. Trečiąjį $A_s = A_3 = \frac{t^{k+4n}}{4!(k+4n)!}$ gausime, kai $m=2$, o $r=k+2nm=k+4n$.

Tokiu būdu samprotaudami, mes surasime, jog atvaizdo $F(p) = \frac{1}{p^k} \cos \frac{1}{p^n}$ originalas yra funkcija $f(t) = \text{Res}_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt}}{p^{k+1}} \cos \frac{1}{p^n} = c_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2mn}}{(2m)!(k+2mn)!}$.

Patikrinsime gautąjį rezultatą. Pavyzdžiui, kai $k=0$, $n=1$, tai $F(p) = \cos \frac{1}{p}$, ir šį atvaizdą atitinka funkcija – originalas $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{[(2m)!]^2}$, kuri yra Tomsono funkcija $\text{ber}(2\sqrt{t})$. Nesunku įsitikinti, kad

$$H[\text{ber}(2\sqrt{t})] = \cos \frac{1}{p}. \text{ Kadangi } H[t^{2m}] = \frac{(2m)!}{p^{2m}}, \text{ tai } H\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{[(2m)!]^2}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \frac{1}{p^{2m}}}{(2m)!} = \cos \frac{1}{p}.$$

Tai rodo, jog **reziduumų formulės taikymas atvaizdams $F(p)$, kai jie tenkina anksčiau išvardintas dvi sąlygas, duoda teisingus rezultatus ne tik tuomet, kai $F(p)$ turi baigtinį ar begalinį skaičių polių, bet ir tuomet, kai dalį jos ypatingųjų taškų ar net visus ypatinguosius taškus sudaro esmingai ypatingieji taškai.**

21. Šiek tiek sudėtingesnė situacija susidaro tada, kai tarp ypatingųjų taškų pasitaiko **šakojimosi taškų**.

Priminsiu, jog **daugiareikšmės funkcijos $w=f(z)$ šakojimosi tašku vadinamas toks taškas z_s , kurio aplinkoje tos daugiareikšmės funkcijos kai kurios vienareikšmės šakos $w_i=f_i(z)$ taip suartėja, kad jų reikšmės tame taške arba sutampa arba turėtų sutapti, jei tame taške funkcija $w=f(z)$ turėtų baigtinę reikšmę.**

Priklausomai nuo to, kiek šakojimosi taške z_s skirtingų šakų $w_i=f_i(z_i)$ kerta (arba turėtų kirsti) vieną iš tų vienareikšmių šakų, **šakojimosi taškas priskiriamas tam tikrai eilei:** jei taške z_s vieną iš šakų kerta (ar turėtų kirsti) tik viena iš kitų funkcijos $w=f(z)$ šakų, tai sakoma, kad šakojimosi taško eilė lygi 1, kai taške z_s vieną iš šakų kerta (ar turėtų kirsti) $m \geq 1$ kitų skirtingų šakų, tai sakoma, kad taško z_s eilė lygi m .

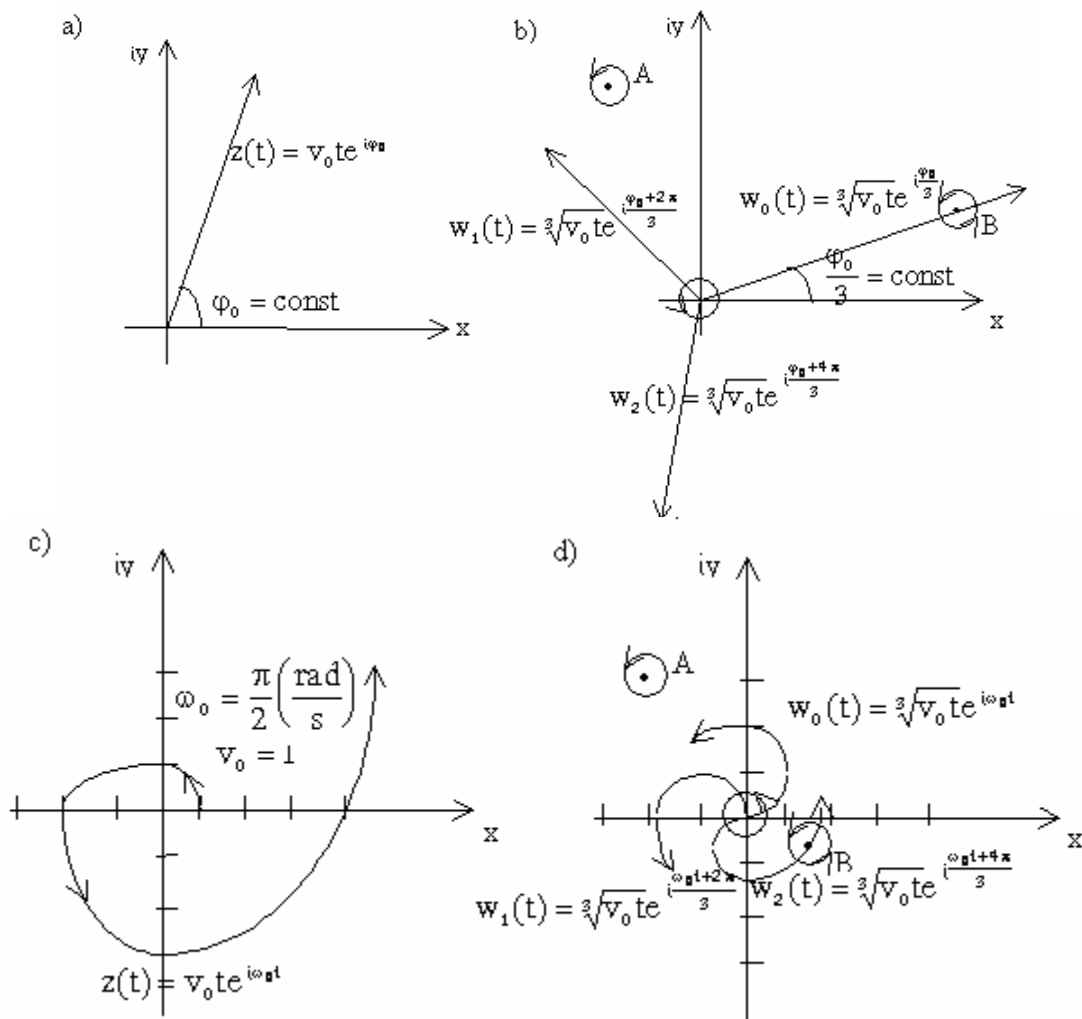
Pavyzdžiui, funkcija $w=\sqrt[3]{z}$ turi tris skirtingas vienareikšmes šakas: $w_0=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z}{3}}$, $w_1=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z+2\pi}{3}}$ ir $w_3=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z+4\pi}{3}}$, kurių reikšmės sutampa taške $z_s=0$. Todėl taškas $z_s=0$ yra funkcijos $w=\sqrt[3]{z}$ antrosios eilės šakojimosi taškas.

Funkcija $w=\sqrt{1-\sqrt{z}}$ turi keturias vienareikšmes šakas $w_k=\sqrt{1-\sqrt{|z|}[\cos(\arg z+k2\pi)+i\sin(\arg z+k2\pi)]}$, kur $k=0, 1, 2, 3$. Taške $z_s=1$ dviejų iš jų reikšmės, kai $k=0$ ir $k=2$, tampa lygios tarpusavyje ir lygios 0, o dviejų kitų šakų reikšmės, kai $k=1$ ir $k=3$, taške $z_s=1$ yra skirtingos ir lygios $-\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}$. Todėl taškas $z_s=1$ yra funkcijos $w=\sqrt{1-\sqrt{z}}$ pirmos eilės šakojimosi taškas.

Funkcija $w=\ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$, suskylanti į be galo daug vienareikšmių šakų, kurias gauname suteikdami parametrai k reikšmes $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, turi begalinės eilės šakojimosi tašką $z=0$, nes kai $z\rightarrow 0$, tai visų funkcijos šakų reikšmės vaizduojantys taškai $w_k=f_k(z)$ artėja prie vieno taško – be galo nutolusio taško.

Daugiareikšmė funkcija $w=\ln e^z$, suskylanti į be galo daug skirtingų šakų $w_k=z+i2k\pi$, neturi nė vieno šakojimosi taško, nes nėra tokios baigtinės kintamojo z reikšmės z_s , kad visų funkcijų w_k reikšmės tame taške būtų lygios.

Daugiareikšmės funkcijos $w=f(z)$ reikšmių kitimo jos šakose trajektorijos $w_i(t)$ kompleksinėje plokštumoje priklauso nuo to, kaip atrodo kompleksinio kintamojo z kitimo trajektorija $z(t)$, tačiau nepriklausomai nuo to funkcijos $w=f(z)$ šakojimosi taškai išlieka tie patys. Nesikeičia ir jų eilė.

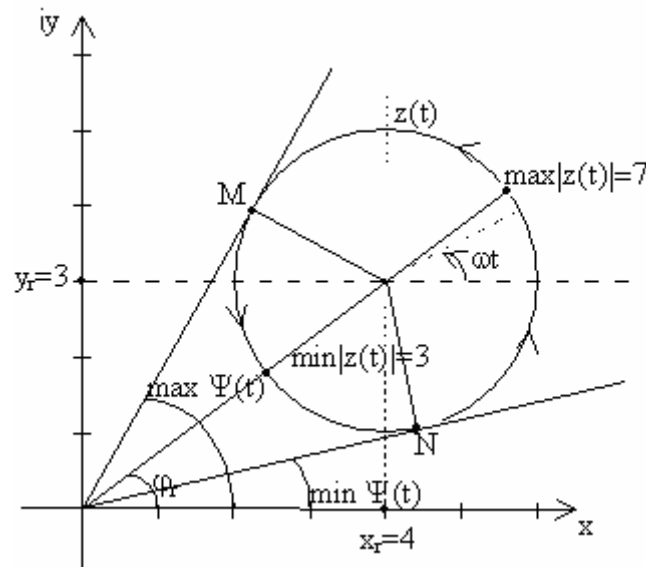


235 pav.

235 pav. pavaizduotos skirtingos trajektorijos $z(t)$ ir tas trajektorijas atitinkančios funkcijos $w=f(z)=\sqrt[3]{z}$ reikšmių kitimo šakose trajektorijos $w_0(t)$, $w_1(t)$ ir $w_2(t)$: brėžinėlyje „a“ vaizduojama trajektorija $z(t)=v_0 t[\cos(\varphi_0+2\pi k)+i\sin(\varphi_0+2\pi k)]=v_0 t \cdot e^{i(\varphi_0+2\pi k)}$, kai kinta tik modulis $|z(t)|=v_0 t$, kur $v_0=\text{const.}$ ir t – laikas, o kintamojo $z(t)$ argumentas $\arg z=\varphi_0=\text{const}$ nesikeičia; brėžinėlyje „b“ vaizduojamos funkcijos $w=f(z)=\sqrt[3]{z}$ reikšmių kitimo šakose trajektorijos $w_0(t)$, $w_1(t)$ ir $w_2(t)$, atitinkančios kintamojo z kitimo trajektoriją $z(t)=v_0 t \cdot e^{i\varphi_0}$, pavaizduotą brėžinėlyje „a“; brėžinėlyje „c“ vaizduojama trajektorija $z(t)=v_0 t \cdot e^{i\omega_0 t}$, kada kompleksinio kintamojo modulis $|z(t)|$ didėja su pastoviu linijiniu greičiu $v_0=1$, o jo argumentas $\arg z$ kinta su pastoviu cikliniu greičiu $\omega_0=\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ radianų į sekundę; brėžinėlyje „d“ vaizduojamos funkcijos $w=f(z)=\sqrt[3]{z}$ reikšmių kitimo trajektorijos $w_0(t)$, $w_1(t)$ ir $w_2(t)$, atitinkančios trajektoriją $z(t)=v_0 t \cdot e^{i(\varphi_0+2\pi k)}$, pavaizduotą brėžinėlyje „c“.

Lygindami brėžinėlius 235 „b“ ir 235 „d“, matome, jog abiejuose brėžinėliuose šakojimosi taškas z_s išliko tas pats, ir jis funkcijai $w=\sqrt[3]{z}$ yra vienintelis, nes tik taške $z=0$ net pats mažiausias apskritimas, apvestas aplink tą tašką, būtinai kerta visas tris šakas w_0 , w_1 ir w_2 . Kituose taškuose, pavyzdžiui, A arba B, tokio reiškinio nėra. Vienodas tuose brėžinėliuose ir funkcijos šakų skaičius, t. y. išlieka ir ta pati šakojimosi taško eilė, nors pačios trajektorijos $w_0(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ skiriasi: brėžinėlyje „b“ jos yra iš šakojimosi taško $z_s=0$ išeinantys tiesūs spinduliai (arba tiesės, kertančios tą tašką, kai t kinta nuo $-\infty$ iki $+\infty$), o brėžinėlyje „d“ – iš to paties taško išeinančios spiralės.

Kai trajektorija $z(t)$ nekerta šakojimosi taško z_s , tai ją atitinkančios trajektorijos $w_0(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ taip pat nesiekta (nesišakoja): arba jos gula viena ant kitos, kaip atveju, kai $z(t)=\rho e^{i\omega t}$, kur $\rho=\text{const}$, arba išsidėsto atskirose srityse, kaip atveju, pavaizduotu 236 pav., kai $z(t)$ – apskritimas, į kurio vidinę sritį funkcijos $w=f(z)=\sqrt[3]{z}$ šakojimosi taškas $z_s=0$ nepatenka.



236 pav.

Tarkime, jog taškas z juda 236 pav. pavaizduotu apskritimu $z(t)$, turinčiu centrą taške $z_r=x_r+iy_r=4+i\cdot 3$ ir spindulį $\rho=2$. Tarkime, jog to judėjimo ciklinis greitis yra pastovus ir lygus ω .

Aprašysime to judėjimo trajektoriją $z(t)$ matematiškai.

$$z(t)=x(t)+i\cdot y(t)=(x_r+\rho\cos\omega t)+i\cdot (y_r+\rho\sin\omega t)=(4+2\cos\omega t)+i\cdot (3+2\sin\omega t)=$$

$$=\sqrt{(4+2\cos\omega t)^2+(3+2\sin\omega t)^2}[\cos\Psi(t)+i\sin\Psi(t)], \text{ kur } \Psi(t)=\arg z(t)=\arctg\frac{y(t)}{x(t)}=\arctg\frac{3+2\sin\omega t}{4+2\cos\omega t}.$$

Pasinaudodami tuo, kad $z_r=4+3i=5(\cos\varphi_r+i\sin\varphi_r)$, kur $\varphi_r=\arctg\frac{3}{4}$, $\cos\varphi_r=\frac{4}{5}$ ir $\sin\varphi_r=\frac{3}{5}$,

$$\text{pertvarkysime } |z(t)| \text{ formulę: } |z(t)|=\sqrt{(4+2\cos\omega t)^2+(3+2\sin\omega t)^2}=$$

$$=\sqrt{16+16\cos\omega t+4\cos^2\omega t+9+12\sin\omega t+4\sin^2\omega t}=\sqrt{29+4(4\cos\omega t+3\sin\omega t)}=$$

$$= \sqrt{29+20\left(\frac{4}{5}\cdot\cos\omega t + \frac{3}{5}\cdot\sin\omega t\right)} = \sqrt{29+20(\cos\varphi_r \cdot \cos\omega t + \sin\varphi_r \cdot \sin\omega t)} = \sqrt{29+20\cdot\cos(\omega t - \varphi_r)}.$$

Kaip matome iš šios formulės, taškui z judant apskritimu aplink tašką z_r , dydis $|z(t)|$ svyruos tarp $\max|z(t)| = \sqrt{29+20} = 7$ ir $\min|z(t)| = \sqrt{29-20} = 3$.

