

Nesunku įrodyti, kad $S \cup \bar{S} \cong K_p$, kur p – viršūnių skaičius grafiniame struktūros S modelyje. Analogiškai įrodome, kad $K_m \cup K_n \cong \bar{K}_{m,n}$.

1.9.2.21.2. Struktūrų kompozicijos operacija

Jei sistemos S dekompozicijos metu, dalinant sistemą į posistemius, buvo nutraukti kai kurie tarpelementiniai sistemos S ryšiai ir paversti posistemų ryšiais su jų išorine aplinka, kaip, pavyzdžiui, buvo padaryta dekomponuojant sistemą, pavaizduotą 160 pav. į posistemius (žiūr. 161 pav.), tai, norint iš dekompozicijos rezultatų (posistemų struktūrų $S_1^{(I)}$ ir $S_2^{(I)}$ ir sistemos struktūros $S^{(II)}$ posistemų lygyje) atstatyti pirminę sistemos struktūrą $S^{(I)}$, reikia sistemų sąsajos algoritmą modifikuoti. Tokią sistemų jungimo (jų sąsajos) operacijos modifikaciją vadinsime **struktūrų kompozicijos operacija** ir žymėsime ženklu $S_i^{(I)} \cup_k S_j^{(I)} \cong S^{(II)}(S_i^{(I)}, S_j^{(I)}) \cong S$.

Kaip konkretų struktūrų kompozicijos pavyzdį, atliksime struktūrų $S_1^{(I)}$ ir $S_2^{(I)}$, kurių operatoriai $R_1^{(I)}$ ir $R_2^{(I)}$ pavaizduoti 48 ir 49 lentelėse, kompoziciją į struktūrą $S^{(I)}$, žinodami šios struktūros antrojo ešelono $S^{(II)}$ operatorių $R^{(II)}$ (žiūr. 50 lentelę).

Operaciją $S_1^{(I)} \cup_k S_2^{(I)} \cong S^{(II)}(S_1^{(I)}, S_2^{(I)}) \cong S^{(I)}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ galima užrašyti ir operatorinėje formoje: $R_1^{(I)}(A_1, A_3) \cup_k R_2^{(I)}(A_2, A_4, A_5) \cong R^{(II)}(R_1^{(I)}(A_1, A_3), R_2^{(I)}(A_2, A_4, A_5)) \cong R^{(I)}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Šios operacijos rezultatu bus struktūros $S^{(I)}$ operatorius $R^{(I)}$ (žiūr. 160 pav. ir jame pateiktą lentelę).

Struktūrų kompozicijos algoritmą galima padalinti į dvi dalis:

- 1) **Operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės formos sudarymas**, t. y. tos lentelės stulpelių ir eilučių identifikavimas ir jų skaičiaus $j^{(\max)}=a$ ir $u^{(\max)}=b$ nustatymas;
- 2) **Operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelių užpildymas**.

Pirmoji struktūrų kompozicijos algoritmo dalis

1.1. Nagrinėjame operatorius $R_1^{(I)}$ ir $R_2^{(I)}$ ir sudarome bendrą vidinių elementų (agregatų), įeinančių į posistemius $S_1^{(I)}$ ir $S_2^{(I)}$ (o tai reiškia – ir į sistemą $S^{(I)}$), sąrašą, t. y. nustatome pirmuosius operatoriaus $R^{(I)}$, kurį reikia sudaryti, stulpelius. Mūsų nagrinėjamu konkrečiu atveju (žiūr. 48 ir 49 lenteles), tai bus stulpeliai 1, 2, 3, 4, 5, atitinkantys vidinius struktūros $S^{(I)}$ agregatus A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Nustatome vidinių agregatų skaičių a_1 . Mūsų atveju $a_1=5$.*

Po to pereiname prie kito šio algoritmo etapo, kurį pažymėsime 1.2.

1.2. Nagrinėjame operatorių $R^{(II)}$ ir nustatome, kiek ir kokių struktūros S išorinės aplinkos įėjimo (o tai reiškia ir struktūros S išėjimo į išorinę aplinką) stulpelių, atitinkančių išorinės aplinkos agregatus $A_{0,r}$, į kuriuos veikia nagrinėjama sistema, turi operatorius $R^{(II)}$. Lygiai tuos pačius (atitinkančius išorinės aplinkos įėjimus) stulpelius privalo turėti ir operatorius $R^{(I)}$, nes struktūrų $S^{(II)}$ ir $S^{(I)}$ išorinės aplinkos sutampa. Pažymime tų stulpelių skaičių a_0 ir tuos stulpelius prijungiamo prie jau etape 1.1. išskirtų stulpelių. Surandame bendrą visų operatoriaus $R^{(I)}$ stulpelių skaičių $a=a_1+a_0$. Tai bus maksimali operatoriaus $R^{(I)}$ stulpelio numerio j reikšmė $j^{(\max)}$. Jei stulpelis skirtas vidiniam agregatui, tai stulpelio numeris j sutaps su agregato A_j numeriu, tačiau jei stulpelis skirtas išoriniam agregatui $A_{0,r}$, tai tokio stulpelio numeris j operatoriaus $R^{(I)}$ lentelėje nebesutaps su išorinio agregato numeriu (identifikatoriumi), o bus lygus vidinių agregatų skaičiui + išorinio agregato, į kurį veikia nagrinėjama sistema, eilės numeriui.

* Jei būtų vykdoma kompozicijos operacija $S_1^{(I)} \cup_k S_2^{(I)} \cup_k S_3^{(I)} \cong S^{(II)}(S_1^{(I)}, S_2^{(I)}, S_3^{(I)})$ (žiūr. 51÷55 lenteles), tai būtų nagrinėjami

operatoriai $R_1^{(I)}$, $R_2^{(I)}$ ir $R_3^{(I)}$ ir būtų sudaromas visų jų vidinių agregatų, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ sąrašas, kuriems operatoriaus $R^{(I)}$ lentelėje skiriami stulpeliai $j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Kompozicijos algoritmas gali būti taikomas ir operacijai

$\bigcup_{v=1}^m S_v^{(I)} \cong S^{(II)}(S_1^{(I)}, \dots, S_v^{(I)}, \dots, S_m^{(I)})$. Tuomet būtų nagrinėjami visų posistemų pirmojo lygio operatoriai $R_v^{(I)}$, sudaromas

bendras visų vidinių agregatų A_j sąrašas ir operatoriaus $R^{(I)}$ lentelėje skiriama kiekvienam iš tų agregatų po stulpelį.

Mūsų nagrinėjamu konkrečiu atveju (žiūr. 48, 49 ir 50 lentelės) operatorius $R^{(II)}$ turi tik vieną išorinės aplinkos įėjimams skirtą ir atitinkantį išorinį agregatą A_{02} stulpelį 02. Todėl tokį stulpelį išskirsime ir operatoriaus $R^{(I)}$ lentelėje. Bendras visų tos lentelės stulpelių skaičius $a=a_1+a_0=5+1=6$.

Po lentelės $R^{(I)}$ stulpelių išskyrimo ir skaičiaus a nustatymo, pereiname prie etapo 1.3.

1.3. Nagrinėdami operatorius $R_1^{(I)}$, $R_2^{(I)}$ ir $R^{(II)}$ (o bendrai $R_1^{(I)}$, ..., $R_v^{(I)}$, ..., $R_m^{(I)}$, $R^{(II)}$), nustatome maksimalų jų agregatų ir jų išorinių aplinkų įėjimo kontaktų skaičių $u^{(max)}=b$ ir išskiriame operatoriuje $R^{(I)}$ lygiai tiek eilučių. Mūsų nagrinėjamu konkrečiu atveju maksimalų įėjimo kontaktų skaičių turi aplinka 02 operatoriuje $R^{(II)}$. Tas skaičius lygus 4. Todėl ir operatoriuje $R^{(I)}$ sudarome 4 eilutes (žiūr. 57 lentelę).

57. lentelė

j	1	2	3	4	5	6
A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_{02}
u						
1						
2						
3						
4						

Po to pereiname prie šio operatoriaus lentelės formos, pavaizduotos 57 lentelėje, langelių užpildymo, t. y. prie **antrosios kompozicijos algoritmo dalies**.

Antroji struktūrų kompozicijos algoritmo dalis

2.1. Suteikiame algoritmo (ir jį realizuojančios programos) formaliesiems parametrus – stulpelių ir eilučių numeriams j , u , $j^{(max)}$ ir $u^{(max)}$ – pradinės ir galutinės faktinės reikšmės: $j:=1$, $u:=1$, $j^{(max)}:=a$, $u^{(max)}:=b$. Mūsų nagrinėjamu konkrečiu atveju $a=6$, $b=4$. Pereiname prie etapo 2.2.

2.2. Pagal stulpelio numerį j nustatome A_j , t. y. nustatome, ar A_j – vidinis sistemos agregatas ($j \leq a_1$), ar išorinės aplinkos įėjimus atitinkantis agregatas ($j > a_1$). Jei A_j – vidinis agregatas, tai pereiname prie etapo 2.3, o jei stulpelis j skirtas išorinei aplinkai – prie etapo 2.10.

2.3. Surandame tą posistemį S_{v_j} , kuriam priklauso agregatas A_j (toliau šį posistemį žymėsime S_{v_j}), ir surandame to posistemio operatoriaus $R_{v_j}^{(I)}$ stulpelyje, skirtame agregatui A_j , eilutę u , t. y. surandame operatoriaus $R_{v_j}^{(I)}$ lentelėje langelį (A_j, u) ir perskaitome to langelio turinį $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}}$ (žymėjimą $[t, p]_{R_k}$ interpretuosime kaip operatoriaus R_k lentelės langelio, kurio adresas – stulpelis t ir eilutė p , turinį, t. y. išėjimo kontakto adresą (c, d) , kur c – vidinio agregato ar išorinės aplinkos agregato numeris, o d – išėjimo kontakto numeris). Pereiname prie etapo 2.4.

2.4. Analizuojame operatoriaus $R_{v_j}^{(I)}$ lentelėje išskirto langelio (A_j, u) perskaitytą turinį $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}}$. Jei tai – posistemio $S_{v_j}^{(I)}$ vidinio agregato išėjimo kontakto adresas, t. y., jei $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}} = (A_k, p)$, kur A_k – vidinis agregatas, priklausantis struktūrai $S_{v_j}^{(I)}$, tai pereiname prie etapo 2.5. Jei $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}} = \emptyset$ (tuščias langelis) – pereiname prie etapo 2.8. Jei $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}}$ – posistemio $S_{v_j}^{(I)}$ išorinės aplinkos išėjimo kontakto adresas, t. y., jei $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}} = (A_{(0v_j), k, p})$, tai pereiname prie etapo 2.13.

2.5. Perrašome operatoriaus $R_{v_j}^{(I)}$ lentelės langelio (A_j, u) turinį $[A_j, u]_{R_{v_j}^{(I)}} = A_k, p$ į operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelį (j, u) , t. y. įvykdome operaciją $[j, u]_{R^{(I)}} := A_k, p$. Užpildę operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės eilinį langelį, pereiname prie etapo 2.6.

2.6. Didiname eilutės numerį u vienetu, t. y. vykdome operaciją $u:=u+1$. Po to pereiname prie etapo 2.7.

2.7. Jei $u > b$, tai pereiname prie etapo 2.8, o jei $u \leq b$, tai grįžtame prie etapo 2.2. Žinoma, jei prie etapo 2.6. mes atėjome nuo etapo 2.5. arba nuo etapų 2.14. ar 2.15, tai galima buvo grįžti prie etapo

2.3, o jei prie etapo 2.6. mes atėjome nuo etapo 2.12, tai – prie etapo 2.10, kas sutrumpintų ir pagreintų algoritmo darbą, tačiau tam būtų reikalinga įsiminti papildomą informaciją ir vykdyti papildomą jos analizę, kas kažin ar apsimokėtų, lyginant su ta darbo ar laiko ekonomija, kurią gautume, nevykdydami etapo 2.2. Todėl ir buvo pasirinkta tokia algoritmo realizavimo tvarka, kai po etapo 2.7. einame arba prie etapo 2.8., arba grįžtame prie etapo 2.2. ir pakartotinai vykdome stulpelio j analizę.

2.8. Didiname stulpelio j numerį vienetu, o parametro u reikšmę pakeičiame vienetu, t. y. vykdome operacijas: $j:=j+1$ ir $u:=1$. Po to pereiname prie etapo 2.9.

2.9. Jei $j \leq a$, tai grįžtame prie etapo 2.2, o jei $j > a$, tai realizuojame procedūrą „End“, reiškiančią, kad algoritmas baigė savo darbą – visi operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės stulpeliai užpildyti.

2.10. Operatoriaus $R^{(II)}$ lentelėje surandame struktūros S išorinės aplinkos stulpelį, atitinkantį tą išorinės aplinkos agregatą, kuriam operatoriaus $R^{(I)}$ lentelėje skirtas nagrinėjamas stulpelis j . Tarkime, kad čia minimo išorinės aplinkos agregato identifikatorius yra $A_{0,r}$. Tuomet operatoriaus $R^{(II)}$ lentelėje surandame langelį $(A_{0,r}; u)$ ir perskaitome jo turinį $[A_{0,r}; u]_{R^{(II)}}$. Po to pereiname prie etapo 2.11.

