

1.11. SISTEMOS IŠORINIO IR VIDINIO FUNKCIONAVIMO MATEMATINIS APRAŠYMAS IR TO FUNKCIONAVIMO SISTEMINĖ ANALIZĖ

1.11.1. Sistemos išorinio funkcionavimo aprašymas

Turėdami matematinį sistemos makromodelį su užfiksuotomis (žinomomis, duotomis) sistemos būsenos koordinačių reikšmėmis, atitinkančiomis duotąjį „pradinį“ sistemos kalendoriaus momentą, ir, žinodami visų sistemos įėjimų trajektorijas, modeliuojančias sistemos įėjimų koordinačių reikšmių kitimą laike, mes, pasinaudodami sistemos perėjimų ir išėjimų funkcijomis, galime apskaičiuoti **sistemos išėjimų ir jos fazines trajektorijas**, t. y. sudaryti **sistemos išorinio funkcionavimo matematinį aprašymą**.

1.11.1.1. Diferencijavimo grandelės išorinio funkcionavimo matematinis aprašymas

1.3. skyriuje mes jau buvome gavę ir išnagrinėję procesų P_1 ir P_2 fazines trajektorijas, o 1.4.3. skyrelyje – diferencijavimo grandelės išėjimo ir fazinę trajektorijas, kai grandelės įėjimo trajektorija $x(t)=a=const$.

Rasime grandelės, pavaizduotos 17 pav., fazinę ir išėjimo trajektorijas, atitinkančias bet kokią įėjimo trajektoriją $x(t)$.

Pasinaudosime išoriniu matematiniu diferencijavimo grandelės modeliu (žiūr. 1.4.3. skyrelį):

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{R \cdot C}, \quad y(t) = x(t) - z(t).$$

Fazinę diferencijavimo grandelės trajektoriją $z(t)$ rasime išsprendę diferencialinę lygtį $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{RC}$.

Šioje lygtyje kintamuosius z ir t galima atskirti, ieškant $z(t)$ formoje $z=uv$, kurioje vieną iš kintamųjų u ir v galėsime pasirinkti taip, kad diferencialinę lygtį būtų galima pertvarkyti į dviejų diferencialinių lygčių sistemą, kurioje kintamieji jau būtų atskirti.

$$\text{Kadangi } \frac{dz}{dt} = \frac{d(uv)}{dt} = v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt}, \text{ tai iš } \frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{RC} \text{ gauname } v \frac{du}{dt} + u \left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} \right) = \frac{x(t)}{RC} (*).$$

Pasirenkame funkciją $v=v(t)$ taip, kad $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$. Tuomet iš diferencialinės lygties (*)

$$\text{gauname dviejų lygčių sistemą } \begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0, \\ v \frac{du}{dt} = \frac{x(t)}{RC}. \end{cases}$$

Sprendami pirmąją tos sistemos lygtį, gauname: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{RC}$; $\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{RC}$; $\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$;

$$\ln \frac{v(t)}{v(0)} = -\frac{1}{RC} t; \ln \frac{v(t)}{v(0)} = \ln e^{-\frac{t}{RC}}; v(t) = v(0) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Gautąją funkcijos $v(t)$ išraišką įsistatome į antrąją lygčių sistemos lygtį ir sprendžiame pastarąją. Gauname: $v(0) e^{-\frac{t}{RC}} \frac{du}{dt} = \frac{x(t)}{RC}$; $du = \frac{x(t)}{v(0)RC} e^{\frac{t}{RC}} dt$; $\int_{u(0)}^{u(t)} du = \int_0^t \frac{x(t)}{v(0)RC} e^{\frac{t}{RC}} dt$; $u(t) = u(0) +$

$$+ \frac{1}{v(0)RC} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{RC}} dt.$$

Kadangi $z(t)=u(t)v(t)$, tai

$$z(t)=u(0)v(0)e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC}\int_0^t x(t)e^{\frac{t}{RC}}dt=e^{-\frac{t}{RC}}\left[z(0)+\frac{1}{RC}\int_0^t x(t)e^{\frac{t}{RC}}dt\right].$$

Turėdami fazinę trajektoriją $z(t)$, randame išėjimo trajektoriją $y(t)=x(t)-z(t)=x(t)-e^{-\frac{t}{RC}}\left[z(0)+\frac{1}{RC}\int_0^t x(t)e^{\frac{t}{RC}}dt\right]$.

1) Kai $x(t)=a=\text{const.}$ ir $z(0)=0$, tai gauname: $z(t)=a(1-e^{-\frac{t}{RC}})$, $y(t)=ae^{-\frac{t}{RC}}$.

2) Kai $z(0)=0$ ir $x(t)=kt+b$, kur $k=\text{const.}$ ir $b=\text{const.}$, tai gauname: $z(t)=kt+(b-kRC)(1-e^{-\frac{t}{RC}})$,
 $y(t)=kRC+(b-kRC)e^{-\frac{t}{RC}}$.

3) Kai $x(t)=A \sin(\omega t+\varphi)$, kur $A=\text{const.}$, $\omega=\text{const.}$, $\varphi=\text{const.}$, tai gauname:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-\frac{t}{RC}}\left[z(0)+\frac{A}{R \cdot C}\int_0^t \sin(\omega t+\varphi)e^{\frac{t}{RC}}dt\right]= \\ &= e^{-\frac{t}{RC}}\left\{z(0)+A\frac{e^{\frac{t}{RC}}[\sin(\omega t+\varphi)-RC\omega\cos(\omega t+\varphi)]-[\sin\varphi-RC\omega\cos\varphi]}{1+\omega^2 R^2 C^2}\right\}= \\ &= z(0)e^{-\frac{t}{RC}}+A\frac{\sin(\omega t+\varphi)-RC\omega\cos(\omega t+\varphi)-[\sin\varphi-RC\omega\cos\varphi]e^{-\frac{t}{RC}}}{1+\omega^2 R^2 C^2}. \end{aligned}$$

Kai $z(0)=0$, tai gauname grandelės fazinę trajektoriją

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{A}{1+\omega^2 R^2 C^2}\left\{\sin(\omega t+\varphi)-RC\omega\cos(\omega t+\varphi)-[\sin\varphi-RC\omega\cos\varphi]e^{-\frac{t}{RC}}\right\} \text{ ir išėjimo trajektoriją} \\ y(t) &= \frac{A}{1+\omega^2 R^2 C^2}\left\{\omega^2 R^2 C^2 \sin(\omega t+\varphi)+RC\omega\cos(\omega t+\varphi)+[\sin\varphi-RC\omega\cos\varphi]e^{-\frac{t}{RC}}\right\}. \end{aligned}$$

Norėdami supaprastinti trajektorijų $z(t)$ ir $y(t)$ grafinio atvaizdavimo procesą, fazinės ir išėjimų trajektorijų formules galime pertvarkyti taip:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\sin(\omega t+\varphi)-\frac{RC\omega}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\cos(\omega t+\varphi)-\right. \\ &\quad \left.-\left[\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\sin\varphi-\frac{RC\omega}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\cos\varphi\right]e^{-\frac{t}{RC}}\right\}= \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\left\{\cos\psi_1 \sin(\omega t+\varphi)-\sin\psi_1 \cos(\omega t+\varphi)-[\cos\psi_1 \sin\varphi-\sin\psi_1 \cos\varphi]e^{-\frac{t}{RC}}\right\}= \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\left\{\sin(\omega t+\varphi-\psi_1)-e^{-\frac{t}{RC}}\sin(\varphi-\psi_1)\right\}, \text{ kur } \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}=\cos\psi_1, \quad \frac{RC\omega}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}=\sin\psi_1, \end{aligned}$$

$\psi_1=\arctg RC\omega$;

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\left\{\omega RC\left[\frac{RC\omega}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\sin(\omega t+\varphi)+\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\cos(\omega t+\varphi)\right]+ \right. \\ &\quad \left. +\left[\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\sin\varphi-\frac{RC\omega}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\cos\varphi\right]e^{-\frac{t}{RC}}\right\}=\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \omega RC [\sin(\omega t + \varphi) \cos \psi_2 + \cos(\omega t + \varphi) \sin \psi_2] + [\sin \varphi \sin \psi_2 - \cos \varphi \cos \psi_2] e^{\frac{-t}{RC}} \right\} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \left\{ \omega RC \sin(\omega t + \varphi + \psi_2) - e^{\frac{-t}{RC}} \cos(\varphi - \psi_2) \right\}, \text{ kur } \psi_2 = \arctg \frac{1}{RC\omega} = \frac{\pi}{2} - \psi_1.$$

Kadangi $\cos(\varphi - \psi_2) = \text{const}$, tai gavome, jog įėjimo sinusoidė $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ grandelės išėjime transformavosi į to paties dažnio ω pastumtos laike sinusoidės, turinčios sumažėjusią amplitudę, ir eksponentiškai mažėjančio dydžio algebrinę sumą, kuri, didėjant t , konverguoja į sinusoidę

$$\frac{ARC\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi + \psi_2), \text{ lygią kosinusoidei } \frac{ARC\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \varphi - \psi_1). \text{ Fazinė trajektorija}$$

$$\text{analogiškai konverguoja į pastumtą sinusoidę } \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi - \psi), \text{ turinčią sumažėjusią}$$

amplitudę $\frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$, bet tą patį dažnį ω .

Jei nagrinėtume mažiau idealizuotą diferencijavimo grandelės modelį (žiūr. 227 pav.) su perėjimo funkcija: $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t) - z(t)}{C \cdot R^*}$, kur $R^* = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2}$, ir išėjimo funkcija: $y = B(x - z)$, kur

$$B = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \text{ tai gautume fazinę grandelės trajektoriją } z(t) = e^{\frac{-t}{R^* C}} \left[z(0) + \frac{1}{R^* C} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{R^* C}} dt \right]$$

$$\text{ir išėjimo trajektoriją } y(t) = B(x(t) - z(t)) = B \left\{ x(t) - e^{\frac{-t}{R^* C}} \left[z(0) + \frac{1}{R^* C} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{R^* C}} dt \right] \right\}.$$

Iš čia išplauktų, jog, esant $x(t) = a = \text{const}$. ir $z(0) = 0$, gautume $z(t) = a \left(1 - e^{\frac{-t}{R^* C}} \right)$, $y = B a e^{\frac{-t}{R^* C}}$.

$$\text{Kai } x(t) = kt + b \text{ ir } z(0) = 0, \text{ tai gauname } z(t) = kt + (b - kR^* C) \left(1 - e^{\frac{-t}{R^* C}} \right), y(t) = B[kR^* C + (b - kR^* C) \times$$

$$\times e^{\frac{-t}{R^* C}}].$$

Analogiškai gautume $z(t)$ ir $y(t)$ tam atvejui, kai $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, $z(0) = 0$.

1.11.1.2. Hidrodinaminės sistemos išorinio funkcionavimo matematinis aprašymas

Rasime hidrodinaminės sistemos, kurios makromodelį sudarėme 1.4.4. skyrelyje, fazinę ir išėjimo trajektorijas tam atvejui, kai įėjimo trajektorija $x(t) = F = \text{const} \geq 0$, o $z(0) = H_0 = \text{const} > 0$.

Iš perėjimo funkcijos diferencialinės išraiškos $\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t) + \frac{2F}{\rho S}} x(t)$ gauname

$$\frac{dz(t)}{\sqrt{2gz(t) + \frac{2F}{\rho S}}} = -\frac{\sigma^*}{S} dt.$$

$$\text{Išsprendę šią diferencialinę lygtį, randame, kad } z(t) = z(0) + \frac{g}{2} \left(\frac{\sigma^*}{S} t \right)^2 - \frac{\sigma^*}{S} t \sqrt{2gz(0) + \frac{2F}{\rho S}} =$$

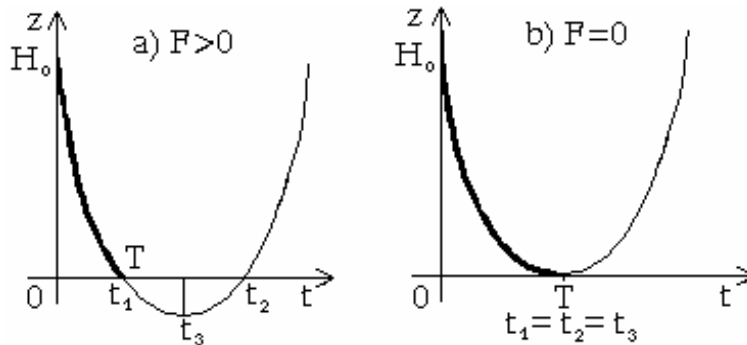
$$= H_0 + \frac{g}{2} \left(\frac{\sigma^*}{S} t \right)^2 - \frac{\sigma^*}{S} t \sqrt{2gH_0 + \frac{2F}{\rho S}}.$$

Hidrodinaminės sistemos fazinė trajektorija – parabolės $z(t)=At^2-Bt+C$ atkarpa, atitinkanti laiko tarpą $[0, T]$, kur $A=\frac{g(\sigma^*)^2}{2S^2}$, $B=\frac{\sigma^*}{S}\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}$, $C=H_0$, o T – mažesnioji lygties $At^2-Bt+C=0$

šaknis $t_1=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{\frac{\sigma^*}{S}\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}-\frac{\sigma^*}{S}\sqrt{\frac{2F}{\rho S}}}{\frac{g(\sigma^*)^2}{S^2}}=\frac{S}{\sigma^*g}\left(\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}-\sqrt{\frac{2F}{\rho S}}\right)$. Funkcija $z(t)=At^2-Bt+C$

turi minimumą taške $t_3=\frac{B}{2A}=\frac{S}{\sigma^*g}\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}$. Tos funkcijos grafikas pavaizduotas 230 „a“ pav.,

kuriame hidrodinaminės sistemos fazinė trajektorija vaizduojama storesne linija.



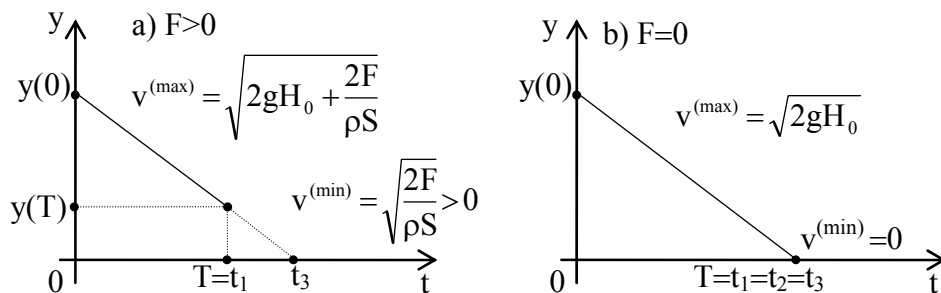
230 pav.

Kai $F=0$, tai $B^2-4AC=0$ ir $t_1=t_2=t_3=T$ (žiūr. 230 „b“ pav.).

Išstatę $z(t)$ ir $x(t)$ į išėjimo funkciją $y=\sqrt{2gz+\frac{2F}{\rho S}}x$, gausime išėjimo trajektoriją:

$$y(t)=s\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}\left(\frac{g\sigma^*}{S}t\right)^2}-2g\frac{\sigma^*}{S}t\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}=\sqrt{\left(\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}-\frac{g\sigma^*}{S}t\right)^2}=\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}-\frac{g\sigma^*}{S}t.$$

Hidrodinaminės sistemos išėjimo trajektorija – tai tiesės $y=\sqrt{2gH_0+\frac{2F}{\rho S}}-\frac{g\sigma^*}{S}t$ atkarpa, atitinkanti laiko tarpą $[0, T]$ (žiūr. 231 pav.).



231 pav.

Kai $F>0$, tai tuo momentu, kai iš indo išteka paskutinis vandens lašas (t. y., kada $t=T=t_1$ ir $z(T)=0$), ištekančio vandens greitis $v(T)=y(T)=\sqrt{\frac{2F}{\rho S}}=v^{(min)}>0$. Kai $F=0$, tai $v(T)=0$.

Išnagrinėtas paprastos hidrodinaminės sistemos išorinio funkcionavimo pavyzdys iliustruoja svarbų teiginį apie **matematinį modelių sudarymo ir matematinių eksperimentų su tais modeliais naudą: turėdami sistemos matematinį modelį, mes, atlikę atitinkamus paskaičiavimus, galime sužinoti gana daug svarbių ir įdomių dalykų apie sistemos funkcionavimą**. Šiuo konkrečiu ką tik nagrinėtu atveju mes sugebėjome nustatyti, per kiek laiko idealus skystis ištekęs iš indo, kaip keisis ištekančio skysčio lygis inde ir ištekejimo greitis, koku greičiu ištekęs paskutinis lašas ir pan. Dar daugiau sužinosime 1.13.3. skyrelyje.

1.11.1.3. Baigtinio automato funkcionavimo išorinis matematinis aprašymas

Rasime baigtinio determinuoto automato, kurio išorinį ir vidinį matematinius modelius sudarėme 1.10.3. skyrelyje, fazinės ir išėjimo trajektorijų pradinės atkarpas, kai jo įėjimo trajektorijos pradinę atkarpą sudaro įėjimo signalų seka, pavaizduota 90 lentelėje, o pradinė būseną $z(0)=z_0=0$.

90. lentelė

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x(t)	x ₁	x ₂	x ₁	x ₀	x ₂	x ₂	x ₁	x ₀	x ₂	x ₁	x ₁	x ₀

Pasinaudodami to automato perėjimo ir išėjimo funkcijomis, t. y. įstatydami į tas funkcijas automato įėjimų ir būsenų reikšmes, rasime fazinės ir išėjimų trajektorijų pradinės atkarpas, atitinkančias duotąją įėjimo trajektorijos pradinę atkarpą ir pradinę būseną $z(0)=0$ (žiūr. 91 lentelę).

91. lentelė

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x(t)	x ₁	x ₂	x ₁	x ₀	x ₂	x ₂	x ₁	x ₀	x ₂	x ₁	x ₁	x ₀
z(t)	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
y(t)	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1

1.11.1.4. Medžiagų sandėlio funkcionavimo išorinis matematinis aprašymas

Rasime medžiagų sandėlio, kurio išorinį matematinį modelį sudarėme 1.4.5. skyrelyje, fazinės ir išėjimo trajektorijas tuo atveju, kai medžiagų rūšių skaičius $n=3$, cechų skaičius $m=2$, $\bar{z}_1(1)=(z_{1,1}(1), z_{1,2}(1), z_{1,3}(1))=(100; 80; 150)$, $\bar{z}_2(1)=(z_{2,1,1}(1), z_{2,1,2}(1), z_{2,2,1}(1), z_{2,2,2}(1), z_{2,3,1}(1), z_{2,3,2}(1))=(0; 0; 0; 0; 0; 0)$, $\bar{z}_3(1)=(z_{3,1,1}(1), z_{3,1,2}(1), z_{3,2,1}(1), z_{3,2,2}(1), z_{3,3,1}(1), z_{3,3,2}(1))=(600; 550; 400; 600; 700; 650)$, o įėjimų trajektorijos duotos 92 lentelėje, kurioje t – duotojo mėnesio k darbo dienos eilės numeris.