Maksimalią reikšmę $|z(t)|$ pasieks momentais t , kai $\omega t = \varphi_r + 2\pi k$, kur $k=0, 1, 2, 3, \dots$, o minimalią – momentais t , kai $\omega t = \varphi_r + (2k+1)\pi$, kur $k=0, 1, 2, 3, \dots$.

$$\text{Kintamojo } z(t) \text{ argumentas } \arg z(t) = \Psi(t) = \arctg \frac{3+2\cdot\sin\omega t}{4+2\cdot\cos\omega t} \text{ taip pat svyruos nuo } \Psi_{\min} = \arctg \frac{3}{4} - \arctg \frac{2}{\sqrt{21}} \approx 13^\circ \text{ iki } \Psi_{\max} = \arctg \frac{3}{4} + \arctg \frac{2}{\sqrt{21}} \approx 60^\circ.$$

Todėl funkcijos $w=f(z)=\sqrt[3]{z}$ šakų reikšmių kitimo, atitinkančio aprašytą $z(t)$ kitimą, trajektorijos

$$\begin{aligned}\omega_0(t) &= \sqrt[6]{29+20\cdot\cos(\omega t - \varphi_r)} \left[\cos \frac{\Psi(t)}{3} + i \cdot \sin \frac{\Psi(t)}{3} \right], \\ \omega_1(t) &= \sqrt[6]{29+20\cdot\cos(\omega t - \varphi_r)} \left[\cos \frac{\Psi(t)+2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\Psi(t)+2\pi}{3} \right], \\ \omega_2(t) &= \sqrt[6]{29+20\cdot\cos(\omega t - \varphi_r)} \left[\cos \frac{\Psi(t)+4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\Psi(t)+4\pi}{3} \right]\end{aligned}$$

bus uždaros kreivės, kurios, būdamos nepersidengiančiuose sektoriuose, nesikirs viena su kita: kreivė $\omega_0(t)$ tilps sektoriuje tarp spindulių, išeinančių iš taško $z=0$ ir sudarančių kampus $\frac{\Psi_{\min}}{3} \approx 4^\circ$ ir $\frac{\Psi_{\max}}{3} \approx 20^\circ$

su realių skaičių ašimi x , nepriartėdama prie koordinačių pradžios $z_s=0$ arčiau negu $\sqrt[3]{3}$ bei nenutoldama toliau negu $\sqrt[3]{7}$; kreivė $\omega_1(t)$ tilps kitame sektoriuje tarp spindulių, sudarančių su ašimi x kampus $\frac{\Psi_{\min}+2\pi}{3} \approx 124^\circ$ ir $\frac{\Psi_{\max}+2\pi}{3} \approx 140^\circ$; kreivė $\omega_2(t)$ tilps trečiame sektoriuje tarp spindulių su kampais $\frac{\Psi_{\min}+4\pi}{3} \approx 244^\circ$ ir $\frac{\Psi_{\max}+4\pi}{3} \approx 260^\circ$.

Didinant apskritimo su centru taške z_r spindulį ρ , čia paminėtieji sektoriai platėtų, tačiau susisiektų vienas su kitu tik tada, kai apskritimas (trajektorija $z(t)$) pasiektų tašką $z_s=0$. Tuomet gautume šakojimosi tašką, kurio eilė būtų 2, kaip buvo parodyta 235 pav.

Dabar jau galima grįžti prie **atvirkštinės transformacijos, kai ieškomos funkcijos – originalo $f(t)$ atvaizdas $F(p)$ yra kompleksinio kintamojo funkcija, turinti šakojimosi taškų.**

Tarkime, jog $F(p) = e^{-\tau\sqrt{p}}$, kur $\tau = \text{const}$. Pasinaudodami Rymano – Melino formule, gauname

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{p} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp.$$

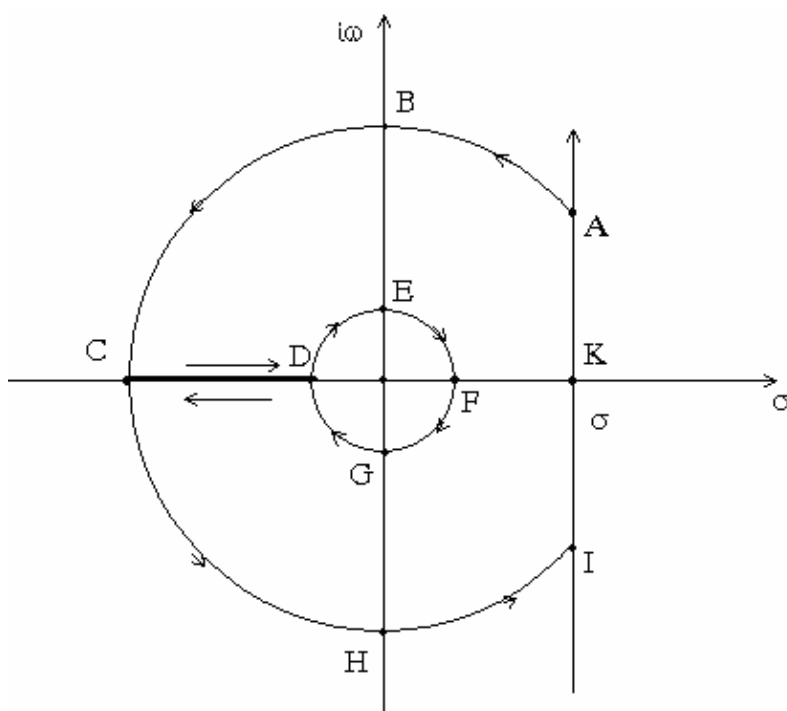
Funkcija $F(p) = e^{-\tau\sqrt{p}}$ turi tik vieną ypatingąjį tašką – šakojimosi tašką $p=0$. Jokių kitų ypatingųjų taškų ši funkcija neturi.

Funkcija $F(p)$ tenkina anksčiau minėtas dvi sąlygas, todėl galima, parinkus pakankamai didelį spindulį ρ , nubrėžti tokią apskritimą, papildantį tiesę, lygiagrečią menamajai ašiai (žiūr. 234 pav.), kad integralas $\int_{(ABCDE)} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$ ant to apskritimo lanko (ABCDE) būtų lygus 0 (t. y. artėtų prie 0, kai $\rho \rightarrow \infty$).

Brėždami minėtąjį lanką, dabar mes padarysime įpjovą, kaip parodyta 237 pav., ir apeisime šakojimosi tašką $p=0$, palikdami jį už mūsų sudaryto kontūro ribų.

Uždaro kontūro ABCDEFGDCHIA viduje nebus jokių ypatingųjų taškų, todėl, pasinaudodami

Koši teorema, gauname:
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDEFGHI DCHIA} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = 0.$$



237 pav.

Tarkime, jog lanko ABCHI spindulys yra ρ , kurį mes didinsime, artindami prie ∞ , o apskritimo DEFGD spindulys yra ρ_0 , kurį mes galime, kiek norime, mažinti, artindami prie 0.

$$\text{Integralas } \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{ABCDEFGDCHIA}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{IA}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{ABC}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{CD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DEFGD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DC}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{CHI}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp.$$

Kadangi $F(p) = e^{-\tau\sqrt{p}}$ tenkina anksčiau suformuluotas sąlygas

$$\left(\begin{array}{l} 1) \text{ egzistuoja } \sigma_0 > \max_k \text{Re } p_k; \quad 2) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} \rightarrow 0 \end{array} \right), \text{ tai } \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{ABC}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{CHI}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{ABCHI}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = 0, \text{ kai } \rho \rightarrow \infty.$$

$$\text{Tuomet integralas } \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{IA}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp \text{ tampa integralu } \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = f(t).$$

Apskaičiuosime integralus $\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{CD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DC}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp$ ir $\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DEFGD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp$, kai $\rho \rightarrow \infty$ ir $\rho_0 \rightarrow 0$.

$$\text{Atkarpoje CD } p = \rho e^{i\pi} = \rho e^{i\pi} = \rho(\cos\pi + i\sin\pi) = -\rho; \quad dp = -d\rho; \quad \sqrt{p} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\rho} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt{\rho}.$$

$$\text{Todėl } \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{CD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{-\rho t - j\tau\sqrt{\rho}}}{-\rho} (-d\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{e^{-\rho t - j\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{-\rho t - j\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho \quad \text{ir}$$

$$I_1 = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \rho_0 \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{CD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho t - j\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho.$$

Irodysime, kad integralas $I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DEFGD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp$, kai $\rho_0 \rightarrow 0$, artėja prie -1 . Tuo tikslu pearsime

nuo kintamojo $p = \rho_0 e^{i\varphi}$ prie kintamojo φ : $p = \rho_0 e^{i\varphi}$; $dp = \rho_0 j e^{i\varphi} d\varphi$; $\sqrt{p} = \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}}$;

$$\frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = \frac{e^{\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}}}}{\rho_0 e^{i\varphi}} \rho_0 j e^{i\varphi} d\varphi = e^{\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}}} j d\varphi.$$

Judant apskritimu DEFGD, kintamojo p modulis $p = \rho_0$ visą laiką išlieka pastovus ir keičiasi tik $\arg p = \varphi$. Šis kampas keičiasi nuo $\varphi_{D_1} = \pi$ iki $\varphi_{D_2} = \pi - 2\pi$ (kampas φ_{D_2} , judant apskritimu $D_1 \text{EFGD}_2$, mažėja, nes judėjimas vyksta laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi, paliekant šakojimosi tašką $p = 0$ išorėje, t. y. dešinėje pusėje).

$$\text{Todėl } \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DEFGD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi-2\pi} \left(e^{\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}}} \right) d\varphi.$$

Pointegralinę funkciją išskleisime į Teiloro eilutę ir rasime jos ribą, kai apskritimo DEFGD spindulys $\rho_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left(e^{\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}}} \right) = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left[1 + \left(\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}} \right) + \frac{\left(\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}} \right)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(\rho_0 t e^{i\varphi} - \tau \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\varphi}{2}} \right)^n}{n!} + \dots \right] = 1,$$

nes $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ir $|e^{i\varphi}| = 1$, $|e^{i\frac{\varphi}{2}}| = 1$, o τ bei t – baigtiniai dydžiai ir visų jų sandaugas su ρ_0 bei $\sqrt{\rho_0}$, kai ρ_0 artėja prie 0, artėja prie 0.

$$\text{Todėl } \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DEFGD}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi-2\pi} 1 d\varphi = \frac{1}{2\pi} (\pi - 2\pi - \pi) = -1.$$

$$\text{Apskaičiuosime integralą } I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DC}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp, \text{ kai } \rho \rightarrow \infty \text{ ir } \rho_0 \rightarrow 0.$$

$$\text{Atkarpoje DC kintamojo } p \text{ argumentas nesikeičia ir išlieka } \varphi = \pi - 2\pi = -\pi. \text{ Todėl } p = \rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(-\pi)} = \rho [\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] = -\rho; dp = -d\rho; \sqrt{p} = \sqrt{\rho} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\rho} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = -i\sqrt{\rho}.$$

Kaip matome, judėdami viršutiniu įpjovos krantu CD, mes judėjome šaka $\sqrt{p} = i\sqrt{\rho}$, o judėdami žemutiniu įpjovos krantu DC, mes judame kita šaka $\sqrt{p} = -i\sqrt{\rho}$. Todėl šalia šakojimosi taškų integralai I_1 ir I_3 gali būti skirtingi ir jų suma gali būti nelygi 0, kai tuo tarpu, judant atkarpa, kurios taškuose funkcija yra vienareikšmė, integralai, priklausantys tai pačiai atkarpai, skirtąsi tik ženklų ir jų suma būtų lygi 0.

$$I_3 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{DC}} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{-\rho \cdot t + i\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho \cdot t + i\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho.$$

$$I_1 + I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho \cdot t + i\tau\sqrt{\rho}} - e^{-\rho \cdot t - i\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho \cdot t} e^{i\tau\sqrt{\rho}} - e^{-\rho \cdot t} e^{-i\tau\sqrt{\rho}}}{2j} d\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho \cdot t} \sin \tau \sqrt{\rho}}{\rho} d\rho.$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = -1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho \cdot t} \sin \tau \sqrt{\rho}}{\rho} d\rho.$$

$$\begin{aligned} \text{Kadangi } \frac{1}{2\pi i} \int_{ABDCEFGDCHIA} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = 0, \text{ tai } \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{\rho t-i\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_{ABC} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp + I_1 + I_2 + I_3 + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{CHI} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = 0, \text{ iš kur gauname, jog } f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{\rho t-i\tau\sqrt{\rho}}}{\rho} d\rho = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ABCHI} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp - I_1 - I_2 - I_3 = \\ = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho t} \sin \tau \sqrt{\rho}}{\rho} d\rho. \end{aligned}$$

Kaip matome, mūsų atveju **f(t)** yra lygi paimtam su priešingu ženklų integralui, kuris gaunamas apeinant šakojimosi tašką taip, kad jis pasiliktu išorėje. Tai suprantama, nes, apeidami šakojimosi tašką, mes judėjome kontūru ne teigiama (prieš laikrodžio rodyklę), o neigiama (laikrodžio rodyklės) kryptimi.

22. Galima įrodyti, kad kai $F(p)$ turi ne tik šakojimosi taškų, bet ir polių bei esmingai ypatingųjų taškų, tai **atvaizdą $F(p)$ atitinkantį originalą $f(t)$ galima rasti kaip polių bei esmingai ypatingųjų taškų reziduumų sumą minus suma kontūrinių integralų, gaunamų apeinant šakojimosi taškus taip, kad jie liktų išorėje** (iš dešinės).

Įrodysime šią teoremą.

Tarkime, kad kompleksinio kintamojo p funkcija $\frac{F(p)}{p} e^{pt}$ turi n ypatingųjų taškų, kurių tarpe yra m šakojimosi taškų ir $n-m$ polių bei esmingai ypatingųjų taškų.

Tarkime, jog visų ypatingųjų taškų koordinatčių realiosios dalys yra baigtinės ir todėl galima praversti tiesę EA (žiūr. 234 pav., arba tiesę IA 237 pav.), lygiagrečiai menamajai ašiai, taip, kad visi ypatingieji taškai atsidurtų kairiau tos tiesės.

Tarkime taip pat, jog, pakankamai pastūmus 234 pav. tašką A į viršų ir tašką E į apačią, atkarpą EA galima papildyti apskritimo, turinčio centrą koordinatčių pradžioje ir kiek norima didelį spindulį R , lanku taip, kad:

a) visi funkcijos $\frac{F(p)}{p}$ ypatingieji taškai patektų į uždaro kontūro vidų;

b) didinant minėtojo apskritimo spindulį, funkcijos $\frac{F(p)}{p}$ reikšmė lanko

taškuose artėtų prie 0.

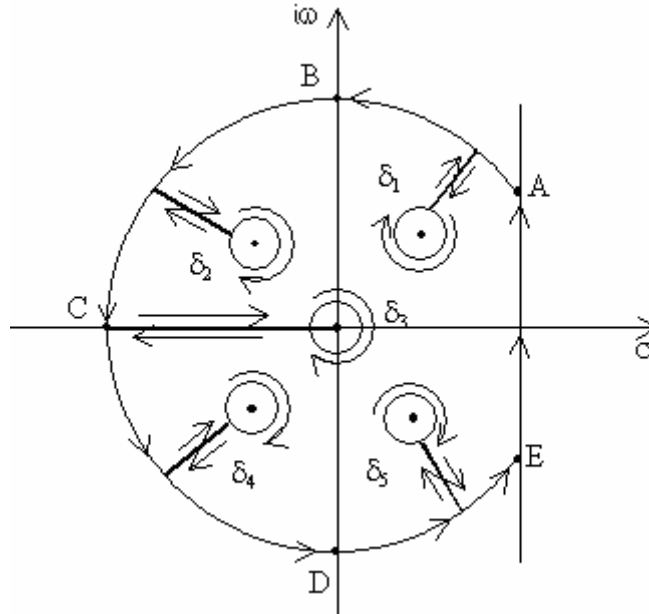
Pasiekę tai, uždaro kontūro vidinėje srityje iš apskritimo lanko pusės padarysime įpjovą ir apeisime kiekvieną funkcijos $F(p)$ šakojimosi tašką taip, kaip tai darėme su tašku $z_s=0$ 237 pav., kad tie taškai paliktų mūsų sudaromo uždaro kontūro išorėje, t. y., kad juos apeidami matytume juos dešinėje pusėje. Pažymėsime įpjovų ir šakojimosi taškų apėjimo kontūrus $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_m$ (žiūr. 238 pav., kur $m=5$).