2.11. Jei $[A_{0,r}; u]_{R^{(II)}}$ – kokio nors posistemio $S_v^{(I)}$ išėjimo kontakto p adresas (S_v, p) , t. y. jei $[A_{0,r}; u]_{R^{(II)}} = S_v, p$, tai pereiname prie etapo 2.12. Jei operatoriaus $R^{(II)}$ lentelės langelis $(A_{0,r}; u)$ – tuščias, t. y., jei $[A_{0,r}; u]_{R^{(II)}} = \emptyset$, tai pereiname prie etapo 2.8.

2.12. Pagal etape 2.11 išskirtą adresą $[A_{0,r}; u]_{R^{(II)}} = S_v, p$ susirandame operatoriaus $R_v^{(I)}$ lentelės išorinės aplinkos $(0v)$ stulpelyje eilutės p langelį. Ten randame posistemio $S_v^{(I)}$ kokio nors vidinio agregato A_i išėjimo kontakto 1 adresą $(A_i, 1)$. Jį ir perrašome į operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelį (j, u) , t. y. įvykdome operaciją $[j, u]_{R^{(I)}} := A_i, 1$, arba, kitaip tariant: $[j, u]_{R^{(I)}} := [(0v); p]_{R_v^{(I)}}$. Tai galima užrašyti dar ir taip: $[j, u]_{R^{(I)}} := [[A_{0,r}; u]_{R^{(II)}}]_{R_v^{(I)}}$. Po to pereiname prie etapo 2.6.

2.13. Operatoriaus $R^{(II)}$ lentelėje surandame stulpelį, skirtą posistemiiui $S_{v_j}^{(I)}$, kurio išorinės aplinkos $(0v_j)$ išėjimo kontakto p adresą $((0v_j), p)$ mes perskaitėme operatoriaus $R_{v_j}^{(I)}$ langelyje $(A_j; u)$. Tame stulpelyje surandame eilutę p ir perskaitome išskirto langelio (S_{v_j}, p) turinį $[S_{v_j}, p]_{R^{(II)}}$ – poveikio, atėjusio į posistemio $S_{v_j}^{(I)}$ įėjimo kontaktą p iš jo išorinės aplinkos, išėjimo adresą. Tai gali būti arba visos sistemos išorinės aplinkos išėjimo kontakto adresas, arba kurio nors posistemio $S_t^{(I)}$ išėjimo kontakto 1 adresas. Po langelio (S_{v_j}, p) operatoriaus $R^{(II)}$ lentelėje turinio perskaitymo pereiname prie etapo 2.14.

2.14. Jei $[S_{v_j}, p]_{R^{(II)}}$ – visos sistemos išorinės aplinkos išėjimo kontakto adresas, tai mes tą adresą perrašome į operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelį (j, u) , t. y. įvykdome operaciją $[j, u]_{R^{(I)}} := [S_{v_j}, p]_{R^{(II)}}$, o po to pereiname prie etapo 2.6. Jei $[S_{v_j}, p]_{R^{(II)}} = S_t, 1$, t. y., jei operatoriaus $R^{(II)}$ langelyje (S_{v_j}, p) mes perskaitėme posistemio $S_t^{(I)}$ išėjimo kontakto adresą 1 , tai pereiname prie etapo 2.15.

2.15. Operatoriaus $R_t^{(I)}$ lentelės išorinės aplinkos $(0t)$ stulpelio eilutės p langelyje, kurį mes susirandame naudodamiesi etape 2.14. surastu adresu $[S_{v_j}, p]_{R^{(II)}} = S_t, 1$, perskaitome to langelio turinį – posistemio $S_t^{(I)}$ vidinio agregato išėjimo kontakto adresą, o po to visa tai perrašome į operatoriaus $R^{(I)}$ langelį (j, u) , t. y. įvykdome operaciją $[j, u]_{R^{(I)}} := [(0t), p]_{R_t^{(I)}}$. Užpildę eilinį operatoriaus $R^{(I)}$ langelį, pereiname prie etapo 2.6.

Turėdami bendrą kompozicijos algoritmo aprašymą, galime pailiustruoti jo darbą, naudodamiesi tuo konkrečiu pavyzdžiui, nuo kurio pradėjome operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės konkrečios formos sudarymą.

Tarkime, jog mes esame šio algoritmo etape 2.2., pačioje algoritmo darbo pradžioje, kuomet $j=1$ ir $u=1$.

Algoritmo blokas 2.2. nustato, kad agregatas A_1 – vidinis ir priklauso posistemiiui $S_1^{(I)}$. Todėl blokas 2.2. kreipiasi į bloką 2.3.

Blokas 2.3 operatoriaus $R_1^{(I)}$ stulpelio, skirto agregatui A_1 , eilutėje $u=1$ perskaito langelio (1,1) turinį $[1;1]_{R_1^{(I)}} = (01), 1$ ir kreipiasi į bloką 2.4.

Blokas 2.4 nustato, jog perskaitytas adresas – vidinio agregato A_1 išėjimo kontakto 3 adresas, ir kreipiasi į bloką 2.5.

Blokas 2.5 perrašo operatoriaus $R_1^{(I)}$ langelio ($A_3, 3$) turinį 1, 3 į operatoriaus $R^{(I)}$ langelį (3,3) ir kreipiasi į bloką 2.6.

Blokas 2.6 padidina u vienetu, t. y. suranda naują u reikšmę $u=3+1=4$, ir kreipiasi į bloką 2.7.

Blokas 2.7 peradresuoja į bloką 2.2 (arba į bloką 2.3) ir prasideda naujas ciklas – operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelio (3; 4) turinio paieška.

Kadangi operatoriaus $R_1^{(I)}$ langelis ($A_3, 4$) – tuščias, tai blokas 2.4 kreipiasi į bloką 2.8. Blokas 2.8 padidina stulpelio numerį j vienetu, t. y. suskaičiuoja naują jo reikšmę $j=3+1=4$, ir sugrąžina paieškas į pirmą eilutę, t. y. įvykdo operaciją $u=1$. Po to kreipiasi į bloką 2.9. Blokas 2.9, nustatęs, jog $4 < 6$, kreipiasi į bloką 2.2 ir prasideda operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelio (4;1) turinio paieška.

Kadangi blokas 2.2 kreipsis į bloką 2.3, o šis, perskaitęs operatoriaus $R_2^{(I)}$ langelyje ($A_4, 1$) adresą (02), 3, kreipsis į bloką 2.4, kuris, nustatęs, jog tai – posistemio $S_2^{(I)}$ išorinės aplinkos (02) kontakto adresas, kreipsis į bloką 2.13, tai prasidės ciklas, panašus į operatoriaus $R^{(I)}$ langelių (1,1) ir (1,2) užpildymo ciklus. tačiau jis šiek tiek skirsis, nes blokas 2.14, nustatęs, jog $[S_2, 3]_{R^{(II)}}$ – tai posistemio $R_1^{(I)}$ trečiasis išėjimo kontaktas, kreipsis į bloką 2.15, o blokas 2.15, perskaitęs operatoriaus $R_1^{(I)}$ išorinės aplinkos (01) stulpelio trečiosios eilutės turinį, lygų 1.3, perrašys tai į operatoriaus $R^{(I)}$ ketvirtojo stulpelio pirmąją eilutę. Po to vėl bus kreipiamasi į bloką 2.6 ir prasidės operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės langelio (4, 2) turinio paieška.

Tarkime, jog turime $j=6$ ir $u=4$, t. y., ieškome operatoriaus $R^{(I)}$ šeštojo stulpelio ketvirtosios eilutės turinio ir esame 2.2 etape.

Blokas 2.2 nustatys, jog $j=6$ atitinka sistemos išorinės aplinkos A_{02} stulpelį. Todėl blokas 2.2 kreipsis į bloką 2.10.

Blokas 2.10 operatoriaus $R^{(II)}$ lentelės išorinės aplinkos 02 stulpelio ketvirtoje eilutėje perskaitys $S_2, 2$ ir kreipsis į bloką 2.11.

Blokas 2.11, nustatęs, kad $S_2, 2$ – posistemio $S_2^{(I)}$ išėjimo kontakto 2 adresas, kreipsis į bloką 2.12.

Blokas 2.12 pagal adresą $S_2, 2$ operatoriaus $R_2^{(I)}$ lentelės išorinės aplinkos (02) stulpelio antroje eilutėje perskaitys adresą 4, 2 ir perrašys jį į operatoriaus $R^{(I)}$ lentelės šeštojo stulpelio (t. y. išorinės aplinkos 02 stulpelio) ketvirtąją eilutę. Po to blokas 2.12 kreipsis į bloką 2.6.

Blokas 2.6 ras naują u reikšmę: $u=4+1=5$ ir kreipsis į bloką 2.7.

Blokas 2.7, nustatęs, jog $5 > 4$, t. y., jog $u > b$, kreipsis į bloką 2.8, kuris padidins j reikšmę iki 7 ir kreipsis į bloką 2.9. Šis, nustatęs, jog $7 > 6$, t. y., jog $j > a$, baigs algoritmo darbą.

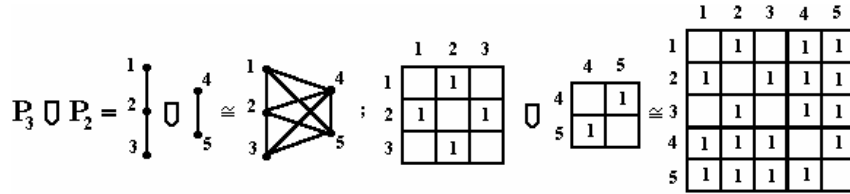
Kompozicijos algoritmą galima būtų taikyti ir jungiant uždaras struktūras, neturinčias bendrų elementų, kaip pavyzdžiui, 168 pav. Tai būtų „išsigimusi“ kompozicija, kurioje $S^{(II)}$ matrica būtų f , t. y. „nulinė“. Tokiu atveju, gautume paprastos sąsajos operacijos rezultatą, kurio gavimo algoritmas matricinėje formoje pavaizduotas 169 ir 170 pav. Kadangi šis algoritmas žymiai paprastesnis, negu kompozicijos algoritmas „neišsigimusi“ atveju, tai nėra prasmės struktūrų sąsajos operaciją $\bigcup_{i=1}^m S_i$, kai

struktūros S_i – uždaros, vykdyti kaip struktūrų S_i kompoziciją. Tą patį galima pasakyti ir apie atvejus, kai uždaros struktūros S_i turi bendrų elementų (žiūr. 171 pav., kur struktūrų – operandų – matricos struktūroje – rezultate – „užsideda“ viena ant kitos) ir kai uždaros struktūros S_i – multigrafai (žiūr. 38 pav.). Struktūrų sąsajos algoritmas yra paprastesnis negu struktūrų kompozicijos algoritmas ir tuo atveju, kai sąsajos operandai – atviros struktūros, neturinčios tiesioginių tarpusavio ryšių per savo išorines aplinkas (žiūr. 174 pav.).

1.9.2.21.3. Struktūrų grafinė suma

Kaip jau buvo minėta, struktūrų sąsajos operacija $\bigcup$ yra viena iš kraštutinių struktūrų jungimo operacijos modifikacijų. Jai būdinga tai, kad, jungiant struktūras, neatsiranda naujų ryšių (o, reiškia, ir naujos sistemos, kuri kuo nors skirtųsi nuo paprastos jungiamų sistemų sumos).

Kita krašutinė modifikacija yra operacija, kurią žymėsime ženklu $\cup$ ir vadinsime „struktūrų grafine suma“*. Jai būdinga tai, kad, jungiant dvi struktūras S_i ir S_j , tarp jų atsiranda maksimalus tarpsteminis loginių ryšių skaičius (t. y. jungimas charakterizuojamas maksimaliu emerdžentiškumu). Struktūrų grafinė suma gaunama tada, kai kiekvienas struktūros S_i elementas sujungiamas su kiekvienu struktūros S_j elementu abipusiais loginiais ryšiais, kaip tai parodyta 175 pav. Tokių sistemų sujungimą vadinsime **maksimaliai aktyviu sujungimu**. Tai – ryškiai netiesinis procesas.

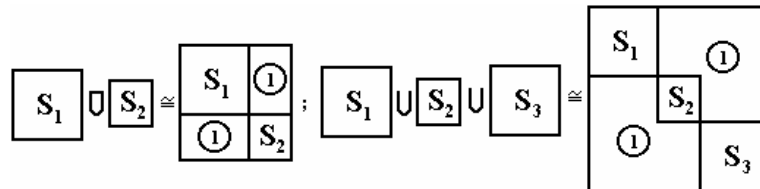


175 pav.