92. lentelė

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x _{1,1}	0	0	100	0	0	100	200	100	0	0	0	0	50	100	100	200	200	0	0	100
x _{1,2}	50	50	0	0	100	100	100	0	0	0	0	0	100	0	100	0	200	200	200	0
x _{1,3}	100	0	0	200	0	200	200	0	0	0	100	100	0	50	100	200	0	100	0	100
x _{2,1,1}	20	30	20	35	20	20	50	20	20	30	20	20	30	20	50	80	50	50	50	20
x _{2,1,2}	15	20	10	20	15	20	50	20	30	20	30	30	20	20	50	80	100	50	50	20
x _{2,2,1}	10	40	25	20	40	40	20	20	20	20	20	20	50	120	100	100	100	100	50	50
x _{2,2,2}	30	40	35	30	50	60	30	20	20	20	20	20	40	40	80	100	100	100	90	70
x _{2,3,1}	40	50	50	75	100	50	100	40	50	50	40	120	60	50	80	100	100	50	40	60
x _{2,3,2}	50	60	50	75	100	50	100	50	50	50	40	40	60	50	80	100	100	50	60	50

Fazinių ir išėjimo trajektorijų koordinačių reikšmes apskaičiuosime, naudodamiesi sandėlio išorinio modelio perėjimų ir išėjimų funkcijų formulėmis, ir surašysime tas reikšmes 93 lentelėje.

93. lentelė

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z _{1,1}	100	65	15	100	45	10	100	200	260	210	160	110	60	60	120	120	200	250	160	110
z _{1,2}	80	90	60	0	0	100	100	150	110	70	30	0	0	100	0	100	0	200	235	345
z _{1,3}	150	160	50	0	200	0	200	200	110	10	0	100	100	0	50	100	200	50	150	150
z _{2,1,1}	0	20	50	60	95	115	120	170	190	210	240	260	280	310	330	380	440	490	540	590
z _{2,1,2}	0	15	35	40	60	75	80	130	150	180	200	230	260	280	300	350	410	510	550	550
z _{2,2,1}	0	10	50	75	75	75	115	135	155	175	195	210	210	210	285	285	335	335	400	400
z _{2,2,2}	0	30	70	105	105	105	165	195	215	235	255	270	270	270	295	295	345	345	445	535
z _{2,3,1}	0	40	90	115	115	215	215	315	355	405	410	410	485	535	535	560	610	700	700	700

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$z_{2,3,2}$	0	50	110	135	135	235	235	335	385	435	440	440	465	515	515	540	590	650	650	650
$y_{1,1}$	20	30	10	35	20	5	50	20	20	30	20	20	30	20	50	60	50	50	50	10
$y_{1,2}$	15	20	5	20	15	5	50	20	30	20	30	30	20	20	50	60	100	40	0	0
$y_{2,1}$	10	40	25	0	0	40	20	20	20	20	15	0	0	75	0	50	0	65	0	0
$y_{2,2}$	30	40	35	0	0	60	30	20	20	20	15	0	0	25	0	50	0	100	90	65
$y_{3,1}$	40	50	25	0	100	0	100	40	50	5	0	75	50	0	25	50	90	0	0	0
$y_{3,2}$	50	60	25	0	100	0	100	50	50	5	0	25	50	0	25	50	60	0	0	0

Vektoriaus $\bar{z}_3$ koordinatės mėnesio bėgyje nesikeičia, t. y. $\bar{z}_3(20)=\bar{z}_3(19)=\bar{z}_3(18)=\dots=\bar{z}_3(2)=\bar{z}_3(1)=(600; 550; 400; 600; 700; 650)$, todėl šio vektoriaus koordinatėms 93 lentelėje, taupant popierių, nebuvo užrašytos, tačiau vektoriaus $\bar{y}$ koordinatėms reikšmių apskaičiavimuose jos buvo naudojamos.

1.11.2. Sistemos vidinio funkcionavimo aprašymas

Turėdami matematinę sistemos mikromodelį ir žinodami elementų būsenų pradinės reikšmės bei sistemos įėjimų trajektorijas, mes galime apskaičiuoti **sistemos elementų įėjimų, išėjimų ir fazines trajektorijas**, t. y. sudaryti **sistemos vidinio funkcionavimo matematinį aprašymą ir atlikti sistemos funkcionavimo sisteminę analizę**.

Pailiustruosiu išsakytą čia mintį konkrečiais pavyzdžiais.

1.11.2.1. Diferencijavimo grandelės vidinio funkcionavimo matematinis aprašymas

Tarkime, kad žinome grandelės, pavaizduotos 227 pav., įėjimo trajektoriją $x(t)$ ir jos pradinę būseną $z(0)$, sutampančią su jos pirmojo elemento – kondensatoriaus – pradine būsena $z_C(0)$.

Pasinaudodami vidiniu grandelės modeliu, rasime:

$$1) \quad x_C(t) = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} [x(t) - z(t)] = \frac{x(t) - z(t)}{R^*} = \frac{1}{R^*} \left\{ x(t) - e^{\frac{-t}{R^* C}} \left[z(0) + \frac{1}{R^* C} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{R^* C}} dt \right] \right\}, \text{ kur } R^* = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3};$$

$$2) \quad z_C(t) = z(t) = e^{\frac{-t}{R^* C}} \left[z(0) + \frac{1}{R^* C} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{R^* C}} dt \right];$$

$$3) \quad y_C(t) = x_C(t) = \frac{x(t) - z(t)}{R^*};$$

$$4) \quad x_{R_2}(t) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} y_C(t) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} x_C(t) = \frac{R_3}{R^* (R_2 + R_3)} [x(t) - z(t)] = \frac{R_3}{R^* (R_2 + R_3)} \left\{ x(t) - e^{\frac{-t}{R^* C}} \left[z(0) + \frac{1}{R^* C} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{R^* C}} dt \right] \right\};$$

$$5) \quad y_{R_2}(t) = y(t) = B[x(t) - z(t)] = B \left\{ x(t) - e^{\frac{-t}{R^* C}} \left[z(0) + \frac{1}{R^* C} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{R^* C}} dt \right] \right\}.$$

$$\text{Kai } x(t)=a \text{ ir } z(0)=0, \text{ tai } x_C(t) = \frac{a}{R^*} e^{\frac{-t}{R^* C}}; \quad z_C(t) = a \left(1 - e^{\frac{-t}{R^* C}} \right); \quad y_C(t) = \frac{a}{R^*} e^{\frac{-t}{R^* C}}; \quad x_{R_2}(t) =$$

$$= \frac{aR_3}{R^*(R_2 + R_3)} e^{\frac{-t}{R^*C}}; y_{R_2}(t) = Ba e^{\frac{-t}{R^*C}}, \text{ kur } B = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

$$\text{Kai } x(t) = kt + b \text{ ir } z(0) = 0, \text{ tai } x_C(t) = \frac{1}{R^*} \left[kR^*C + (b - kR^*C) e^{\frac{-t}{R^*C}} \right]; z_C(t) = kt + (b - kR^*C) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{R^*C}} \right);$$

$$y_C(t) = x_C(t); x_{R_2}(t) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} x_C(t); y_{R_2}(t) = B \left[kR^*C + (b - kR^*C) e^{\frac{-t}{R^*C}} \right].$$

1.11.2.2. Medžiagų sandėlio vidinio funkcionavimo aprašymas

Rasime medžiagų sandėlio, kurio makromodelis aprašytas 1.4.5. skyrelyje, o jo mikromodelis – 1.10.2. skyrelyje, vidinių elementų įėjimo, išėjimo ir fazinės trajektorijas, kai $n=3$, $m=2$, $\bar{z}_1(1) = \bar{z}^{(K)}(1) = \bar{z}^{(L)}(1) = (100; 80; 150)$, $\bar{z}_2(1) = \bar{z}_1^{(Z)}(1) = (0; 0; 0; 0; 0; 0)$, $\bar{z}_3(1) = \bar{z}_2^{(Z)}(1) = (600; 550; 400; 600; 700; 650)$, o įėjimo vektorių $\bar{x}_1$ ir $\bar{x}_2$ koordinačių trajektorijos, duotos 92 lentelėje (tiksliau, 92 lentelėje duotos tų koordinačių reikšmės kiekvienai darbo dienai, turinčiai numerį $t=1, 2, \dots, 20$).

Sandėlio vidinių elementų trajektorijas galima aprašyti lentele, panašia į 93 lentelę, turinčią tiek pat stulpelių, kaip ir 93 lentelė, tik žymiai daugiau eilučių, nes sandėlininko įėjimų trajektorijų aprašymui reikėtų 36 eilučių: $(n+n \cdot m+n+n \cdot m+n \cdot m+n \cdot m+n \cdot m=3+6+3+6+6+6+6=36)$, sandėlininko išėjimų trajektorijų aprašymui – 33 eilučių $(n+n+n+n \cdot m+n \cdot m+n \cdot m+n \cdot m=3+3+3+6+6+6+6=33)$, kartotekos įėjimų trajektorijų aprašymui – 6 eilučių $(n+n=3+3=6)$, kartotekos išėjimo koordinačių trajektorijų aprašymui – 3 eilučių $(n=3)$, kartotekos fazinių trajektorijų aprašymui – 3 eilučių $(n=3)$, lentynų įėjimų trajektorijų aprašymui – 9 eilučių $(n+n \cdot m=3+6=9)$, lentynų išėjimo koordinačių trajektorijų aprašymui – 6 eilučių $(n \cdot m=6)$, lentynų fazinių trajektorijų aprašymui – 3 eilučių $(n=3)$, žurnalo įėjimų trajektorijų aprašymui – 12 eilučių $(n \cdot m+n \cdot m=6+6=12)$, žurnalo išėjimų trajektorijų aprašymui – taip pat 12 eilučių $(n \cdot m+n \cdot m=6+6=12)$, žurnalo fazinių trajektorijų aprašymui – 12 eilučių $(n \cdot m+n \cdot m=6+6=12)$, t. y. iš viso reikėtų 135 eilučių.

Tokia lentelė užimtų gana daug vietos, todėl tikslinga pabandyti sumažinti jos eilučių skaičių. Visų pirma, galima būtų nerašyti eilučių, atitinkančių vektorių $\bar{x}_5^{(S)}$, $\bar{x}_7^{(S)}$, $\bar{y}_7^{(S)}$, $\bar{x}_2^{(Z)}$, $\bar{y}_2^{(Z)}$ ir $\bar{z}_2^{(Z)}$ koordinačių reikšmes kiekvienai mėnesio dienai, nes limitai mėnesio bėgyje nesikeičia. Tokiu būdu lentelės eilučių skaičius sumažėtų 36 eilutėmis $(6 \cdot n \cdot m=6 \cdot 6=36)$ ir liktų jau tik 99 eilutės $(135-36=99)$.

Antra, galima pasinaudoti 92-os ir 93-os lentelių eilutėmis, nes daug vidinių trajektorijų sutampa su išorinėmis. Pavyzdžiui, $\bar{x}_3^{(S)} = \bar{y}_1^{(S)} = \bar{y}_3^{(S)} = \bar{x}_1^{(K)} = \bar{x}_1^{(L)} = \bar{x}_1$, iš kur išplaukia, jog visų šių vektorių koordinačių trajektorijos jau pavaizduotos pirmose trijose 92-os lentelės eilutėse ir jų kartoti jau nebereikia.

Analogiškai gauname, jog $\bar{x}_4^{(S)} = \bar{x}_2$, iš kur išplaukia, jog šių vektorių koordinačių trajektorijos jau aprašytos paskutinėse šešiose 92-os lentelės eilutėse.

Iš lygybių $\bar{z}^{(K)} = \bar{y}^{(K)} = \bar{x}_1^{(S)} = \bar{z}^{(L)} = \bar{z}_1$ gauname, jog šių vektorių koordinačių trajektorijos aprašytos pirmose trijose 93-os lentelės eilutėse.

Iš lygybių $\bar{y}_4^{(S)} = \bar{x}_2^{(L)} = \bar{y}^{(L)} = \bar{x}_2^{(S)} = \bar{y}_5^{(S)} = \bar{y}_6^{(S)} = \bar{x}_1^{(Z)} = \bar{y}$ gauname, jog šių vektorių koordinačių kitimo trajektorijos jau aprašytos paskutinėse šešiose 93-os lentelės eilutėse.

Iš lygybių $\bar{z}_1^{(Z)} = \bar{y}_1^{(Z)} = \bar{x}_6^{(S)} = \bar{z}_2$ gauname, jog šių vektorių koordinačių kitimo trajektorijos jau aprašytos 4-toje, 5-toje, 6-toje, 7-toje, 8-toje ir 9-toje 93-os lentelės eilutėse.

Tokiu būdu, belieka aprašyti tik vektorių $\bar{y}_2^{(S)}$ ir $\bar{x}_2^{(K)}$ koordinačių kitimo trajektorijas. Kadangi $\bar{x}_2^{(K)} = \bar{y}_2^{(S)}$, tai pakanka sudaryti lentelę vektoriaus $\bar{y}_2^{(S)}$ koordinatėms, t. y. pakanka trijų eilučių.

Iš sandėlininko makromodelio gauname, $y_{2,i}^{(S)} = \sum_{j=1}^m x_{2,i,j}^{(S)} = \sum_{j=1}^m y_{5,i,j}^{(S)}$, kur $i=1, 2, \dots, n$. Iš formulių, aprašančių sandėlio struktūrą, gauname, jog $y_{5,i,j}^{(S)} = y_{i,j}$, todėl $y_{2,i}^{(S)} = \sum_{j=1}^m y_{i,j}$.

Tai reiškia, kad vektoriaus $\bar{y}_2^{(S)}$ koordinačių trajektorijų lenteles gausime, sudėdami atitinkamas koordinačių $y_{i,j}$ trajektorijų eilutes, t. y. 93-os lentelės paskutinių šešių eilučių poras.

Taip ir sudaryta 94-oji lentelė.

94. lentelė

$\begin{matrix} & t \\ \backslash & y_{2,1}^{(S)} \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y_{2,1}^{(S)}(t)$	35	50	15	55	35	10	100	40	50	50	50	50	40	100	120	150	90	50	10	
$y_{2,2}^{(S)}(t)$	40	80	60	0	0	100	50	40	40	40	30	0	0	100	0	100	0	165	90	65
$y_{2,3}^{(S)}(t)$	90	110	50	0	200	0	200	90	100	10	0	100	100	0	50	100	150	0	0	0

Iš šios lentelės, kaip jau buvo minėta, mes galime gauti ir vektoriaus $\bar{x}_2^{(K)}$ koordinačių trajektorijas.

Tokiu būdu, mes aprašėme visas sandėlio vidinių elementų įėjimų, išėjimų ir fazines trajektorijas, išskyrus vektorius $\bar{x}_5^{(S)}$, $\bar{x}_7^{(S)}$, $\bar{y}_7^{(S)}$, $\bar{x}_2^{(Z)}$, $\bar{y}_2^{(Z)}$, $\bar{z}_2^{(Z)}$, kurių koordinatės nagrinėjamo laikotarpiu nekinta, t. y. visiems $t=1, 2, \dots, 19, 20$ galioja lygybės:

$$\bar{x}_5^{(S)}(t) = \bar{y}_7^{(S)}(t) = \bar{x}_2^{(Z)}(t) = (\emptyset; \emptyset; \emptyset; \emptyset; \emptyset; \emptyset),$$

$$\bar{z}_2^{(Z)}(t) = \bar{y}_2^{(Z)}(t) = \bar{x}_7^{(S)}(t) = (600; 550; 400; 600; 700; 650).$$

Jei į sandėlį kai kurios tos pačios rūšies medžiagos būtų pristatomos kelių tiekėjų, tai pasikeistų ne tik sandėlio įėjimo trajektorijų koordinačių skaičius, bet ir kai kurios vidinės sandėlio trajektorijos. Pavyzdžiui, sudarant sandėlio vidinio funkcionavimo matematinį aprašymą, tektų papildomai aprašyti sandėlininko pirmojo išėjimo koordinačių trajektorijas, sutampančias su kartotekos pirmojo įėjimo koordinačių trajektorijomis. Sandėlio vidinis modelis būtų dar sudėtingesnis, jei medžiagos, gaunamos iš skirtingų tiekėjų, būtų saugomos ir apskaitomos atskirai.

1.11.2.3. Baigtinio automato vidinio funkcionavimo matematinis aprašymas

Turėdami 1.10.3 skyrelyje sudarytą baigtinio automato vidinį matematinį modelį ir pasinaudodami 226 pav. įvestais automato vidinių elementų ($I_1, I_2, K_1, K_2, K_3, K_4, D_1, D_2, T$) bei jų polių (įėjimo ir išėjimo kontaktų $x^{(I_1)}, x^{(I_2)}, y^{(I_1)}, y^{(I_2)}, x_1^{(K_1)}, x_2^{(K_1)}, y^{(K_1)}, x_1^{(K_2)}, x_2^{(K_2)}, y^{(K_2)}$ ir t. t.) žymėjimais, galime analogiškai, kaip tai darėme 1.11.1.3., 1.11.1.4., 1.11.2.2. skyreliuose, apskaičiuoti baigtinio automato įėjimų, išėjimų ir fazinių trajektorijų pradines atkarpas (tų trajektorijų koordinačių reikšmes laiko momentais $t=1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12$), atitinkančias automato pradinę būseną $z(0)=0$ ir 1.11.1.3 – jo skyrelio 90-joje lentelėje duotą automato įėjimo trajektorijos $x(t)$ pradinę atkarpą. Tai galima padaryti, užpildant matricos (panašios į matricą, pavaizduotą 93-joje lentelėje, tik turinčios tiek eilučių, kiek įėjimų, išėjimų ir besikeičiančių būsenų turi vidiniai automato elementai) langelius visuose dvylikoje jos stulpelių, atitinkančių laiko momentus $t=1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12$.

Rekomenduoju skaitytojui šį darbą atlikti pačiam ir palyginti gautus rezultatus su 91-ja lentele, t. y. palyginti kai kurias vidines trajektorijas su išorinėmis baigtinio automato trajektorijomis.

Analogiškai galima apskaičiuoti ir 1.10.4. skyrelyje aprašyto kombinatorinio lygiagretaus veikimo sumatoriaus vidines trajektorijas.