Šitaip sudaryto kontūro viduje liks $n-m$ ypatingųjų taškų (polių bei esmingai ypatingųjų taškų).

$$\begin{aligned} \text{Pasinaudodami reziduumų teorema, galime užrašyti formulę: } \frac{1}{2\pi i} \int_{EA} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp + \sum_{s=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n-m} \text{Res} \frac{F(p)}{p} e^{pt}. \end{aligned}$$

Didindami apskritimo spindulį R , gausime, kaip jau buvo įrodyta, jog antrasis integralas $\frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$, kur $ABCDE$ – apskritimo lankas, artės prie nulio, o

pirmasis integralas $\frac{1}{2\pi i} \int_{EA} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$ artės prie integralo $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = f(t)$.



238 pav.

Pereidami prie ribos, kai $R \rightarrow \infty$, gausime: $f(t) = \sum_{k=1}^{n-m} \text{Res}_{p \rightarrow p_k} \frac{F(p)}{p} e^{pt} - \sum_{s=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n-m} \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F(p)}{p} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right] \right\} - \sum_{s=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$,
ką ir reikėjo įrodyti.

Šioje formulėje minuso ženklas prieš sumą $\sum_{s=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$ paaiškinamas, kaip jau buvo minėta, tuo, kad, apeidami šakojimosi taškus p_s kontūrais δ_s , susidedančiais iš įpjovų krantų ir apskritimų, mes judėjome šakojimosi taškų atžvilgiu ne teigiama (prieš laikrodžio rodyklę), o neigiama kryptimi, palikdami tuos šakojimosi taškus uždaro kontūro, aprėpiančio visus polius ir esmingai ypatinguosius taškus, išorėje.

Mūsų išnagrinėtuju konkrečiu atveju, kai $F(p) = e^{-\tau\sqrt{p}}$ (žiūr. 237 pav.), uždaramė kontūrą su įpjova, apeinančia šakojimosi tašką $z_s = 0$, jokių kitų ypatingųjų taškų nebeliko, todėl šiuo atveju $\sum_{k=1}^{n-m} \text{Res}_{p \rightarrow p_k} \frac{F(p)}{p} e^{pt} = 0$ ir $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp =$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{e^{pt-\tau\sqrt{p}}}{p} dp = -(I_1 + I_2 + I_3) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-pt} \sin \tau\sqrt{p}}{p} dp.$$

$$\text{Formulė } f(t) = \sum_{k=1}^{n-m} \text{Res}_{p \rightarrow p_k} \frac{F(p)}{p} e^{pt} - \sum_{s=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n-m} \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{F(p)}{p} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right] \right\} - \sum_{s=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_s} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp, \text{ yra pati}$$

bendriausia atvirkštinės transformacijos, atstatančios funkciją – originalą iš jos Hevisaido atvaizdo $F(p)$, formulė.

23. Analogišką formulę galima išvesti ir atvirkštinei transformacijai, atstatančiai funkciją – originalą $f(t)$ iš jos Laplaso atvaizdo $F(s)$:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-m} \operatorname{Res}_{s \rightarrow s_k} F(s)e^{st} - \sum_{r=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_r} F(s)e^{st} ds = \\ = \sum_{k=1}^{n-m} \left\{ \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}} [F(s)e^{st}(s - s_k)^{m_k}] \right\} - \sum_{r=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_r} F(s)e^{st} ds.$$

Šiomis formulėmis galima naudotis visais atvirkštinės transformacijos atvejais, jei tik turimi atvaizdai ($F(p)$ arba $F(s)$) tenkina anksčiau aprašytas dvi sąlygas.

24. Tačiau ne visuomet tikslinga naudotis tokia galinga „sunkiąja artilerija“. Praktiniais atvejais dažniausiai pakanka suskaidyti atvaizdą į paprastesnes sudėtines dalis, kaip tai buvo parodyta šio skyrelio pradžioje, ir po to, naudojantis žinomomis dažniausiai naudojamų funkcijų transformacijos formulėmis, pagal atvaizdo paprastas sudėtines dalis atstatyti funkcijos – originalo sudėtines dalis.

Tik, palyginti, retais atvejais, kai tokiu paprastu būdu nepavyksta pagal turimus atvaizdus atstatyti funkcijos – originalo, tenka naudotis čia išvestomis sudėtingomis atvirkštinės transformacijos formulėmis, aprėpiančiomis visus ypatingųjų taškų atvejus.

25. Dabar, kai atsirado ir tapo plačiai naudojami tokie kompiuterinių programų paketai kaip MAPLE, MATHCAD ir eilė kitų, turinčių savo sudėtyje programas, pritaikytas darbui ne tik su skaičiais, bet ir su algebros simboliais, atsirado galimybė vykdyti tiesiogines ir atvirkštines Laplaso bei Hevisaido transformacijas kompiuteryje. Tai žymiai palengvina ir pagreitina matematikų darbą, apskaičiuojant funkcijų – originalų atvaizdus, sudarant perdavimo funkcijas ir pagal perdavimo funkcijų metodu gautus išėjimo trajektorijų atvaizdus surandant pačias išėjimo trajektorijas. Todėl operacinio skaičiavimo ir perdavimo funkcijų metodų taikymo, vykdančios tiesiogines ir atvirkštines transformacijas, technologiniai klausimai eiliniam matematikui bei sisteminiam analitikui dabar tampa nebe taip jau svarbūs ir nukeliami lyg ir į „antrąjį planą“, palikdami „pirmajame plane“ tų metodų esmės, jų taikymo galimybių bei to taikymo apribojimų pakankamai gilų suvokimą. Tikiuosi, kad skaitytojas, įdėmiai išstudijavęs šią mokymo priemonę, tokį suvokimą sugebės įsigyti.

O su bent vienu iš čia paminėtų paketų skaitytojui derėtų susipažinti, jei jis iki šiol to dar nepadarė.

1.11.7. Operacinio skaičiavimo taikymas tiesinių diferencialinių ir integro-diferencialinių lygčių bei jų sistemų sprendimui

Pereidami prie atvaizdų, vietoje tiesinių diferencialinių, integralinių bei integro-diferencialinių lygčių gauname algebrines lygtis bei jų sistemas, kurias išsprendę, gauname ieškomo sprendinio atvaizdą, o po to, pasinaudodami atvirkštine transformacija, – ir patį sprendinį.

Iliustruosime šią procedūrą pavyzdžiais.

1. Rasime diferencialinės lygties $x'''(t) + x'(t) = 1$ sprendinį, tenkinantį pradinės sąlygas $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

$$1) \quad L[x'''(t) + x'(t)] = L[1];$$

$$2) \quad s^3 X(s) + sX(s) = \frac{1}{s};$$

$$3) X(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+1)} - \frac{s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}.$$

4) 1.11.5.1. skyrelyje buvo įrodyta, jog $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ir $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, iš kur išplaukia, kad $\frac{1}{s^2} = L[t]$ ir $\frac{1}{s^2+1} = L[\sin t]$. Todėl duotosios lygties sprendinys yra $x(t) = t - \sin t$.

Patikrinsime gautąjį sprendinį: 1) $x(0) = 0 - \sin 0 = 0$; 2) $x'(t) = 1 - \cos t$; 3) $x'(0) = 1 - \cos 0 = 0$; 4) $x''(t) = 0 + \sin t$; 5) $x''(0) = 0$; 6) $x'''(t) = \cos t$; 7) $x'''(t) + x'(t) = \cos t + 1 - \cos t = 1$ – sprendinys $x(t) = t - \sin t$ tenkina visas sąlygas.

2. Rasime diferencialinės lygties $x''(t) + 2x'(t) = t \sin t$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $x(0) = x'(0) = 0$.

$$1) s^2 X(s) + 2sX(s) = L[t \sin t].$$

2) 1.11.5.2. skyrelyje buvo įrodyta, jog $L[t \sin \omega t] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$, iš kur išplaukia, kad $L[t \sin t] = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$.

3) Gauname algebrinę lygtį: $s^2 X(s) + 2sX(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$, kurią išsprendę, randame:

$$X(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2}.$$

4) Sudėtingą trupmeną $\frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2}$, naudojantis neapibrėžtųjų koeficientų metodu, galima išskaidyti į paprastesnių trupmenų sumą:

$$X(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+1} = \frac{2}{25} + \frac{-\frac{2}{5}s + \frac{4}{5}}{(s^2+1)^2} + \frac{-\frac{2}{25}s + \frac{4}{25}}{s^2+1} = \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{25} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

5) 1.11.5.1. skyrelyje buvo įrodyta, jog $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, o 1.11.5.2. skyrelyje – jog $L[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$, iš kur gauname, kad $\frac{1}{s+2} = L[e^{-2t}]$ ir $L[t \cos t] = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2} - \frac{2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{2}{(s^2 + 1)^2}$.

$$6) \text{ Todėl } \frac{2}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} - L[t \cos t] = L[\sin t] - L[t \cos t].$$

7) Kadangi $\frac{2s}{(s^2+1)^2} = L[t \sin t]$ ir $\frac{s}{s^2+1} = L[\cos t]$, tai $X(s) = L[x(t)] = \frac{2}{25} L[e^{-2t}] - \frac{1}{5} L[t \sin t] + \frac{2}{5} L[\sin t - t \cos t] - \frac{2}{25} L[\cos t] + \frac{4}{25} L[\sin t]$, iš kur $x(t) = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5} t \sin t + \frac{2}{5} \sin t - \frac{2}{5} t \cos t - \frac{2}{25} \cos t + \frac{4}{25} \sin t = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5} t \sin t + \frac{14}{25} \sin t - \frac{2}{5} t \cos t - \frac{2}{25} \cos t$.

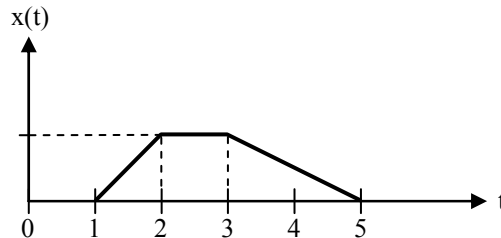
Patikrinsime gautąjį sprendinį:

1) $x(0) = \frac{2}{25} - 0 + 0 - 0 - \frac{2}{25} = 0$; 2) $x'(t) = -\frac{4}{25} e^{-2t} - \frac{1}{5} \sin t - \frac{1}{5} t \cos t + \frac{14}{25} \cos t - \frac{2}{5} \cos t + \frac{2}{5} t \sin t + \frac{2}{25} \sin t = -\frac{4}{25} e^{-2t} - \frac{3}{25} \sin t + \frac{4}{25} \cos t - \frac{1}{5} t \cos t + \frac{2}{5} t \sin t$; 3) $x'(0) = -\frac{4}{25} - 0 + \frac{4}{25} - 0 + 0 = 0$; 4) $x''(t) = \frac{8}{25} e^{-2t} -$

$$-\frac{3}{25} \cos t - \frac{4}{25} \sin t - \frac{1}{5} \cos t + \frac{1}{5} t \sin t + \frac{2}{5} \sin t + \frac{2}{5} t \cos t = \frac{8}{25} e^{-2t} - \frac{8}{25} \cos t + \frac{6}{25} \sin t + \frac{1}{5} t \sin t + \frac{2}{5} t \cos t; 5) x''(t) + 2x'(t) = \frac{8}{25} e^{-2t} - \frac{8}{25} \cos t + \frac{6}{25} \sin t + \frac{1}{5} t \sin t + \frac{2}{5} t \cos t - \frac{8}{25} e^{-2t} - \frac{6}{25} \sin t + \frac{8}{25} \cos t - \frac{2}{5} t \cos t + \frac{4}{5} t \sin t = t \sin t -$$

sprendinys tenkina visas sąlygas.

3. Rasime diferencialinės lygties $y''(t) + 4y(t) = x(t)$ sprendinį, kai $x(t)$ duotas savo grafiku (žiūr. 239 pav.) ir pradinės sąlygos yra $y(0) = y'(0) = 0$.



239 pav.

1) Pereidami prie atvaizdų, gauname: $s^2 Y(s) + 4Y(s) = X(s)$; $Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4} X(s)$.

2) Aprašysime analiziškai $x(t)$ ir apskaičiuosime $X(s)$: $x(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } t \leq 1, \\ t-1, & \text{kai } 1 \leq t \leq 2, \\ 1, & \text{kai } 2 \leq t \leq 3, \\ 0,5(5-t), & \text{kai } 3 \leq t \leq 5, \\ 0, & \text{kai } t \geq 5. \end{cases}$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^1 0 \cdot e^{-st} dt + \int_1^2 (t-1) e^{-st} dt + \int_2^3 e^{-st} dt + 0,5 \int_3^5 (5-t) e^{-st} dt + \int_5^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt = \\ &= 0 + \int_1^2 t e^{-st} dt - \int_1^2 e^{-st} dt - \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_2^3 + 0,5 \int_3^5 5 e^{-st} dt - 0,5 \int_3^5 t e^{-st} dt + 0 = -\frac{1}{s} [t e^{-st}]_1^2 - \int_1^2 e^{-st} dt + \frac{1}{s} (e^{-2s} - e^{-s}) - \\ &= -\frac{1}{s} (e^{-3s} - e^{-2s}) - \frac{2,5}{s} (e^{-5s} - e^{-3s}) + \frac{0,5}{s} [t e^{-st}]_3^5 - \int_3^5 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [2e^{-2s} - e^{-s} + \frac{1}{s} (e^{-2s} - e^{-s}) - e^{-2s} + e^{-s} + \\ &+ e^{-3s} - e^{-2s} + 2,5e^{-5s} - 2,5e^{-3s} - 0,5(5e^{-5s} - 3e^{-3s}) - \frac{0,5}{s} (e^{-5s} - e^{-3s})] = \frac{1}{s^2} (e^{-s} - e^{-2s} - 0,5e^{-3s} + 0,5e^{-5s}). \end{aligned}$$

Funkcijos $x(t) = (t-1)[u(t-1) - u(t-2)] + 1[u(t-2) - u(t-3)] + 0,5(5-t)[u(t-3) - u(t-5)] =$
 $= u(t-1)(t-1) - u(t-2)(t-1) - u(t-3)(1-2,5+0,5t) - u(t-5)0,5(5-t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) -$
 $- 0,5(t-3)u(t-3) + 0,5(5-t)u(t-5)$ Laplaso atvaizdą $X(s) = L[x(t)]$ galima buvo rasti ir paprasčiau, pasinaudojant vėlinimo teorema $L[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-s\tau} L[f(t)]$ ir formule $L[t] = \frac{1}{s^2}$: $X(s) = L[x(t)] =$
 $= L[(t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - 0,5(t-3)u(t-3) + 0,5(5-t)u(t-5)] = e^{-s} L[t] - e^{-2s} L[t] - 0,5e^{-3s} L[t] + 0,5e^{-5s} L[t] =$
 $= \frac{1}{s^2} (e^{-s} - e^{-2s} - 0,5e^{-3s} + 0,5e^{-5s}).$

3) Įstatę $X(s)$ į formulę $Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4} X(s)$, gauname $Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)s^2} (e^{-s} - e^{-2s} - 0,5e^{-3s} + 0,5e^{-5s})$.

4) $\frac{1}{(s^2 + 4)s^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{s^2 + 4 - s^2}{(s^2 + 4)s^2} = \frac{1}{4} (\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4}) = \frac{1}{4} (\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}) = \frac{1}{4} L[t - 0,5 \sin 2t]$.