Nesunku įrodyti (patikrinkite!), kad $K_m \cup K_n \cong K_{m+n}$, $(mK_1) \cup (nK_1) \cong K_{m+n}$, $K_1 \cup C_{n-1} \cong W_n$, $P_2 \cup P_2 \cong K_4$, $S \cup \bar{S} \cong K_p$.

Operacija $\cup$ komutatyvi ir asociatyvi, todėl daugartinę operacijos $\cup$ panaudojimą galima užrašyti kaip n -arinę operaciją $\bigcup_{i=1}^n S_i$.

Jei struktūrų $S_1, S_2, \dots, S_m$ poros neturi bendrų elementų, tai struktūrų $S_1 \cup S_2$ ir $\bigcup_{i=1}^n S_i$ matricos gaunamos taip, kaip parodyta 176 pav., kur $\{ \}$ – matrica, kurios visi elementai – vienetukai.



176 pav.

Nesunku pastebėti, jog struktūrų $\bigcup_{i=1}^m S_i$ ir $\bigcup_{i=1}^n S_i$ matricos yra panašios tuo, kad jose operandų $S_1, S_2, \dots, S_m$ matricos sudaro rezultato S matricoje (jei žiūrėtume į ją kaip į „matricų matricą“) lyg ir „pagrindinę teigiamąją įstrižainę“, o visi likusieji „matricų matricos“ langeliai užpildomi matricoje $\bigcup_{i=1}^m S_i$ nuliais, o matricoje $\bigcup_{i=1}^n S_i$ vienetukais.

Struktūrų $S_1, S_2, S_3, \dots, S_i$ aibė, paimta kartu su operacija $\cup$ taip pat yra pusgrupis, kurį galima laikyti monoidu.

Jei struktūrų $S_1, S_2, \dots, S_m$ poros turi bendrų elementų, tai struktūros $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ matrica gaunama panašiai, kaip ir struktūros $\bigcup_{i=1}^m S_i$ matrica, t. y., su persidengiančių langelių turiniu vykdoma disjunkcija:

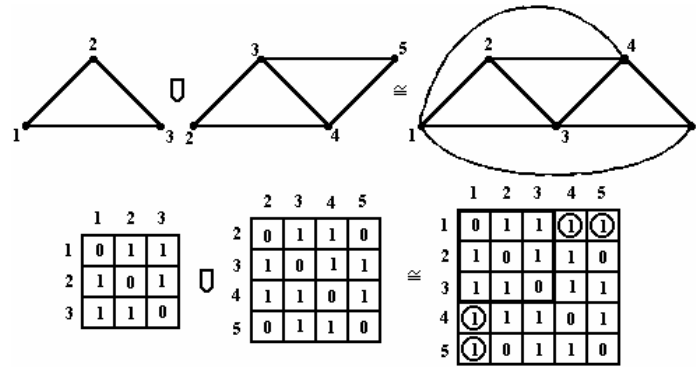
$$r_{u,v} = r_{1,u,v} \vee r_{2,u,v} \vee \dots \vee r_{m,u,v}.$$

Skirtumas tik tas, kad „matricų matricoje“ S likusieji langeliai (t. y. langeliai, nepadengti nė vieno iš operandų S_i matricose) užpildomi ne nuliais, o vienetukais (žiūr. 176 pav.).

Grafiškai sumuojant struktūras, turinčias bendrų elementų, gali susidaryti įvairių ypatingų situacijų. Viena iš jų pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu.

Iš 177 pav. matyti, kad ryšys tarp elementų 2 ir 5 neatsiranda, nors elementas 2 priklausė S_1 ir S_2 , o elementas 5 – S_2 . Tai paaiškinama tuo, kad atsiranda tik tarpsteminiai ryšiai, o jungiant sistemas $S_1 \cup S_2$, elemento 2, priklausančio abiem jungiamoms sistemoms S_1 ir S_2 , ryšys su elementu 5 būtų jau vidiniu sistemos S_2 ryšiu.

* Kai kurie autoriai (žiūr. pavyzdžiui, [98]) žymi šią operaciją ženkliu „+“.



177 pav.

Struktūros $\bigcup_{i=1}^n S_i$ viršūnių skaičius p lygus struktūros $\bigcup_{i=1}^m S_i$ viršūnių skaičiui. Pavyzdžiui, jei $S \equiv S_i \cup S_j$, tai $p = p_i + p_j - [p_i \cap p_j]$, kur, kaip jau buvo minėta 1.9.2.21.1. skyrelyje, terminas $[p_i \cap p_j]$ reiškia struktūrų S_i ir S_j bendrųjų elementų skaičių.

Struktūros $S \equiv S_i \cup S_j$ lankų skaičius $\ell = \ell_i + \ell_j - [\ell_i \cap \ell_j] + 2(p_i - [p_i \cap p_j])(p_j - [p_i \cap p_j])$. Jei struktūros S_i ir S_j neturi bendrų elementų, tai $\ell = \ell_i + \ell_j + 2p_i p_j$.

Struktūros $S \equiv \bigcup_{i=1}^n S_i$ lankų skaičių ℓ gauname, pridėję prie struktūros $\bigcup_{i=1}^m S_i$ lankų skaičiaus skaičių $2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \{(p_i - [p_i \cap p_j])(p_j - [p_i \cap p_j])\}$.

Jei struktūrų $S_1, S_2, \dots, S_m$ poros neturi bendrų elementų, tai struktūros $S \equiv \bigcup_{i=1}^n S_i$ lankų skaičius

$$\ell = \sum_{i=1}^m \ell_i + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m p_i p_j.$$

Kai struktūros S_i yra skirtingi elementai (kitaip tariant, visos S_i yra K_1), tai struktūra $S \equiv \bigcup_{i=1}^n S_i$ yra pilnas grafas K_n , turintis $p=n$ viršūnių ir $\ell = n(n-1)$ lankų. Tai sutampa su rezultatu, gaunamu, naudojantis formule $\ell = \sum_{i=1}^m \ell_i + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m p_i p_j$, nes, įstatę į tą formulę $\ell_i = 0$ ir $p_i = p_j = 1$, gauname

$$\ell = \sum_{i=1}^m 0 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m 1 \cdot 1 = 0 + 2[(m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1] = 2 \cdot \frac{m-1+1}{2} \cdot (m-1) = m(m-1).$$

1.9.2.21.4. Struktūrų jungimo operacijų tarpinės modifikacijos

Tarp kraštutinių struktūrų jungimo operacijos modifikacijų $\cup$ ir $\cap$, reiškiančių maksimaliai pasyvų ir maksimaliai aktyvų sistemų sujungimą, telpa eilė **tarpinių aktyvaus sistemų sujungimo modifikacijų**, kurių rezultatai gaunami, sujungus ne būtinai visus, o tik kai kuriuos vieno operando elementus su kai kuriais kito operando elementais. Visos šios operacijos yra netiesinės, tačiau netiesiškumas ir emerđžencija tų operacijų atlikimo metu pasireiškia nevienodai.

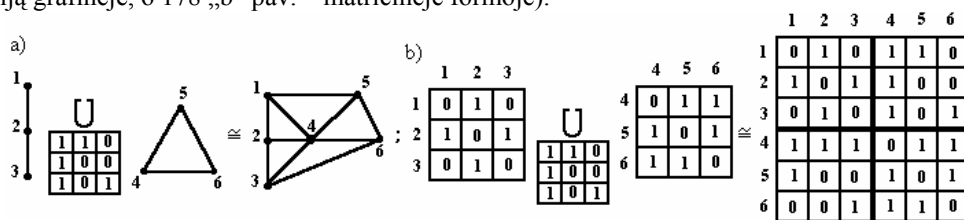
Jei jungimas vyksta abipusiais ryšiais, tai tokias modifikacijas žymėsime ženklu g . Jei struktūros S_i ir S_j neturi bendrų elementų, tai žymėjimą g atitiks $2^{p_i p_j} - 2$ modifikacijų, t. y. toks žymėjimas bus nevienareikšmis. Neapibrėžtumą (informacinę ženklo g entropiją) galima sumažinti, jei nurodysime atsirandančių tarpusisteminių ryšių skaičių k , t. y., jei operaciją žymėsime ženklu g^k . Tačiau ir tokį žymėjimą atitinka ne vienas, o $C_{p_1 p_2}^k$ skirtingų jungimo operacijos rezultatų. Dar daugiau jungimo operacijos modifikacijų galima gauti, jei jungimui naudojami vienusiškai orientuoti ryšiai ir jungimo operaciją žymimi ženklu a . Tuomet operacija $S_i \cup S_j$ turės $2^{p_i p_j} - 2$ skirtingų modifikacijų (jei S_i ir S_j neturi bendrų elementų), o operaciją $S_i \cap S_j$ atitiks $C_{p_1 p_2}^k$ skirtingų rezultatų. **Todėl vien**

žymėjimų g, g^k, a, a^k dar nepakanka, kad būtų galima vienareikšmiškai įvykdyti struktūrų jungimo operaciją. Reikalinga papildoma informacija, nurodanti, kokie struktūros S_i elementai su kokiais S_j elementais ir kaip yra jungiami. Tokia informacija gali būti pateikta matricomis $p_1^{p_2}$ ir $p_2^{p_1}$.

Modifikacijoms g pakanka vienos iš šių matricų, o modifikacijoms a reikalingos abi matricos. Pavyzdžiui, jei žymėjimą P_3 g K_3 papildo matrica

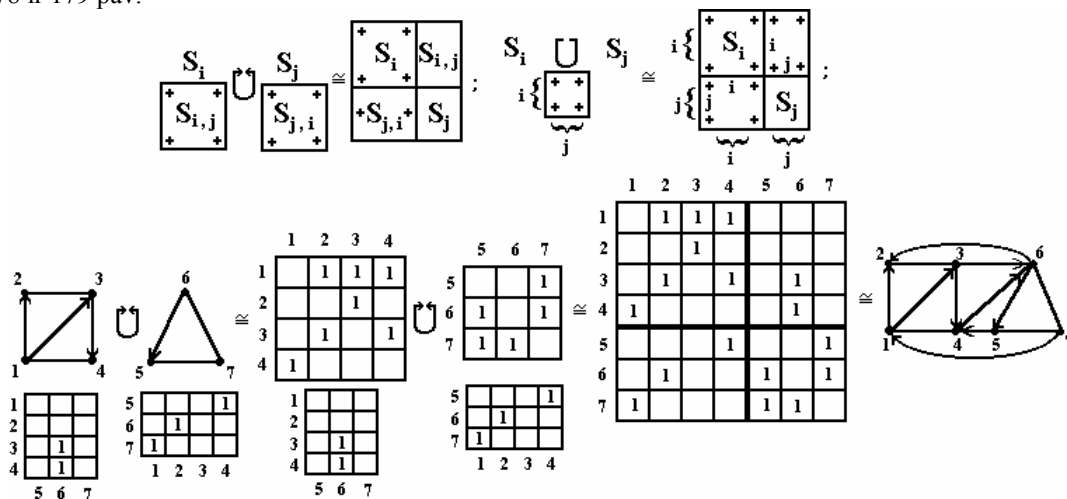
$p_i \backslash p_j$	4	5	6
1	1	1	0
2	1	0	0
3	1	0	1

tai operacija g tampa vienareikšme (žiūr. 178 pav., kur 178 „a“ pav. vaizduoja struktūrų jungimo operaciją grafinėje, o 178 „b“ pav. – matricinėje formoje).



178 pav.

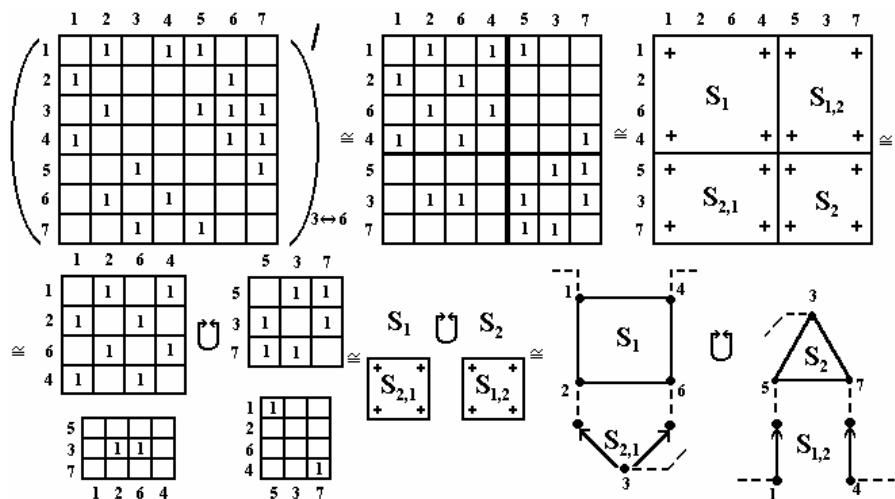
Struktūrų jungimo operacijas g ir a , kai kartu su operandais S_i ir S_j duodamos ir jungimo metu atsirandančių tarpusisteminio ryšių matricos, žymėsime $S_i \overset{g}{\cup} S_j$ ir $S_i \overset{a}{\cup} S_j$, kur žymėjimai i reiškia tarpusisteminio ryšių matricas. Vienetukų ir nulių išsidėstymas tose matricose ir nurodo, tarp kokių struktūros S_i ir struktūros S_j elementų atsiranda tarpusisteminiai ryšiai. Šitokiu būdu užduotų jungimo operacijų rezultatai yra vienareikšmiškai apibrėžti, ir jų rezultatų matricos gaunamos taip, kaip parodyta 178 ir 179 pav.