1.11.3. Dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus išorinio ir vidinio funkcionavimo aprašymas

1.4.1. skyrelyje mes sudarėme DVS₃ makromodelį, o 1.10.4. skyrelyje – dvejetainio n-skilčio lygiagretaus veikimo sumatoriaus mikromodelį. Jei vietoje **lygiagretaus veikimo principo** pasinaudotume **nuoseklaus veikimo principu**, t. y. vietoje to, kad vienu metu („lygiagrečiai“) įvestume į sumatorių visus sudedamų dvejetainių skaičių skaitmenis, įvedinėtume tuos skaitmenis nuosekliai (eilės tvarka kiekviename takte po vieną skaitmenį nuo kiekvieno dėmens), pradedant nuo nulinės skilties, tai mes gautume dvejetainį nuoseklaus veikimo sumatorių, pavaizduotą 44 pav. (žiūr. 1.7.29 užduotį). Šio sumatoriaus veikimo aprašymui jau teks pasinaudoti būsenos sąvoka, kuri keisis priklausomai nuo to, ar, sudedant du dvejetainius skaitmenis, atsiranda, ar neatsiranda reikiamybė

įsiminti ir pernešti „dvejetainių dešimtukų“ vieneta į sekančią skiltį. Tokią „atmintį“ gali realizuoti vienas trigeris, kurio būsena z ir bus dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus būsena.

Tarkime, mums reikia sudėti du dvejetainius skaičius, turinčius po $n+1$ dvejetainių skaitmenų, t. y. rasti sumą $x_{1,n} x_{1,n-1} \dots x_{1,i+1} x_{1,i} x_{1,i-1} \dots x_{1,2} x_{1,1} x_{1,0} + x_{2,n} x_{2,n-1} \dots x_{2,i+1} x_{2,i} x_{2,i-1} \dots x_{2,2} x_{2,1} x_{2,0} = (x_{1,n} \cdot 2^n + \dots + x_{1,1} \cdot 2^1 + x_{1,0} \cdot 2^0) + (x_{2,n} \cdot 2^n + \dots + x_{2,1} \cdot 2^1 + x_{2,0} \cdot 2^0)$, kur $x_{1,i}$ – pirmojo dėmens i -osios skilties dvejetainis skaitmuo (0 ar 1), $x_{2,i}$ – antrojo dėmens i -osios skilties dvejetainis skaitmuo.

Pirmajame sudėties takte sudedami paskutiniai sumuojamų dvejetainių skaičių skaitmenys $x_{1,0}$ ir $x_{2,0}$ ir randamas paskutinis sumos skaitmuo y_0 . Šio takto gale sumatoriaus būsena, turėjusi reikšmę $z_0=0$ gauna reikšmę, kurią žymėsime z_1 . Ji apskaičiuojama taip: $z_1=1$, jei $x_{1,0}=1$ ir $x_{2,0}=1$, o visais kitais atvejais $z_1=0$.

Antrajame takte randama suma $x_{1,1}+x_{2,1}+z_1$, t. y. randamas sumos skaitmuo $y_1=x_{1,1} \oplus x_{2,1} \oplus z_1$ ir nauja sumatoriaus būsena $z_2=(x_{1,1} \wedge x_{2,1}) \vee (x_{1,1} \wedge z_1) \vee (x_{2,1} \wedge z_1)$. Dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus funkcionavimą galima aprašyti 95-ja lentele.

Iš šios lentelės nesunku gauti sumatoriaus išėjimo ir perėjimo funkcijų TDNF:

$$y_i = \bar{x}_{1,i} x_{2,i} \bar{z}_i \vee x_{1,i} \bar{x}_{2,i} \bar{z}_i \vee \bar{x}_{1,i} \bar{x}_{2,i} z_i \vee x_{1,i} x_{2,i} z_i,$$

$$z_{i+1} = x_{1,i} x_{2,i} \bar{z}_i \vee \bar{x}_{1,i} x_{2,i} z_i \vee x_{1,i} \bar{x}_{2,i} z_i \vee x_{1,i} x_{2,i} z_i.$$

Perėjimo funkciją galima supaprastinti. Gausime $z_{i+1} = x_{1,i} x_{2,i} \vee x_{2,i} z_i \vee x_{1,i} z_i$.

Gautos išėjimo ir perėjimo funkcijos rodo, jog dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus makromodelis gana nesudėtingas. Nesudėtingas ir jo mikromodelis bei tokio sumatoriaus veikimo algoritmą realizuojanti schema. Sudarysime ją.

Panašiu būdu, kaip buvo gauta 89-oji lentelė, iš 95-osios lentelės gausime 96-ąją lentelę, aprašančią trigerio įėjimo q_i priklausomybę nuo sumatoriaus įėjimų ir būsenos.

95. lentelė

$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	z_i	z_{i+1}	y_i
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

96. lentelė

$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	z_i	z_{i+1}	q_i
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Iš 96-osios lentelės gauname, jog $q_i = x_{1,i} x_{2,i} \bar{z}_i \vee \bar{x}_{1,i} \bar{x}_{2,i} z_i$.

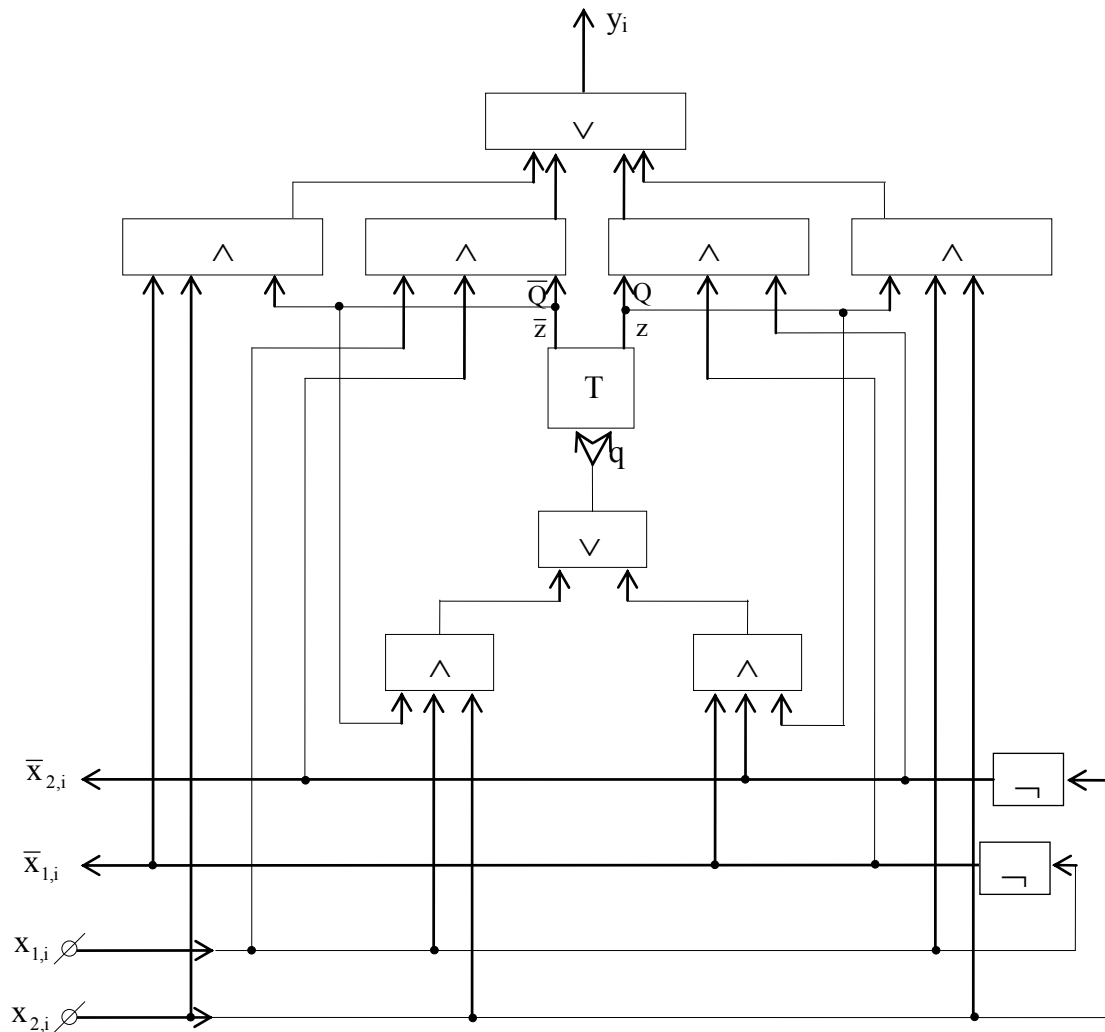
Žinodami funkcijas y_i ir q_i , galime sudaryti schemą, realizuojančią šio sumatoriaus veikimo algoritmą, t. y. aprašyti nuoseklaus veikimo dvejetainio aritmetinio sumatoriaus sudėtį ir vidinę struktūrą (žiūr. 232 pav.).

Kadangi šis sumatorius kiekviename veikimo takte t_i , kurio metu sudedami abiejų dėmenų i -osios skilties dvejetainiai skaitmenys $x_{1,i}$ ir $x_{2,i}$, gali būti tik vienoje iš dviejų galimų būsenų $z_i=0$ arba $z_i=1$, tai sumatoriaus būsenos įsiminimui ir atvaizdavimui pakanka tik vieno trigerio T .

To trigerio įėjimo funkcija $q_i = x_{1,i} x_{2,i} \bar{z}_i \vee \bar{x}_{1,i} \bar{x}_{2,i} z_i$ realizavimui reikalingi: 1) du invertoriai $y_1 = \bar{x}_1$ ir $y_2 = \bar{x}_2$, 2) du konjunktoriai, turintys po tris įėjimus ir 3) vienas disjunktorius, turintis du įėjimus, atitinkančius ką tik paminėtųjų konjunktorių išėjimus, ir vieną išėjimą, esantį trigerio įėjimu q .

Sumatoriaus išėjimo funkcijos $y_i = \bar{x}_{1,i} \bar{x}_{2,i} z_i \vee x_{1,i} \bar{x}_{2,i} \bar{z}_i \vee \bar{x}_{1,i} x_{2,i} \bar{z}_i \vee x_{1,i} x_{2,i} z_i$ realizavimui reikalingi: 1) keturi konjunktoriai, turintys po tris įėjimus, ir 2) vienas disjunktorius, turintis keturis įėjimus, atitinkančius čia ką tik paminėtų konjunktorių išėjimus, ir vieną išėjimą, esantį sumatoriaus išėjimu y_i .

Šios čia išvardintos elementarios schemas (trigeris, invertoriai, konjunktoriai ir disjunktoriai) sudaro nuoseklaus veikimo dvejetainio aritmetinio sumatoriaus sudėtį, o tų elementarių schemų sujungimas į sumatoriaus schemą, pavaizduotą 232 pav., – sumatoriaus struktūrą.



232 pav.

Turėdami dvejetainio nuoseklaus veikimo sumatoriaus makro ir mikromodelius, mes galime sudaryti išorines ir vidines sumatoriaus funkcionavimo trajektorijas, atitinkančias duotas sumatoriaus įėjimų trajektorijas – sudedamus dvejetainius skaičius.

97-oje lentelėje parodytas sumatoriaus išorinių trajektorijų sudarymo pavyzdys, kuriame duotoms įėjimų trajektorijoms $x_{1,i}(t)=x_1(iT)$ ir $x_{2,i}(t)=x_2(iT)$ randamos išėjimo ir fazinė trajektorijos $y_i(t)=y(iT)$ ir $z_i(t)=z(iT)$, kur $i=0, 1, 2, \dots, 15$ – sumatoriaus dėmenų skilčių numeriai, o T – sumatoriaus darbo takto, skirto dviejų dvejetainių skaitmenų sudėčiai, trukmė.

97. lentelė

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_{1,i}$	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
$x_{2,i}$	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
y_i	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
z_i	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Demonstruodami sumatoriaus vidinių trajektorijų sudarymo pavyzdį, rasime 97-ąją lentelę atitinkančias vieno iš sumatoriaus vidinių elementų – trigerio – įėjimo, fazinę ir išėjimų trajektorijas $q(t)=q(iT)$, $z(t)=z(iT)$, $Q(t)=Q(iT)$, $\bar{Q}(t)=\bar{Q}(iT)$, (žiūr. 98 lentelę), apskaičiuojamas naudojantis formulėmis: $q(iT)=x_1(iT)x_2(iT)\bar{z}(iT)\vee\bar{x}_1(iT)\bar{x}_2(iT)z(iT)$, $z[(i+1)T]=z(iT)\bar{q}(iT)\vee\bar{z}(iT)q(iT)$, $Q(iT)=z(iT)$, $\bar{Q}(iT)=\bar{z}(iT)$.

Panašiu būdu gali būti sudarytos ir kitų NVDS vidinių elementų įėjimų ir išėjimų trajektorijos (visų kitų NVDS elementų būsena nesikeičia, todėl jų fazinės trajektorijos trivios).

98. lentelė

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
q _i	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
z _i	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
Q _i	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$\overline{Q}_i$	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0

1.11.4. Išėjimo trajektorijų priklausomybė nuo įėjimo trajektorijų, esant fiksuotai pradinėi būsenai

1.1. skyriuje buvo pažymėta, jog objektą galima nagrinėti kaip siaurąją taip ir plačiąją prasme. Išorinis matematinis objekto modelis yra **objekto siaurąja prasme matematinis aprašymas**.

Jei objektą nagrinėtume plačiąja prasme, tai reiktų į jį žiūrėti ne vien tik kaip į objektą siaurąja prasme, bet ir kaip į procesą. Objekto išorinių trajektorijų sudarymas yra **objekto, kaip proceso, išorinis aprašymas**. Galima sakyti, **jog objekto išorinės trajektorijos $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ imituoja objekto išorinį funkcionavimą**.

Panašiai galima pasakyti ir apie sistemos vidinį matematinį modelį ir jos vidines trajektorijas. **Tai sistemos, kaip sudėtingo objekto ir sudėtingo proceso, aprašymai**, sudėtingo objekto sudėties ir struktūros ir sudėtingo proceso paprocesių modeliai. Galima sakyti, kad **sistemos elementų įėjimų, išėjimų ir fazinės trajektorijos imituoja sistemos vidinį funkcionavimą**.

Kartais tokius procesų modelius pavyksta, kaip tai buvo pailiustruota diferencijavimo grandelės pavyzdžiu, išreikšti klasikinės matematikos formulių kalba, kartais, kaip tai buvo daroma kuriant baigtinio automato modelį, tenka naudoti matematinės logikos aparatu, o kartais – ir kitomis informacinėmis priemonėmis: lentelėmis (matricomis), grafikais, algoritmais, ESM programomis, imituojančiomis modeliuojamų procesų eigą.

Kaip buvo parodyta ankstesniuose skyriuose, objekto išėjimo ir fazinės trajektorijos priklauso nuo objekto įėjimo trajektorijų ir nuo jo pradinės būsenos.

Jei **fiksuotume objekto pradinę būseną**, pavyzdžiui, nagrinėtume atvejį, kada $\bar{z}(0)=\vec{0}$, tai gautume, jog **objekto išėjimų ir fazinė trajektorijos vienareikšmiškai priklauso nuo įėjimo trajektorijų**. Tą objektyviai egzistuojančią priklausomybę galima išreikšti matematiškai.

Tarkime, jog sudarėme objekto, turinčio tolydų kalendorių ir vieną skaliarinį įėjimą bei vieną skaliarinį išėjimą, išorinį matematinį modelį, t. y. turime išėjimo ir perėjimo funkcijas: $y=\varphi(x, z)$, $\frac{dz(t)}{dt}=f(x(t), z(t))$.

Išsprendę diferencialinę lygtį $\frac{dz(t)}{dt}=f(x(t), z(t))$, galime rasti objekto fazinę trajektoriją $z(t)=F(z(0), x(t))=z(0)+\int_0^t f(x(t), z(t))dt$.

Istatę į objekto išėjimo funkciją fazinę ir įėjimo trajektorijas ir atsižvelgdami į tai, kad objekto pradinė būsena yra fiksuota (pavyzdžiui, $z(0)=0$), gausime objekto išėjimo trajektoriją $y(t)=\theta(x(t))$:

$$y(t)=\varphi(x(t), z(t))=\varphi(x(t), F(z(0), x(t)))=\Phi(z(0), x(t))=\theta(x(t)).$$

Pavyzdžiui, 1.11.1.1. skyrelyje mes gavome, jog diferencijavimo grandelės fazinė trajektorija yra $z(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left[z(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{RC}} dt \right]$, o išėjimo trajektorija yra $y(t) = x(t) - e^{-\frac{t}{RC}} \left[z(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t x(t) e^{\frac{t}{RC}} dt \right]$.

Esant duotai (fiksiuotai) pradinei grandelės būsenai $z(0)$, grandelės fazinė ir išėjimo trajektorijos $z(t)$ ir $y(t)$ yra įėjimo trajektorijos $x(t)$ funkcijos.

Jei objekto kalendorius diskretus ir jo diskretumo kvantas $\Delta t = T$, tai, naudodamiesi perėjimo funkcija $z(t + \Delta t) = \psi(z(t), x(t))$, gausime:

$$\begin{aligned} z(T) &= \psi(z(0), x(0)); \\ z(2T) &= \psi(z(T), x(T)) = \psi(\psi(z(0), x(0)), x(T)) = \psi_1(z(0), x(0), x(T)); \\ z(3T) &= \psi(z(2T), x(2T)) = \psi(\psi(z(T), x(T)), x(2T)) = \psi(\psi(\psi(z(0), x(0)), x(T)), x(2T)), \\ x(2T)) &= \psi_2(z(0), x(0), x(T), x(2T)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z((k+1)T) &= \psi(z(kT), x(kT)) = \dots = \psi(\psi(\dots(\psi(\psi(z(0), x(0)), x(T)), x(2T)), \dots, \\ x((k-1)T)), x(kT)) &= \psi_k(z(0), x(0), x(T), x(2T), \dots, x((k-1)T), x(kT)). \end{aligned}$$

Tai reiškia, jog kiekvieno fazinės trajektorijos taško koordinatė yra pradinės objekto būsenos ir visų ankstesnių įėjimo trajektorijos taškų koordinatės funkcija.

Įstatę šią fazinės trajektorijos taško koordinatės išraišką į išėjimo funkciją, gausime:

$$\begin{aligned} y((k+1)T) &= \varphi(z((k+1)T), x((k+1)T)) = \varphi(\psi(\psi(\dots(\psi(\psi(z(0), x(0)), x(T)), \dots, \\ x((k-1)T)), x(kT)), x((k+1)T)) &= \Phi(z(0), x(0), x(T), x(2T), \dots, x((k-1)T), x(kT), \\ x((k+1)T)). \end{aligned}$$

Gauti rezultatai rodo, jog, esant fiksuotai pradinei būsenai, į objekto išėjimo ir fazinę trajektorijas galima žiūrėti kaip į savo rūšies funkcijas, kurių argumentas – įėjimo trajektorija (diskrečiu atveju – tos trajektorijos taškai). Kaip pamatysime vėlesniuose skyreliuose, galima ieškoti ne tik išėjimo trajektorijos priklausomybės nuo įėjimo trajektorijos, bet ir išėjimo trajektorijos tam tikro integralo priklausomybės nuo įėjimo trajektorijos tam tikro integralo. Kai kuriais atvejais tai būna net patogiau, nes ta priklausomybė tiesiniams objektams nepriklauso nuo įėjimų ir yra pastovi tiesinio objekto charakteristika.