5) Todėl $Y(s) = \frac{1}{4} (e^{-s} - e^{-2s} - 0,5e^{-3s} + 0,5e^{-5s}) L[t - 0,5 \sin 2t]$, iš kur išplaukia, jog $y(t) =$
 $= \frac{1}{4} \{ [(t-1) - 0,5 \sin 2(t-1)] u(t-1) - [(t-2) - 0,5 \sin 2(t-2)] u(t-2) - 0,5[(t-3) - 0,5 \sin 2(t-3)] u(t-3) +$
 $+ 0,5[(t-2) - 0,5 \sin 2(t-5)] u(t-5) \}.$

Patikrinsime gautąjį lygties sprendinį:

- 1) $y'(t) = \frac{1}{4} \{ [1 - \cos 2(t-1)]u(t-1) - [1 - \cos 2(t-2)]u(t-2) - 0,5[1 - \cos 2(t-3)]u(t-3) + 0,5[1 - \cos 2(t-5)]u(t-5) \};$
- 2) $y''(t) = \frac{1}{4} \{ 2\sin 2(t-1)u(t-1) - 2\sin 2(t-2)u(t-2) - \sin 2(t-3)u(t-3) + \sin 2(t-5)u(t-5) \};$
- 3) $y''(t) + 4y(t) = 0,5\sin 2(t-1)u(t-1) - 0,5\sin 2(t-2)u(t-2) - 0,25\sin 2(t-3)]u(t-3) + 0,25\sin 2(t-5) \times u(t-5) + [(t-1) - 0,5\sin 2(t-1)]u(t-1) - [(t-2) - 0,5\sin 2(t-2)]u(t-2) - 0,5[(t-3) - 0,5\sin 2(t-3)]u(t-3) + 0,5[(t-5) - 0,5\sin 2(t-5)]u(t-5) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - 0,5(t-3)u(t-3) + 0,5(t-5)u(t-5) = x(t) -$ sprendinys tenkina duotąją lygtį.
- 4) Kadangi, kai $t=0$, $u(t-1)=u(-1)=0$, $u(t-2)=u(-2)=0$, $u(t-3)=u(-3)=0$ ir $u(t-5)=u(-5)=0$, tai $y(0)=0$ ir $y'(0)=0$. Vadinasi, gautas sprendinys tenkina duotas pradines sąlygas.

4. Išspręsimė diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) - 2x(t) + 2y(t) = 1 - 2t, \\ x''(t) + 2y'(t) + x(t) = 0, \end{cases}$$

kai pradinės sąlygos yra tokios: $x(0)=x'(0)=y(0)=0$.

- 1) Pereidami prie atvaizdų, gauname:
$$\begin{cases} sX(s) - sY(s) - 2X(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}, \\ s^2X(s) + 2sY(s) + X(s) = 0. \end{cases}$$
- 2) Iš antrosios lygties gauname: $Y(s) = -\frac{s^2+1}{2s}X(s)$.
- 3) Iš pirmosios lygties, įstatę į ją gautąją $Y(s)$ reikšmę, randame: $X(s) = \frac{2}{s(s+1)^2}$, iš kur
- $$Y(s) = -\frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2}.$$
- 4) $X(s) = \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{2+2s-2s}{s(s+1)^2} = \frac{2}{s(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} = \frac{2+2s-2s}{s(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} =$
- $$= 2 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right].$$
- 5) Kadangi $L[te^{-t}] = \int_0^{\infty} te^{-t} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+1} \left[te^{-(s+1)t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt \right] = -\frac{1}{s+1} \left[0 + \frac{1}{s+1} e^{-(s+1)t} \Big|_0^{\infty} \right] =$
- $$= \frac{1}{(s+1)^2}, \text{ tai } X(s) = 2L[1 - e^{-t} - te^{-t}], \text{ iš kur gauname, kad } x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}).$$
- 6) $Y(s) = -\frac{1+s^2}{s^2(s+1)^2} = -\frac{1+s^2+2s}{s^2(s+1)^2} + \frac{2s}{s^2(s+1)^2} = -\frac{1}{s^2} + X(s), y(t) = -t + x(t) = -t + 2(1 - e^{-t} - te^{-t}).$
- Patikrinimas: 1) $x(0) = 2(1 - e^{-0} - 0) = 0$; 2) $x'(t) = 2(e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}) = 2te^{-t}$; 3) $x'(0) = 0$; 4) $y(0) = -0 + x(0) = 0$; 5) $y'(t) = -1 + x'(t) = -1 + 2te^{-t}$; 6) $x''(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t}$; 7) $x'(t) - y'(t) - 2(x(t) - y(t)) = x'(t) + 1 - x'(t) - 2(x(t) + t - x(t)) = 1 - 2t$; 8) $x''(t) + 2y'(t) + x(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t} - 2 + 4te^{-t} + 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} = 0$ – sprendinys tenkina visas sąlygas.

5. Išspręsimė integralinę lygtį: $\varphi(x) = \sin x - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt$, t. y. rasime funkciją $\varphi(x)$,

tenkinančią šią lygtį, arba, kas yra tas pats, funkciją $\varphi(t)$, tenkinančią lygtį $\varphi(t) = \sin t - \int_0^t \sin(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

- 1) Pereidami nuo originalų prie atvaizdų ir pasinaudodami sąsukos atvaizdo formule
$$L \left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \right] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s),$$
 gauname, jog $L[\varphi(t)] = L[\sin t] - L[\sin t] \cdot L[\varphi(t)]$, kur

$$L[\varphi(t)] = \Phi(s); \quad L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}; \quad L\left[\int_0^t \sin(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \Phi(s), \text{ iš kur išplaukia: } \Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \Phi(s); \quad \Phi(s) = \frac{1}{s^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2}.$$

2) Pereidami nuo atvaizdų prie originalų, randame, jog $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \sqrt{2}$, nes

$$L[\sin t \sqrt{2}] = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}.$$

Patikrinsime duotąjį sprendinį, pradžioje apskaičiuodami $I(x) = \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt$, kai

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sin(x-t) \sin t \sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \frac{e^{i(x-t)} - e^{-i(x-t)}}{2i} \cdot \frac{e^{it\sqrt{2}} - e^{-it\sqrt{2}}}{2i} dt = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} e^{ix} \int_0^x \left(e^{it(\sqrt{2}-1)} - e^{-it(\sqrt{2}+1)} \right) dt + \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-ix} \int_0^x \left(e^{it(\sqrt{2}+1)} - e^{-it(\sqrt{2}-1)} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} e^{ix} \left[\frac{1}{i(\sqrt{2}-1)} \left(e^{ix(\sqrt{2}-1)} - 1 \right) + \frac{1}{i(\sqrt{2}+1)} \left(e^{-ix(\sqrt{2}+1)} - 1 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-ix} \left[\frac{1}{i(\sqrt{2}+1)} \left(e^{ix(\sqrt{2}+1)} - 1 \right) + \frac{1}{i(\sqrt{2}-1)} \left(e^{-ix(\sqrt{2}-1)} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{i(\sqrt{2}-1)} \left(e^{ix} - e^{-ix} + e^{-ix\sqrt{2}} - e^{ix\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{i(\sqrt{2}+1)} \left(e^{ix} - e^{-ix} + e^{ix\sqrt{2}} - e^{-ix\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1} (\sin x - \sin x\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}+1} (\sin x + \sin x\sqrt{2}) \right] = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Todėl $\sin x - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \sqrt{2} = \varphi(x)$, ką ir turėjome gauti.

6. Rasime lygties $\int_0^t x(t)dt + x'(t) + x(t) = \text{cost}$ sprendinį $x(t)$, tenkinantį pradinę sąlygą $x(0)=1$.

1) $\frac{1}{s} X(s) + sX(s) - x(0) + X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}; \quad \left(\frac{1}{s} + s + 1 \right) X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + 1;$

2) $X(s) = \frac{(s+s^2+1) \cdot s}{(s^2+1)(1+s^2+s)} = \frac{s}{s^2+1};$

3) $x(t) = \text{cost}.$

Patikrinimas: 1) $x(0) = \cos 0 = 1;$ 2) $x'(t) = -\sin t;$ 3) $\int_0^t x(t)dt = \int_0^t \cos t dt = \sin t \Big|_0^t = \sin t;$

4) $\int_0^t x(t)dt + x'(t) + x(t) = \sin t - \sin t + \cos t = \cos t$ – sprendinys tenkina visas sąlygas.

1.11.8. Perdavimo funkcija

Rasime diferencijavimo grandelės įėjimo ir išėjimo trajektorijų $x(t)$ bei $y(t)$

atvaizdus $X(s)$ ir $Y(s)$, o taip pat jų santykį $\frac{Y(s)}{X(s)}$, esant pradinėms nulinėms sąlygoms ($z(0)=0$) ir įvairioms iėjimo trajektorijoms $x(t)$.

1.11.1.1. skyrelyje buvo nustatyta, jog tuo atveju, kai $x(t)=a=\text{const}$ ir $z(0)=0$, tai grandelės išėjimo trajektorija $y(t)=a e^{-\frac{t}{RC}}$.

$$\text{Šiuo atveju } X(s)=\int_0^{\infty} a e^{-st} dt = \frac{a}{s}, \text{ o } Y(s)=\int_0^{\infty} a e^{-\frac{t}{RC}} e^{-st} dt = \frac{a}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{aRC}{RCs + 1}. \text{ Tuomet}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{Ts}{1 + Ts}, \text{ kur } T=RC \text{ reiškia laiką, nes šio dydžio dimensija -}$$

$$[RC] = \left[\frac{u \cdot q}{i \cdot u} \right] = \left[\frac{q}{i} \right] = \left[\frac{\text{kulonai}}{\text{amperai}} \right] = [s] - \text{yra sekundės.}$$

Tame pačiame skyrelyje buvo gauta, jog, kai $z(0)=0$ ir $x(t)=kt+b$, kur $k=\text{const}$ ir $b=\text{const}$, grandelės išėjimo trajektorija yra $y(t)=RCk+(b-RCk)e^{-\frac{t}{RC}}$. Iš šių lygybių išplaukia, jog $X(s)=\frac{k+bs}{s^2}$, o $Y(s)=\frac{RCk}{s}+(b-RCk)\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{RC(k+bs)}{s(1+RCs)}$, iš kur

$$\text{gauname: } \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{Ts}{1 + Ts}, \text{ t. y., tokią pačią argumento } s \text{ funkciją.}$$

Trečiuoju atveju, kai $z(0)=0$ ir $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$, kur $A=\text{const}$, $\omega=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$, buvome gavę, jog

$$y(t)=\frac{A}{1+R^2C^2\omega^2} \left\{ RC\omega [RC\omega \sin(\omega t+\varphi) + \cos(\omega t+\varphi)] + e^{-\frac{t}{RC}} (\sin\varphi - RC\omega \cos\varphi) \right\}.$$

Rasime $X(s)$. Kadangi $x'(t)=A\omega \cos(\omega t+\varphi)$, o $x''(t)=-A\omega^2 \sin(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x(t)$, tai $s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = -\omega^2 X(s)$, iš kur $X(s) = \frac{sx(0) + x'(0)}{s^2 + \omega^2} = A \frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$.

Analogiškai gauname:

$$Y(s) = \frac{A}{1+R^2C^2\omega^2} \left\{ RC\omega \left[RC\omega \frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2 + \omega^2} + \frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2} \right] + (\sin\varphi - RC\omega \cos\varphi) \cdot \frac{RC}{1+RCs} \right\} = \frac{ARC s (s \sin\varphi + \omega \cos\varphi)}{(s^2 + \omega^2)(1+RCs)}.$$

Ir šiuo atveju $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{Ts}{1 + Ts}$ yra ta pati argumento s funkcija.

Toki patį rezultatą būtume gavę ir tuo atveju, kai $z(0)=0$ ir $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$:

$$X(s) = A \frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}; \quad y(t) = \frac{ARC\omega}{1+R^2C^2\omega^2} [RC\omega \cos(\omega t+\varphi) - \sin(\omega t+\varphi)] + \frac{A}{1+R^2C^2\omega^2} \times e^{-\frac{t}{RC}} (\cos\varphi + RC\omega \sin\varphi);$$

$$Y(s) = \frac{ARC\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \cdot \left[RC\omega \frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2} - \frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2 + \omega^2} \right] + \frac{A}{1+R^2C^2\omega^2} \cdot \frac{RC}{RCs + 1} \times (\cos\varphi + RC\omega \sin\varphi) = \frac{ARC s (s \cos\varphi - \omega \sin\varphi)}{(s^2 + \omega^2)(1+RCs)}; \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{Ts}{1 + Ts}.$$

Ši savybė, kad diferencijavimo grandelėje santykis $\frac{Y(s)}{X(s)}$, keičiantis $x(t)$,

išlieka toks pats, išplaukia iš grandelės modelio $\begin{cases} y(t) = x(t) - z(t), \\ \frac{dz}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{RC}, \text{ kai } z(0) = 0. \end{cases}$

Irodysime tai.

Pereidami prie atvaizdų, gauname: 1) $\begin{cases} Y(s) = X(s) - Z(s), \\ sZ(s) - z(0) = \frac{1}{RC}(X(s) - Z(s)); \end{cases}$

$$2) sZ(s) = \frac{Y(s)}{RC}; \quad 3) Z(s) = \frac{Y(s)}{RCs}; \quad 4) Y(s) = X(s) - \frac{Y(s)}{RCs}; \quad 5) Y(s) \left(1 + \frac{1}{RCs}\right) = X(s);$$

$$6) \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{RCs}} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{T_s}{1 + T_s s}.$$

Tai reiškia, jog santykis $\frac{Y(s)}{X(s)}$, kai $z(0)=0$, nepriklauso nuo įėjimo trajektorijos $x(t)$ ir yra ne įėjimo bei išėjimo trajektorijų, o pačios diferencijavimo grandelės charakteristika. Tą charakteristiką ir vadina diferencijavimo grandelės perdavimo funkcija $W(s)$.

Jei būtume suradę įėjimo ir išėjimo trajektorijų Hevisaido atvaizdus

$$X(p) = p \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad \text{ir} \quad Y(p) = p \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt \quad \text{bei jų santykį} \quad \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{p \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt}{p \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt} =$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt}{\int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt}, \text{ tai būtume gavę argumento } p \text{ funkciją } W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}, \text{ kuri skirtųsi nuo}$$

$$W(s) = \frac{\int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt}{\int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt} \text{ tik argumento žymėjimu. Tai reiškia, kad, naudodamiesi tiek}$$

Laplaso, tiek Hevisaido transformacija, mes gauname vieną ir tą pačią perdavimo funkciją W , vaizduojančią išėjimo ir įėjimo trajektorijų atvaizdų santykį, išliekanti pastoviu besikeičiant įėjimo trajektorijoms $x(t)$.

Tai, kad santykis $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, esant nulinėms pradinėms sąlygoms $z(0)=0$,

nesikeičia, keičiantis įėjimo trajektorijai $x(t)$, galima paaiškinti, naudojantis 1.11.4. skyrelyje nustatyta išėjimo trajektorijos vienareikšmiška priklausomybe nuo įėjimo trajektorijos, esant fiksuotai pradinei būsenai. Kai ta priklausomybė yra tiesinė arba gali būti aprašyta tiesinėmis (bet kurios eilės) diferencialinėmis lygtimis su pastoviais koeficientais, tai santykis $\frac{Y(s)}{X(s)}$ (arba santykis $\frac{Y(p)}{X(p)}$) yra pastovi argumento s (arba p) funkcija $W(s)$ (arba $W(p)$) ir gali keistis tik keičiantis

minėtiems diferencialinių lygčių koeficientams, t.y., tik keičiantis pačiam nagrinėjamam objektui (sistemai), jo išoriniam matematiniu modeliui.

Irodysime šį teiginį:

Tarkime, jog turime bloką, kurio išorinis matematinis modelis yra tiesinis, t. y., tokį bloką kurio perėjimo ir išėjimo funkcijos – tiesinės funkcijos:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = f(x(t), z(t)) = Ax(t) + Bz(t), \\ y(t) = \varphi(x(t), z(t)) = Cx(t) + Dz(t), \end{cases} \quad \text{kurių koeficientai } A, B, C \text{ ir } D \text{ yra}$$

konstantos. Kadangi bloko išėjimas, esant nuliniam įėjimui, turi būti nulinis, tai šios funkcijos negali turėti nenulinių pastovių dėmenų.

Tarkime, jog pradinės sąlygos yra nulinės, t. y. $z(0)=0$.

Tuomet, pereidami nuo originalų prie atvaizdų, gauname:

$$\begin{cases} sZ(s) = AX(s) + BZ(s), \\ Y(s) = CX(s) + DZ(s). \end{cases}$$

Iš šios lygčių sistemos eliminuosime $Z(s)$:

$$1) Z(s)(s-B) = AX(s); \quad 2) Z(s) = \frac{AX(s)}{s-B};$$

$$3) Y(s) = X(s) \left[C + \frac{DA}{s-B} \right] = X(s) \frac{sC + DA - BC}{s-B};$$

$$4) W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{sC + DA - BC}{s-B} - \text{tiesinio bloko išėjimo ir įėjimo trajektorijų}$$

$y(t)$ ir $x(t)$ atvaizdų $Y(s)$ ir $X(s)$ santykis yra tokia kompleksinio kintamojo s funkcija, kuri nepriklauso nuo įėjimo trajektorijos $x(t)$, o tik nuo perėjimo ir išėjimo funkcijų parametrų A, B, C ir D , t. y. tik nuo paties bloko, bet ne nuo jo įėjimo trajektorijos.