179 pav.

178 ir 179 pav. parodytas struktūrų jungimo operacijų ir jų realizavimo matricinėje formoje būdas yra patogus, aprašant ir vykdant matricinėje formoje struktūrų dekompoziciją ir kompoziciją.

Tarkime, turime struktūrą S , kurios matrica pavaizduota 180 pav. Tarkime, kad struktūrą S reikia dekomponuoti į du posistemių S_1 ir S_2 taip, kad į posistemį S_1 patektų elementai 1, 2, 4 ir 6, o į posistemį S_2 – elementai 3, 5 ir 7. Sudarome struktūros S matricoje struktūrų S_1 ir S_2 kvadratinės matricas. Tuo tikslu sukeičiame matricoje S elementus 3 ir 6 vietomis, t. y. sukeičiame atitinkamus matricos S stulpelius ir eilutes, kaip tai buvo aprašyta 1.9.2.1. skyrelyje, ir po to gautojoje matricoje išskiriame matricas S_1 ir S_2 , o taip pat matricas $S_{1,2}$ ir $S_{2,1}$ (žiūr. 180 pav.).

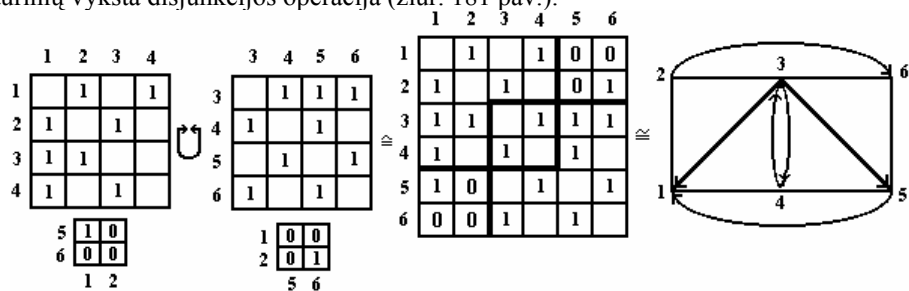


180 pav.

Gautąsias 4 matricas sujungę sąsajos operacija „a“, gautume pradinę matricą S.

Struktūrų dekompoziciją ir kompoziciją matricinėje formoje vaizduoja taip pat 178 bei 179 pav., kur į izomorfiškus struktūrų pertvarkymus galima žiūrėti kaip į procesus, vykstančius ne tik iš kairės į dešinę, bet ir dešinės į kairę (taip pat, kaip ir 180 pav.).

Jungimo operacijos g ir a gali būti taikomos ir struktūroms, turinčioms bendrų elementų. Tuomet matricos S_1 , S_2 , $S_{1,2}$ ir $S_{2,1}$ „užsideda“ viena ant kitos ir tarp „užsidedančių“ vienas ant kito langelių turinių vyksta disjunkcijos operacija (žiūr. 181 pav.).



181 pav.

Jungimo operacijas galima apibendrinti ir multigrafų atvejui, apibendrinant disjunkcijos operaciją $r_{s,u,v} = r_{s_i,u,v} \vee r_{s_j,u,v} = \max(r_{s_i,u,v}; r_{s_j,u,v})$.

Dar daugiau jungimo modifikacijų gausime, jei tarsime, jog **struktūrų jungimo procese gali atsirasti ne tik tarpusisteminiai ryšiai, bet ir nauji vidiniai ryšiai** tarp jungimo operacijos operandų elementų. Tokių operacijų (t. y. jų modifikacijų) žymėjimui galima naudoti ženklus j , k , l , r , m , n , o , p , $\}$, q , r , s . Šių ženklų – ideogramų – prasmė aiški iš jų užrašymo būdo. Pavyzdžiui, operacijos S_i s S_j rezultatas bus struktūra $K_{p_i+p_j-[p_i \cap p_j]}$.

Jei tarsime, kad struktūrų jungimo procese gali atsirasti ne tik loginiai (abipusiai ar vienpusiai), bet ir „multigrafiniai“ ryšiai, tai jungimo operacijos modifikacijų dar padaugės ir žymėjimams t , u , v , w , x , y , $[$, z , 6 , $]$, 4 , 5 reikės dar daugiau papildomos informacijos, kad jie taptų apibrėžtais (vienareikšmiais).

Matriciniu sistemų jungimo (jungimosi) operacijų aprašymo būdu patogiu naudotis, konstruojant kompiuteriu sudėtingas programų sistemas iš jau turimų tipinių modulių. Panašaus metodo panaudojimą galima pastebėti ir gyvojoje gamtoje. Pavyzdžiui, organizmo ląstelės ir jų junginiai konstruojami pagal užkoduotas matricas. Pažeidus tas matricas bei sutrikus informacijos „nuskaitymo“ nuo tų matricų procesams, gauname nukrypimus nuo „normos“, tame tarpe ir tai, ką vadina „išsigimimu“.

1.9.2.22. Struktūrų aritmetinės sudėties operacija

Ši operacija žymima ženklų „+“. Kai struktūra S_Σ yra struktūrų S_i ir S_j aritmetinė suma, tai užrašoma $S_\Sigma \cong S_i + S_j$.

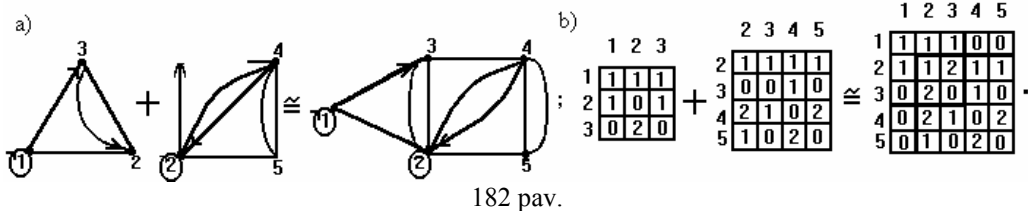
Struktūrų **aritmetinės sudėties operacija siaurąja prasme** gali būti taikoma tik tokioms struktūroms S_i ir S_j , kurios turi tuos pačius elementus ir gali skirtis tik ryšiais. **Sudedant struktūras S_i ir S_j , aritmetiškai sudedamas jų matricų atitinkamų langelių turinys, t. y. $r_{\Sigma, u, v} = r_{i, u, v} + r_{j, u, v}$.**

Struktūrų aritmetinės sudėties operacijos taikymo sritį galima būtų išplėsti, jei priimtume susitarimą, kad bet kuriai struktūrai mintinai galima pridėti nesamus fiktyvius elementus, „surištus“ su esamais struktūroje elementais „nuliniais“ ryšiais. Pridedant struktūrai tokį fiktyvų elementą, jos matrica fiktyviai pasipildo „nuline“ (t. y. užpildyta nuliais) eilute ir „nulinu“ stulpeliu. Šios eilutės ir stulpelio struktūros matricoje galima ir nevaizduoti, o tik mintyse išivaizduoti. Naudojantis tokia fiktyvaus struktūros išplėtimo procedūra, galima manyti, kad bet kokios struktūros S_i ir S_j turi tuos pačius elementus (tik kai kurie iš jų fiktyvūs) ir taikyti tokioms struktūroms struktūrų aritmetinės sudėties operaciją. Atsižvelgiant į pasakytą pastabą, **struktūrų aritmetinės sudėties operaciją plačiąja prasme** galima priskirti bendrųjų operacijų klasei, nes šios operacijos operandais gali būti kaip loginės, taip ir aritmetinės matricos, t. y. paprasti grafai, orgrafai, multigrafai, pseudografai.

Operacija $S_i + S_j \cong S_\Sigma$ analogiška operacijai $S_i \cup S_j \cong S$ ir skiriasi nuo pastarosios tik tuo, kad struktūroje $S_i \cup S_j$, nustatant ryšio tarp elementų u ir v reikšmę $r_{S, u, v}$, naudojama disjunkcija $r_{S, u, v} = r_{i, u, v} \vee r_{j, u, v}$, o nustatant to ryšio reikšmę $r_{\Sigma, u, v}$ struktūroje $S_i + S_j$, naudojama aritmetinė sudėtis $r_{\Sigma, u, v} = r_{i, u, v} + r_{j, u, v}$.

Kai struktūros S_i ir S_j neturi bendrų nefiktyvių elementų, tai $S_i + S_j \cong S_i \cup S_j$, tačiau kai šios struktūros turi bendrų nefiktyvių elementų, tai operacijų $S_i \cup S_j$ ir $S_i + S_j$ rezultatai jau skiriasi.

Operacijos $S_i + S_j$ ir jos rezultato pavyzdys parodytas 182 pav.



Operacija $S_i \cup S_j$ vartojama, kai, jungiant sistemas, vienodi ryšiai tarp jų elementų gali ir turi būti sutapatinami, o operacija $S_i + S_j$ – tada, kada kiekvienas iš ryšių laikomas skirtingu ir, jungiant sistemas, jie sudedami.

Operacija $S_i + S_j$ komutatyvi ir asociatyvi, todėl daugkartinį jos panaudojimą galima laikyti **m-arine operacija** $\sum_{i=1}^m S_i$, kur $m=1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Ši operacija kartu su savo operandais – struktūromis S_i – sudaro abstrinę struktūrą, kurią galima laikyti monoidu.

Jei operacijoje $\sum_{i=1}^m S_i$ visi dėmenys S_i vienodi ir lygūs S , tai jos rezultatą sutrumpintai žymėsime $m0S$. Tai reiškia, kad galima įvesti **struktūros S matricos daugybos iš teigiamo sveiko skaičiaus m operaciją $m0S$** , kuri susiveda į struktūros S matricos kiekvieno langelio turinio (t. y. skaičiaus $r_{u, v}$) dauginimą iš skaičiaus m .

Reikia skirti žymėjimus mS (žiūr. 1.9.2.21.1. skyrelį) ir $m0S$. Pirmasis reiškia m izomorfiškų struktūrų S_i sąsają $mS \cong \bigcup_{i=1}^m S_i$, o antrasis – m tapačiai vienodų (sutampančių ne tik savo ryšiais, t. y.

izomorfiškų, bet ir savo elementais) struktūrų $S_i \cong S$ aritmetinę sumą $m0S \cong \sum_{i=1}^m S_i$, kurios matrica yra struktūros S matrica, padauginta iš skaičiaus m .

Kadangi ir vieną ryšį, jungiantį du elementus ar vieną elementą su savimi, galima interpretuoti kaip atskirą savarankišką struktūrą, t. y. kaip matricą, kurioje visi langeliai išskyrus vieną, yra „nuliniai“, tai struktūrų sudėties operaciją galima taikyti ir tais atvejais, kai kokioje nors matricoje S reikia pakeisti tik vieno langelio ar eilutės bei stulpelio turinį. Kitaip tariant, galima įvesti **struktūros S ir „skaičiaus“ a sudėties operaciją**, kur „skaičiaus“ a reiškia struktūrą, kurios matricos langelyje

(u, u) įrašytas skaičius „ a “, t. y. $r_{u, u} = a$, o visuose kituose langeliuose – nuliai. Tokiu būdu gauname operaciją $S + a$, kurios rezultatas – struktūra, besiskirianti nuo struktūros tik tuo, kad ryšio $r_{u, u}$ reikšmė padidėjo skaičiumi a .

Analogiškai gauname operaciją $S + \underset{u \rightarrow v}{a}$, kuri reiškia, kad prie matricos S langelio (u, v) turinio pridedamas skaičius a .

Susitarę, kad žymėjimas $\underset{u \leftrightarrow v}{a}$ reiškia struktūrą, kurios matricoje $r_{u,v}=a$ ir $r_{v,u}=a$, o visi kiti langeliai – „nuliniai“, galime įvesti operaciją $S + \underset{u \leftrightarrow v}{a}$, padidinančią langelių (u, v) ir (v, u) turinį skaičiumi a .

Pažymėję ženklu $\underset{u \rightarrow \forall v}{a}$ struktūrą, kurios matricos u -toje eilutėje visi elementai lygūs a , o visi kiti matricos elementai „nuliniai“, galime įvesti operaciją $S + \underset{u \rightarrow \forall v}{a}$, reiškiančią, kad skaičius a pridedamas prie struktūros S matricos u -tosios eilutės elementų.