Pereisime prie tokių integralų, vadinamų **įėjimo ir išėjimo trajektorijų atvaizdais**, apskaičiavimo.

1.11.5. Operacinio skaičiavimo pagrindinės sąvokos

1.11.5.1. Laplaso ir Hevisaido transformacijos

Sukurta keletas specialių metodų, skirtų **ryšio tarp objekto įėjimo ir išėjimo trajektorijų, esant duotai pradinei būsenai, vaizdavimui ir išėjimo trajektorijų, atitinkančių duotas įėjimo trajektorijas, radimo procedūros supaprastinimui**.

Trumpai aprašysime vieną tokių metodų – taip vadinamos **perdavimo funkcijos metodą**, gana plačiai naudojamą, analizuojant ir projektuojant tiesines automatinio valdymo ir kitas tiesines sistemas. Šio metodo matematinio aparato pagrindą sudaro **operacinis skaičiavimas** [114]. Kadangi operacinio skaičiavimo kursas skaitomas ne visų specialybių studentams, tai šioje mokymo priemonėje tenka išdėstyti ir operacinio skaičiavimo pagrindus, skiriant šiai temai palyginti nemažai vietos ir laiko. Manau, kad tai pravers ir studentams, išklausiusiems operacinio skaičiavimo kursą, nes ir jie šiame skyrelyje suras kai ką naujo ir, svarbiausia, šiek tiek sistematizuos savo žinias šioje ne taip jau lengvoje temoje, kartu šiek tiek pakartodami **kompleksinio kintamojo funkcijų teoriją**.

Operacinis skaičiavimas tam tikra prasme panašus į logaritminį skaičiavimą. Logaritminiame skaičiavime perėjimas nuo dauginamų ar dalinamų skaičių prie jų logaritmų leidžia pakeisti skaičių daugybos ir dalybos operacijas paprastesnėmis logaritmų sudėties ir atimties operacijomis. **Operaciniame skaičiavime perėjimas nuo funkcijų prie tų funkcijų atvaizdų leidžia pakeisti funkcijų diferencijavimo ir integravimo operacijas paprastesnėmis operacijomis su jų atvaizdais ir vietoj diferencialinių ir integralinių lygčių sistemų spręsti algebrines lygtis.** Kai objekto išorinis matematinis modelis yra tiesinis, tai jo **išėjimų ir įėjimų trajektorijų atvaizdų santykis yra to objekto invariantė, nesikeičianti, keičiantis įėjimo trajektorijoms**, ir todėl tas santykis tampa dar viena to objekto išorinio matematinio modelio forma, vadinama **perdavimo funkcija**.

Taikant perdavimo funkcijos metodą objekto trajektorijų nagrinėjimui, priimama sąlyga, jog **momentas $t=0$ atitinka nagrinėjamo proceso pradžią ir jo pradinę būseną $z(0)=z_0$, o jo įėjimo ir išėjimo trajektorijos tenkina sąlygą: $x(t)=0$, $y(t)=0$, jei $t \leq -0$** . Pačiame taške $t=0$ funkcijos $x(t)$ ir $y(t)$ gali turėti bet kokias baigtines reikšmes ir net baigtinį trūkį, tačiau turi būti tenkinamos sąlygos:

$$x(+0)=\lim_{t \rightarrow 0} x(t); y(+0)=\lim_{t \rightarrow 0} y(t); x(t)=0 \text{ ir } y(t)=0, \text{ kai } t \leq -0.$$

(t>0) (t>0)

Šie reikalavimai nesudaro esminių apribojimų, nagrinėjant realius procesus. Tuos reikalavimus tenkina ir dauguma matematinių funkcijų $f(t)$, jei vietoj jų nagrinėti funkcijas $f(t) \cdot u(t)$, kur **funkcija $u(t)$** , vadinamoji „vienetinio šuoliuko funkcija“, apibrėžiama taip:

$$u(t)=\begin{cases} 0, & \text{jei } t \leq -0, \\ 1, & \text{jei } t \geq +0. \end{cases}$$

Su šia funkcija susidursime dar ne vieną kartą.*

Toliau šiame skyrelyje, kalbėdami apie kokią nors funkciją $f(t)$, turėsime omenyje būtent funkciją

$$f(t) \cdot u(t)=\begin{cases} 0, & \text{jei } t \leq -0, \\ f(t), & \text{jei } t \geq +0. \end{cases}$$

Kad funkcija $f(t)$, kurią toliau vadinsime **atvaizdo originalu (pirmavaizdžiu)**, galėtų turėti savo **atvaizdą $F(s)$** , reikalinga, jog ji **tenkintų dar dvi sąlygas**:

1) būtų **tolydi ar nors dalimis tolydi** visame intervale $t > 0$, t. y., kiekviename baigtiniame teigiamo argumento t intervale turėtų ne daugiau kaip baigtinį skaičių baigtinių (pirmojo tipo) trūkų;

* Funkcija $u(t)$ yra dalinis funkcijos $u(t-\tau)$ atvejis. Funkcijos $u(t-\tau)$ pavyzdys – funkcija, aprašanti baigtinio automato, turinčio dvi būsenas $z_0=0$ ir $z_1=1$, perėjimą momentu $t=\tau$ iš būsenos z_0 į būseną z_1 . Funkciją $u(t-\tau)$ taip pat galima laikyti atsitiktinio dydžio t skirstinio integralinės funkcijos $F(t)$ ribine forma, atitinkančia diskretų skirstinį, aprašomą tikimybėmis $P\{t \leq \tau-0\}=0$, $P\{t \geq \tau+0\}=1$. Funkcijos $u(t-\tau)$ išvestinę $\frac{du(t-\tau)}{dt}$ vadina delta funkcija ir žymi $\delta(t-\tau)$. Šią funkciją ir jos grafiką galima gauti,

pavyzdžiui, iš normalaus skirstinio tikimybinio tankio funkcijos $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}}$ ir jos grafiko, artinant

skirstinio kvadratinį nuokrypį σ prie ribos, lygios 0. Šios funkcijos grafiko pikas, kurio viršūnė yra taške $t=\tau$, vis siaurės ir aukštės, o plotas tarp grafiko ir abscisų ašies išliks pastovus ir lygus 1. Matematiškai

tai galima užrašyti taip: $\delta(t-\tau)=\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}}$, $\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t-\tau) dt = 1$, $\int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon} \delta(t-\tau) dt = 0$, $\int_{\tau+\varepsilon}^{+\infty} \delta(t-\tau) dt = 0$.

2) egzistuoja tokie realūs skaičiai $M > 0$ ir $\sigma_0 > 0$, kad visiems $t > 0$ galiojūt nelygybė $|f(t)| < M e^{\sigma_0 t}$, t. y., kad funkcija $f(t)$, didėjant t , **didėtų ne greičiau negu eksponentinė funkcija**.

Dauguma realiųjų procesų ir juos aprašančių funkcijų šias sąlygas tenkina.

Jei $f(t)$ tenkina aukščiau minėtas sąlygas, tai nesunku įrodyti, jog **egzistuoja integralas** $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$, kurio formulėje parametras $s = \sigma + i\omega$ – kompleksinis

skaičius, tenkinantis sąlygas: $\text{Re } s = \sigma \geq \sigma_0$, $\text{Im } s = \omega \geq 0$, o $i = \sqrt{-1}$.

Integralas $F(s)$ vadinamas **funkcijos $f(t)$ Laplaso atvaizdu**, o pats perėjimas nuo funkcijos prie jos atvaizdo – **Laplaso transformacija**. Laplaso transformacija dažnai žymima ženklu $\mathcal{L}$, o taip pat operatoriumi L : **$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, arba $F(s) = L[f(t)]$** .

Perėjimas nuo atvaizdo $F(s)$ prie jo originalo $f(t)$ vadinamas **atvirkštine Laplaso transformacija**.

Pasinaudodami Laplaso transformacijos apibrėžimu, **rasime kai kurių funkcijų Laplaso atvaizdus**, atsižvelgdami į tai, kad $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma + i\omega)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} [\cos \omega t - i \sin \omega t] = 0$, nes $\sigma > 0$.

$$1) \text{ Kai } f(t) = a = \text{const, tai } L[f(t)] = L[a] = \int_0^{\infty} a e^{-st} dt = -\frac{a}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{s}.$$

$$2) \text{ Kai } f(t) = kt + b, \text{ kur } k = \text{const ir } b = \text{const, tai } L[kt + b] = \int_0^{\infty} (kt + b) e^{-st} dt = k \int_0^{\infty} t e^{-st} dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} dt = k \left[t \cdot \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] + \frac{b}{s} = \frac{k}{s^2} + \frac{b}{s} = \frac{k + bs}{s^2}.$$

$$3) \text{ kai } f(t) = t^n, \text{ kur } n - \text{sveikas teigiamas skaičius, tai } L[t^n] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = t^n \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \frac{n}{-s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} L[t^{n-1}], \text{ iš kur išplaukia } L[t^n] = \frac{n(n-1)}{s^2} L[t^{n-2}] = \frac{n(n-1)(n-2)}{s^3} L[t^{n-3}] = \dots = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 4 \cdot 3}{s^{n-2}} L[t^2] = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2}{s^{n-1}} L[t] = \frac{n!}{s^n} L[1] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

$$4) \text{ Kai } f(t) = e^{at}, \text{ kur } a = \text{const, tai } L[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty}.$$

Kadangi pagal s apibrėžimą $\text{Re } s = \sigma$ parenkamas didesnis už bet kurį σ_0 iš nelygybės $|f(t)| < M e^{\sigma_0 t}$, tai $\text{Re}(s-a) > 0$ ir $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-a)t} = 0$. Todėl $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$.

$$5) \text{ Kai } f(t) = A \cos \omega t, \text{ tai } L[A \cos \omega t] = \int_0^{\infty} A \cos \omega t e^{-st} dt = \frac{A}{2} \int_0^{\infty} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-st} dt = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{-(s-i\omega)} e^{-(s-i\omega)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{-(s+i\omega)} e^{-(s+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right] = \frac{A}{2} \cdot \frac{s+i\omega + s-i\omega}{s^2 + \omega^2} = A \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

$$6) \text{ Kai } f(t) = A \sin \omega t, \text{ tai } L[A \sin \omega t] = \int_0^{\infty} A \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{-(s-i\omega)} e^{-(s-i\omega)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-(s+i\omega)} e^{-(s+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right] = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

7) Pasinaudodami tuo pačiu metodu, kuriuo naudodamiesi išvedėme formulę

$$L[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ gautume, jog } L[t^n e^{\lambda t}] = \int_0^\infty t^n e^{\lambda t} e^{-st} dt = \int_0^\infty t^n e^{-(s-\lambda)t} dt = \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} 8) \quad L[t \cos \omega t] &= \int_0^\infty t \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty t e^{i\omega t} e^{-st} dt + \int_0^\infty t e^{-i\omega t} e^{-st} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty t e^{-(s-i\omega)t} dt + \int_0^\infty t e^{-(s+i\omega)t} dt \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-i\omega)^2} + \frac{1}{(s+i\omega)^2} \right] = \frac{(s+i\omega)^2 + (s-i\omega)^2}{2(s-i\omega)^2(s+i\omega)^2} = \\ &= \frac{2s^2 - 2\omega^2}{[s(s-i\omega)(s+i\omega)]^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

$$9) \quad L[t \sin \omega t] = \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty t e^{-(s-i\omega)t} dt - \int_0^\infty t e^{-(s+i\omega)t} dt \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(s-i\omega)^2} - \frac{1}{(s+i\omega)^2} \right] = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} 10) \quad L[t^n \cos \omega t] &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty t^n e^{-(s-i\omega)t} dt + \int_0^\infty t^n e^{-(s+i\omega)t} dt \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}} + \frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{n!}{2(s^2 + \omega^2)^{n+1}} [(s+i\omega)^{n+1} + (s-i\omega)^{n+1}] = \frac{n!}{2(s^2 + \omega^2)^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s^{n+1-k} (i\omega)^k + \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s^{n+1-k} (-i\omega)^k \right] = \\ &= \frac{n!}{2(s^2 + \omega^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s^{n+1-k} \omega^k [i^k + (-i)^k]. \end{aligned}$$

$$\text{Kadangi } i^k + (-i)^k = \begin{cases} 2, \text{ kai } k = 4m, m = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, \text{ kai } k = 4m + 1, \\ -2, \text{ kai } k = 4m + 2, \\ 0, \text{ kai } k = 4m + 3, \text{ tai} \end{cases}$$

$$L[t^n \cos \omega t] = \frac{n!}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}} \left[s^{n+1} - \frac{(n+1)n}{2} s^{n-1} \omega^2 + C_{n+1}^4 s^{n-3} \omega^4 - C_{n+1}^6 s^{n-5} \omega^6 + \dots \right].$$

$$\text{Kai } n=1, \text{ tai gauname } L[t \cos \omega t] = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \left[s^2 - \frac{2 \cdot 1}{2} s^{1-1} \omega^2 \right] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \text{ Šis rezultatas}$$

sutampa su anksčiau gautu rezultatu.

$$\text{Kai } n=2, \text{ tai } L[t^2 \cos \omega t] = \frac{2}{(s^2 + \omega^2)^3} \left[s^3 - \frac{3 \cdot 2}{2} s^{2-1} \omega^2 \right] = \frac{2(s^2 - 3s\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}.$$

$$\text{Kai } n=3, \text{ tai } L[t^3 \cos \omega t] = \frac{6}{(s^2 + \omega^2)^4} \left[s^4 - \frac{4 \cdot 3}{2} s^2 \omega^2 + C_4^4 \omega^4 \right] = \frac{6(s^4 - 6s^2 \omega^2 + \omega^4)}{(s^2 + \omega^2)^4} \text{ ir t. t.}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad L[t^n \sin \omega t] &= \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty t^n e^{-(s-i\omega)t} dt - \int_0^\infty t^n e^{-(s+i\omega)t} dt \right] = \frac{n!}{2i} \cdot \frac{(s+i\omega)^{n+1} - (s-i\omega)^{n+1}}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{n!}{2i(s^2 + \omega^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s^{n+1-k} \omega^k [i^k - (-i)^k] \end{aligned}$$

$$\text{Kadangi } i^k - (-i)^k = \begin{cases} 0, \text{ kai } k = 4, m = 0, 1, 2, \dots \\ 2i, \text{ kai } k = 4m + 1, \\ 0, \text{ kai } k = 4m + 2, \\ -2i, \text{ kai } k = 4m + 3, \end{cases} \text{ tai}$$

$$L[t^n \sin \omega t] = \frac{n!}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}} [C_{n+1}^1 s^n \omega - C_{n+1}^3 s^{n-2} \omega^3 + C_{n+1}^5 s^{n-4} \omega^5 - \dots].$$

Kai $n=1$, tai $L[\sin \omega t] = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} C_2 s \omega = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$. Šis rezultatas sutampa su anksčiau gautu rezultatu.

$$\text{Kai } n=2, \text{ tai } L[t^2 \sin \omega t] = \frac{2}{(s^2 + \omega^2)^3} [C_3 s^2 \omega - C_3^3 s^{2-2} \omega^3] = \frac{2(3s^2 \omega - \omega^3)}{(s^2 + \omega^2)^3}.$$

12) Rasime **impulsinės funkcijos** $\delta(t)=u'(t)$, vadinamos „**delta funkcija**“^{*} ir turinčios savybę, jog ji lygi 0 visuose taškuose, išskyrus tašką $t=0$, kuriame funkcija $u(t)$ turi baigtinį trūkį (funkcijos $u(t)$ reikšmė daro „vienetinį“ šuoliuką), atvaizdą.

Pradžioje rasime $L[\delta(t-\tau)]$, kai $\tau > 0$ yra konstanta. Kadangi $\delta(t-\tau)dt = u'(t-\tau)dt = du(t-\tau)$, tai

$$L[\delta(t-\tau)] = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u'(t-\tau) e^{-st} dt = u(t-\tau) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} u(t-\tau) e^{-st} dt = 0 - u(-\tau) +$$

$$+ s \int_0^{\infty} u(t-\tau) e^{-st} dt = 0 + s \int_0^{\tau} u(t-\tau) e^{-st} dt + s \int_{\tau}^{\infty} u(t-\tau) e^{-st} dt = s \int_0^{\tau} 0 \cdot e^{-st} dt + s \int_{\tau}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{s}{-s} e^{-st} \Big|_{\tau}^{+\infty} = e^{-s\tau}.$$

Priėmę, jog $\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-st} dt$, gauname, jog $L[\delta(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-s\tau} = 1$.

13) Rasime funkcijos $f(t)=\delta'(t)=u''(t)$ atvaizdą.

Pradžioje rasime funkcijos $\delta'(t-\tau)$ atvaizdą, kur $\tau > 0$ yra konstanta.

$$L[\delta'(t-\tau)] = \int_0^{\infty} \delta'(t-\tau) e^{-st} dt = \delta(t-\tau) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-st} dt = 0 - \delta(-\tau) \cdot 1 + s \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-st} dt =$$

$$= 0 + sL[\delta(t-\tau)] = se^{-s\tau}.$$

Priėmę, jog $L[\delta'(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} L[\delta'(t-\tau)]$, gausime, kad $L[\delta'(t)] = s$.

14) Rasime $L[\delta''(t-\tau)]$, kur $\tau > 0$, o taip pat ir $L[\delta''(t)]$.

$$L[\delta''(t-\tau)] = \int_0^{\infty} \delta''(t-\tau) e^{-st} dt = \delta'(t-\tau) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} \delta'(t-\tau) e^{-st} dt = 0 - \delta'(-\tau) \cdot 1 +$$

$$+ sL[\delta'(t-\tau)] = s^2 e^{-s\tau}.$$

$$L[\delta''(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} L[\delta''(t-\tau)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} s^2 e^{-s\tau} = s^2.$$

15) Analogiškai galime gauti, jog $L[u^{(n)}(t)] = L[\delta^{(n-1)}(t)] = s^{n-1}$, kai $n=0, 1, 2, 3, \dots$, kur $u^{(n)}(t)$ – funkcijos $u(t)$ n -tosios eilės išvestinė.

Formulė $L[u^{(n)}(t)] = s^{n-1}$ apibendrina formules, gautas atvejuose (12)–(14), ir įrodoma matematinės indukcijos metodu.

$$16) L[e^{\lambda t} \cos \omega t] = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-(s-\lambda)t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{-[(s-\lambda)-i\omega]t} dt + \int_0^{\infty} e^{-[(s-\lambda)+i\omega]t} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-\lambda)-i\omega} e^{-[(s-\lambda)-i\omega]t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{-(s-\lambda)+i\omega} e^{-[(s-\lambda)+i\omega]t} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-\lambda)-i\omega} + \frac{1}{(s-\lambda)+i\omega} \right] =$$

$$= \frac{s-\lambda+i\omega+s-\lambda-i\omega}{2[(s-\lambda)^2+\omega^2]} = \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}.$$

* Funkciją $\delta(t)=u'(t)$ fizikai vadina dar ir Dirako delta funkcija, t.y. anglų fiziko P. A. M. Dirako

(P. A. M. Dirac) vardu. Delta funkciją, kaip jau buvo minėta, galima interpretuoti kaip $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, t.y. kaip normalaus skirstinio tikimybinio tankio funkcijos ribą, kai kvadratinis nuokrypis σ artėja prie 0.