Pavyzdžiui, diferencijavimo grandelės, kurios išorinis matematinis modelis yra

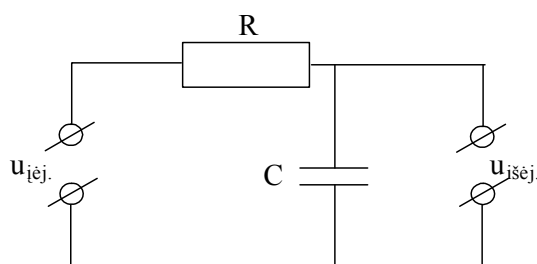
$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{RC}, \\ y(t) = x(t) - z(t), \end{cases} \quad \text{modelio parametrai yra: } A = \frac{1}{RC}, \quad B = -\frac{1}{RC}, \quad C=1, \quad D=-1. \quad \text{Todėl } W(s) =$$

$$= \frac{sC + DA - BC}{s-B} = \frac{s - \frac{1}{RC} + \frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{Ts}{1 + Ts}. \quad \text{Gavome tą patį rezultatą, kaip ir anksčiau.}$$

Žinodami tą vienareikšmišką ryšį tarp objekto išėjimo ir įėjimo trajektorijų, esant nulinei pradinei būsenai, mes, turėdami ar koku nors būdu nustatę objekto perdavimo funkciją, po to galime rasti išėjimo trajektorijos atvaizdą ir pačią išėjimo trajektoriją, atitinkančią bet kurią duotąją įėjimo trajektoriją.

Pavyzdžiui, nagrinėdami schemą, pavaizduotą 240 pav., galime rasti, jog $x(t) = u_{\text{įėj.}} = u_R + u_C$;

$$y(t) = u_{\text{išėj.}} = u_C ; \quad u_R = iR ; \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu_C}{dt} = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{dy(t)}{dt}.$$



240 pav.

Iš užrašytų lygybių gauname diferencialinę lygtį $x(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$. Laikydami, jog pradinės sąlygos yra nulinės, t. y. kad $y(0)=0$, $z(0)=0$, ir pereidami nuo originalų prie atvaizdų, gauname $X(p) = RCpY(p) + Y(p)$, iš kur $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{RCp+1} = \frac{1}{Tp+1}$, kur $T=RC$.

Turėdami perdavimo funkciją $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$, mes galime gauti bet kuriai įėjimo trajektorijai ją atitinkančios išėjimo trajektorijos atvaizdą $Y(p) = W(p)X(p)$, o po to, atlikdami atvirkštinę transformaciją, – ir pačią išėjimo trajektoriją $y(t)$.

Pavyzdžiui, mūsų čia (žiūr. 240 pav.) nagrinėjamu atveju, jei $x(t) = au(t)$, kur $u(t)$ – vienetinio šuoliuko funkcija, tai $X(p) = a$ ir $Y(p) = W(p)X(p) = \frac{a}{Tp+1} = a \frac{\frac{1}{T}}{p + \frac{1}{T}}$. Kadangi $p \int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha t}) e^{-pt} dt = 1 - \frac{p}{p+\alpha} =$

$$= \frac{\alpha}{p+\alpha}, \text{ tai } \frac{\frac{1}{T}}{p + \frac{1}{T}} = H \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right], \text{ iš kur gauname, kad atvaizdo } Y(p) = \frac{a}{Tp+1} \text{ originalas yra}$$

$$y(t) = a \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = a \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Schema, pavaizduotą 240 pav., vadina **integravimo grandele**, nes iš diferencialinės lygties $x(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$ gauname $RC \frac{dy}{dt} = x(t) - y(t)$, iš kur $y(t) = \frac{1}{RC} \left[y(0) + \int_0^t (x(t) - y(t)) dt \right]$. Jei $y(t)$ tenkina pradinės nulines sąlygas $y(0)=0$, tai $y(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t (x(t) - y(t)) dt$, t. y. integravimo grandelės išėjimas yra proporcingas jos įėjimo ir išėjimo skirtumo integralui.

Išnagrinėsime dar vieną pavyzdį.

Tarkime, jog turime diferencialinę lygtį, nusakančią ryšį tarp nagrinėjamo objekto įėjimo ir išėjimo trajektorijų: $a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$.

Pereidami prie funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ atvaizdų $X(p)$ ir $Y(p)$, tuo atveju, kai funkcijos $x(t)$ ir $y(t)$ tenkina pradinės nulines sąlygas $x(0)=x'(0)=x''(0)=\dots=x^{(m-1)}(0)=0$ ir $y(0)=y'(0)=y''(0)=\dots=y^{(n-1)}(0)=0$, gausime, jog $(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) X(p)$, iš kur išplaukia

$$\text{perdavimo funkcija } W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}.$$

Kai šio nagrinėjamo objekto įėjimo trajektorija $x(t)$ mums duota, tai, suradę jos atvaizdą $X(p)$,

$$\text{mes lengvai gausime objekto išėjimo trajektorijos } y(t) \text{ atvaizdą } Y(p): Y(p) = W(p)X(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} X(p), \text{ o}$$

įvykdę atvirkštinę transformaciją, rasime ir pačią išėjimo trajektoriją $y(t)$, t. y., diferencialinės lygties sprendinį, atitinkantį pradinės nulines sąlygas.

Pavyzdžiui, kai diferencijavimo grandelės įėjimo trajektorija $x(t)=A\sin\omega t$, tai $Y(s)=W(s)X(s)=$

$$= \frac{Ts}{1+Ts} \cdot \frac{A\omega}{\omega^2+s^2} = A\omega \cdot \frac{s}{(s+\frac{1}{T})(\omega^2+s^2)}.$$

Trupmeną $\frac{s}{(s+\frac{1}{T})(\omega^2+s^2)}$ išskaidę į elementarių trupmenų sumą ir pasinaudoję neapibrėžtųjų

koefficientų metodu, gauname:
$$\frac{s}{(s+\frac{1}{T})(\omega^2+s^2)} = \frac{K}{s+\frac{1}{T}} + \frac{Ms+N}{\omega^2+s^2}; \quad Ks^2+K\omega^2+Ms^2+\frac{Ms}{T}+Ns+\frac{N}{T} \equiv s;$$

$K+M=0; \quad \frac{M}{T}+N=1; \quad K\omega^2+\frac{N}{T}=0; \quad N=-KT\omega^2; \quad M=-K; \quad -\frac{K}{T}-KT\omega^2=1; \quad K\frac{1+T^2\omega^2}{T}=-1; \quad K=-\frac{T}{1+T^2\omega^2};$

$M=\frac{T}{1+T^2\omega^2}; \quad N=\frac{T^2\omega^2}{1+T^2\omega^2}.$

Todėl
$$Y(s)=\frac{A}{1+T^2\omega^2} \left[-\frac{T\omega}{s+\frac{1}{T}} + \frac{T\omega s}{\omega^2+s^2} + T^2\omega^2 \frac{\omega}{\omega^2+s^2} \right] = \frac{A}{1+T^2\omega^2} \{ -T\omega L[e^{-\frac{t}{T}}] + T\omega L[\cos\omega t] +$$

 $+T^2\omega^2 L[\sin\omega t] \}; \quad y(t)=\frac{AT\omega}{1+T^2\omega^2} [\cos\omega t + T\omega \sin\omega t - e^{-\frac{t}{T}}].$

Gautoji išėjimo trajektorijos $y(t)$ išraiška sutampa su 1.11.1.1. skyrelyje gauta trajektorijos $y(t)$ išraiška, ištačius vietoj φ nulį.

Žinodami sistemos perdavimo funkciją, galime ne tik surasti išėjimo trajektoriją, esant nulinėms pradinėms sąlygoms, bet ir **nustatyti ryšį tarp tų trajektorijų**, net neapskaičiuodami pačių trajektorijų.

Pavyzdžiui, iš diferencijavimo grandelės perdavimo funkcijos $W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{Tp}{1+Tp}$ randame:
 $(1+Tp)Y(p)=TpX(p); \quad Y(p)=Tp[X(p)-Y(p)].$

Pereidami nuo atvaizdų prie originalų, gauname $y(t)=T \frac{d}{dt} [x(t)-y(t)]=T[x'(t)-y'(t)]$, kas ir paaiškina, kodėl schema, pavaizduota 17 pav., buvo pavadinta diferencijavimo grandele: jos išėjimas yra proporcingas įėjimo ir išėjimo skirtumui išvestinei.

Neturint nagrinėjamo objekto matematinio modelio, **tiesinio objekto perdavimo funkciją** (bent jau apytikriai) **galima nustatyti eksperimentiniu būdu**.

Tuo tikslu reikia paveikti objektą koku nors nesudėtingu poveikiu (pavyzdžiui, vienetiniu šuoliuku $x(t)=u(t)=\begin{cases} 0, & \text{kai } t \leq 0 \\ 1, & \text{kai } t \geq +0 \end{cases}$ arba impulsu $x(t)=u'(t)=\delta(t)$) ir išmatuoti (pavyzdžiui, stebint oscilografo ekrane) išėjimo trajektoriją $y(t)$ bei aproksimuoti ją kokia nors matematine funkcija $\tilde{y}(t) \approx y(t)$.

Jei įėjimo trajektorija $x(t)=u(t)$ iššaukė išėjimo trajektoriją $y_1(t)$, kurią aproksimuoja funkcija $\tilde{y}_1(t)$, tai objekto perdavimo funkcija yra $W(p) \approx$

$$\frac{\int_0^\infty \tilde{y}_1(t)e^{-pt} dt}{\int_0^\infty u(t)e^{-pt} dt}.$$
 Kadangi $\int_0^\infty u(t)e^{-pt} dt=1$, tai $W(p) \approx \int_0^\infty \tilde{y}_1(t)e^{-pt} dt = \tilde{Y}_1(p).$

Jei būtume pasirinkę įėjimo trajektoriją $x(t)=u'(t)=\delta(t)$ ir gavę išėjimo trajektoriją $y_2(t) \approx \tilde{y}_2(t)$, tai būtume nustatę, jog perdavimo funkcija yra

$$W(s) \approx \frac{\int_0^\infty \tilde{y}_2(t) e^{-st} dt}{\int_0^\infty u'(t) e^{-st} dt}. \text{ Kadangi } \int_0^\infty u'(t) e^{-st} dt = 1, \text{ tai } W(s) \approx \int_0^\infty \tilde{y}_2(t) e^{-st} dt = \tilde{Y}_2(s).$$

Žinodami perdavimo funkciją $W(p) \approx \tilde{Y}_1(p)$ (arba $W(s) \approx \tilde{Y}_2(p)$), jau galime surasti apytikrį išėjimo trajektorijos atvaizdą, atitinkantį kurią nors kitą (galbūt jau žymiai sudėtingesnę) įėjimo trajektoriją $x(t)$: $Y(p) \approx \tilde{Y}_1(p) X(p)$ arba $Y(s) \approx \tilde{Y}_2(s) X(s)$. Po to, naudodamiesi atvirkštine transformacija, galėtume rasti ir apytikrę (artutinę) išėjimo trajektoriją $y(t)$.

Tarkime, jog padavę $x(t)=u(t)$, gavome $y(t)$ artimą $y_1(t)=1-e^{-t}$. Tuomet galime teigti, jog $W(p) \approx \tilde{Y}_1(p) = 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{1+p}$. Žinodami $W(p)$, galime rasti $y(t)$, atitinkančią kokią nors kitą įėjimo trajektoriją, pavyzdžiui, $x(t)=\sin \omega t$.

$$\begin{aligned} \text{Kadangi } X(p) &= \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}, \text{ tai } Y(p) \approx \tilde{Y}_1(p) X(p) = \frac{\omega p}{(1+p)(\omega^2 + p^2)} = \frac{\omega p}{1 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2}{(1+p)(\omega^2 + p^2)} = \\ &= \frac{\omega p}{1 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 + p^2 - p^2 + p - p}{(1+p)(\omega^2 + p^2)} = \frac{\omega p}{1 + \omega^2} \cdot \left[\frac{1+p}{(1+p)(\omega^2 + p^2)} + \frac{\omega^2 + p^2}{(1+p)(\omega^2 + p^2)} - \frac{p^2 + p}{(1+p)(\omega^2 + p^2)} \right] = \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2} \cdot \frac{\omega p}{\omega^2 + p^2} + \frac{\omega}{1 + \omega^2} \cdot \frac{p}{1+p} - \frac{\omega}{1 + \omega^2} \cdot \frac{p^2}{\omega^2 + p^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} (H[\sin \omega t] + \omega H[e^{-t}] - \omega H[\cos \omega t]). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Iš šios formulės gauname, kad } y(t) &\approx \frac{1}{1 + \omega^2} (\sin \omega t + \omega e^{-t} - \omega \cos \omega t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \sin \omega t - \right. \\ &\left. - \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} \cos \omega t \right) + \frac{\omega}{1 + \omega^2} e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \sin(\omega t - \psi) + \frac{\omega}{1 + \omega^2} e^{-t}, \text{ kur } \psi = \arctg \omega, \text{ o } \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \cos \psi \text{ ir } \\ &\frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \sin \psi. \end{aligned}$$

Tiesa, taikant šį artutinį metodą, reikia būti įsitikinusi, kad **nagrinėjamas objektas yra tiesinis (ar bent jau apytikriai tiesinis)**, t. y., kad ryšys tarp to objekto išėjimų ir įėjimų, esant fiksuotoms pradinėms sąlygoms, gali būti išreikštas (bent jau apytikriai) tiesine diferencialine (ar algebrine) lygtimi.

Kai tiesiškumo sąlyga netenkinama, tai santykis $\frac{Y(s)}{X(s)}$ nėra argumento s funkcija, nepriklausanti nuo įėjimo $x(t)$, t. y. nagrinėjamas objektas neturi pastovios jį charakterizuojančios perdavimo funkcijos, vienodos visoms $x(t)$.

Pavyzdžiui, nagrinėdami 1.11.1.2. skyrelyje hidrodinaminės sistemos išorines trajektorijas, gavome, kad tuo atveju, kai $x(t)=F=\text{const}>0$ ir $z(0)=H_0$, išėjimo trajektorija $y(t)=\sqrt{2gH_0 + \frac{2F}{\rho S} - \frac{g\sigma^*}{S}} t$.

$$\begin{aligned} \text{Šiuo atveju } X(p) &= H[F] = F, \text{ o } Y(p) = \sqrt{2gH_0 + \frac{2F}{\rho S} - \frac{g\sigma^*}{Sp}}, \text{ kadangi, kai } x(t)=F=\text{const}, \text{ tai ir} \\ \sqrt{2gH_0 + \frac{2F}{\rho S}} &\text{ yra pastovus dydis. Santykis } \frac{Y(p)}{X(p)} = \sqrt{\frac{2gH_0}{F^2} + \frac{2}{\rho SF} - \frac{g\sigma^*}{SpF}}, \text{ keičiantis } F, \text{ keistųsi, t. y.} \\ \text{tas santykis nebūtų pastovi argumento } p &\text{ funkcija, nepriklausanti nuo įėjimo trajektorijos } x(t), \text{ o} \\ \text{priklausytų ir nuo } x(t)=F, \text{ tuo labiau, kad tuomet, kai } x &\text{ priklausytų nuo } t, \text{ atvaizdas} \\ Y(p) &= p \int_0^\infty \left[\sqrt{2gH_0 + \frac{2x(t)}{\rho S} - \frac{g\sigma^*}{S}} t \right] e^{-pt} dt \text{ jau nebebūtų lygus } \sqrt{2gH_0 + \frac{2F}{\rho S} - \frac{g\sigma^*}{Sp}}. \end{aligned}$$

Taip yra todėl, kad hidrodinaminėje sistemoje, turinčioje išėjimo funkciją $y = \sqrt{2gz + \frac{2x}{\rho S}}$ ir perėjimo funkciją $\frac{dz}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} y = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t) + \frac{2x(t)}{\rho S}}$, ryšys tarp įėjimo $x(t)$ ir išėjimo $y(t)$ trajektorijų nėra tiesinis: eliminavę kintamąjį $z(t)$ iš lygčių $y(t) = \sqrt{2gz(t) + \frac{2x}{\rho S}}$ ir $\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} y(t)$, gauname

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\rho S y(t)} \frac{dx(t)}{dt} - \frac{\sigma^* g}{S} - \text{netiesinę diferencialinę lygtį.}$$

Todėl hidrodinaminės sistemos išėjimo trajektorijos $y(t)$ apskaičiavimui, žinant jos įėjimo trajektoriją $x(t)$, negalima pasinaudoti perdavimo funkcijos metodu ir tenka naudotis tos sistemos išoriniu matematiniu modeliu – jos perėjimo funkcija $\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t) + \frac{2x(t)}{\rho S}}$ ir išėjimo funkcija $y = \sqrt{2gz + \frac{2x}{\rho S}}$.