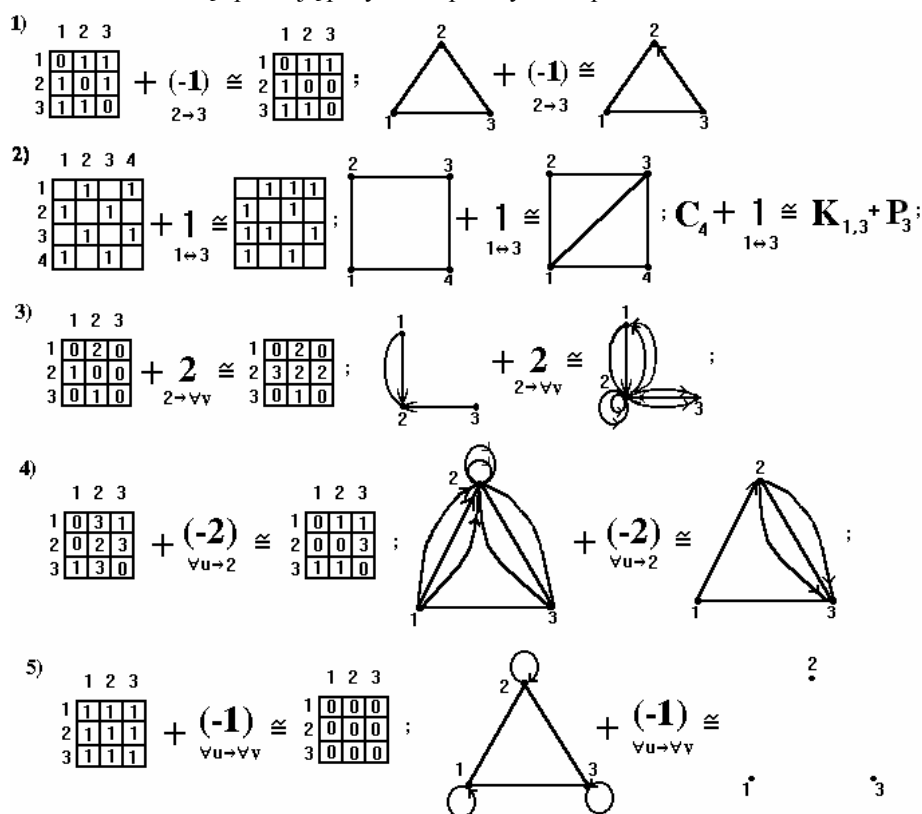
Analogiškai gauname operaciją $S + \underset{\forall u \rightarrow v}{a}$, reiškiančią, kad skaičius a pridedamas prie visų stulpelio v elementų.

Operacija $S + \underset{\forall u \rightarrow \forall v}{a}$ reiškia, kad skaičius a pridedamas prie visų struktūros S matricos elementų.

Galima sudaryti ir daugiau struktūros S sudėties su „skaičiumi“ a operacijos modifikacijų. Pavyzdžiui, $S + \underset{\forall u(u \rightarrow u)}{a}$ reiškia, kad prie visų struktūros S matricos teigiamos įstrižinės elementų turinio pridedama po skaičių a .

Struktūros S sudėties su „skaičiumi“ a operaciją galima taikyti, ne tik norint padidinti, bet ir sumažinti kai kurių ar net visų matricos S langelių turinį, pavyzdžiui, norint panaikinti struktūroje S kai kuriuos ryšius. Tam užtenka, kad skaičius a galėtų būti ne tik teigiamas, bet ir neigiamas.

Aukščiau išvardintų operacijų pavyzdžiai parodyti 183 pav.



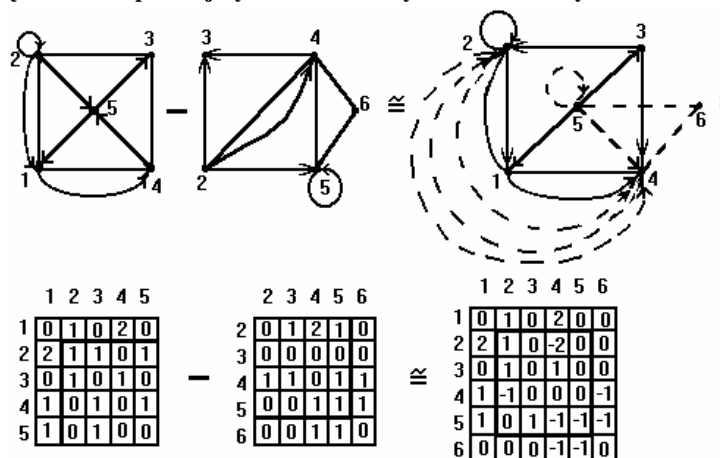
183 pav.

1.9.2.23. Struktūrų atimties operacija

Ši operacija žymima ženklu $S_i - S_j$ ir yra atvirkštinė struktūrų sudėties operacijai siauraja prasme, nes jei $S \cong S_i + S_j$, tai $S_i \cong S - S_j$ ir $S_j \cong S - S_i$. Jei norime, kad struktūrų atimties operacija priklausytų bendrųjų operacijų klasei, t. y. būtų visada apibrėžta ir realizuojama, reikia susitarti, kad gali egzistuoti

fiktyvūs elementai ir kad ryšiai tarp elementų gali turėti ne tik teigiamas, bet ir neigiamas reikšmes (o taip pat ir nulines reikšmes, kas reiškia, kad tarp šių elementų jokio ryšio nėra). Ryšių matricose neigiamus ryšius žymėsime neigiamais skaičiais, o grafuose – punktyru (žiūr. 184 pav.).

Struktūrų atimties operacija yra nekomutatyvi ir neasociatyvi binarinė operacija.



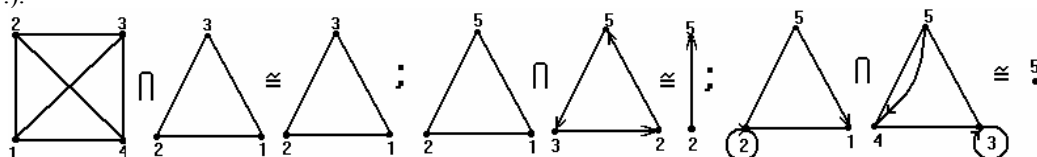
184 pav.

Panašiai, kaip jau buvo minėta, aprašant struktūrų sudėties operaciją, analogiškai galima įvesti skaičiaus a atimtį iš struktūros matricos langelio, eilutės, stulpelio ir visos matricos: $S - a$, $S - a$, $S - a$, $S - a$, $S - a$.
 $u \rightarrow \forall v$, $\forall u \rightarrow v$, $\forall u \rightarrow \forall v$.

Struktūrų atimties operacija vartojama, norint eliminuoti (anuliuoti) kai kuriuos tarpelementinius ryšius struktūroje, o taip pat nustatant tuos ryšius, kuriais dvi struktūros skiriasi viena nuo kitos, bei nustatant ryšius, kurių nagrinėjamai struktūrai trūksta arba kurie yra nereikalingi („pertekliniai ryšiai“).

1.9.2.24. Struktūrų sankirtos operacija

Ši operacija yra binarinė ir žymima ženklų $S_i \cap S_j$. Jos rezultatas – struktūra, susidedanti iš tų elementų ir ryšių, kurie yra bendri struktūroms S_i ir S_j – sankirtos operacijos operandams (žiūr. 185 pav.).



185 pav.

Struktūros $S = S_i \cap S_j$ grafo viršūnių skaičius p ir jo briaunų bei lankų skaičiai q ir ℓ priklauso nuo to, kokia operandų S_i ir S_j dalis yra bendra, ir visuomet tenkina sąlygas: $0 \leq p \leq \min(p_i, p_j)$, $0 \leq q \leq \min(q_i, q_j)$, $0 \leq \ell \leq \min(\ell_i, \ell_j)$. Jei struktūros S_i ir S_j neturi bendrų elementų, tai $S_i \cap S_j = \emptyset$, kur $\emptyset$ – „tuščia struktūra“, neturinti nė vieno elemento, t. y. $[p_i \cap p_j] = p = 0$.

Struktūrų sankirtos operacija gali būti taikoma visoms struktūroms (paprastiems neorientuotiems grafams, orgrafams, multigrafams ir pseudografams), todėl ją galima priskirti bendrųjų binarinių operacijų klasei. Tiesa, jos žymėjimas operanduose turi tenkinti vieną sąlygą: vienas ir tas pats elementas ar ryšys, sutinkamas abiejuose operanduose turi būti pažymėtas vienodai, o skirtingi elementai ir ryšiai privalo būti žymimi skirtingai. Šio reikalavimo tenkinimas užtikrina, jog bus išvengta kolizijų, t. y., skirtingų elementų bei ryšių sutapatinimo ir elemento bei ryšio „dvejimo“.

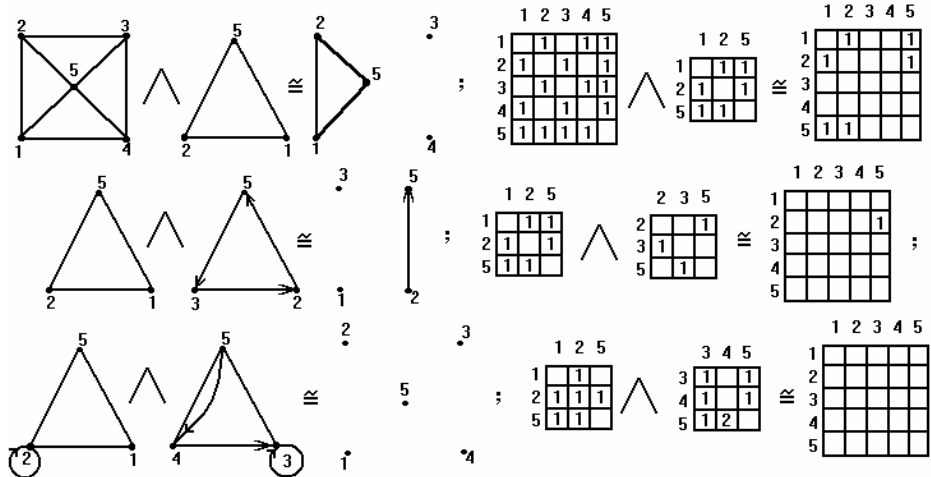
Sankirtos operacija tenkina komutatyvumo ir asociatyvumo reikalavimus, todėl galima sukonstruoti ir m -arinę sankirtos operaciją $\bigcap_{i=1}^m S_i$, leidžiančią rasti bendrąją visų struktūrų $S_1, S_2, \dots$, S_m dalį – struktūrą $\bigcap_{i=1}^m S_i$.

Sankirtos operacija vartojama, nustatant „persidengimus“, kurie gali atsirasti, dekomponuojant sudėtingą sistemą į posistemius (žiūr. dekompozicijos operaciją), o taip pat ieškant kelioms struktūroms bendrų elementų bei ryšių.

Nors sankirtos operacijos rezultatas $\bigcap_{i=1}^m S_i$ gali turėti mažiau elementų, negu jų turi operandai (net gali neturėti nė vieno elemento, t. y. būti „tuščia struktūra“), tačiau ši operacija vis dėlto nepriskiriama generuojančių operacijų klasei. Tai, greičiau, išsigimusi paprastoji struktūrų algebros operacija.

1.9.2.25. Struktūrų paprastos konjunkcijos operacija. Struktūrų paprastos disjunkcijos operacija

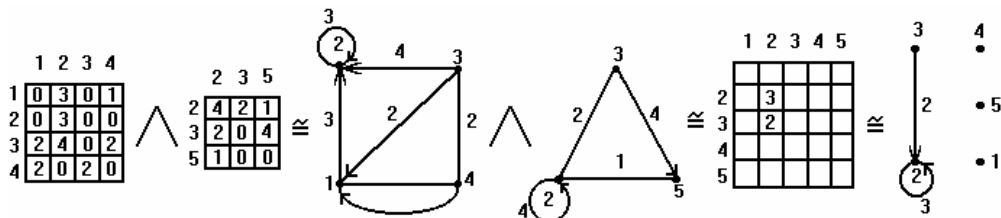
Struktūrų paprastos konjunkcijos operacija gimininga struktūrų sankirtos operacijai ir žymima $S_i \wedge S_j$. Operacija $S_i \wedge S_j$ skiriasi nuo operacijos $S_i \cap S_j$ tik tuo, kad operacija $S_i \wedge S_j$ nėra išsigimusi, t. y. jos rezultatas turi tiek pat elementų, kiek jų yra abiejose struktūrose S_i ir S_j , t. y. paprastos struktūrų konjunkcijos operacija operuoja tik su ryšiais, palikdama elementus savo vietose, o struktūrų sankirtos operacija operuoja ir su ryšiais ir su elementais. Jei sankirtos operacijoje $S_i \cap S_j$ rezultato elementų skaičius $p = [p_i \cap p_j]$, tai konjunkcijos $S_i \wedge S_j$ rezultato elementų skaičius $p = p_i + p_j - [p_i \cap p_j]$. Jei ryšį tarp elementų u ir v struktūroje S_i pažymėti $r_{i,u,v}$, tai struktūrų konjunkcijos $S_i \wedge S_j$ rezultatą galima aprašyti formule: $r_{i \wedge j, u, v} = r_{i, u, v} \wedge r_{j, u, v} = \min(r_{i, u, v}, r_{j, u, v})$. Operacijos $S_i \wedge S_j$ pavyzdžiai parodyti 186 pav.