Akivaizdu, jog $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1$ ir $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t-\tau) dt = \varphi(\tau)$.

Šią formulę buvo galima išvesti ir trumpesniu būdu, pasinaudojant formule $L[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, nes integralas $\int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-(s-\lambda)t} dt$ skiriasi nuo integralo $\int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt$ tik tuo, jog daugiklis e^{-st} pakeistas daugikliu $e^{-(s-\lambda)t}$, t. y. kad to daugiklio rodiklio daugiklis s pakeistas daugikliu $\lambda - s$. Todėl $L[e^{\lambda t} \cos \omega t]$ formulę galima gauti iš $L[\cos \omega t]$ formulės, pakeitus s į $s - \lambda$.

$$17) L[e^{\lambda t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}.$$

$$18) L[\sin(\omega t + \varphi)] = L[\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi] = \cos \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}, \text{ kur } \psi = \arctg \frac{\omega}{s}, \frac{\omega}{\sqrt{s^2 + \omega^2}} = \sin \psi, \frac{s}{\sqrt{s^2 + \omega^2}} = \cos \psi.$$

$$19) L[\sin(\omega t - \varphi)] = L[\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi] = \cos \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \cos \varphi - s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}, \text{ kur } \psi = \arctg \frac{\omega}{s}.$$

$$20) L[\cos(\omega t - \varphi)] = L[\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi] = \cos \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \sin \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} = \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}, \text{ kur } \psi = \arctg \frac{\omega}{s}.$$

$$21) L[\cos(\omega t + \varphi)] = L[\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] = \cos \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \sin \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} = \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}, \text{ kur } \psi = \arctg \frac{\omega}{s}.$$

$$22) L[\cos^3 \omega t] = \int_0^{\infty} \cos^3 \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right]^3 e^{-st} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} (e^{i3\omega t} + 3e^{i\omega t} + 3e^{-i\omega t} + e^{-i3\omega t}) e^{-st} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} (\cos 3\omega t + 3\cos \omega t) e^{-st} dt = \frac{1}{4} \left[\frac{s}{s^2 + 9\omega^2} + 3 \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{s}{4} \left(\frac{1}{s^2 + 9\omega^2} + \frac{3}{s^2 + \omega^2} \right).$$

Galima sudaryti **funkcijų – originalų ir jų atvaizdų lentelę** ir ja naudotis, panašiai, kaip naudojamos pagrindinių integralų lentelės. Tokių lentelių pavyzdžių galima rasti knygoje [114], o taip pat įvairiuose matematikos žinynuose.

Dažnai (ypatingai, inžinerinėje praktikoje) vietoje Laplaso transformacijos vartojama **Hevisaido** (vadinama taip pat **Karsono–Hevisaido**, o kartais – tiesiog

Karsono) transformacija: $F(p) = H[f(t)] = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, kur $p = s = \sigma + i\omega$.

Hevisaido transformacija $F(p) = H[f(t)]$ skiriasi nuo Laplaso transformacijos $F(s) = L[f(t)]$ ne tik tuo, kad transformacijos parametras vienu atveju žymimas p , o kitu – ženkleliu s (literatūroje šios taisyklės dažnai nesilaikoma ir, pavyzdžiui, neretai $F(p)$ reiškia $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$), bet, o tai – svarbiausia, ir **daugikliu p prieš integralą**.

Todėl kai $f(t) = a = \text{const}$ ir $L[a] = \frac{a}{s}$, tai $H[a] = a$, t. y. **Hevisaido transformacija konstantą transformuoja į tą pačią konstantą, nekeisdama dydžių dimensijos. Tai**

ir yra pagrindinė priežastis, dėl kurios Hevisaido transformacija dažniau naudojama inžineriniuose moksluose, kai tuo tarpu matematikoje dažniau naudojama Laplaso transformacija.

Perėjimas nuo Laplaso atvaizdo prie Hevisaido atvaizdo labai paprastas: pakanka Laplaso atvaizde parametą s pakeisti į p ir gautą reiškinį padauginti iš p . Ir atvirkščiai: pereinant nuo Hevisaido atvaizdo prie Laplaso atvaizdo pakanka p pakeisti į s ir gautą reiškinį padalinti iš s .

$$\text{Todėl } H[e^{-at}] = \frac{p}{p+a}, H[t^n] = \frac{n!}{p^n}, H[u(t)] = 1, H[\delta(t)] = p, H[u^{(n)}(t)] = p^n.$$

Kai $f(t) = t^\alpha$, kur α – bet koks realus (nebūtinai – sveikas) skaičius, nelygus $-1, -2, -3, \dots, -n, -(n+1), \dots$, tai $H[t^\alpha] = p \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} dt = p \int_0^\infty \left(\frac{x}{p}\right)^\alpha e^{-x} \frac{1}{p} dx = \frac{1}{p^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \frac{1}{p^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha+1)$, kur $pt = x$, $t = \frac{x}{p}$,

$dt = \frac{1}{p} dx$, $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$ – speciali matematinės analizės funkcija, vadinama **gama funkcija**.

Kai α – sveikas teigiamas skaičius n , tai $\Gamma(\alpha+1) = n!$, nes $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -\int_0^\infty x^n de^{-x} = -\left[x^n e^{-x} - \int_0^\infty e^{-x} dx^n \right] = -\left[0 - 0 - n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \right] = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = n! \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = n!(-e^{-x})|_0^\infty = n!$.

Funkcija $\Gamma(\alpha+1)$ turi savybę $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, analogišką faktorialo savybei $n! = n(n-1)!$. Įrodysime tai: $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = -\int_0^\infty x^\alpha de^{-x} = -\left[x^\alpha e^{-x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx^\alpha = -\left[0 - 0 - \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right] = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Naudodamiesi šia savybe, apskaičiuosime $L[t^{3,5}]$:

$$L[t^{3,5}] = \int_0^\infty t^{3,5} e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{3,5} e^{-\frac{x}{s}} \frac{1}{s} d\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^{4,5}} \int_0^\infty x^{3,5} e^{-x} dx = \frac{1}{s^{4,5}} \Gamma(4,5) = \frac{3,5 \cdot \Gamma(3,5)}{\sqrt{s^9}} = \frac{3,5 \cdot 2,5 \cdot \Gamma(2,5)}{\sqrt{s^9}} = \frac{3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot \Gamma(1,5)}{\sqrt{s^9}} = \frac{3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot \Gamma(0,5)}{\sqrt{s^9}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^4 \sqrt{s^9}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7!}{2(3!)2^4 \sqrt{s^9}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7! \Gamma(\frac{1}{2})}{3!2^5 \sqrt{s^9}}.$$

Apskaičiuosime $\Gamma(\frac{1}{2})$ reikšmę:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int_0^\infty (y^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-y^2} dy^2 = \int_0^\infty y^{-1} e^{-y^2} \cdot 2y dy = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

$$\begin{aligned} \text{Integralo } K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \text{ apskaičiavimui pasinaudosime lygybe } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = K^2 \text{ ir lygybe } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} \sigma d\sigma = \frac{2\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma^2 = \\ = \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du = -\pi(e^{-u})|_0^{+\infty} = \pi. \text{ Kadangi } K = \sqrt{I}, \text{ tai } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \text{ ir } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{Todėl } L[t^{3,5}] = \frac{7!}{3!2^5 \sqrt{s^9}} \sqrt{\pi}, \text{ o } H[t^{3,5}] = \frac{7! \sqrt{\pi}}{2^5 3! \sqrt{p^7}}.$$

$$\text{Analogiškai randame, jog } L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = L[t^{-0,5}] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s}, \text{ o } H[\sqrt{t}] = H\left[t^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{p}}.$$

1.11.5.2. Laplaso ir Hevisaido transformacijų pagrindinės savybės

Lengvai įrodoma, jog **Laplaso ir Hevisaido transformacijos yra tiesinės**: kai $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(t)$, kur a_k – pastovūs koeficientai, tai $F(s) = L[f(t)] = \sum_{k=1}^n a_k L[f_k(t)] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(s)$ ir $F(p) = H[f(t)] = \sum_{k=1}^n a_k H[f_k(t)] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(p)$.

Ši savybė išplaukia iš to, kad Laplaso ir Hevisaido atvaizdai yra integralai, ir kad pastovų integruojamos funkcijos daugiklį galima iškelti prieš integralą, o sumos integralas lygus integralų sumai. Kitaip tariant, **Laplaso ir Hevisaido transformacijų operatoriai, būdami integraliniais operatoriais, yra tiesiniai todėl, kad pats integralas kaip integravimo operatorius yra tiesinis operatorius**.

Laplaso ir Hevisaido transformacijos turi ne tik šią, bet dar daug kitų įdomių ir naudingų savybių. Tai ir leidžia įvesti anksčiau minėtąjį operacinį skaičiavimą.

Vieną tokių savybių vaizduoja **originalo diferencijavimo formulės**:

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) \text{ ir } H[f'(t)] = p(H[f(t)] - f(0)).$$

Įrodysime pirmąją iš jų, pasinaudodami integravimo dalimis formule $\int u dv = uv - \int v du$.

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t) = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d(e^{-st}) = 0 - f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = sL[f(t)] - f(0).$$

Iš šios formulės išplaukia, jog $L[f''(t)] = L[(f'(t))'] = sL[f'(t)] - f'(0) = s(sL[f(t)] - f(0)) - f'(0) = s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0)$, $L[f'''(t)] = s^3 L[f(t)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$ ir t. t., t. y. $L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$. Ši formulė įrodoma matematinės indukcijos metodu.

Analogiškai galima gauti, kad $H[f^{(n)}(t)] = p^n H[f(t)] - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - p^2 f^{(n-2)}(0) - pf^{(n-1)}(0) = p^{n-1} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - pf^{(n-1)}(0)$.

Kai $f(t)$ ir visos jos išvestinės tenkina **nulines pradines sąlygas** $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(0) = 0$, tai originalo diferencijavimo formulės tampa dar paprastesnės: $L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)]$; $H[f^{(n)}(t)] = p^n H[f(t)]$, t. y. **originalo diferencijavimą atitinka jo atvaizdo dauginimas iš daugiklio s (arba p)**.

Ką tik išvestos formulės leidžia ne tik pakeisti diferencijavimą daugyba, bet ir gana nesunkiai surasti kai kurių sudėtingesnių funkcijų atvaizdus.

Tarkime, jog $f(t) = \sin \omega t$. Tuomet $f'(t) = \omega \cos \omega t$, o $f''(t) = -\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 f(t)$.

Iš lygybės $f''(t) = -\omega^2 f(t)$, abiejose tos lygybės pusėse pereinami prie atvaizdų, gauname:

$$s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0) = -\omega^2 L[f(t)], \text{ iš kur išplaukia: } L[f(t)] = \frac{sf(0) + f'(0)}{s^2 + \omega^2}.$$

Kadangi tuo atveju, kai $f(t) = \sin \omega t$, turime, jog $f(0) = 0$, o $f'(0) = \omega$, tai gauname, kada $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, kas sutampa su 1.11.5.1. skyrelyje gautu rezultatu.

Analogiškai gauname, jog $L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, nes ir $f(t) = \cos \omega t$ galioja lygybė $f''(t) = -\omega^2 f(t)$.

Kai $f(t) = t \sin \omega t$, tai $f'(t) = \sin \omega t + \omega t \cos \omega t$, o $f''(t) = \omega \cos \omega t + \omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t)$.

Pereidami prie atvaizdų, randame, jog $(s^2 + \omega^2) \cdot L[f(t)] = sf(0) + f(0) + 2\omega \cdot L[\cos \omega t]$, iš kur išplaukia, jog $L[t \cdot \sin \omega t] = \frac{2\omega \cdot s}{(s^2 + \omega^2)^2}$. Šis atvaizdas sutampa su 1.11.5.1. skyrelyje gautu rezultatu.

Kai $f(t) = t \cdot \cos \omega t$, analogiškai gauname: $f'(t) = \cos \omega t - \omega t \cdot \sin \omega t$, $f''(t) = -\omega \cdot \sin \omega t - \omega \cdot \sin \omega t - \omega^2 t \cdot \cos \omega t = -2\omega \cdot \sin \omega t - \omega^2 f(t)$, iš kur $L[t \cdot \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$. Tokį rezultatą 1.11.5.1. skyrelyje mes jau buvome gavę, tačiau žymiai sudėtingesniu metodu.

Pasinaudodami šiuo metodu ir jau išvestomis formulėmis, galime apskaičiuoti, jog $L[t^2 \cdot \sin \omega t] = 2\omega \cdot \frac{3s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^3}$ ir t. t. Pažymėtina, jog, naudodamiesi šiuo metodu, mes galime išvengti sudėtingų integralų apskaičiavimo.

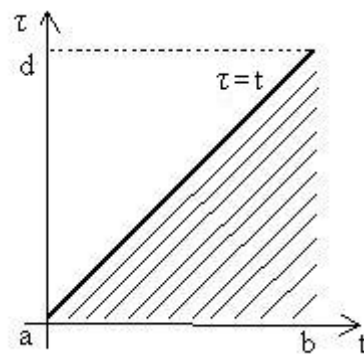
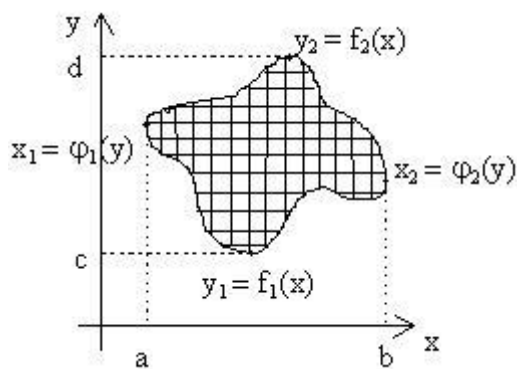
Svarbią Laplaso ir Hevisaido transformacijų savybę vaizduoja **integralo atvaizdo formulė**.

Nesunku įrodyti, jog **funkcijos–originalo integravimą atitinka jos atvaizdo dalyba**, t. y., jog $L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} L[f(t)]$, o taip pat $H\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p} H[f(t)]$.

Šių formulių įrodymui pasinaudosime integravimo tvarkos keitimo formule, taip vadinama Dirichlė formule.

Kaip parodyta 233 pav. pirmajame brėžinėlyje, funkcijos $g(x, y)$ integralą užstrichuotame plotelyje galima rasti dviem būdais:

$$I = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x, y) dy \cdot dx = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} g(x, y) dx \cdot dy \quad (*)$$



233 pav.

Antrajame brėžinėlyje: $x \sim t$, $y \sim \tau$, $b = d$, $c = a = 0$, vietoj $y_1 = f_1(x)$ turime $\tau_1 = 0$, vietoj $y_2 = f_2(x)$, turime $\tau_2 = t$, vietoj $x_1 = \varphi_1(y) = y$ turime $t_1 = \tau$, vietoj $x_2 = \varphi_2(y)$ turime $t_2 = b$. Todėl, įvedę šiuos pakeitimus į integralo I išraišką (*), gauname:

$$I = \int_0^b \int_0^t g(t, \tau) d\tau dt = \int_0^b \int_0^b g(x, y) dx dy \quad \text{— Dirichlė formulė, kuri, kai } b \rightarrow \infty, \text{ tampa}$$

$$\text{formule } \int_0^\infty \int_0^t g(t, \tau) d\tau dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty g(t, \tau) dt d\tau.$$

$$\text{Kadangi } \int_0^t f(t) dt = \int_0^t f(\tau) d\tau, \text{ tai } L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) e^{-st} dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau) e^{-st} dt d\tau.$$

$$\text{Pasinaudodami Dirichlė formule gauname, kad } L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] =$$

$$= \int_0^t \int_0^\tau f(\tau) e^{-st} d\tau dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau) e^{-st} dt d\tau = \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_\tau^\infty e^{-st} dt \right) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_\tau^\infty d\tau = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} L[f(t)], \text{ k\aa ir reik\ija įrodyti.}$$

Analogiškai gauname, kad $H \left[\int_0^t f(t) dt \right] = H \left[\int_0^t f(z) dz \right] = p \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\lambda) d\lambda \right] e^{-pt} dt =$

$$= p \int_0^\infty \int_0^t f(\lambda) e^{-pt} d\lambda dt = p \int_0^\infty \int_t^\infty f(\lambda) e^{-pt} dt d\lambda = p \int_0^\infty f(\lambda) \left[\int_t^\infty e^{-pt} dt \right] d\lambda = p \int_0^\infty f(\lambda) \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_t^\infty \right] d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty f(\lambda) e^{-pt} d\lambda = \frac{1}{p} \left(p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right) = \frac{1}{p} H[f(t)].$$

Nesunkiai įrodoma ir taip vadinamoji **sąsūkos savybė**:

kai $f_1(t) > F_1(s)$ ir $f_2(t) > F_2(s)$, tai $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau > F_1(s) \cdot F_2(s)$.

Jei naudotume Hevisaido transformaciją $f_1(t) > F_1(p)$, $f_2(t) > F_2(p)$, tai gautume

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau > \frac{F_1(p) \cdot F_2(p)}{p}, \text{ iš kur išplaukia, jog } \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau > F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Įrodysime sąsūkos savybę Hevisaido transformacijai:

$$H \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = p \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-pt} dt = p \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} d\tau \right] dt =$$

$$= p \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} dt d\tau = p \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right] d\tau.$$

Integrale $\int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt} dt$ pakeisime kintamąjį t į $u=t-\tau$. Tuomet $t=u+\tau$, $dt=du$

ir kai $t=\tau$, tai $u=0$, o kai $t \rightarrow \infty$, tai ir $u \rightarrow \infty$. Todėl $\int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f_2(u) e^{-p(u+\tau)} du =$

$$= e^{-p\tau} \int_0^\infty f_2(u) e^{-pu} du = \frac{1}{p} e^{-p\tau} p \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} e^{-p\tau} H[f_2(t)] = \frac{1}{p} e^{-p\tau} F_2(p).$$

Įstatę gautąją reikšmę į sąsūkos atvaizdo formulę, gauname:

$$H \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = p \int_0^\infty f_1(t) \left[\int_0^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right] d\tau = p \int_0^\infty f_1(\tau) \frac{1}{p} e^{-p\tau} F_2(p) d\tau =$$

$$= \frac{1}{p} F_2(p) p \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p} F_2(p) \cdot F_1(p), \text{ k\aa ir reik\ija įrodyti.}$$

Panašiai įrodoma ir formulė $L \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)]$.