Kai $x(t) = \text{const}$, tai diferencialinė lygtis $\frac{dz}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz + \frac{2x}{\rho S}}$ lengvai integruojama, ir, radus $z(t) = f(t)$, iš išėjimo funkcijos lengvai gaunama išėjimo trajektorijos formulė.

Tačiau, kai $x(t) \neq \text{const}$, gauti analizinę fazinės trajektorijos $z(t)$ išraišką jau nepavyksta ir minėtąją diferencialinę lygtį tenka spręsti, naudojantis koku nors artutiniu (pavyzdžiui, Rungės–Kuto) metodu. Pasirinkę pakankamai mažą žingsnį Δt ir žinodami $z(0)$ ir įėjimo trajektorijos taškų $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(n\Delta t)$ reikšmes, galime apskaičiuoti fazinės trajektorijos taškų $z(\Delta t), z(2\Delta t), \dots, z(n\Delta t)$ artutines reikšmes, ir po to, naudodamiesi išėjimo funkcija, jau galime apskaičiuoti ir išėjimo trajektorijos taškų $y(0), y(\Delta t), y(2\Delta t), \dots, y(n\Delta t)$ artutines reikšmes bei nubrėžti artutinę išėjimo trajektoriją.

Kaip matome, **netiesinių objektų išėjimo trajektorijų apskaičiavimo algoritmas yra žymiai sudėtingesnis negu tiesinių.**

Pasitaiko, kad kai kurie studentai neviseškai tiksliai supranta tiesiškumo savybę: iš to fakto, kad objektas, turintis išėjimo funkciją $y = x^2$, nėra tiesinis, daro išvadą, jog ir kiekvienas objektas, kuriame įėjimo trajektoriją $x(t) = t$ atitinka išėjimo trajektorija $y(t) = t^2$, taip pat turi būti netiesinis. Tačiau tokia išvada klaidinga, nes šiuo atveju ryšys tarp $x(t)$ ir $y(t)$ gali būti aprašomas tiesine diferencialine lygtimi $\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$, iš kurios,

atsižvelgdami į tai, kad $x(0) = 0$ ir $y(0) = 0$, gauname $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s}$. Tą patį rezultatą

būtume gavę tiesiogiai apskaičiuodami $X(s)$ ir $Y(s)$: $X(s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$, $Y(s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \frac{2}{s^3}$, $W(s) = \frac{2}{s}$.

Kad objektas, kuriame įėjimo trajektoriją $x(t) = t$ atitinka išėjimo trajektorija $y(t) = t^2$, gali nesutapti su objektu, turinčiu išėjimo funkciją $y = x^2$, nesunku įsitikinti, apskaičiavus pirmojo objekto, turinčio perdavimo funkciją $W(s) = \frac{2}{s}$, išėjimo trajektoriją $y(t)$, esant įėjimo trajektorijai, pavyzdžiui, $x(t) = t^2$ prie nulinių pradinių sąlygų: $Y(s) = W(s)X(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{4}{s^4} = \frac{4}{3!} \cdot \frac{3!}{s^4} = \frac{2}{3} L[t^3]$; $y(t) = \frac{2}{3} t^3 \neq t^2 = x^2(t)$.

O objektas, turintis išėjimo funkciją $y=x^2$, tikrai nėra tiesinis, nes, diferencijuodami šią lygybę, gausime $\frac{dy(t)}{dt}=2x(t)\frac{dx(t)}{dt}$. Iš šios diferencialinės lygties, net esant nulinėms pradinėms sąlygoms, mums nepavyks gauti santykio $\frac{Y(s)}{X(s)}$ ir, tuo labiau, įrodyti, jog jis nepriklauso nuo $x(t)$. Todėl mes ir sakome, kad toks objektas neturi perdavimo funkcijos, nežiūrint į tai, kad tuo atveju, kai $x(t)=t$, šio objekto išėjimo trajektorija $y(t)$ sutampa su objekto, turinčio perdavimo funkciją $W(s)=\frac{2}{s}$, išėjimo trajektorija.

Norėdami rasti tiesinių blokų, sudarytų iš rezistorių, turinčių aktyvias varžas R_i ($i=1,2,3,\dots,n$), kondensatorių, turinčių elektrines talpas C_j ($j=1, 2, 3, \dots, m$), ir elektromagnetinių ritelių, turinčių induktyvumus L_k ($k=1, 2, 3, \dots, r$), perdavimo funkcijas $W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{U_{\text{išėj.}}(p)}{U_{\text{įėj.}}(p)}$ naudosimės Kirchhofo dėsniais, nuosekliai ir lygiagrečiai sujungtų laidininkų bendrosios varžos ir bendrojo laidumo apskaičiavimo formulėmis ir formulėmis $u_r(t)=Ri(t)$, $\frac{du_c(t)}{dt}=\frac{i(t)}{C}$, $u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$, žinomoms mums iš fizikos kurso.

Rasime elektrinės grandinės, sudarytos iš minėtųjų elementarių grandžių, sujungtų nuosekliai bei lygiagrečiai, kompleksinės varžos (impedanso) Hevisaido atvaizdą $Z(p)$, apibrėždami jį panašiai, kaip aktyvioji varža R apibrėžiama, vadovaujantis Omo dėsniu, t. y. laikydami, jog kompleksinės varžos Hevisaido atvaizdas $Z(p)$ yra lygus elektrinės įtampos $u(t)$ Hevisaido atvaizdo $U(p)=p\int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt$ ir elektros srovės stiprio $i(t)$ Hevisaido atvaizdo $I(p)=p\int_0^\infty i(t)e^{-pt}dt$ santykiui $\frac{U(p)}{I(p)}$.

Iš formulės $Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)}$ išplaukia formulė $Z(s)=\frac{U(s)}{I(s)}$, nes $\frac{U(p)}{I(p)}=\frac{sU(s)}{sI(s)}=\frac{U(s)}{I(s)}$.

Naudodamiesi šiuo apibrėžimu $Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)}$ ir formule $u_R(t)=Ri(t)$, rasime aktyviosios varžos R Hevisaido atvaizdą $Z_R(p)=\frac{U_R(p)}{I_R(p)}$:

1) Iš formulės $U_R(t)=Ri(t)$, išplaukia $U_R(p)=RI(p)$, t. y. $R=\frac{U_R(p)}{I_R(p)}$;

2) Kadangi $Z_R(p)=\frac{U_R(p)}{I_R(p)}$, tai $Z_R(p)=R$.

Analogiškai, naudodamiesi formule $\frac{du_c(t)}{dt}=\frac{i(t)}{C}$ ir laikydami, kad pradinės sąlygos nulinės, t. y., laikydami, jog $u_c(0)=0$, gauname:

1) $pU_C(p)=\frac{I(p)}{C}$, t. y. $\frac{U_C(p)}{I(p)}=\frac{1}{Cp}$;

$$2) \text{ kadangi } Z_C(p) = \frac{U_C(p)}{I(p)}, \text{ tai } Z_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

Iš formulės $U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, laikydami, kad pradinės sąlygos yra nulinės, t. y., laikydami, jog $i(0)=0$, gauname:

$$1) LpI(p) = U_L(p), \text{ t.y. } \frac{U_L(p)}{I(p)} = Lp;$$

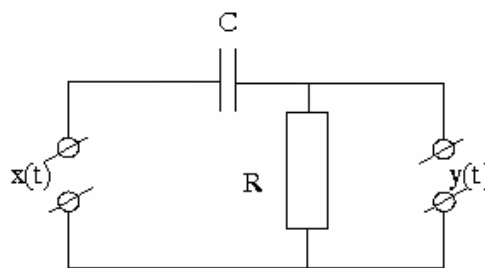
$$2) \text{ kadangi } Z_L(p) = \frac{U_L(p)}{I(p)}, \text{ tai } Z_L(p) = Lp.$$

Kadangi, kaip žinoma iš fizikos kurso, nuosekliai sujungtų varžų bendroji varža yra lygi jungiamų varžų sumai, o lygiagrečiai sujungtų laidininkų bendrasis laidumas yra lygus jungiamų laidininkų laidumų sumai, tai, atsižvelgdami į tą aplinkybę, jog atvaizdai yra integralai, o sumos integralas lygus dėmenų integralų sumai, gauname, jog formulės, taikomos bendrųjų varžų ir bendrųjų laidumų apskaičiavimui, gali būti taikomos ir kompleksinių varžų atvaizdams.

Dėl tų pačių priežasčių Kirchhofo dėsniai ir kiti tiesiniai fizikos dėsniai galioja ne tik elektros įtampos $u(t)$ ir elektros srovės stipriams $i(t)$, bet ir jų atvaizdams $U(p)$ ir $I(p)$.

Tai leidžia labai paprastu būdu rasti tiesinių blokų, taikomų radiotechnikoje ir radioelektronikoje, perdavimo funkcijas. Pailiustruosiu tai pavyzdžiais.

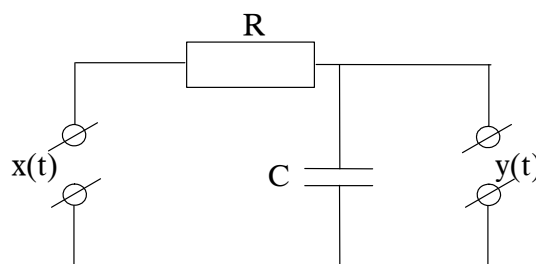
1.11.8.1. Diferencijavimo grandelės perdavimo funkcija $W_{DG}(p)$



241 pav.

$$\begin{aligned} 1) x(t) &= u_{i\dot{e}j}(t); \quad 2) x(t) = u_C(t) + u_R(t); \quad 3) X(p) = U_C(p) + U_R(p) = I(p)[Z_C(p) + Z_R(p)] = \\ &= I(p) \left(\frac{1}{Cp} + R \right) = I(p) \frac{1 + RCp}{Cp}; \quad 4) I(p) = X(p) \frac{Cp}{1 + RCp}; \quad 5) y(t) = u_{i\dot{s}}(t) = u_R(t); \\ 6) Y(p) &= U_R(p) = I(p)Z_R(p) = I(p)R = \frac{X(p)Cp}{1 + RCp} R; \quad 7) W_{DG}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{RCp}{1 + RCp} = \frac{Tp}{1 + Tp}. \end{aligned}$$

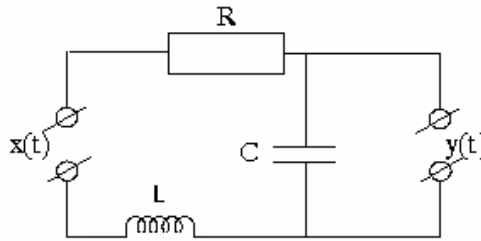
1.11.8.2. Integravimo grandelės perdavimo funkcija $W_{IG}(p)$



242 pav.

$$\begin{aligned}
& 1) \ x(t)=u_R(t)+u_C(t); \ 2) \ X(p)=U_R(p)+U_C(p)=I(p)[Z_R(p)+Z_C(p)]=I(p)\left(R+\frac{1}{Cp}\right)= \\
& =I(p)\frac{1+RCp}{Cp}; \ 3) \ I(p)=X(p)\frac{Cp}{1+RCp}; \ 4) \ y(t)=u_C(t); \ 5) \ Y(p)=U_C(p)=I(p)Z_C(p)=I(p)\frac{1}{Cp}= \\
& =\frac{X(p)Cp}{1+RCp}\cdot\frac{1}{Cp}=\frac{X(p)}{1+RCp}; \ 6) \ W_{IG}(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{1+RCp}=\frac{1}{1+Tp}.
\end{aligned}$$

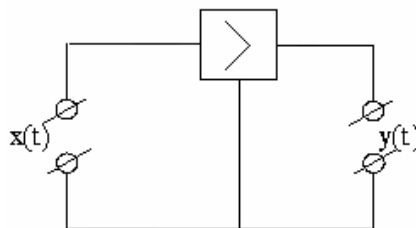
1.11.8.3. Elektromagnetinių virpesių kontūro perdavimo funkcija $W_{EMVK}(p)$



243 pav.

$$\begin{aligned}
& 1) \ x(t)=u_R(t)+u_C(t)+u_L(t); \ 2) \ X(p)=U_R(p)+U_C(p)+U_L(p)=I(p)[Z_R(p)+Z_C(p)+Z_L(p)]= \\
& =I(p)\left(R+\frac{1}{Cp}+Lp\right)=I(p)\frac{LCp^2+RCp+1}{Cp}; \ 3) \ I(p)=\frac{X(p)Cp}{LCp^2+RCp+1}; \ 4) \ y(t)=u_C(t); \ 5) \ Y(p)= \\
& =U_C(p)=I(p)\frac{1}{Cp}=\frac{X(p)}{LCp^2+RCp+1}; \ 6) \ W_{EMVK}(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{LCp^2+RCp+1}=\frac{1}{T_2^2p^2+T_1p+1}.
\end{aligned}$$

1.11.8.4. Idealaus stiprintuvo perdavimo funkcija $W_{IS}(p)$



244 pav.

Idealus stiprintuvas sustiprina įėjimą $x(t)$, pavyzdžiui įėjimo svyravimų $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$ amplitudę A , nekeisdamas nei svyravimų ciklinio dažnio $\omega=\frac{2\pi}{T}$, nei pradinės svyravimų fazės φ . Todėl idealaus stiprintuvo išėjimas $y(t)$ yra lygus $Kx(t)$, kur K – pastovus dydis – stiprintuvo stiprinimo koeficientas. Iš formulės $y(t)=Kx(t)$ išplaukia, jog $Y(p)=KX(p)$ ir $W_{IS}(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=K$.

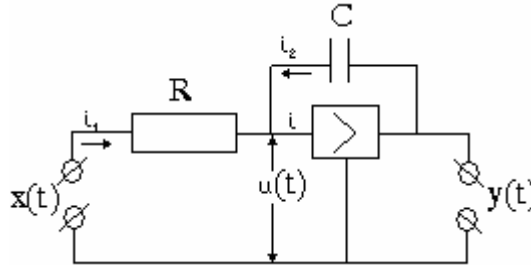
Realūs stiprintuvai (žiūr. užduotį 1.11.79. šioje mokymo priemonėje, kurioje pateikta supaprastinta realaus stiprintuvo schema) šiek tiek skiriasi nuo idealaus stiprintuvo, nes jo stiprinimo koeficientas K neišlieka visiškai pastovus visame įėjimo signalo dažnių kitimo diapazone bei gali priklausyti ne tik nuo dažnio, bet ir nuo amplitudės A , tačiau tam tikrame gana plačiame dažnių ar amplitudžių kitimo diapazone gero stiprintuvo stiprinimo koeficientas K išlieka praktiškai pastovus ir stiprintuvas veikia praktiškai idealiai, keisdamas įėjimo signalo amplitudę K kartų ir beveik neiškreipdamas įėjimo signalo dažnio bei fazės.

Norėdami pasiekti aukštą stiprinimo lygį, stiprintuvus jungia nuosekliai į grandinę, sujungdami pirmojo stiprintuvo išėjimus su antrojo stiprintuvo įėjimais ir t. t. Kokybiškų elektrinės įtampos stiprintuvų įėjimo varža yra tokia didelė, kad jo įėjimo srovės stiprį galima laikyti praktiškai lygų 0, o

išėjimo įtampą $y(t)$ laikyti praktiškai lygią $Kx(t)$, kur $x(t)$ – stiprintuvo įėjimo įtampa. Bendros daugiakaskadinio stiprintuvo stiprinimo koeficientas K , kai tokį stiprintuvą sudaro didelis nuosekliai sujungtų praktiškai idealių įtampos stiprintuvų skaičius, gali tapti pakankamai didelis, t. y. gali tapti tokiu, kad jį praktiškai būtų galima laikyti begaliniai dideliu.