186 pav.

Struktūrų konjunkcijos operacija $S_i \wedge S_j$ komutatyvi ir asociatyvi, todėl galima sukonstruoti ir m -arinę struktūrų paprastos konjunkcijos operaciją $\bigwedge_{i=1}^m S_i$.

Jei konjunkciją $r_{i \wedge j, u, v} = \min(r_{i, u, v}, r_{j, u, v})$ interpretuotume kaip $\min(r_{i, u, v}, r_{j, u, v})$, tai struktūrų paprastos konjunkcijos operaciją galima būtų taikyti ir multigrafams (žiūr. 187 pav.).

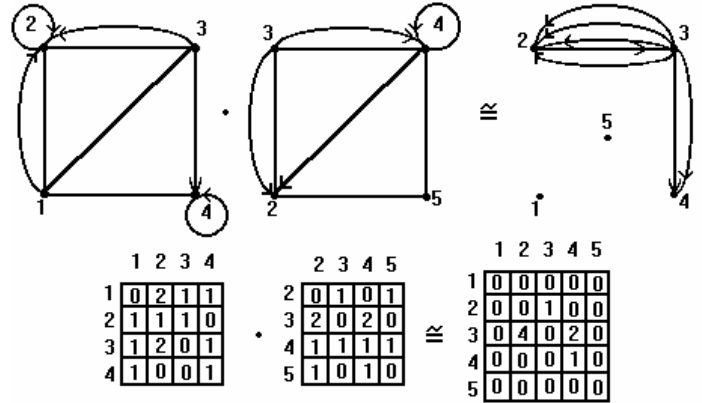


187 pav.

Panašiai, kaip buvo įvesta struktūrų paprastos konjunkcijos operacija $S_i \wedge S_j$, galima buvo įvesti ir paprastos disjunkcijos operaciją $S_i \vee S_j$. Tačiau ši operacija sutampa su jau anksčiau įvesta struktūrų jungimo operacijos modifikacija – struktūrų sąsajos operacija, t. y. $S_i \vee S_j \equiv S_i \cup S_j$. Todėl nėra prasmės aprašinėti šią operaciją dar kartą.

1.9.2.26. Struktūrų paprastos aritmetinės daugybos operacija

Ši operacija žymima $S_i \cdot S_j$ ir vykdoma panašiai, kaip operacija $S_i \wedge S_j$, tik su tuo skirtumu, kad operacijoje $S_{\wedge} = S_i \wedge S_j$ ryšiai apskaičiuojami pagal formulę $r_{i,u,v} \wedge r_{j,u,v} = \min(r_{i,u,v}, r_{j,u,v})$, o operacijoje $S_{\cdot} = S_i \cdot S_j$ – pagal formulę $r_{i,u,v} \cdot r_{j,u,v} = r_{i,u,v} \cdot r_{j,u,v}$, kur $r_{i,u,v} \cdot r_{j,u,v}$ – aritmetinė skaičių $r_{i,u,v}$ ir $r_{j,u,v}$ sandauga (žiūr. 188 pav).



188 pav.

Kadangi paprastų grafų, orgrafų ir pseudografų atveju galioja formulė $r_{i,u,v} \wedge r_{j,u,v} = r_{i,u,v} \cdot r_{j,u,v}$, tai į neapibendrintą struktūrų konjunkcijos operaciją galima žiūrėti kaip į struktūrų aritmetinės daugybos operaciją ir neskirti jų viena nuo kitos. Šios operacijos skirtusi tik multigrafų atveju, kur $r_{i,u,v} \wedge r_{j,u,v} = \min(r_{i,u,v}, r_{j,u,v})$ gali būti nelygu $r_{i,u,v} \cdot r_{j,u,v}$. Tačiau jei pasinaudotume „tikimybine“ konjunkcijos interpretacija $r_{i,u,v} \wedge r_{j,u,v} = r_{i,u,v} \cdot r_{j,u,v}$ ir taikytume tą interpretaciją multigrafams, tai operacijos $S_i \wedge S_j$ ir $S_i \cdot S_j$ taptų visiškai vienodos ir vietoj dviejų operacijų pakaktų vienos.

Operacija $S_i \cdot S_j$ komutatyvi ir asociatyvi, todėl galima įvesti m-arinę paprastos aritmetinės struktūrų daugybos operaciją $\prod_{i=1}^m S_i \cong S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_i \cdot \dots \cdot S_{m-1} \cdot S_m$.

Jei m-arinėje aritmetinės struktūrų daugybos operacijoje visi operandai S_i lygūs S , tai tos operacijos rezultatą vadinsime **struktūros S m-tuoju aritmetiniu laipsniu**.

Galima buvo įvesti ir atvirkštinę struktūrų paprastos daugybos operacijai **struktūrų paprastos („aritmetinės“) dalybos operaciją** $S_d \cong \frac{S_i}{S_j}$, kur $r_{d,u,v} = r_{i,u,v} : r_{j,u,v}$, jei $r_{j,u,v} \neq 0$. Iš šio apibrėžimo aišku, jog,

jei $S_d \cong \frac{S_i}{S_j}$, tai $S_d \cdot S_j = S_i$. Todėl paprastos dalybos operacija gali būti suvesta į struktūrų paprastos daugybos operaciją, struktūrą S_i su jos matricos elementais $r_{i,u,v}$ dauginant iš struktūros S_x , kurios elementai $r_{x,u,v}$ gauti iš struktūros S_j elementų: $r_{x,u,v} = \frac{1}{r_{j,u,v}}$, jei tik $r_{j,u,v} \neq 0$.

Tokiu būdu $S_d \cong \frac{S_i}{S_j} = S_i \cdot S_x$, t. y., operaciją $\frac{S_i}{S_j}$ galima pakeisti jau įvesta struktūrų paprastos

daugybos operacija. Todėl mes operacijos $\frac{S_i}{S_j}$, kaip naujos operacijos, čia neįvedinėsime, tuo labiau,

kad tokia operacija ne visuomet galima (ne visuomet apibrėžta). Užtenka, pavyzdžiui, jog nors viename struktūros S_j (daliklio) matricos langelyje būtų 0 (t. y., jog nors viena $r_{i,u,v}$ reikšmė būtų lygi 0), kad struktūros S_j dalyba iš struktūros S_j būtų negalima.

Struktūrų aritmetinės sudėties aprašyme mes įvedėme žymėjimą 0, reiškiantį skaičiaus m ir struktūros S matricos sandaugą, ekvivalenčią operacijos $\sum_{i=1}^m S_i$ rezultatui, kai visi operandai S_i vienodi ir

lygūs S . Dabar struktūrą $m \cdot S$ mes galime gauti ir naudodamiesi struktūrų aritmetinės daugybos operacija: $m \cdot S \cong \prod_{\forall u \leftrightarrow v} m \cdot S$, kur m yra matrica, turinti tiek pat langelių, kiek ir struktūros S matrica, ir būdinga tuo, kad kiekvieno jos langelio turinys lygus m .

1.9.2.27. Struktūrų matricinės daugybos operacija

Ši operacija žymima $S_x \cong S_i \times S_j$ ir atitinka struktūrų S_i ir S_j matricų sandaugą, pagal formulę

$$r_{x,u,v} = \sum_{t=1}^n r_{i,u,t} \cdot r_{j,t,v}.$$

Struktūrų matricinės daugybos operandais gali būti paprasti grafai, orgrafai, multigrafai ir pseudografai. Svarbu tik, kad elementų skaičius abiejuose operanduose būtų vienodas. Jei operandai S_i ir S_j turi tuos pačius elementus, tai ir struktūra $S_x \cong S_i \times S_j$ gali turėti tokius elementus, kuriuos galima būtų laikyti tais pačiais, tačiau ryšiai tarp elementų būtų jau kiti. Jie apskaičiuojami naudojantis jau minėtąja

formule $r_{x,u,v} = \sum_{t=1}^n r_{i,u,t} \cdot r_{j,t,v}$. Jei operandų S_i ir S_j elementai skirtingi, tai struktūros $S_x \cong S_i \times S_j$ elementų

skaičius nors ir lygus kiekvieno iš operandų elementų skaičiui, tačiau patys struktūros S_x elementai yra generuojami kaip nauji ir nesutampa nė su vieno operando elementais.

Struktūrų matricinės daugybos pavyzdys, kai operandai turi tuos pačius elementus, parodytas 189 pav.

Operacija $S_i \times S_j$ nėra komutatyvi, nes sandauga $S_i \times S_j$ ne visada lygi sandaugai $S_j \times S_i$.

Nesunku pastebėti, kad $m \circ S \cong \sum_{\forall u \leftrightarrow \forall v} m \cdot S \cong \sum_{\forall u (u \rightarrow u)} m \times S$. Tai reiškia, kad struktūros S matricos ir

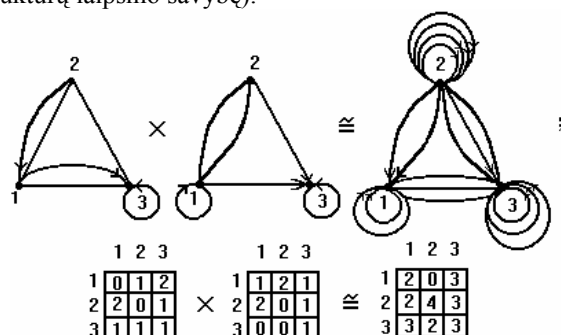
skaičiaus m sandaugą galima interpretuoti ne tik kaip aritmetinę, bet ir kaip matricinę struktūrų sandaugą.

Pasinaudodami struktūrų matricinės daugybos operacija, galime įvesti **struktūros matricinio laipsnio sąvoką**. Struktūrą $S \times S$ žymėsime S^2 , struktūrą $S^2 \times S$ žymėsime S^3 ir, apskritai, $S^m \times S$, kur $m=0, 1, 2, 3, 4, \dots$, žymėsime S^{m+1} . Atsižvelgdami į tai, kad $S^1 \cong S$, galime apibrėžti ir „nulinį struktūros S laipsnį S^0 kaip struktūrą E , turinčią „vienetinę matricą“: $S^0 \cong E \cong \sum_{\forall u (u \rightarrow u)} 1$.

Nesunku įsitikinti, kad $S \times E \cong E \times S \cong S$, t. y. tenkinama lygybė $S^0 \times S \cong S^{0+1}$.

Struktūrų laipsniams galioja ir lygybė $S^m \times S^n \cong S^{m+n}$.

(Įrodykite šią struktūrų laipsnio savybę).



189 pav.

Galima įvesti ir **struktūros neigiamo laipsnio sąvoką**: S^{-1} – tai tokia struktūra, kad $S^{-1} \times S \cong S^0 \cong E$, o S^{-2} – tai tokia struktūra, kad $S^{-2} \times S \cong S^{-1}$ ir t. t.

Struktūrą S^{-1} vadinsime atvirkštine struktūros S atžvilgiu. Jos suradimo pavyzdys parodytas 190 pav., kur ryšių $r_{u,v}$ reikšmės išreikštos skaičiais prie atitinkančių lankų.

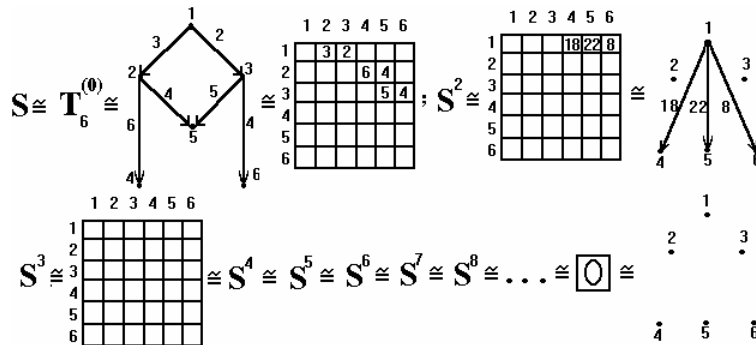
$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix} \cong \begin{matrix} \text{graph with nodes 1, 2, 3 and edges } (1,2):2, (2,1):5, (1,3):3, (3,1):2 \end{matrix}; \quad S^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cong \begin{matrix} \text{graph with nodes 1, 2, 3 and edges } (1,2):-3, (2,1):-5, (1,3):2, (3,1):8 \end{matrix}$$

$$S \times S^{-1} \cong \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \cong \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cong E \cong \begin{matrix} \text{graph with nodes 1, 2 and edges } (1,1):1, (2,2):1 \end{matrix}$$

190 pav.

Struktūros S^{-1} matrica yra atvirkštinė struktūros S matricai.

Jei struktūra S priklauso orientuotų šakninių „medžių“ $T_n^{(0)}$ tipui arba yra tokių orientuotų „medžių“ „miškas“ (žiūr. 191 pav.), t. y. jei jos grafas neturi ciklų, tai visuomet, $S^n \cong S^{n+1} \cong S^{n+2} \cong \dots \cong f$, kur f reiškia struktūrą iš n vienas su kitu nesurištų elementų.