Lengvai įrodoma ir **vėlinimo savybė**:

$$f(t-\tau) \cdot u(t-\tau) > e^{-s\tau} \cdot F(s), \text{ t. y. } L[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau)u(t-\tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} L[f(t)],$$

$$f(t-\tau) \cdot u(t-\tau) > e^{-p\tau} \cdot F(p), \text{ t. y. } H[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-p\tau} H[f(t)], \text{ kur } f(t) \cdot u(t) > F(s) \text{ (arba)}$$

$f(t) \cdot u(t) > F(p)$), o $f(t-\tau)$ sutampa su $f(t)$, „pastumta“ τ laiko vienetų (pavyzdžiui, jei $\tau=3$, tai $f(t-\tau)=0$, kol $t < 3$, o kai $t=3$, tai $f(t-\tau)$ turi tą pačią reikšmę, kaip ir $f(0)$, kai $t=4$, tai $f(t-\tau)$ lygi $f(1)$ ir t. t.).

Įrodysime vėlinimo savybę Laplaso transformacijai, pereidami nuo vėluojančio argumento $t-\tau$ prie kintamojo $v=t-\tau$, t. y. nuo t prie $t=v+\tau$ ir nuo dt prie dv :

$$L[f(t-\tau) \cdot u(t-\tau)] = \int_0^{\infty} f(t-\tau) \cdot u(t-\tau) e^{-st} dt = \int_{-\tau}^{\infty} f(v) u(v) e^{-s(v+\tau)} dv = \int_{-\tau}^0 0 \cdot e^{-s(v+\tau)} dv + \\ + \int_0^{\infty} f(v) e^{-s(v+\tau)} dv = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} f(v) e^{-sv} dv = e^{-s\tau} \cdot L[f(t)] = e^{-s\tau} \cdot F(s).$$

Analogiškai ši savybė įrodoma ir Hevisaido transformacijai. Gauname, jog $H[f(t-\tau) \cdot u(t-\tau)] = e^{-p\tau} H[f(t)] = e^{-p\tau} F(p)$.

Yra ir kitų įdomių ir naudingų Laplaso ir Hevisaido transformacijų savybių, kurios nagrinėjamos ir naudojamos operaciniame skaičiavime:

a) **panašumo teorema**, teigianti, kad, jei $L[f(t)] = F(s)$, tai $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$, ir, jei $H[f(t)] = F(p)$, tai $H[f(at)] = F\left(\frac{p}{a}\right)$;

b) **postūmio teorema**, teigianti, kad, jei $L[f(t)] = F(s)$, tai $F(s-s_0) = L[e^{s_0 t} f(t)]$, ir, jei $H[f(t)] = F(p)$, tai $H[e^{-\lambda t} f(t)] = \frac{p}{p+\lambda} F(p+\lambda)$, o $F(p+\lambda) = H[e^{-\lambda t} f(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} f(t) dt]$;

c) **atvaizdo diferencijavimo teorema**, teigianti, jog, jei $L[f(t)] = F(s)$, tai $\frac{d^n}{ds^n} F(s) = L[(-1)^n t^n f(t)]$, ir, jei $H[f(t)] = F(p)$, tai $(-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} F(p) = H[t^n f(t)]$, o taip pat $\left(-p \frac{d}{dp}\right)^n F(p) = H\left[\left(t \frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right]$, kur $\left(-p \frac{d}{dp}\right)^n$ ir $\left(t \frac{d}{dt}\right)^n$ – n kartų kartojami operatoriai;

d) **atvaizdo integravimo teorema**, teigianti, jog, jei $L[f(t)] = F(s)$ ir egzistuoja baigtinis integralas $\int_s^{\infty} F(s) ds$, tai $\int_s^{\infty} F(s) ds = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$, ir, jei $H[f(t)] = F(p)$ bei egzistuoja baigtinis integralas $\int_p^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp$, tai $p \int_p^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp = H\left[\frac{f(t)}{t}\right]$, o taip pat $p \int_p^{\infty} dp_n \int_{p_n}^{\infty} dp_{n-1} \dots \int_{p_2}^{\infty} \frac{F(p_1)}{p_1} dp_1 = H[t^{-n} f(t)]$ ir $\int_p^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp = H\left[\int_0^t \frac{f(t)}{t} dt\right]$, $\int_0^p \frac{F(p)}{p} dp = H\left[\int_t^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt\right]$, $\int_0^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ ir t. t.

Tačiau mes visų tų savybių čia nenagrinėsime, nes šios mokymo priemonės tikslams pilnai pakaks anksčiau aprašytų ir įrodytų savybių bei išvestų formulių. Ką tik išvardintų savybių „a“, „b“, „c“ ir „d“ matematinės išraiškos čia pateiktos tik tam, kad skaitytojas galėtų pasinaudoti jomis atvaizdų radimo ir operavimo su atvaizdais įgūdžių patikrinimui.

1.11.6. Atvirkštinės Laplaso ir Hevisaido transformacijos. Hevisaido teoremos. Rymano – Melino formulė

Operaciniame skaičiavime, atlikus veiksmus su funkcijų atvaizdais (pavyzdžiui, išsprendus algebrines lygtis, gautas iš diferencialinių ir integralinių lygčių, suradus išėjimo funkcijų atvaizdus), **atsiranda reikiamybė grįžti nuo atvaizdų prie originalų**. Tokie perėjimai yra vadinami **atvirkštinėmis Laplaso ir Hevisaido transformacijomis**.

Atvirkštinių Laplaso ir Hevisaido transformacijų atlikimas yra žymiai sudėtingesnis už tiesiogines transformacijas, todėl jo aprašymui skirtas šis (1.11.6-asis) skyrelis bus gana ilgas ir sudėtingas. Kad jį būtų lengviau skaityti ir jame orientuotis, šį skyrelį suskirstysiu į 25 dalis, kurias numeruosiu paryškintais skaičiais: **1, 2, 3, ..., 25**.

1. Daugelyje paprastų atvejų tokį **atvirkštinį perėjimą pavyksta padaryti, naudojantis tiesioginių Laplaso ir Hevisaido transformacijų formulėmis atvirkštine tvarka**, panašiai kaip galima rasti kai kurių funkcijų integralus – pirmąsias funkcijas – naudojantis diferencijavimo formulėmis.

Pavyzdžiui, žinodami, jog $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, mes galime nustatyti, jog atvaizdo $F(s) = \frac{1}{s^2 + 2}$ originalas yra funkcija $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} \cdot t$, nes $\frac{1}{s^2 + 2} = \frac{1}{s^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} L[\sin \sqrt{2} t]$, o žinodami, jog $L[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$, galime rasti, jog atvaizdo $F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ originalas yra $f(t) = \frac{1}{2} \left[t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]$, nes $\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2 + s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} - \frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = L \left[t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right] - \frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$, ir todėl $2 \frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = L \left[t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]$.

Analogiškai, žinodami, jog $H[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^\alpha}$ ir $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, galime nustatyti, jog atvaizdo

$$F(p) = \frac{1}{p^n \sqrt{p}} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot p^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} H\left[t^{n+\frac{1}{2}}\right] \text{ originalas yra } f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{t^n \sqrt{t}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \dots = \frac{t^n \sqrt{t}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2n+1-n} t^n \sqrt{t}}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{2n \cdot (2n-2) \dots 4 \cdot 2 \cdot 2^{n+1}}{(2n+1)! \sqrt{\pi}} t^n \sqrt{t} =$$

$$= \frac{n! 2^{2n+1}}{(2n+1)! \sqrt{\pi}} t^n \sqrt{t}.$$

2. Sudėtingesniais atvejais atvaizdus $F(s)$ ir $F(p)$ galima išskaidyti į paprastesnių atvaizdų sumą ir, naudojantis Laplaso ir Hevisaido transformacijų tiesiškumo savybe, suradus tų paprastesnių atvaizdų originalus, surasti ir visą atvaizdą $F(s)$ arba $F(p)$ atitinkantį originalą.

Pavyzdžiui, kai $F(s) = \frac{2s^2 - as + a^2}{s^3 + sa^2 - as^2 - a^3}$, tai $F(s)$ suskaidę į paprastesnių trupmenų sumą, gauname: $F(s) = \frac{s^2 + a^2 + s(s-a)}{(s^2 + a^2)(s-a)} = \frac{1}{s-a} + \frac{s}{s^2 + a^2} = L[e^{at}] + L[\cos at] = L[e^{at} + \cos at]$, t. y. $f(t) = e^{at} + \cos at$.

Atvaizdų skaidymą į paprastesnių atvaizdų, kurių originalai mums jau yra žinomi, sumą, galima atlikti naudojantis **neapibrėžtųjų koeficientų metodu**.

Šis metodas taikomas tada, kai atvaizdas $F(s)$, kurio originalo $f(t)$ ieškome atlikdami atvirkštinę Laplaso transformaciją, yra daugianarių $F_1(s) = \sum_{i=0}^m a_i s^i$ ir

$F_2(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i$ santykis $\frac{F_1(s)}{F_2(s)}$, tenkinantis dvi sąlygas: 1) atvaizdas $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ yra tikroji trupmena, t. y. **daugianario $F_1(s)$ laipsnis m yra mažesnis už daugianario $F_2(s)$ laipsnį n** ; 2) atvaizdo $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ **poliai (lygties $F_2(s)=0$ šaknys) s_i yra skirtingi kompleksiniai (jie gali būti ir realūs, ir grynai menami) skaičiai**, t. y. sandaugoje $b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)$, kuri gaunama, suskaidžius daugianarį $F_2(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i$ į sandaugą $b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)$, visi daugikliai $(s-s_i)$ yra skirtingi.

Kai minėtos sąlygos yra tenkinamos, tai sudaroma tapatybė $\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{F_1(s)}{b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-s_i}$, kurioje kol kas dar neapibrėžti koeficientai A_i turi būti

tokie, kad šią tapatybę tenkintų visos galimos kintamojo s reikšmės.

Koeficientų A_j reikšmės galima surasti dauginant abi tapatybės $\frac{F_1(s)}{b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-s_i}$ puses iš $(s-s_j)$, atliekant šios tapatybės kairiosios pusės ir dėmens

$\frac{A_j}{s-s_j}$ dešiniojoje tapatybės pusėje suprastinimus, dalinant trupmenų skaitiklius ir

vardiklius iš $s-s_i$, ir po to į gautos tapatybės abi puses įsistatant vietoj kintamojo s jo reikšmę s_j .

$$\text{Po daugybos iš } (s-s_j) \text{ gauname } \frac{F_1(s)}{b_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s-s_i)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{A_i (s-s_j)}{s-s_i} + A_j.$$

$$\text{Įstatę vietoj } s \text{ jo reikšmę } s_j, \text{ gauname } \frac{F_1(s_j)}{b_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j-s_i)} = A_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{A_i (s_j-s_j)}{s_j-s_i}, i \neq j, \text{ t. y.}$$

$$\text{gauname, jog } A_j = \frac{F_1(s_j)}{b_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j-s_i)}.$$

Taip apskaičiuojamos visų koeficientų $A_j, j=1, 2, \dots, n$ reikšmės.

Iš čia pateikto koeficientų A_j reikšmių nustatymo metodo aprašymo tiesiogiai išplaukia aukščiau minėtasis antrasis reikalavimas, kad visi daugianariai $(s-s_j)$ būtų skirtingi: jei šis reikalavimas nebūtų tenkinamas ir lygtis $F_2(s)=0$ turėtų kelias vienodas

šaknis s_j , tai $\lim_{s \rightarrow s_j} \frac{s-s_j}{b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)}$ nebūtų apibrėžtas skaičius ir koeficiento A_j reikšmės

apskaičiuoti nepavyktų. Tokiais atvejais, ieškant atvaizdo $F(s)$ originalo tektų naudotis kitais metodais, pavyzdžiui, taikyti taip vadinamąją reziduumų formulę, kuri bus išvesta šiame skyrelyje šiek tiek vėliau (žr. šio skyrelio 18-ąją dalį).

Kai antrasis reikalavimas tenkinamas, o netenkinamas pirmasis reikalavimas, t. y. kai $m \geq n$, tai atvaizde $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ išskiriama jo sveikoji dalis $F_0(s)$, dalinant

$F_1(s)$ iš $F_2(s)$, surandant dalmenį $F_0(s)$ ir liekaną $F_1^*(s) = \sum_{i=0}^r c_i s^i$, kurios laipsnis r yra jau

mažesnis už n . Tuomet atvaizdo $F(s) = F_0(s) + \frac{F_1^*(s)}{F_2(s)} = \sum_{i=0}^{m-n} d_i s^i + \frac{\sum_{i=1}^r c_i s^i}{b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)}$ originalas

$f(t)$ randamas kaip atvaizdų $F_0(s)$ ir $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)}$ originalų $f_0(t)$ ir $f^*(t)$ suma.

Funkcija $f^*(t)$ randama, apskaičiuojant koeficientų A_j reikšmes tapatybėje

$$\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)} = \frac{F_1^*(s)}{b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)} = \frac{\sum_{i=1}^r c_i s^i}{b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-s_i} \text{ jau aprašytuoju neapibrėžtųjų koeficientų}$$

metodu ir surandant atvaizdo $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-s_i}$ originalą $f^*(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}$, nes, kaip buvo

įrodyta 1.11.5.1. skyrelyje, išvedant ketvirtąją formulę $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, atvaizdų $\frac{A_i}{s-s_i}$

originalai yra funkcijos $A_i e^{s_i t}$. Kai viena iš lygties $F_2(s)=0$ šaknų s_i yra lygi 0, tai $A_i e^{s_i t} = A_i = \text{const}$.

Atvaizdo $F_0(s) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i s^i$, kuriame d_i yra trupmenos $\frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ sveikosios dalies

koeficientai, originalas – funkcija $f_0(t)$ randamas taikant tam atvaizdui 1.11.5.1. skyrelyje išvestas formules 12÷15 atvirkštine tvarka. Iš tų formulių, teigiančių, kad $L[\delta(t)] = 1 = s^0$, $L[\delta'(t)] = s = s^1$, $L[\delta''(t)] = s^2$, $L[\delta^{(k)}(t)] = s^k$, išplaukia, jog $L[f_0(t)] = F_0(s) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot s^i = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot L[\delta^{(i)}(t)] = L\left[\sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot \delta^{(i)}(t)\right]$ t. y., jog $f_0(t) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot \delta^{(i)}(t)$.

Kadangi $L[f(t)] = F(s) = F_0(s) + \frac{F_1^*(s)}{F_2(s)} = L\left[\sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot \delta^{(i)}(t)\right] + L\left[\sum_{j=1}^n A_j e^{s_j t}\right] =$
 $= L\left[\sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot \delta^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^n A_j e^{s_j t}\right]$, tai atvaizdo $F(s)$ ieškomas originalas yra funkcija

$f(t) = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot \delta^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^n A_j e^{s_j t} = \sum_{i=0}^{m-n} d_i \cdot \delta^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^n \frac{F_1^*(s_j)}{b_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j - s_i)} e^{s_j t}$, kurios išraiškoje skaičiai

s_j bei s_i yra lygties $F_2(s)=0$ šaknys.

Kaip jau buvo anksčiau minėta, lygties $F_2(s)=0$ šaknys gali būti kompleksiniai skaičiai. Kai $F_2(s)$ yra daugianaris, kurio koeficientai b_i yra realūs skaičiai, tai jo kompleksinės šaknys visada būna jungtinės: jei egzistuoja šaknis $s_j = \alpha_j + i\beta_j$, tai būtinai egzistuoja ir jungtinė jai šaknis $s_i^* = \alpha_j - i\beta_j$.

Daugiklių $(s-s_j)$ ir $(s-s_j^*)$ sandauga $[s-(\alpha_j-i\beta_j)] \cdot [s-(\alpha_j+i\beta_j)] = [(s-\alpha_j)-i\beta_j] \cdot [(s-\alpha_j)+i\beta_j] = (s-\alpha_j)^2 + \beta_j^2$ yra racionali kompleksinio kintamojo s funkcija. Nesunku įrodyti, kad koeficientai A_j ir A_j^* , atitinkantys jungtines kompleksines šaknis s_j ir s_j^* , taip pat

bus jungtiniai, nes tik tuomet suma $\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s-s_j}$ galės būti lygi racionali kintamojo s

funkcijai $\frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ (arba $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)}$). Tuomet ir tik tuomet suma $\frac{A_j}{s-s_j} + \frac{A_j^*}{s-s_j^*} =$

$$= \frac{B_j + iC_j}{s - (\alpha_j + i\beta_j)} + \frac{B_j - iC_j}{s - (\alpha_j - i\beta_j)} = \frac{[(s - \alpha_j) + i\beta_j](B_j + iC_j) + [(s - \alpha_j) - i\beta_j](B_j - iC_j)}{[s - (\alpha_j + i\beta_j)][s - (\alpha_j - i\beta_j)]} =$$

$$= 2 \frac{(s - \alpha_j)B_j - \beta_j C_j}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} \text{ bus racionali kintamojo } s \text{ funkcija. Atvaizdo } \frac{A_j}{s-s_j} + \frac{A_j^*}{s-s_j^*} \text{ originalas}$$

$$\text{bus funkcija } A_j e^{s_j t} + A_j^* e^{s_j^* t} = (B_j + iC_j) e^{(\alpha_j + i\beta_j)t} + (B_j - iC_j) e^{(\alpha_j - i\beta_j)t} =$$

$$= e^{\alpha_j t} [B_j (e^{i\beta_j t} + e^{-i\beta_j t}) + iC_j (e^{i\beta_j t} - e^{-i\beta_j t})] = 2e^{\alpha_j t} \left[B_j \frac{e^{i\beta_j t} + e^{-i\beta_j t}}{2} - C_j \frac{e^{i\beta_j t} - e^{-i\beta_j t}}{2i} \right] =$$

$$= 2e^{\alpha_j t} (B_j \cos \beta_j t - C_j \sin \beta_j t) - \text{racionali laiko funkcija.}$$

Atsižvelgiant į šiuos rezultatus, ieškant atvaizdo $\frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ arba $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)}$ originalo kai

kuriais atvejais būna tikslinga išvengti kompleksinių koeficientų A_j ir A_j^* reikšmių

paieškos ir trupmenas $\frac{A_j}{s-s_j}$ bei $\frac{A_j^*}{s-s_j^*}$ atitinkančių originalų $A_j e^{s_j t}$ ir $A_j^* e^{s_j^* t}$ su

kompleksiniais eksponenčių rodikliais, atitinkančiais jungtines kompleksines šaknis, sudarinėjimo.