Šia stiprintuvų savybe naudojamosi, kuriant idealius dinامينius blokus analoginėms skaičiavimo mašinoms.

1.11.8.5. Idealus integratorius ir jo perdavimo funkcija $W_{II}(p)$



245 pav.

1) Kadangi stiprintuvo įėjimo srovės stiprį i galima laikyti praktiškai lygiu 0, tai galima priimti, jog elektros srovės, einančios nuo schemos įėjimo stiprintuvo įėjimo link, stipris i_1 yra praktiškai lygus srovės, einančios nuo schemos išėjimo stiprintuvo įėjimo link, stipriui i_2 ir šios abi srovės, būdamos priešingos krypties, viena kitą atsveria. Gauname $I_1(p) = \frac{X(p) - U(p)}{Z_R(p)}$, $I_2(p) = \frac{Y(p) - U(p)}{Z_C(p)}$;

$$\frac{X(p) - U(p)}{R} = \frac{Y(p) - U(p)}{\frac{1}{Cp}}.$$

2) Kadangi $Y(p) = KU(p)$, tai $U(p) = \frac{Y(p)}{K}$, kur K – bendroji stiprintuvo stiprinimo koeficiento reikšmė. Ją galima laikyti labai didele.

$$3) \text{ Todėl } \frac{X(p) - \frac{Y(p)}{K}}{R} = \frac{Y(p) - \frac{Y(p)}{K}}{\frac{1}{Cp}}, \text{ iš kur išplaukia, jog } \frac{X(p)}{RCp} = Y(p) \left(1 - \frac{1}{K} + \frac{1}{KRCp} \right).$$

$$4) W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{RCp \left(1 - \frac{1}{K} + \frac{1}{KRCp} \right)} = \frac{1}{RCp \left(1 - \frac{1}{K} \right) + \frac{1}{K}}.$$

$$5) W_{II}(p) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{RCp \left(1 - \frac{1}{K} \right) + \frac{1}{K}} = \frac{1}{RCp}.$$

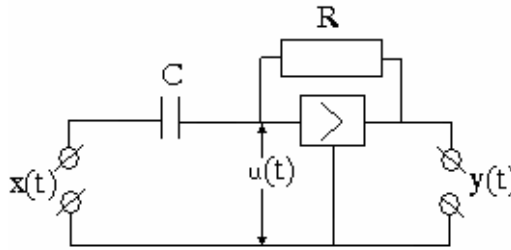
Iš šios formulės išplaukia, jog $Y(p) = W_{II}(p)X(p) \approx \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p} X(p)$, t. y. $y(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t x(t) dt$.

Vadinasi, 245 pav. pavaizduota schema integruoja įėjimą ir dauginą jį iš pastovaus daugiklio $\frac{1}{RC}$, t. y. mastabuoja jį, palikdama išėjimui tą pačią dimensiją, kurią turėjo įėjimas.

1.11.8.6. Idealus diferenciatorius ir jo perdavimo funkcija $W_{ID}(p)$

$$1) \frac{X(p) - U(p)}{Z_C(p)} = \frac{Y(p) - U(p)}{Z_R(p)}; \quad 2) \frac{X(p) - \frac{Y(p)}{K}}{\frac{1}{Cp}} = \frac{Y(p) - \frac{Y(p)}{K}}{R}; \quad 3) X(p) = Y(p) \left(\frac{1 - \frac{1}{K}}{RCp} + \frac{1}{K} \right);$$

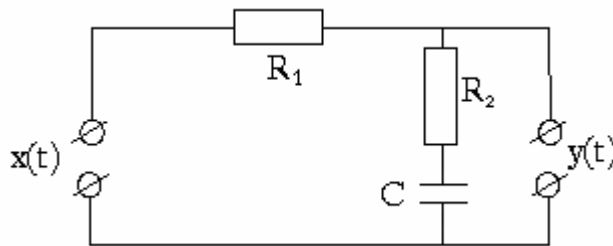
$$4) \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{\frac{1 - \frac{1}{K} + \frac{1}{RCp}}{\frac{1}{RCp} + \frac{1}{K}}} = \frac{RCp}{1 - \frac{1}{K} + \frac{RCp}{K}}; \quad 5) W_{ID}(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{RCp}{1 - \frac{1}{K} + \frac{RCp}{K}} = RCp.$$



246 pav.

Todėl $Y(p) = W(p)X(p) \approx RCpX(p)$. Iš šios formulės išplaukia, jog $y(t) \approx RC \frac{dx(t)}{dt}$, $x(0) = 0$. Vadinasi, schema, kurią vaizduoja 246 pav., diferencijuoja įėjimą ir daugina jį iš pastovaus daugiklio RC , turinčio laiko dimensiją, mastuodama išėjimą ir palikdama jam tą pačią dimensiją, kurią turi įėjimas.

1.11.8.7. Lėto reagavimo grandis ir jos perdavimo funkcija $W_{LRG}(p)$



247 pav.

$$\begin{aligned} 1) \quad x(t) &= u_{R_1}(t) + u_{R_2}(t) + u_C(t); \quad 2) \quad X(p) = U_{R_1}(p) + U_{R_2}(p) + U_C(p) = I(p)(R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}) = \\ &= I(p) \frac{(R_1 + R_2)Cp + 1}{Cp}; \quad 3) \quad I(p) = \frac{X(p)Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp}; \quad 4) \quad y(t) = u_{R_2}(t) + u_C(t); \quad 5) \quad Y(p) = U_{R_2}(p) + U_C(p) = \\ &= I(p) \left(R_2 + \frac{1}{Cp} \right) = I(p) \frac{1 + R_2 Cp}{Cp} = \frac{X(p)Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp} \cdot \frac{1 + R_2 Cp}{Cp} = X(p) \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp}; \quad 6) \quad W_{LRG}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \\ &= \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp} = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_{1,2} p}. \end{aligned}$$

Įsivedę pastovų koeficientą $K = \frac{T_2}{T_{1,2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, lėto reagavimo grandies perdavimo funkciją

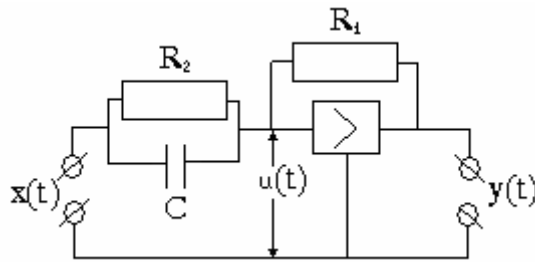
galime išskaidyti į jau nagrinėtų tipinių blokų perdavimo funkcijas: $W_{LRG}(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_{1,2} p} = \frac{1}{1 + T_{1,2} p} +$

$+ \frac{T_2}{1 + T_{1,2} p} = \frac{1}{1 + T_{1,2} p} + K \frac{T_{1,2}}{1 + T_{1,2} p} = W_{IG}(p) + K W_{DG}(p)$. Vadinasi, lėto reagavimo grandį galima gauti

lygiagrečiai sujungus integravimo grandį ir diferencijavimo grandį, nuosekliai sujungtą su stiprintuvu,

turinčiu stiprinimo (silpninimo) koeficientą $K = \frac{T_2}{T_{1,2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

1.11.8.8. Ideali pirmos eilės forsavimo grandis ir jos perdavimo funkcija $W_{IFG}(p)$



248 pav.

1) Rasime Hevisaido atvaizdą tos kompleksinės varžos, kurią turi blokelis, sudarytas iš lygiagrečiai sujungtų rezistorius ir kondensatoriaus. Pasinaudosime laidumų sumavimo taisykle, gauname: $\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{R_1} + Cp = \frac{1+R_1Cp}{R_1}$. Todėl $Z(p) = \frac{R_1}{1+R_1Cp}$.

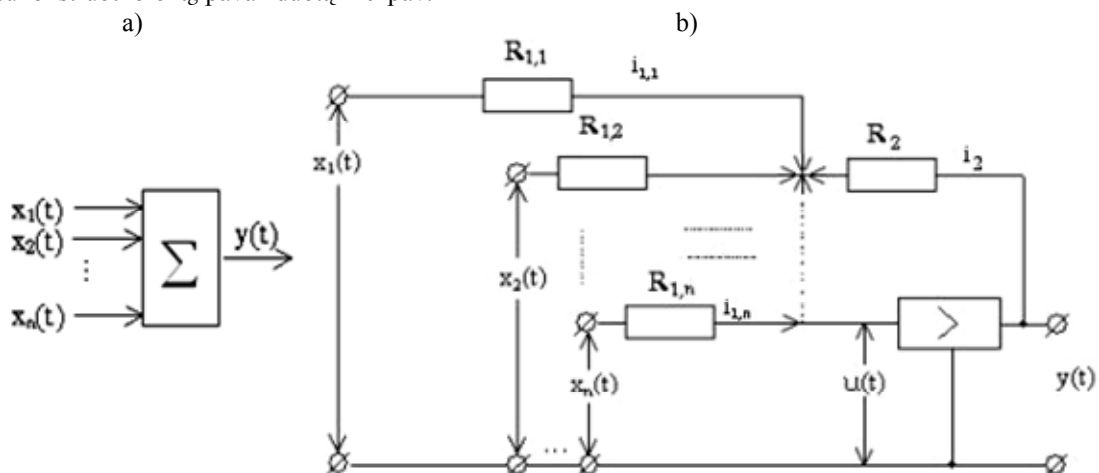
$$2) \frac{X(p) - U(p)}{Z(p)} = \frac{Y(p) - U(p)}{R_2}; \quad 3) \frac{X(p)(1+R_1Cp)}{R_1} = Y(p) \left[\frac{1 - \frac{1}{K}}{R_2} + \frac{1+R_1Cp}{KR_1} \right];$$

$$4) W_{IFG}(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1+R_1Cp}{R \left[\frac{1 - \frac{1}{k}}{R_2} + \frac{1+R_1Cp}{KR_1} \right]} = \frac{R_2}{R_1} (1+R_1Cp) = \frac{R_2}{R_1} (1+T_1p).$$

Kadangi $Y(p) = W(p)X(p) = \frac{R_2}{R_1}X(p) + R_2CpX(p)$, tai $y(t) = \frac{R_2}{R_1}x(t) + T_2 \frac{dx(t)}{dt}$ – schemos išėjimas yra lygus maštubuo tam jos įėjimui, pakoreguotam (forsuotam) dėmeniu, proporcingu įėjimo lygio kitimo greičiui $\frac{dx(t)}{dt}$.

1.11.8.9. Svorinės sumos gavimo blokas

Pasinaudodami idealiu stiprintuvu, turinčiu labai didelį stiprinimo koeficientą K , galime sukonstruoti bloką, pavaizduotą 249 pav.



249 pav.

$$1) \sum_{j=1}^n i_{1,j}(t) \approx i_2(t); 2) \sum_{j=1}^n \frac{X_j(p) - U(p)}{R_{1,j}} = \frac{Y(p) - U(p)}{R_2}; 3) \sum_{j=1}^n \frac{X_j(p)}{R_{1,j}} = Y(p) \left[\frac{1 - \frac{1}{K}}{R_2} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{1,j}} \right];$$

Pereidami prie ribos, kai $K \rightarrow \infty$ gauname, jog $Y(p) = \sum_{j=1}^n \frac{R_2}{R_{1,j}} X_j(p)$, t. y. gauname, kad

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \frac{R_2}{R_{1,j}} x_j(t).$$

Vadinasi 249 pav. pavaizduotos schemos išeiga $y(t)$ yra lygi pasvertai įeigų sumai. Dėmenų svoriniai koeficientai yra lygūs $\frac{R_2}{R_{1,j}}$. Parenkant atitinkamas varžas jiems galima suteikti bet kurias reikiamas reikšmes, pavyzdžiui, tikimybių reikšmes, reikalingas svorinio vidurkio apskaičiavimui.

Ką tik išnagrinėti pavyzdžiai rodo, kad sudarinėti elektrinių schemų perdavimo funkcijas tikrai yra gana paprasta. Šį procesą galima algoritmizuoti ir net automatizuoti. O turint perdavimo funkcijų formules, naudojantis atvirkštinėmis Hevisaio ir Laplaso transformacijomis, galima apskaičiuoti tų schemų išėjimų trajektorijas, atitinkančias nulines pradines sąlygas bei pačias įvairiausias įėjimų trajektorijas.

Tai labai svarbu. Tačiau dar svarbiau yra tai, jog dėl struktūrų izomorfizmo egzistavimo ką tik aprašytieji metodai gali būti taikomi ne tik radiotechnikoje bei elektrotechnikoje, bet ir kitose srityse, nes bendrasisteminiai struktūriniai dėsniai, nustatyti vienoje srityje, galioja ir kitų sričių sistemoms, turinčioms izomorfiškas struktūras.

Pavyzdžiui, šios mokymo priemonės „Įvado“ 0.2.6 skyrelyje buvo nagrinėjami du matematiniai modeliai, kurių pirmasis aprašė reiškinius, vykstančius mechaninėse sistemose, antrasis – elektrotechninius bei radiotechninius reiškinius. Ten buvo parodyta, jog tų dviejų matematinių modelių izomorfizmas yra ne atsitiktinis formalus sutapimas, bet reiškinys, atspindintis gilų priežastinį matematinių modelių bendrumą išplaukiantį iš tais modeliais aprašomų procesų bendrumo. Analogiškai sisteminiai ryšiai, būdami fiziškai skirtingi, šiose skirtingose sudėties sistemose atlieka analogišką vaidmenį. Vėliau įsitikinsime, jog analogiškai matematiniai modeliai gali aprašyti pačius įvairiausius svyravimus bei monotoninius procesus pačiose įvairiausiose sistemose: ne tik mechanikoje, radiotechnikoje bei elektrotechnikoje, bet ir ekonomikoje, politikoje, biologinėse bei ekologinėse sistemose.

Todėl ką tik aprašytieji perdavimo funkcijų sudarymo metodai naudingi ne tik radiotechnikoje, bet ir daugelyje kitų sričių. Dėl šios priežasties susipažinimas su šiais metodais ir buvo įtrauktas į sistemotyros kurso mokymo priemonę.

Šių metodų svarba dar labiau padidėja, paaiškėjus, jog **su blokų perdavimo funkcijomis galima atlikti matematinės operacijas, atitinkančias struktūrines blokų jungimo operacijas. Tai leidžia algoritmizuoti sudėtingų dinaminių sistemų, sudarytų iš tiesinių blokų, matematinį modeliavimą ir projektavimą.** Apie tai pakalbėsime sekančiame skyrelyje ir antrojoje šios mokymo priemonės dalyje.

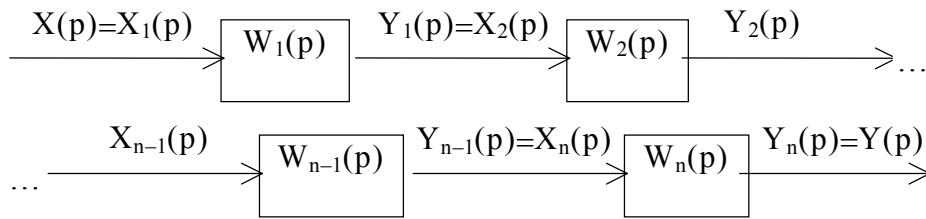
1.11.9. Perdavimo funkcijų savybės

Perdavimo funkcijos $W(p)$ turi tokių savybių, kuriomis tikslinga naudotis, nagrinėjant bei projektuojant sistemas, turinčias sudėtingą struktūrą.

Aprašysime kai kurias iš tų savybių.

1. Kai tiesinės sistemos jungiamos nuosekliai, tai jų perdavimo funkcijos dauginamos, t. y. **sistemos, susidedančios iš nuosekliai sujungtų kelių sistemų,**

perdavimo funkcija lygi sistemų – komponentų perdavimo funkcijų sandaugai. Šio teiginio teisingumu nesunku įsitikinti, nagrinėjant schemą, pavaizduotą 250 pav.