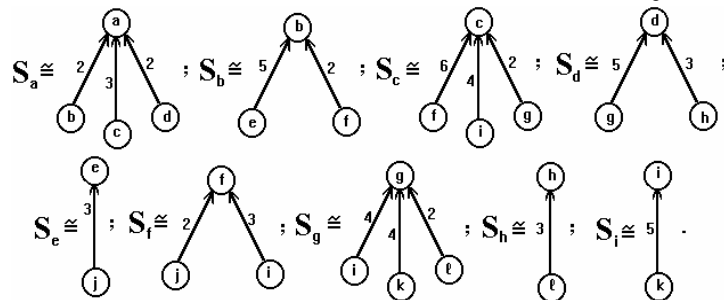


191 pav.

Kaip matyti iš 191 pav. orientuoto „medžio“ $T_r^{(0)}$ ir tokių „medžių“ „miško“ tipo struktūros S matricinis laipsnis gali tapti lygus f , ne tik kai $k \geq n$, bet kartais ir tada, kai $k < n$.

Šią orientuoto „medžio“ tipo struktūrą S savybę nesunku paaiškinti, naudojantis interpretacijų metodu.

Orientuoto „medžio“ tipo struktūrą galime interpretuoti kaip sudėtingo gaminio struktūrą. Tarkim, kad sudėtingas gaminys „a“ (žiūr. 192 pav.) susideda iš dviejų mazgų „b“, trijų mazgų „c“ ir dviejų mazgų „d“. Šie mazgai savo ruožtu susideda iš **antrojo lygio mazgų**: mazgas „b“ susideda iš 5 mazgų „e“ ir 2 mazgų „f“, mazgas „c“ – iš 6 mazgų „f“, 4 mazgų „i“ ir 2 mazgų „g“, mazgas „d“ – iš 5 mazgų „g“ ir 3 mazgų „h“. Antrojo lygio mazgai susideda iš trečiojo lygio mazgų „i“ ir detalių „j“, „k“ ir „l“. mazgas „e“ – iš 3 detalių „j“, mazgas „f“ – iš 2 detalių „j“ ir 3 trečiojo lygio mazgų „i“, mazgas „g“ – iš 4 trečiojo lygio mazgų „i“, 4 detalių „k“ ir 2 detalių „l“, mazgas „h“ – iš 3 detalių „l“. Mazgas „i“, kuris priklauso ir antrojo, ir trečiojo lygio mazgų aibėms, susideda iš 5 detalių „k“ (žiūr. 192 pav., kur pavaizduoti orientuoti „medžiai“ $S_a, S_b, S_c, S_d, S_e, S_f, S_g, S_h, S_i$).

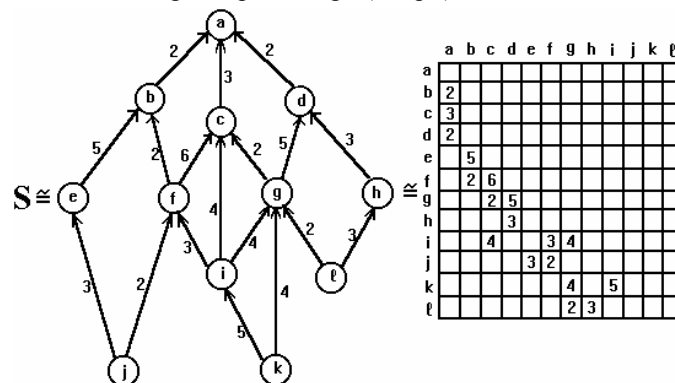


192 pav.

Mazgo „i“ priklausomybė dviem mazgų lygiams sąlygojama tuo, kad mazgai „i“, būdami sudaryti iš detalių „k“, tiesiogiai įeina į antrojo lygio mazgų „f“ ir „g“ sudėtį, o taip pat į pirmojo lygio mazgo „c“ sudėtį. Jei gaminio „a“ struktūrą aprašinėti ne „nuo viršaus“, o „nuo apačios“, tai **pirmajam (žemutiniam) lygiui** priklausytų detalės „j“, „k“ ir „l“, **antrajam** – mazgai „e“, „i“ ir „h“, **trečiajam** – mazgai „f“ ir „g“, **ketvirtajam** – mazgai „b“, „c“ ir „d“, **penktajam** – gaminys „a“.

Sujungę struktūras $S_a, S_b, S_c, S_d, S_e, S_f, S_g, S_h$ ir S_i struktūrų sąsajos operacija $\cup$, gausime sudėtingo gaminio „a“ struktūrą $S \equiv S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e \cup S_f \cup S_g \cup S_h \cup S_i$.

Ši orientuotų „medžių“ sąsaja sudaro tokių „medžių“ „mišką“ (žiūr. 193 pav.), kuriame kai kurių „medžių“ kai kurios viršūnės gali ir persidengti (sutapti).



193 pav.

Struktūros S matricos stulpeliai rodo kiekvieno objekto tiesioginę sudėtį, t. y., kiek ir kokių žemesnio lygio detalių ar mazgų į šį objektą tiesiogiai įeina. Matricos eilutės rodo į kokius aukštesnio lygio objektus ir kokiais kiekiais tiesiogiai įeina atitinkantis šią eilutę objektas. Pavyzdžiui $r_{g,d}=5$, reiškia, kad į mazgą „d“ įeina 5 žemesnio lygio mazgai „g“.

Jei struktūrą S pakeltume antruoju laipsniu, tai gautume struktūrą S^2 , kurioje ryšiai $r_{u,v}$ rodytų, kiek tipo „u“ objektų įeina į objektą „v“ ne tiesiogiai, o „per du žingsnius“, t. y. per vieną iš tarpinių mazgų.

Pavyzdžiui, iš struktūros S^2 matricos, pavaizduotos 58 lentelėje, matyti, kad į sudėtingą gaminį „a“ įeina šie antrojo lygio mazgai: $2 \times 5 = 10$ mazgų „e“ (per tarpinį pirmojo lygio mazgą „b“); $(2 \times 2) + (3 \times 6) = 22$ mazgai „f“ (per tarpinius mazgus „b“ ir „c“); $(3 \times 2) + (2 \times 5) = 16$ mazgų „g“ (per tarpinius mazgus „c“ ir „d“); $2 \times 3 = 6$ mazgai „h“ (per tarpinį mazgą „d“); $3 \times 4 = 12$ mazgų „i“ (per tarpinį mazgą „c“). Savo ruožtu pirmo lygio mazgas „b“ susideda iš: $(5 \times 3) + (2 \times 2) = 19$ detalių „j“ (per tarpinius antrojo lygio mazgus „e“ ir „f“) ir $2 \times 3 = 6$ trečiojo lygio mazgų „i“ (per tarpinį mazgą „f“). Mazgas „c“ susideda: iš $6 \times 2 = 12$ detalių „j“ (per tarpinį mazgą „f“), iš $(6 \times 3) + (4 \times 2) = 26$ trečiojo lygio mazgų „i“ (per tarpinius mazgus „f“ ir „g“); iš $(4 \times 5) + (2 \times 4) = 28$ detalių „k“ (per tarpinius mazgus „c“ ir „g“), iš $2 \times 2 = 4$ detalių „l“ (per tarpinį mazgą „g“). Mazgas „d“ susideda: iš $4 \times 5 = 20$ mazgų „i“ (per tarpinį mazgą „g“), iš $5 \times 4 = 20$ detalių „k“ (per tarpinį mazgą „g“) ir iš $(5 \times 2) + (3 \times 3) = 19$ detalių „l“ (per tarpinius mazgus „g“ ir „h“). Mazgas „f“ susideda iš $3 \times 5 = 15$ detalių „k“ (per tarpinį mazgą „i“). Mazgas „g“ susideda iš $4 \times 5 = 20$ detalių „k“ (per tarpinį mazgą „i“).

Struktūroje S^3 (žiūr. 59-ąją lentelę) ryšių $r_{u,v}$ reikšmės rodo, kiek „u“ tipo objektų įeina į objektą „v“ per „tris žingsnius“, t. y. per du tarpinius mazgus. Jei kokio nors objekto „v“ sudedamosios dalys priklauso tik dvim lygiams, t. y. jei objektas „v“ neturi trečiojo lygio sudedamųjų dalių, tai atitinkantis tą objektą matricos S^3 stulpelis bus „nulinis“ (tuščias).

Pavyzdžiui, jei matricoje S buvo tušti tik detalių „j“, „k“ ir „l“ stulpeliai, o matricoje S^2 – dar ir mazgų „e“, „h“ ir „i“ stulpeliai, tai matricoje S^3 tušti ir mazgų „f“ ir „g“ stulpeliai. Mazgo „d“ stulpelis ne tuščias, nes į mazgą „d“ įeina $5 \times 4 \times 5 = 100$ detalių „k“ (per tarpinius mazgus „g“ ir „i“). Žinoma, į mazgą „d“ įeina dar $5 \times 4 = 20$ detalių „i“ (per tarpinį mazgą „g“), tačiau tai „dviejų žingsnių“ ryšys, fiksuojamas matricoje S^2 , todėl, norint sužinoti, kiek iš viso detalių „k“ įeina į mazgo „d“ sudėtį, reikėtų sudėti matricų S^2 ir S^3 langelių (k, d) turinius $r_{k,d}$. Netušti taip pat matricos S^3 stulpeliai „c“ ir „b“, nes į mazgą „c“ įeina $(6 \times 3 \times 5) + (2 \times 4 \times 5) = 130$ detalių „k“ dvejomis trijų žingsnių grandinėmis (k, i, f, c) ir (k, i, g, c); į mazgą „b“ įeina $(2 \times 3 \times 5) = 30$ detalių „k“ per trijų žingsnių grandinę (k, i, f, b). Į gaminį „a“ įeina $(2 \times 2 \times 3) + (3 \times 6 \times 3) + (3 \times 2 \times 4) + (2 \times 5 \times 4) = 130$ mazgų „i“ per keturias trijų žingsnių grandines (i, f, b, a), (i, f, c, a), (i, g, c, a) ir (i, g, d, a), todėl matricos S^3 langelyje i, a ryšio $r_{i,a}$ reikšmė lygi 130. Analogiškai gauname, kad į gaminį „a“ trejomis trijų žingsnių grandinėmis (j, e, b, a), (j, f, b, a) ir (j, f, c, a) įeina $(2 \times 5 \times 3) + (2 \times 2 \times 2) + (3 \times 6 \times 2) = 74$ detalės „j“, o taip pat trejomis trijų žingsnių grandinėmis įeina 124 detalės „k“ ir 50 detalių „l“.

58. lentelė

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a												
b												
c												
d												
e	10											
f	22											
g	16											
h	6											
i	12	6	26	20								
j		19	12									
k			28	20		15	20					
l			4	19								

59. lentelė

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a												
b												
c												
d												
e												
f												
g												
h												
i	130											
j	74											
k	124	30	130	100								
l	50											

Struktūros S^4 (žiūr. 60-ąją lentelę) matricoje tik stulpelis „a“ netuščias, nes tik gaminio „a“ struktūros „medis“ turi 4 žingsnių grandines: į gaminį „a“ keturiomis 4 žingsnių grandinėmis (k, i, f, b, a), (k, i, f, c, a), (k, i, g, c, a) ir (k, i, g, d, a) įeina $(2 \times 2 \times 3 \times 5) + (3 \times 6 \times 3 \times 5) + (3 \times 2 \times 4 \times 5) + (2 \times 5 \times 4 \times 5) =$

$=60+270+120+200=650$ detalių „k“. Kadangi gaminio „a“ struktūros medis neturi 5 žingsnių ilgio grandinių, tai $S^5 \cong f$. Tuo labiau $S^6 \cong f$ ir t. t.

60. lentelė

$$S^4 \cong$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a												
b												
c												
d												
e												
f												
g												
h												
i												
j												
k	650											
l												

61. lentelė

$$S^5 \cong$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a												
b												
c												
d												
e												
f												
g												
h												
i												
j												
k												
l												

Jei kokia nors struktūra turi n elementų, tai ilgiausia grandinė toje struktūroje gali turėti ne daugiau negu $n-1$ žingsnių (tai bus, kai ta struktūra bus P_n). Todėl orientuotų „medžių“ tipo struktūrose $T_n^{(0)}$ visuomet $S^n \cong f$. Ir apskritai, jei kokioje nors orientuotų „medžių“ tipo ar jų „miško“ tipo struktūroje ilgiausia grandinė susideda iš k žingsnių, tai $S^{k+1} \cong S^{k+2} \cong \dots \cong f$.

Kadangi $k \leq n-1$, tai dažnai $S^m = f$, kai $m < n$ (ir visuomet, kai $m \geq n$). Tai ir paaiškina pradžioje šio 1.9.2.27. skyrelio išsakytą teiginį, kad orientuotų šakninių „medžių“ $T_n^{(0)}$ ir iš jų sudarytų „miškų“ matricų n -sis ir aukštesni laipsniai yra „nulinės matricos“.