Pavyzdžiui, kai šaknys s_j ir s_j^* būna grynai menamos ir daugiklių $(s-s_j)$ ir $(s-s_j^*)$ sandauga $(s-i\beta_j) \cdot (s+i\beta_j) = s^2 + \beta_j^2$ yra racionalus dvinaris, tai, sudarant sandaugą $b_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)$ nebūtina daugiklius $s^2 + \beta_j^2$ skaidyti į daugiklius $(s-i\beta_j)$ ir $(s+i\beta_j)$ bei ieškoti

kompleksinių koeficientų A_j ir A_j^* reikšmių, o galima sumas $\frac{A_j}{s-s_j} + \frac{A_j^*}{s-s_j^*}$ pakeisti

santykiais $\frac{B_j s + C_j}{s^2 + \beta_j^2}$ ir ieškoti racionalių koeficientų B_j ir C_j reikšmių. Jas suradus,

santykio $\frac{B_j s + C_j}{s^2 + \beta_j^2} = B_j \frac{s}{s^2 + \beta_j^2} + \frac{C_j}{\beta_j} \cdot \frac{\beta_j}{s^2 + \beta_j^2}$ originalą jau nesunku nustatyti. Tai – funkcija

$$B_j \cos \beta_j t + \frac{C_j}{\beta_j} \sin \beta_j t.$$

Neapibrėžtųjų koeficientų metodo taikymą, ieškant atvaizdo $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ originalo $f(t)$,

pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu.

Tarkime jog $F(s) = \frac{2as^5 - 3a^2s^4 + 3s^3 - as^2 + a^2s - 2a^5s + a^3 + 3a^6}{s^4 - a^4}$. Kadangi daugianario $F_1(s)$

laipsnis m yra 5, o daugianario $F_2(s)$ laipsnis n yra 4, tai $m > n$. Išskirsime atvaizdo $F(s)$ sveikąją dalį:

$$\frac{2as^5 - 3a^2s^4 + 3s^3 - as^2 + a^2s - 2a^5s + a^3 + 3a^6}{s^4 - a^4} = \frac{2as^5 - 2a^5s}{2as - 3a^2} + \frac{-3a^2s^4 + 3s^3 - as^2 + a^2s + a^3 + 3a^6}{2as - 3a^2} = \frac{-3a^2s^4 + 3s^3 - as^2 + a^2s + a^3 + 3a^6 - (-3a^2s^4 + 3a^6)}{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}.$$

Gavome, kad $F_0(s) = 2as - 3a^2$ ir $F_1^*(s) = 3s^3 - as^2 + a^2s + a^3$, t. y. gavome, kad $F(s) = 2as - 3a^2 + \frac{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}{s^4 - a^4}$. Daugianario $F_0(s)$ laipsnis $m = n = 1$, o daugianario $F_1^*(s)$ laipsnis $r = 3 < (n = 4)$.

$$\begin{aligned} \text{Atvaizdo } F_0(s) \text{ originalas yra } f_0(t) &= 2a\delta'(t) - 3a^2\delta(t) = 2a \frac{d\delta(t)}{dt} - 3a^2\delta(t) = \\ &= 2a \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 3a^2 \frac{du(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Atvaizdo $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)} = \frac{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}{(s+a)(s-a)(s+ia)(s-ia)}$ originalą rasime suskaidę atvaizdą $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)}$ į paprastų trupmenų sumą, t. y. sudarę tapatybę $\frac{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}{(s+a)(s-a)(s+ia)(s-ia)} = \frac{A_1}{s+a} + \frac{A_2}{s-a} + \frac{A_3}{s+ia} + \frac{A_4}{s-ia}$. Tai padaryti galime, nes lygties $F_2(s) = 0$ (t. y. lygties $s^4 - a^4 = 0$) šaknys $s_1 = -a$, $s_2 = a$, $s_3 = -ia$, $s_4 = ia$ yra skirtingos.

Daugindami minėtąją tapatybę iš $s - s_1 = s + a$, gauname $\frac{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}{(s-a)(s+ia)(s-ia)} = A_1 + \frac{A_2(s+a)}{s-a} + \frac{A_3(s+a)}{s+ia} + \frac{A_4(s+a)}{s-ia}$. Įstatydami į šią tapatybę kintamojo s reikšmę $s_1 = -a$, gauname, jog $\frac{3(-a)^3 - a(-a)^2 + a^2(-a) + a^3}{(-a-a)(-a+ia)(-a-ia)} = A_1 + 0 + 0 + 0$, t. y. gauname, jog $A_1 = \frac{-3a^3 - a^3 - a^3 + a^3}{-2a[(-a)^2 + a^2]} = \frac{4a^3}{4a^3} = 1$.

Analogiškai randame koeficientus A_2, A_3, A_4 : $A_2 = \frac{3a^3 - aa^2 + a^2a + a^3}{(a+a)(a+ia)(a-ia)} = \frac{4a^3}{4a^3} = 1$;
 $A_3 = \frac{3(-ia)^3 - a(-ia)^2 + a^2(-ia) + a^3}{(-ia+a)(-ia-a)(-ia-ia)} = \frac{2i+2}{4i} = \frac{1-i}{2}$; $A_4 = \frac{3(ia)^3 - a(ia)^2 + a^2(ia) + a^3}{(ia+a)(ia-a)(ia+ia)} = \frac{-2i+2}{-4i} = \frac{1+i}{2}$.

Kadangi atvaizdas $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)}$ yra suma $\frac{A_1}{s+a} + \frac{A_2}{s-a} + \frac{A_3}{s+ia} + \frac{A_4}{s-ia} = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a} + \frac{1-i}{2} \frac{1}{s+ia} + \frac{1+i}{2} \frac{1}{s-ia}$, tai jo originalas yra $f^*(t) = e^{-at} + e^{at} + \frac{1-i}{2} e^{-iat} + \frac{1+i}{2} e^{iat} = e^{at} + e^{-at} + \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat}) + \frac{i}{2}(e^{iat} - e^{-iat}) = e^{at} + e^{-at} + \cos at - \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat}) = e^{at} + e^{-at} + \cos at - \sin at$.

Todėl atvaizdo $F(s) = \frac{2as^5 - 3a^2s^4 + 3s^3 - as^2 + a^2s - 2a^5s + a^3 + 3a^6}{s^4 - a^4} = 2as - 3a^2 + \frac{3a^2 - as^2 + a^2s + a^3}{s^4 - a^4}$ originalas yra, kaip jau esame nustatę, funkcija $f(t) = f_0(t) + f^*(t) = 2a\delta'(t) - 3a^2\delta(t) + e^{at} + e^{-at} + \cos at - \sin at = 2a \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 3a^2 \frac{du(t)}{dt} + e^{at} + e^{-at} + \cos at - \sin at$.

Nesunku įsitikinti, jog ši funkcija tikrai yra duotojo atvaizdo $F(s)$ originalas.

Tuo tikslu rasime šios funkcijos $f(t)$ atvaizdą:

$$L[f(t)] = 2as - 3a^2 + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} + \frac{s}{s^2 - a^2} - \frac{a}{s^2 + a^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2as - 3a^3)(s^4 - a^4) + (s^2 + a^2)[(s+a) + (s-a)] + (s-a)(s^2 - a^2)}{(s-a)(s+a)(s^2 + a^2)} = \\
&= \frac{2as^5 - 3a^2s^4 - sa^5s + 3a^6 + 2s^3 + 2sa^2 + s^3 - as^2 - a^2s + a^3}{(s^2 - a^2)(s^2 + a^2)} = \\
&= \frac{2as^5 - 3a^2s^4 + 3s^3 - as^2 - a^2s - 2a^5s + a^3 + 3a^6}{(s^4 - a^4)} = F(s), \text{ ką ir turėjome gauti.}
\end{aligned}$$

Neapibrėžtųjų koeficientų A_i reikšmes, taikant neapibrėžtųjų koeficientų metodą ir tapatybę $\frac{F_1^*(s)}{b_n \prod_{j=1}^n (s-s_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s-s_j}$, galime rasti ir kitu būdu, leidžiančiu išvengti operacijų su kompleksinėmis

šaknimis s_j ir kompleksiniais koeficientais A_j .

Padauginę abi tapatybės puses iš b_n ir subendravardiklinę dešiniojoje tapatybės pusėje esančias trupmenas $\frac{A_j}{s-s_j}$, mes gautume dviejų trupmenų, turinčių vienodus vardiklius $\prod_{j=1}^n (s-s_j)$, tapatybę. Iš

jų išplauktų, jog ir tų trupmenų skaitikliai turėtų būti tapatūs. Todėl koeficientai, stovintys prie kompleksinio kintamojo s atitinkamų laipsnių kairiojoje tapatybės pusėje, turėtų būti lygūs koeficientams, stovintiems prie tų pačių kintamojo s laipsnių dešiniojoje pusėje. Tokiu būdu gautume lygčių sistemą, kurią sprendami galėtume rasti neapibrėžtųjų koeficientų A_j reikšmes.

Tokiuose koeficientų A_j reikšmių apskaičiavimuose būtų galima išvengti operacijų su kompleksinėmis šaknimis s_j bei kompleksiniais koeficientais A_j , jei sumoje $\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s-s_j}$, prieš ją

bendravardiklinant, trupmenų jungtines poras $\frac{A_j}{s-s_j}$ ir $\frac{A_j^*}{s-s_j^*}$ atitinkančias jungtines kompleksines

šaknis s_j ir s_j^* susumuotume (arba, dar paprasčiau, skaidydami daugianarį $F_2(s)$ į daugiklius, antrojo laipsnio daugiklių s^2+a^2 bei s^2+bs+a^2 neskaitytume į pirmojo laipsnio kompleksinius daugiklius), gaudami sumoje $\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s-s_j}$ ne kompleksinius dėmenis $\frac{A_j}{s-s_j}$ ir $\frac{A_j^*}{s-s_j^*}$, bet dėmenis $\frac{B_j s + C_j}{s^2 + a_j^2}$ bei dėmenis

$$\frac{B_j s + C_j}{s^2 + b_j s + a_j^2} = \frac{B_j s + C_j}{(s + \frac{b_j}{2})^2 + a_j^2 - \frac{b_j^2}{4}} = \frac{B_j s + C_j}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}, \text{ jau neturinčius kompleksinių dydžių.}$$

Pavyzdžiui, kai $s_j = i\alpha_j$ ir $s_j^* = -i\alpha_j$, tai gautume, jog $\frac{A_j}{s-s_j} + \frac{A_j^*}{s-s_j^*} = \frac{B_j + iC_j}{s-i\alpha_j} + \frac{B_j - iC_j}{s+i\alpha_j} =$
 $= 2 \frac{B_j s - C_j \alpha_j}{s^2 + \alpha_j^2}$, t. y. trupmeną, kurioje koeficientai – realūs skaičiai. Tokia trupmenos forma iškart leistų rasti ją atitinkančią funkciją – originalą $2(B_j \cos \alpha_j t - C_j \sin \alpha_j t)$.

Pailiustruosiu šį neapibrėžtinių koeficientų apskaičiavimo būdą, dar kartą surasdamas ką tik nagrinėto atvaizdo $\frac{F_1^*(s)}{F_2(s)} = \frac{3a^2 - as^2 + a^2s + a^3}{s^4 - a^4}$ originalą $f(t)$, kai tas atvaizdas pateiktas Hevisaio

formoje kaip argumento p funkcija $F(p) = \frac{3p^4 + a^2p^2 - ap^3 + a^3p}{p^4 - a^4}$. Šią trupmeną galima išskaidyti:

$$F(p) = \frac{p(3p^3 + a^2p - ap^2 + a^3)}{(p^2 + a^2)(p+a)(p-a)} \equiv p \left(\frac{A}{p+a} + \frac{B}{p-a} + \frac{Cp+D}{p^2+a^2} \right), \text{ iš kur, subendravardiklinę dešiniąją tapatybės}$$

pusę ir prilyginę trupmenų skaitiklius abiejose tapatybės pusėse, gauname $A(p-a)(p^2+a^2) + B(p+a)(p^2+a^2) + (Cp+D)(p^2-a^2) \equiv 3p^3 + a^2p - ap^2 + a^3$, arba $p^3(A+B+C) + p^2(-aA+aB+D) + p(a^2A+a^2B-a^2C) + a^3B - a^3A - a^2D \equiv 3p^3 - ap^2 + a^2p + a^3$. Šioje tapatybėje, kad ji išliktų tapatybe, keičiantis kintamojo p reikšmėms, koeficientai prie kintamojo p vienodų laipsnių turi būti vienodi.

$$\text{Todėl galime sudaryti lygčių sistemą: } \begin{cases} A+B+C=3, \\ -aA+aB+D=-a, \\ a^2A+a^2B-a^2C=a^2, \\ -a^3A+a^3B-a^2D=a^3, \end{cases}, \text{ kurią išsprendę gauname: } A=1,$$

$$B=1, C=1, D=-a.$$

$$\text{Todėl } F(p)=p\left(\frac{1}{p+a}+\frac{1}{p-a}+\frac{p-a}{p^2+a^2}\right)=\frac{p}{p+a}+\frac{p}{p-a}+\frac{p^2}{p^2+a^2}-\frac{ap}{p^2+a^2}=H[e^{-at}]+H[e^{at}]+H[\cos at]-$$

$-H[\sin at]$, iš kur išplaukia, jog $f(t)=e^{-at}+e^{at}+\cos at-\sin at$. Kaip matome, gavome tą pačią funkciją $f(t)$.

Neapibrėžtųjų koeficientų apskaičiavimui galima taikyti ir taip vadinamąjį mišrųjį būdą: koeficientų A_j , atitinkančių realias šaknis s_j , reikšmes galima apskaičiuoti naudojantis formule

$$A_j = \frac{F_1(s_j)}{b_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j - s_i)} \text{ ir po to jas įstatyti į lygčių sistemą, sudarytą antruoju būdu. Tai pagreitina tos lygčių}$$

sistemos sprendimą, nes prireikia jau ne visų jos lygčių. Likusias lygtis galima panaudoti gauto sprendinio patikrinimui, įstatant jas į jau surastas neapibrėžtųjų koeficientų reikšmes.

$$\text{Pavyzdžiui, ieškodami ką tik nagrinėto atvaizdo } \frac{3a^2 - as^2 + a^2s + a^3}{s^4 - a^4} \text{ originalo, mes galėjome}$$

$$\text{pasinaudoti tapatybe } \frac{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}{(s+a)(s-a)(s^2+a^2)} \equiv \frac{A_1}{s+a} + \frac{A_2}{s-a} + \frac{Bs+C}{s^2+a^2}.$$

$$\text{Koeficientų } A_1 \text{ ir } A_2 \text{ reikšmes galėjome rasti, taikydami formulę } A_j = \frac{F_1(s_j)}{b_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j - s_i)} \text{ ir gauti,}$$

kaip ir anksčiau, jog $A_1=1$ ir $A_2=1$.

$$\text{Taikydami antrąjį būdą, gautume lygčių sistemą: } \begin{cases} A_1 + A_2 + B = 3, \\ -aA_1 + aA_2 + C = -a, \\ a^2A_1 + a^2A_2 - a^2B = a^2, \\ -a^3A_1 + a^3A_2 - a^2C = a^3. \end{cases}$$

Įstatę į pirmąsias dvi lygtis $A_1=1$ ir $A_2=1$, galėtume apskaičiuoti koeficientų B ir C reikšmes:

$$B=3-A_1-A_2=3-2=1, \quad C=-a+aA_1-aA_2=-a, \text{ iš kur išplaukia, jog } \frac{3s^3 - as^2 + a^2s + a^3}{(s+a)(s-a)(s^2+a^2)} \equiv \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a} +$$

$+\frac{s-a}{s^2+a^2}$, o tai reikštų, kad šio atvaizdo originalas yra funkcija $f(t)=e^{-at}+e^{at}+\cos at-\sin at$. Likusias dvi

$$\text{lygtis } \begin{cases} a^2A_1 + a^2A_2 - a^2B = a^2, \\ -a^3A_1 + a^3A_2 - a^2C = a^3 \end{cases} \text{ galėtume panaudoti sprendinio } A_1=1, A_2=1, B=1, C=-a \text{ patikrinimui:}$$

$$\begin{cases} a^2 + a^2 - a^2 = a^2, \\ -a^3 + a^3 - a^2(-a) = a^3. \end{cases} \text{ Kaip matome, anksčiau rastas sprendinys tas lygtis tenkina.}$$

Kai ieškomi sudėtingų atvaizdų originalai ir reikia atlikti sudėtingus skaičiavimus, dėl ko padidėja apsirikimų bei klaidų atsiradimo tikimybė, tokia patikrinimo galimybė yra labai naudinga, nes padeda greitai pastebėti ir surasti bei ištaisyti skaičiavimuose padarytas klaidas.

3. Ieškant originalų, atitinkančių turimus atvaizdus, gali padėti Hevisaido teoremos apie skaidymą.

$$\text{Pirmoji Hevisaido teorema formuluojama taip: } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{p^k} = H \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!} \right], \text{ kur } a_k -$$

pastovūs koeficientai.

Iš šios teoremos išplaukia, jog, **išskaidžius atvaizdą į laipsninę eilutę kintamojo $\frac{1}{p}$ (ar $\frac{1}{s}$) atžvilgiu, iškart galima surasti tą atvaizdą atitinkantį originalą – laipsninę eilutę kintamojo t atžvilgiu.**

Įrodysiu šią teoremą.

Tarkime, jog $f(t)$ išskaidyta į konverguojančią laipsninę (pavyzdžiui, Makloreno) eilutę $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$.

$$\text{Tuomet } H[f(t)] = F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} p \int_0^{\infty} t^k e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{k!}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^k},$$

$$\text{t. y. } H \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} t^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}, \text{ ką ir reikėjo įrodyti.}$$

Šią teoremą galima taikyti taip pat ir laipsninėms sumoms, turinčioms baigtinį dėmenų skaičių.

Rasime originalą, atitinkantį atvaizdą $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$, t. y. rasime $f(t) = H^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{p+1}} \right]$, išskaidydami

funkciją $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-\frac{1}{2}}$ į Makloreno eilutę kintamojo $\frac{1}{p}$ atžvilgiu ir raskdami tos

eilutės dėmenų originalus, t. y. atlikdami atvirkštinę Hevisaido transformaciją.