250 pav.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_n(p)}{X_1(p)} = \frac{X_n(p)W_n(p)}{X_1(p)} = W_n(p) \frac{Y_{n-1}(p)}{X_1(p)} = W_n(p) \frac{X_{n-1}(p)W_{n-1}(p)}{X_1(p)} =$$

$$= W_n(p) W_{n-1}(p) \frac{Y_{n-2}(p)}{X_1(p)} = \dots = W_n(p) W_{n-1}(p) \dots W_2(p) \frac{Y_1(p)}{X_1(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

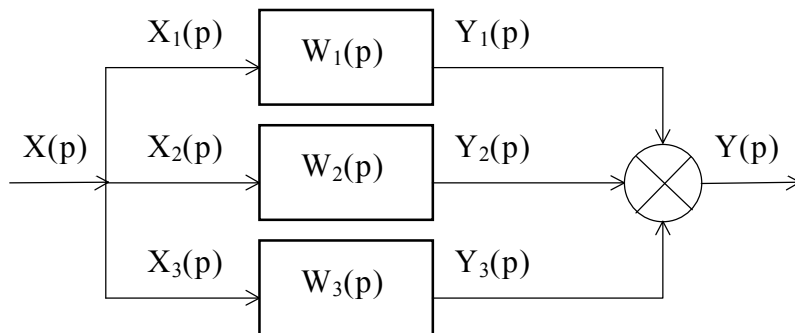
Lygybę $W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$ galima gauti ir paprasčiau, tiesiog sudarant sandaugą

$\prod_{i=1}^n W_i(p)$ ir po to suprastinant ją, nes visiems $i=1, 2, \dots, n-1$ galioja lygybė

$$Y_i(p) = X_{i+1}(p), \text{ o } X_1(p) = X(p) \text{ ir } Y_n(p) = Y(p): \prod_{i=1}^n W_i(p) = \frac{Y_1(p)}{X_1(p)} \cdot \frac{Y_2(p)}{X_2(p)} \cdot \frac{Y_3(p)}{X_3(p)} \cdot \dots \times$$

$$\times \frac{Y_{n-2}(p)}{X_{n-2}(p)} \cdot \frac{Y_{n-1}(p)}{X_{n-1}(p)} \cdot \frac{Y_n(p)}{X_n(p)} = \frac{Y_n(p)}{X_1(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)} = W(p).$$

2. Kai tiesinės sistemos jungiamos lygiagrečiai, tai jų perdavimo funkcijos sudedamos, t. y. **kai kelios sistemos turi bendrą įėjimą ir tų sistemų išėjimai sumuojami, tai sumuojamos ir tų sistemų perdavimo funkcijos** (žiūr. 251 pav.).



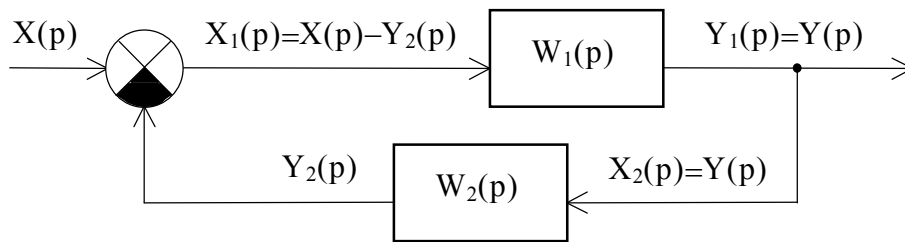
251 pav.

Kadangi $X_1(p) = X_2(p) = X_3(p) = X(p)$ ir $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p)$, tai $Y(p) = W_1(p)X_1(p) + W_2(p)X_2(p) + W_3(p)X_3(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)]X(p)$ ir

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p).$$

3. Kai sistemos, turinčios perdavimo funkciją $W_1(p)$, išėjimas sujungtas su jos įėjimu neigiamu grįžtamoju ryšiu per sistemą su perdavimo funkcija $W_2(p)$, kaip tai parodyta 252 pav., tai **bendra visos sistemos perdavimo funkcija yra**

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$



252 pav.

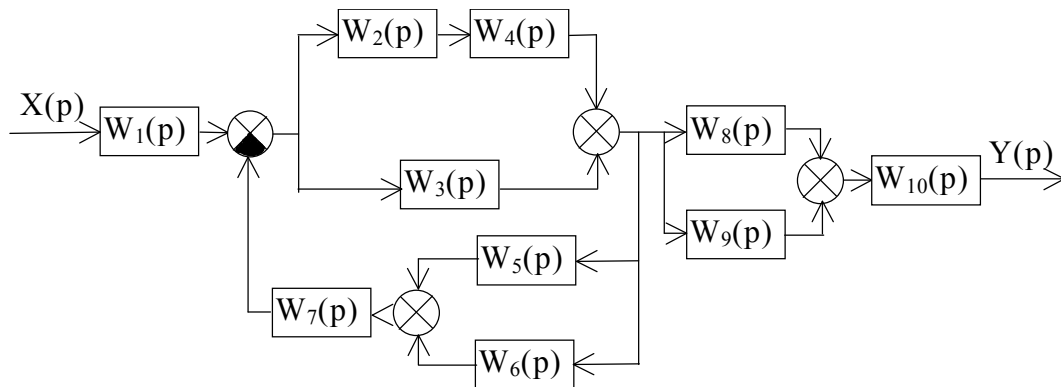
Išvesime šią formulę: $Y(p) = W_1(p)[X(p) - Y_2(p)] = W_1(p)[X(p) - W_2(p) \cdot Y(p)]$;
 $Y(p)[1 + W_1(p)W_2(p)] = W_1(p)X(p)$; $Y(p) = \frac{W_1(p)X(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$; $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} =$
 $= \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$.

Uždaros sistemos, turinčios neigiamą grįžtamąjį ryšį, perdavimo funkcija yra trupmena, kurios skaitiklį gausime, sudauginę visų tiesioginio ryšio nuo įėjimo iki išėjimo sudarančių blokų perdavimo funkcijas, o vardiklį – pridėję prie vieneto visų blokų, sudarančių pilną uždaro grįžtamojo ryšio grandinę, perdavimo funkcijų sandaugą.

Pasinaudodami jau įrodytomis perdavimo funkcijų savybėmis, rasime sistemos, pavaizduotos 253 pav., perdavimo funkciją.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \frac{W_2(p)W_4(p) + W_3(p)}{1 + [W_2(p)W_4(p) + W_3(p)][W_5(p) + W_6(p)]W_7(p)} \times$$

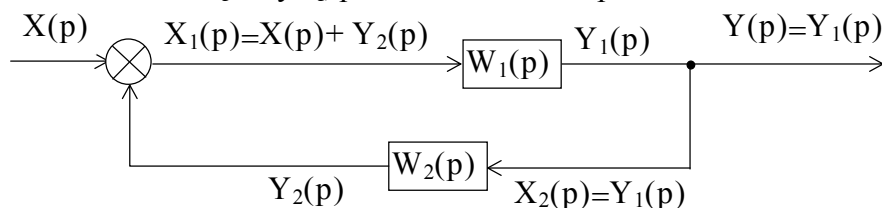
$$\times [W_8(p) + W_9(p)]W_{10}(p) = \frac{W_1(p)[W_2(p)W_4(p) + W_3(p)][W_8(p) + W_9(p)]W_{10}(p)}{1 + [W_2(p)W_4(p) + W_3(p)][W_5(p) + W_6(p)]W_7(p)}.$$



253 pav.

4. Uždaros sistemos, turinčios teigiamą grįžtamąjį ryšį, perdavimo funkcija yra trupmena, kurios skaitiklį gausime, sudarę tiesioginio ryšio perdavimo funkciją, o vardiklį – atėmę iš vieneto visų blokų, sudarančių pilną uždaro grįžtamojo ryšio grandinę – ciklą, perdavimo funkcijų sandaugą.

Pailiustruosime šią savybę, pasinaudodami 254 pav.

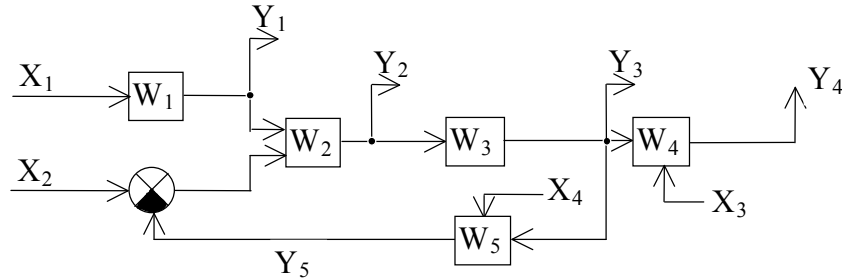


254 pav.

$$Y(p)=Y_1(p)=W_1(p)X_1(p)=W_1(p)[X(p)+Y_2(p)]=W_1(p)[X(p)+W_2(p)X_2(p)]= \\ =W_1(p)X(p)+W_1(p)W_2(p)Y(p); \quad Y(p)=\frac{W_1(p)X(p)}{1-W_1(p)W_2(p)}; \quad W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{W_1(p)}{1-W_1(p)W_2(p)}.$$

5. Kai sistema turi keletą išėjimų ir keletą nepriklausomų įėjimų, **tai kiekvieno įėjimo poveikis į kiekvieną išėjimą gali būti surastas atskirai, o po to kiekvienas išėjimas gali būti surastas kaip visų įėjimų poveikių į tą išėjimą algebrinė suma.**

Ši savybė išplaukia iš nagrinėjamų procesų ir Laplaso (bei Hevisaido) transformacijos tiesiškumo. Pailiustruosime ją pavyzdžiu, parodytu 255 pav., kuriame bloką, turinčių keletą įėjimų, įėjimų poveikiai sumuojasi.



255 pav.

Rasime pirmojo įėjimo poveikio į ketvirtojo bloko išėjimą atvaizdį $Y_4^{(1)}$, kai visi kiti įėjimai – „nuliniai“. $Y_4^{(1)} = Y_3^{(1)} \cdot W_4 = (Y_1^{(1)} - Y_5^{(1)}) W_2 W_3 W_4 = (X_1 W_1 - Y_3^{(1)} W_5) W_2 W_3 W_4 = (X_1 W_1 - \frac{Y_4^{(1)}}{W_4} W_5) W_2 W_3 W_4$.

Iš šios lygties randame: $Y_4^{(1)} (1 + \frac{W_2 W_3 W_4 W_5}{W_4}) = W_1 W_2 W_3 W_4 X_1$;

$$Y_4^{(1)} = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4 X_1}{1 + W_2 W_3 W_5}.$$

Šią formulę galėjome gauti ir iš karto, pasinaudoję pirmąja ir trečiąja perdavimo funkcijos savybėmis: $Y_4^{(1)} = W_1 \cdot \frac{W_2 W_3}{1 + W_2 W_3 W_5} \cdot W_4 X_1 = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 + W_2 W_3 W_5} \cdot X_1$.

Analogiškai galime gauti, kad $Y_4^{(2)} = \frac{W_2 W_3 W_4 X_2}{1 + W_2 W_3 W_5}$; $Y_4^{(3)} = W_4 X_3$;

$$Y_4^{(4)} = \frac{(-W_5) W_2 W_3 W_4 X_4}{1 + W_2 W_3 W_5}.$$

Paskutinę formulę, kaip mažiau įprastą, gausime dar kartą, nesinaudodami trečiąja savybe. $Y_4^{(4)} = Y_3^{(4)} W_4 = Y_2^{(4)} W_3 W_4 = (-Y_5^{(4)}) W_2 W_3 W_4 = -(Y_3^{(4)} + X_4) W_5 W_2 W_3 W_4 =$

$$= -\left(\frac{Y_4^{(4)}}{W_4} + X_4\right) W_5 W_2 W_3 W_4; \quad Y_4^{(4)} (1 + W_2 W_3 W_5) = -W_2 W_3 W_4 W_5 X_4;$$

$$Y_4^{(4)} = -\frac{W_2 W_3 W_4 W_5}{1 + W_2 W_3 W_5} X_4. \text{ Rezultatas sutampa su anksčiau gautu.}$$

Tarę, jog penktoji savybė jau įrodyta, galime užrašyti, jog $Y_4 = Y_4^{(1)} + Y_4^{(2)} + Y_4^{(3)} + Y_4^{(4)} = \frac{W_2 W_3 W_4}{1 + W_2 W_3 W_5} (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4) + W_4 X_3$.

$$\begin{aligned}
& \text{Analogiškai gautume, jog } Y_1 = X_1 \cdot W_1; Y_2 = Y_2^{(1)} + Y_2^{(2)} + Y_2^{(3)} + Y_2^{(4)} = \\
& = \frac{W_1 W_2}{1 + W_2 W_3 W_5} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) + \frac{W_2}{1 + W_2 W_3 W_5} X_2 + 0 - \frac{W_5 W_2}{1 + W_2 W_3 W_5} X_4 = \\
& = \frac{W_2 (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5}; Y_3 = Y_2 W_3 = \frac{W_2 W_3 (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5}, \\
& Y_5 = Y_5^{(1)} + Y_5^{(2)} + Y_5^{(3)} + Y_5^{(4)} = \frac{W_1 W_2 W_3 W_5}{1 + W_2 W_3 W_5} X_1 + \frac{W_2 W_3 W_5}{1 + W_2 W_3 W_5} X_2 + 0 + \\
& + \frac{W_5}{1 + W_2 W_3 W_5} X_4 = \frac{W_5 (W_1 W_2 W_3 X_1 + W_2 W_3 X_2 + X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5}.
\end{aligned}$$

Patikrinsime teiginio apie penktąją savybę teisingumą, gaudami išėjimų atvaizdžius tiesiogiai (nesinaudodami penktąja savybe).

$Y_2 = W_2(Y_1 + X_2 - Y_5) = W_2[W_1 X_1 + X_2 - W_5(X_4 + Y_3)] = W_2[W_1 X_1 - W_5(X_4 + W_3 Y_2)]$. Iš šios lygybės gauname, jog $Y_2 = \frac{W_2 (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5}$, kas sutampa su formule, gauta

naudojantis penktąja savybe.

$Y_3 = W_3 Y_2 = W_3 W_2 (Y_1 + X_2 - Y_5) = W_3 W_2 [W_1 X_1 + X_2 - W_5 (Y_3 + X_4)]$;
 $Y_3 = \frac{W_2 W_3 (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5}$, kas sutampa su formule, gauta naudojantis penktąja savybe.

$Y_4 = Y_3 + W_4 X_3 = \frac{W_2 W_3 W_4 (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5} + W_4 X_3$, kas sutampa su formule,

gauta naudojantis penktąja savybe.

$Y_5 = W_5 (Y_3 + X_4) = W_5 Y_3 + W_5 X_4 = \frac{W_2 W_3 W_5 (W_1 X_1 + X_2 - W_5 X_4)}{1 + W_2 W_3 W_5} + W_5 X_4 =$
 $= \frac{W_2 W_3 W_5 (W_1 X_1 + X_2) + W_5 X_4}{1 + W_2 W_3 W_5}$, kas sutampa su formule, gauta naudojantis penktąja savybe.

Perdavimo funkcijų savybės leidžia, žinant sudėtingas sistemas sudarančių blokų perdavimo funkcijas, rasti tų sudėtingų sistemų perdavimo funkcijas ir, naudojantis jomis, apskaičiuoti sistemų išėjimo trajektorijas, atitinkančias duotąsias įėjimo trajektorijas.

Iš kitos pusės, perdavimo funkcijų savybių žinojimas padeda, projektuojant iš elementarių blokų, kurių perdavimo funkcijos mums yra žinomos, sudėtingas schemas, transformuojančias duotus įėjimus į mums reikalingus išėjimus, nes, sudarę pageidaujamų išėjimų ir įėjimų trajektorijų atvaizdus ir radę tų atvaizdų santykį – projektuojamos sudėtingos schemas perdavimo funkciją, mes galime, dekomponuodami tą funkciją į elementarius daugiklius bei dėmenis, nustatyti, iš kokių blokų turi būti sudaryta ieškomoji schema ir kaip toje scheme tie elementarūs blokai turi būti sujungti.

Trumpai tariant, perdavimo funkcijos gali būti naudojamos kaip sudėtingų sistemų sisteminės analizės, taip ir sisteminės sintezės, t. y. sisteminio modeliavimo ir sisteminio projektavimo priemonė.