Išskaidę $\left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-\frac{1}{2}}$ kaip funkciją $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, kur $x = \frac{1}{p}$, į laipsninę eilutę taške $x_0 = 0$

kintamojo $x = \frac{1}{p}$ atžvilgiu, gauname: $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[f^{(k)}(x)]_{x=x_0}}{k!} (x - x_0)^k = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[f^{(k)}(x)]_{x=0}}{k!} x^k$;

$$f(0) = 1; [f'(x)]_{x=0} = -\frac{1}{2}; [f''(x)]_{x=0} = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right); \dots, [f^k(x)]_{x=0} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k};$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{1}{p^3} + \dots \right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{1}{p^k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2k-1) 2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2^k \cdot 2^k \cdot k! \cdot p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{2^k \cdot k! \cdot 2^k \cdot k!} \cdot \frac{1}{p^k \sqrt{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot \frac{1}{p^k \sqrt{p}}.$$

Kadangi šiame skyrelyje jau buvome gavę, jog $\frac{1}{p^n \sqrt{p}} = H \left[\frac{n! \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot \sqrt{\pi}} \cdot t^n \sqrt{t} \right]$, tai, naudodamiesi Hevisaido transformacijos tiesiškumo savybe, galime užrašyti:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}} = H \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot \frac{k! \cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)! \sqrt{\pi}} \cdot t^k \sqrt{t} \right] = H \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1) \cdot k!} \right].$$

Rastoji funkcija $f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1) \cdot k!}$, būdama atvaizdo $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$ originalu, yra

ypatinga tuo, kad ji yra tikimybinis integralas $\Phi(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$, nes $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$, iš kur,

$$\begin{aligned}
& \text{išskleidę } e^{-u^2} \text{ į Teiloro eilutę ir apskaičiavę integralą, gauname } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-u^2)^k}{k!} \right) du = \\
& = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{k!} \right] du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k!} \right] du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \\
& \times \frac{(x^2)^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1) \cdot k!}. \text{ Pažymėję } x^2 \text{ kaip kintamąjį } t, \text{ gausime, jog } \Phi(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1) \cdot k!}, \text{ t. y. gausime,} \\
& \text{jog } H^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{p+1}} \right] = f(t) = \Phi(\sqrt{t}).
\end{aligned}$$

4. Antroji Hevisaido teorema taikoma tais atvejais, kai atvaizdas yra racionali kintamojo p funkcija $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, kur $F_1(p)$ ir $F_2(p)$ – m -jo ir n -jo laipsnio daugianariai, tenkinantys sąlygas:

- 1) $m \leq n$,
- 2) lygties $F_2(p) = 0$ visos n šaknys $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$ yra skirtingos ir nė viena jų nelygi 0.

Ši teorema teigia, jog tokiu atveju $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = H \left[\frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \right]$, t. y.
jog šiuo atveju originalas $f(t)$ yra suma $a_0 + \sum_{k=1}^n a_k e^{p_k t}$, kur $a_0 = \frac{F_1(0)}{F_2(0)}$ ir

$$a_k = \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)}.$$

Šios teoremos įrodymui išskaidysime trupmeną $\frac{1}{p} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ į elementarių trupmenų $\frac{C_i}{p-p_i}$ sumą: $\frac{1}{p} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \equiv \frac{C_0}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{p-p_k}$, kur $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n$ – pastovūs kol kas dar neapibrėžti koeficientai, o $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$ – lygties $F_2(p) = 0$ šaknys – **funkcijos $F(p)$ poliai.**

Iš šios tapatybės gauname: $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \equiv C_0 + p \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{p-p_k}$, iš kur, kadangi $p_k \neq 0$, paėmę $p=0$, gauname, kad $C_0 = \frac{F_1(0)}{F_2(0)}$.

Padauginę tapatybę $\frac{1}{p} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \equiv \frac{C_0}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{p-p_k}$ iš $p-p_k$, surandame ribą

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p-p_k}{p} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \equiv \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{C_0(p-p_k)}{p} + C_k + (p-p_k) \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n \frac{C_r}{p-p_r} \right].$$

Kadangi visos lygties $F_2(p) = 0$ šaknys p_k yra skirtingos ir nelygios 0, tai dešinioji tapatybės pusė tampa lygi C_k , o kairioji $\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p-p_k}{p} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p_k)}{p_k} \times$

$$\times \frac{1}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_2(p) - 0}{p - p_k}} = \frac{F_1(p_k)}{p_k} \times \frac{1}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p - p_k}} = \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)}.$$

$$\text{Todėl, kai } k=1, 2, \dots, n, \text{ tai } C_k = \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)}, \text{ ir } F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \cdot \frac{p}{p - p_k}.$$

$$\text{Kadangi } \frac{p}{p - p_k} = H[e^{p_k t}], \text{ o } \frac{F_1(0)}{F_2(0)} \text{ ir } \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} - \text{ yra konstantos, tai } F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = H \left[\frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \right], \text{ ką ir reikėjo įrodyti.}$$

$$\text{Pavyzdžiui, kai } F(p) = \frac{p}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)}, \text{ tai } p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3; F_2'(p_1) = \\ = (p_1 - p_2)(p_1 - p_3) = (-1+2)(-1+3) = 2; F_2'(p_2) = (p_2 - p_1)(p_2 - p_3) = (-2+1)(-2+3) = -1; F_2'(p_3) = (p_3 - p_1)(p_3 - p_2) = \\ = (-3+1)(-3+2) = 2; C_0 = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{0}{6} = 0; C_1 = \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_2'(p_1)} = \frac{-1}{(-1) \cdot 2} = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{-2}{(-2) \cdot (-1)} = -1, C_3 = \frac{-3}{(-3) \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ ir} \\ \text{todėl } f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

$$\text{Kai } F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4)}, \text{ tai } p_1 = -1, p_2 = -2i, p_3 = 2i; \frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{0}{4} = 0; F_2'(p_1) = p_1^2 + 4 = 5; \\ F_2'(p_2) = (p_2+1)(p_2-2i) = -4i(1-2i); F_2'(p_3) = (p_3+1)(p_3+2i) = 4i(1+2i). \\ \text{Todėl } f(t) = \frac{-1}{(-1) \cdot 5} e^{-t} + \frac{-2i}{(-2i)[-4i(1-2i)]} e^{-2it} + \frac{2i}{(2i) \cdot 4i \cdot (1+2i)} e^{2it} = \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{1}{4i+8} e^{-2it} + \\ + \frac{1}{4i-8} e^{2it} = \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{2-i}{20} e^{-i2t} - \frac{2+i}{20} e^{i2t} = \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{1}{10} (e^{i2t} + e^{-i2t}) - \frac{i}{20} (e^{i2t} - e^{-i2t}) = \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{1}{10} \sin 2t.$$

5. Kai $F_2(p)=0$ turi kartotines šaknis, tai tiesiogiai taikyti antrosios Hevisaido teoremos negalima, tačiau tada galima, įvedus papildomus kintamuosius, $F_2(p)$ pakeisti į kitą daugianarį $\Phi(p)$ taip, kad lygties $\Phi(p)=0$ šaknys taptų skirtingos ir nelygios nuliui bei, artėjant tiems papildomiems kintamiesiems prie 0, daugianaris $\Phi(p)$ artėtų prie $F_2(p)$.

$$\text{Pailiustruosiu tai pavyzdžiu. Tarkim, kad } F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \text{ ir reikia rasti } f(t) = H^{-1}[F(p)] = \\ = H^{-1} \left[\frac{1}{(p+1)^2} \right]. \text{ Šiuo atveju } F_2(p) = (p+1)^2 = 0 \text{ turi dvi kartotines šaknis.}$$

Laikinai pakeičiame $F_2(p) = (p+1)^2$ į $\Phi(p, \alpha) = (p+1)(p+1+\alpha)$, kur kol kas $\alpha \neq 0$, tačiau $\alpha \rightarrow 0$.

$$\text{Tuomet } H^{-1} \left[\frac{1}{(p+1)(p+1+\alpha)} \right] = H^{-1} \left[\frac{1}{(1+\alpha)} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{p}{p+1} + \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \cdot \frac{p}{p+1+\alpha} \right] = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-t} + \\ + \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \cdot e^{-(1+\alpha)t} = \frac{1}{1+\alpha} \left(1 + \frac{e^{-(1+\alpha)t} - (1+\alpha) \cdot e^{-t}}{\alpha} \right) = \varphi(t, \alpha). \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(t, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{1+\alpha} \left(1 + \frac{e^{-(1+\alpha)t} - (1+\alpha) \cdot e^{-t}}{\alpha} \right) = 1 + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-(1+\alpha)t} - (1+\alpha) \cdot e^{-t}}{\alpha} = 1 + \\ + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} [e^{-(1+\alpha)t} - (1+\alpha) \cdot e^{-t}]}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha} = 1 + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-t \cdot e^{-t} e^{-\alpha t} - e^{-t}}{1} = 1 - (t+1)e^{-t}.$$

Todėl $f(t)=1-(t+1)e^{-t}$. Nesunku įsitikinti, kad $H[1-(t+1)e^{-t}]=\frac{1}{(p+1)^2}$.

6. Tačiau toks originalo suradimo būdas, kai lygtis $F_2(p)=0$ turi kartotinių šaknų, yra gana gremėzdiškas, ir todėl panašiais atvejais patogiau yra naudotis **atvirkštinės transformacijos formulėmis, išvedamomis, naudojantis Rymano–Melino formule** $f(t)=H^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p} \cdot e^{pt} dp$ ir kompleksinio kintamojo funkcijų analizės teoremomis (Koši, reziduų teorema ir kt.).

7. Išvesime Rymano–Melino formulę.

Tuo tikslu sudarysime funkciją $\varphi(t)=f(t)e^{-\sigma t}$, kur $f(t)$ yra funkcija – originalas, turinti Hevisaido atvaizdą $F(p)=p \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau$, o $\sigma=\operatorname{Re} p=\operatorname{Re}(\sigma+i\omega)>0$ yra tokia konstanta, kad funkcija $\varphi(t)=f(t)e^{-\sigma t}$ tampa absoliučiai integruojama intervale $(-\infty; +\infty)$.

Funkciją $\varphi(t)$ galima išreikšti kaip Furje integralą*:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Iš šio integralo išplaukia formulė:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\sigma\tau} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\sigma+i\omega)\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(p \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(p)}{p} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kadangi } e^{\sigma t} \text{ nepriklauso nuo kintamojo } \omega, \text{ tai } f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(p)}{p} e^{\sigma t} \cdot e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(p)}{p} e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega. \end{aligned}$$

Laikydami, kad kompleksiniame parametre $p=\sigma+i\omega$ kinta tik menamoji dalis ω , o σ išlieka pastovus dydis, gauname, jog $dp=i d\omega$, $d\omega=\frac{dp}{i}$. Kai $\omega \rightarrow -\infty$, tai $p \rightarrow \sigma-i\infty$, o kai $\omega \rightarrow +\infty$, tai $p \rightarrow \sigma+i\infty$. Todėl, pereidami nuo kintamojo ω prie p , gauname:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp, \text{ o tai ir yra Rymano–Melino formulė.}$$

Analogiškai gaunama ir transformacijos, **atvirkštinės Laplaso transformacijai** $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$, Rymano–Melino formulė $f(t)=\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds$, kur $s=\sigma+i\omega$.

8. Prisiminsime kai kurias **kompleksinio kintamojo funkcijų analizės kurso sąvokas ir teoremas** (žiūr. [115, 116]), reikalingas integralo, įeinančio į Rymano–

* Šių eilučių autorius viliasi, jog skaitytojas išklaušė ir dar nepamiršo matematinės analizės pagrindų kurso, moka skleisti funkcijas į Teiloro ir Furje eilutes, žino, kada egzistuoja ir kaip sudaromi Furje integralai. Tiems skaitytojams, kurie šių dalykų nestudijavo ar juos primiršo, rekomenduočiau pastudijuoti šios mokymo priemonės 1.14.12.3.2. skyrelį dalį, kurioje nagrinėjami funkcijų spektrai ir spektriniai tankiai.

Melino formulę, apskaičiavimui, kai $F(p)$ (ar $F(s)$) yra racionali trupmena $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, turinti ne tik paprastų, bet ir kartotinių polių, t. y., kai lygtis $F_2(p)=0$ turi ne tik paprastų, bet ir kartotinių šaknų, nesančių lygties $F_1(p)=0$ šaknimis.

Kompleksinio kintamojo $z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}$ (kur $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, o $\varphi=\arg z=\arctg \frac{y}{x}$) **funkcija** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ vadinama **analizine** kokioje nors kompleksinės plokštumos srityje, kai ta funkcija yra vienareikšmė ir visuose tos srities taškuose turi baigtines išvestines. Kitaip tariant, $f(z)$ vadinama analizine taške $z=z_k=a_k+ib_k$, kai ta funkcija yra vienareikšmė ir turi tame taške bei artimiausioje jo aplinkoje baigtines išvestines.

Analizinė taške z_k funkcija $f(z)$ kartu yra ir **holomorfinė**, nes taško z_k aplinkoje ji gali būti išreikšta **Teiloro eilute** $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_k)^m$, kur $a_m = \frac{f^{(m)}(z_k)}{m!}$.

Taškai, kuriuose $f(z)$ nėra holomorfinė, vadinami **ypatingaisiais funkcijos taškais**.

Izoliuotųjų ypatingųjų taškų aplinkoje kompleksinio kintamojo funkcija $f(z)$ gali būti išreikšta **Lorano eilute** $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-z_k)^n$, kur $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_k)^{n+1}}$, z_k – taškas, kurio aplinkoje sudaroma funkcijos $f(z)$ Lorano eilutė, C – uždaras kontūras aplink ypatingąjį tašką z_k .

Ypatingojo taško pavyzdžiu gali būti taškas, vadinamas **funkcijos poliū**. Tai toks funkcijos $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (čia $f_1(z)$ ir $f_2(z)$ yra racionalūs dauginariai) taškas z_k , kuriame $f_1(z_k)\neq 0$, o $f_2(z_k)=0$. Kai z_k yra kartotinė (m -kartinė, kur $m>1$) lygties $f_2(z)=0$ šaknis, tai tašką z_k vadina **m – kartotiniu funkcijos $f(z)$ poliū**.

Kompleksinėje plokštumoje nubrėžtas uždaras kontūras C dalija tą plokštumą į dvi dalis. Ta dalis, kuri, judant kontūru C prieš laikrodžio rodyklę, lieka kairėje kontūro pusėje, vadinama **vidine kontūro sritimi**, o ta, kuri lieka dešinėje, – **išorine**.

Kompleksinio kintamojo funkcijų analizėje įrodoma **Koši teorema**, teigianti, jog, **kai kontūro C vidinėje srityje nėra funkcijos $f(z)$ ypatingųjų taškų, tai nepriklausomai nuo kontūro C dydžio bei formos integralas tuo kontūru $\int_C f(z)dz = 0$.**

Kai kontūro C vidinėje srityje yra vienas ar keletas funkcijos $f(z)$ ypatingųjų taškų, tai integralas $\int_C f(z)dz$ gali būti nelygus nuliui.

Kaip teigia **reziduų (likinių) teorema**, integralas $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C f(z)dz$ yra lygus visų vidinių ypatingųjų taškų reziduų sumai $\sum_{j=1}^r \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_j} f(z)$, kur z_j – j -tasis funkcijos $f(z)$ ypatingasis taškas, $\operatorname{Res}_{z \rightarrow z_j} f(z)$ – funkcijos $f(z)$ ypatingojo taško z_j reziduumas, r – funkcijos $f(z)$ ypatingųjų taškų, patekusių į kontūro C vidinę sritį, skaičius.

9. Funkcijos $f(z)$ reziduumu taške z_j vadinamas integralas $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_j} f(z) dz$, kur

C_j – koks nors uždaras kontūras, į kurio vidinę sritį patenka taškas z_j ir nepatenka joks kitas ypatingasis vidinis taškas.

Kai $z=z_j$ – analizinis funkcijos $f(z)$ taškas, tai $\text{Res}_{z \rightarrow z_j} f(z)=0$, o kai z_j – ypatingasis taškas, tai $\text{Res}_{z \rightarrow z_j} f(z)$ gali būti nelygus 0, o būti lygus, pavyzdžiui, 1.

Pailiustruosiu tai pavyzdžiais.

1. Funkcijos $f(z)=\frac{1}{z}$ taškas $z=0$ yra jos polius. Ir tai vienintelis tos funkcijos ypatingasis taškas.

Apibrėšime aplink tašką $z=0$ apskritimą C pastoviu spinduliu ρ .

Tuomet $\int_C f(z) dz = \int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} i d\varphi = i \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$. Todėl $\text{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{1}{z} = 1$. Kaip matome,

integralo $\int_C \frac{1}{z} dz$ reikšmė nepriklauso nuo apibrėžto aplink tašką $z=0$ apskritimo dydžio (jo spindulio ρ dydžio).

Galima įrodyti, jog **integralo $\int_C \frac{1}{z} dz$ reikšmė nepriklauso ne tik nuo kontūro C dydžio, bet**

ir nuo jo formos. Šios teoremos čia neįrodinėsiu, o tik pailiustruosiu ją konkrečiu pavyzdžiu.

Pavyzdžiui, kai kontūras C yra kvadratas, turintis centrą taške $z=0$ ir kraštines, lygiagrečias koordinačių x bei iy ašims ir lygias $2a$, tai $\int_C \frac{1}{z} dz = \int_C \frac{d(x+iy)}{x+iy} = \int_{-a}^a \frac{dx}{x-ia} + \int_{-a}^a \frac{idy}{a+iy} + \int_a^{-a} \frac{dx}{x+ia} + \int_a^{-a} \frac{idy}{-a+iy} =$
 $= \ln \frac{a-ia}{-a-ia} + \ln \frac{a+ia}{a-ia} + \ln \frac{-a+ia}{a+ia} + \ln \frac{-a-ia}{-a+ia} = \ln \frac{-1+i}{1+i} + \ln \frac{1+i}{1-i} + \ln \frac{-1+i}{1+i} + \ln \frac{1+i}{1-i} = \ln \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} +$
 $+ \ln \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \ln \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} + \ln \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \ln i + \ln i + \ln i + \ln i = 4 \ln i = 4 \ln(e^{i\frac{\pi}{2}}) = 4i \ln e^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi i$, t. y. toks pat, kaip ir tada, kada C buvo apskritimas, turintis centrą taške $z=0$.

2. Rasime funkcijos $f(z)=z^m$, kur $m=0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, (t. y., kai m yra bet koks sveikas skaičius, išskyrus $m=-1$ kuomet, kaip ką tik matėme, $\int_C z^{-1} dz = 2\pi i$), integralą $\int_C z^m dz$, kur C – apskritimas, turintis spindulį lygų ρ , ir centrą taške $z=0$.

$$\int_C z^m dz = \int_0^{2\pi} (\rho e^{i\varphi})^m \rho e^{i\varphi} d\varphi = \rho^{m+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} d\varphi = \frac{\rho^{m+1}}{m+1} \cdot e^{i(m+1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\rho^{m+1}}{m+1} (e^{i(m+1)2\pi} - 1) =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m+1} [\cos(m+1)2\pi + i \sin(m+1)2\pi - 1] = 0.$$

$$\text{Todėl } \int_C z^m dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{kai } m = -1; \\ 0, & \text{kai } m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{Analogiškai gauname, jog } \int_C (z-z_k)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{kai } m = -1; \\ 0, & \text{kai } m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

3. Funkcija $f(z)=\frac{z^2-2z+1}{(z-2)^3}$ turi kartotinį polių taške $z=2$. Rasime tos funkcijos Lorano eilutę taško $z=2$ aplinkoje.

Kadangi funkcija $\varphi(z)=z^2-2z+1$ yra analizinė bet kurioje kompleksinės plokštumos baigtinėje srityje, tai ją galima išreikšti Teiloro eilute taško $z=2$ aplinkoje $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(2)}{n!} (z-2)^n$.