Jei mes norime gauti pilną gaminio sudėties aprašymą, t. y. norime žinoti, kiek žemesnio lygio objektų įvairaus ilgio grandinėmis iš viso įeina į aukštesnio lygio objektus, tai turime sudaryti matricą

$$Z_0 \cong S + S^2 + S^3 + \dots + S^n = \sum_{i=1}^n S^i.$$

Matricos Z_0 stulpeliai rodys, kokie visų lygių objektai ir kokiais kiekiais įeina į objektą, atitinkantį duotąjį stulpelį, o matricos eilutės – į kokius visų lygių objektus ir kokiais kiekiais įeina atitinkantis duotąjį eilutę objektas (žiūr. 62-ą lentelę):

62. lentelė

$$Z_0 \cong$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a												
b	2											
c	3											
d	2											
e	10	5										
f	22	2	6									
g	16		2	5								
h	6			3								
i	142	6	30	20		3	4					
j	74	16	12		3	2						
k	774	30	158	120		15	24		5			
l	50		4	19			2	3				

62-oji lentelė rodo, kad į gaminį „a“ įeina 2 mazgai „b“, „3“ mazgai „c“, 2 mazgai „d“, 10 mazgų „e“, 22 mazgai „f“, 16 mazgų „g“, 6 mazgai „h“, 142 mazgai „i“, 74 detalės „j“, 774 detalės „k“ ir 50 detalių „l“. Analogiškai galima nustatyti mazgų „b“, „c“, „d“, „e“ ir t. t. sudėtį, o taip pat, kur ir kokiais kiekiais panaudojamas koks nors objektas. Pavyzdžiui, detalės „k“ panaudojimas: gaminyje „a“ – 774, mazge „b“ – 30, mazge „c“ – 158, mazge „d“ – 120, mazge „e“ – 0, mazge „f“ – 15, mazge „g“ – 24, mazge „i“ – 5.

Analogiškai galima nustatyti bet kokio kito objekto panaudojimą. Todėl struktūros

$$Z_0 \equiv \sum_{u=1}^4 (S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e \cup S_f \cup S_g \cup S_h \cup S_i)^u \equiv \sum_{u=1}^4 (S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e \cup S_f \cup S_g \cup S_h \cup S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_\ell)^u \equiv \sum_{u=1}^{12} (\bigcup_{r=1}^{12} S_r)^u \equiv \sum_{u=1}^n (\bigcup_{r=1}^n S_r)^u$$

matrica, kur $S_j \equiv S_k \equiv S_e \equiv T_1^{(0)} \equiv K_1$ yra gana informatyvus sudėtingo gaminio „a“ sudėties modelis, aprašantis ne tik paties gaminio, bet ir kiekvienos jo sudėtinės dalies sudėtį, o taip pat kiekvienos sudėtinės dalies kiekius, reikalingus kiekvienos aukštesnio lygio sudėtinės dalies ir paties gaminio „a“ pagaminimui.

Formulė $Z_0 \equiv \sum_{u=1}^n \left(\bigcup_{r=1}^n S_r \right)^u$ nusako ir **matricos Z_0 gavimo algoritmą**, susidedantį iš 4 dalių:

1. Sudaromos sudėtingo gaminio sudėties tiesioginių ryšių struktūros – vieno lygio orientuoti šakniniai „medžiai“ (tai labai paprastos ir lengvai aprašomos struktūros);

2. Surandama visų pirmoje algoritmo dalyje sudarytų orientuotų „medžių“ sąsaja $\bigcup_{r=1}^n S_r$, t. y.

pasinaudojame struktūrų sąsajos operacija, aprašyta 1.9.2.21. skyrelyje. Gauname sudėtingo gaminio „a“ struktūrą S – orientuotų šakninių „medžių“ „mišką“ su pagrindine šaknimi, atitinkančia gaminį „a“.

3. Naudojantis matricinės struktūrų daugybos operacija $S_i \times S_j$, aprašyta šiame (1.9.2.27.) skyrelyje, surandami struktūros S matriciniai laipsniai $S^2, S^3, \dots, S^k$. Jie skaičiuojami iki tol, kol negauname, kad $S^{k+1} \equiv f$.

4. Naudodamiesi struktūrų aritmetinės sudėties operacija, aprašyta 1.9.2.22. skyrelyje, surandame $Z_0 \equiv \sum_{u=1}^k S^u$.

Šis algoritmas leidžia rasti ne tik „detalinę“, bet ir „medžiaginę“ gaminio ir jo dalių sudėtį. Tuomet detalių struktūros jau nebebus išsigimę orientuoti „medžiai“ $T_1^{(0)} \equiv K_1$, o šakniniai vieno lygio orientuoti „medžiai“, kurio „šakos“ atitiks tas medžiagas, iš kurių padaryta atitinkama detalė. Kadangi dauguma detalių gaminama ne iš kelių, o iš vienos medžiagos, tai daugumoje atvejų detalės sudėties struktūra bus $T_2^{(0)} \equiv P_2^{(0)}$.

Kartais gaminio sudėties aprašymui vartojama ne struktūra $Z_0 \equiv \sum_{u=1}^k \left(\bigcup_{r=1}^n S_r \right)^u$, bet struktūra

$Z_1 \equiv Z_0 + E_n$, kurios matrica nuo struktūros Z_0 matricos skiriasi tik tuo, kad matricoje Z_0 pagrindinės teigiamos įstrižinės elementai lygūs 0, o matricoje Z_1 – vienetui. Kitaip tariant, matrica Z_1 vaizduoja ne tik smulkesnių sistemos posistemių bei elementų įėjimo į stambesnių posistemių bei visos sistemos sudėtį santykius, išreiškiamus skaičiais – „įėjimo kiekiais“, bet ir tos sistemos, jos posistemių bei elementų ryšius su pačiais savimi, kas šiuo atveju atitinka sistemos, jos posistemių bei elementų buvimą savęs pačių sudėtyje.

Matricos Z_0 ir Z_1 aprašo ne tik sudėtingo gaminio ir jo mazgų sudėtį, bet ir sudėtingo gaminio ir jo mazgų struktūrą loginiame lygyje. Tomis matricomis galima naudotis, apskaičiuojant gaminio pagaminimui reikalingą medžiagų kiekį, darbo laiko sąnaudas ir gaminio savikainą.

Kalbėdamas apie matricų Z_0 ir Z_1 , vaizduojančių sudėtingo gaminio sudėtį, skirtumą, norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad, vaizduojant sistemų struktūrą matricomis, į tų matricų pagrindinės teigiamos įstrižinės langelius vienais atvejais įrašomi nuliai, kitais – vienetukai, o dar kitais – begalybės ženklai ar kokie nors skaičiai, ne būtinai lygūs 0 ar 1. Minėtosios įstrižinės langelių turinys priklauso nuo to, kokie santykiai sudaro nagrinėjamos sistemos struktūros pagrindą, kokių aspektu ta struktūra nagrinėjama, kokių tikslu kuriamas nagrinėjamos struktūros matricinis modelis.

Pavyzdžiui, vaizduodami matricomis schemų, sudarytų iš ventilių, struktūras, kuriose ryšiai tarp schemos mazgų yra tuos mazgus jungiantys ventiliai, o matricų langelių turinys išreiškia atitinkamų ventilių pralaidumo logines sąlygas, mes privalome pagrindinės teigiamos įstrižinės langelius užpildyti vienetukais, nes kiekvienos tokios schemos mazgas laikomas besąlygiškai (t. y. visada) sujungtu su pačiu savimi.

Vaizduodami sudėtingo gaminio sudėtį šiame skyrelyje, mes į matricų pagrindinius teigiamus įstrižinių langelius įrašinėjome nulius. Kad skaitytojas suvoktų, kodėl buvo daroma būtent taip, o ne kitaip (pavyzdžiui, kodėl nebuvo įrašinėjami vienetukai), rekomenduoju jam pakartoti šiame skyrelyje įvykdytus skaičiavimus su matricomis (apskaičiuojant sudėtingo gaminio sudėtį) tuo atveju, kai matricų

pagrindinės teigiamos įstrižinės būtų užpildomos ne nuliais, o vienetukais. Manau, kad skaitytojui taip pat nebus sunku suvokti, kodėl, sudarinėdami tiesioginių ryšių Šimbelo matricas, į jų pagrindinių teigiamų įstrižinių langelius įrašinėjome nulius, o sudarinėdami keliaujančio pirklio uždavinio matematinį modelį – begalybės ženklus.

Įvedę struktūrų matricinės daugybos operaciją, galėtume įvesti ir jai atvirkštinę struktūrų matricinės dalybos operaciją, apibrėždami ją kaip matricos S_i daugybą iš atvirkštinės matricos S_j^{-1} , t. y.

$S_i : S_j \cong S_i \times S_j^{-1}$. Tačiau ne kiekviena matrica S_j turi atvirkštinę matricą ir todėl matricinės dalybos operacija ne visada yra apibrėžta, t. y. ne visada galima.

1.9.2.28. Struktūrų matricinės konjunkcijos operacija

Šią operaciją žymėsime $S_1 \cong S_i \ 1 \ S_j$. Ji yra analogiška struktūrų matricinės daugybos operacijai $S_x \cong S_i \times S_j$ ir skiriasi nuo pastarosios tik tuo, kad joje vietoj aritmetinės daugybos ir sudėties vartojama loginė daugyba (konjunkcija) ir loginė sudėtis (disjunkcija), t. y. vietoj

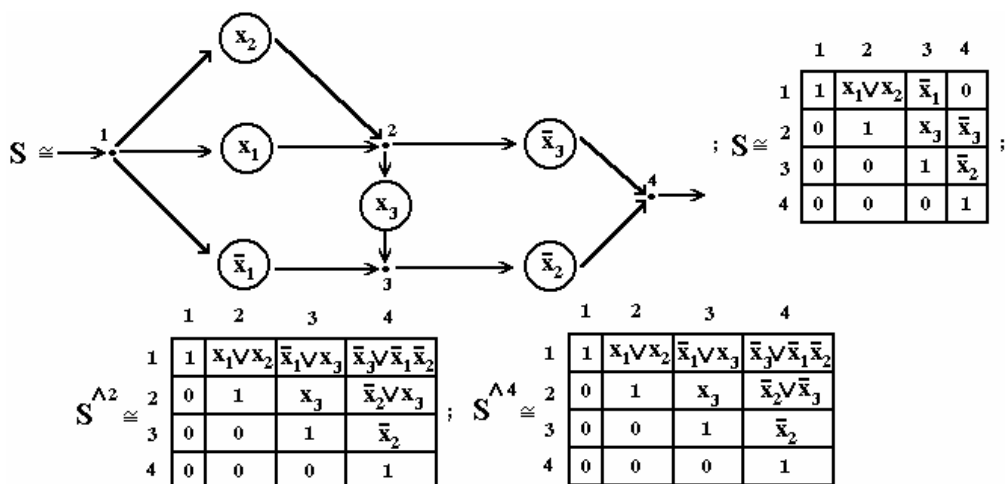
formulės $r_{x,u,v} = \sum_{t=1}^n r_{i,u,t} \cdot r_{j,t,v}$ vartojama formulė $r_{1,u,v} = \bigvee_{t=1}^n (r_{i,u,t} \wedge r_{j,t,v})$.

Viena struktūrų matricinės konjunkcijos panaudojimo sričių – ventilinės schemos mazgų pilnų ryšių matricos gavimas iš tų mazgų tiesioginių ryšių schemos [110].

Pasinaudojant matricinės konjunkcijos operacija, įvedama **matricinės konjunkcijos laipsnio sąvoka**: $S \ 1 \ S \cong S^{\wedge 2}$, $S^{\wedge 2} \ 1 \ S \cong S^{\wedge 3}$, ..., $S^{\wedge m} \ 1 \ S \cong S^{\wedge(m+1)}$. Nesunku įrodyti (įrodykite!), kad matricinės konjunkcijos laipsniui galioja lygybė $S^{\wedge m} \ 1 \ S^{\wedge n} \cong S^{\wedge(m+n)}$. Jei ventilinėje schemoje yra n mazgų, tai $\forall_{k \geq (n-1)} (S^k \cong S^{\wedge(k+1)})$, t. y. galioja lygybė $S^{\wedge(n-1)} \cong S^{\wedge n} \cong S^{\wedge(n+1)} \cong \dots$ (įrodykite šią ventilinės schemos savybę!). Ši lygybė galioja visoms ventilinėms schemoms, tačiau sąlyga, kad $k \geq (n-1)$ yra būtina tik paprastos grandinės P_n tipo schemoms, susidedančioms iš $(n-1)$ nuosekliai sujungtų elementarių ventilių. Bendrai paėmus, dažnai pakanka ir mažesnio k , t. y. pakanka pasirinkti k , lygų ilgiausios iš grandinių, jungiančių ventilinės schemos įėjimą ir išėjimą, elementarių grandžių skaičiui.

Norint gauti ventilinės schemos mazgų pilnų ryšių matricą, nebūtina skaičiuoti visus tos schemos mazgų tiesioginių ryšių matricos S laipsnius $S^{\wedge 2}$, $S^{\wedge 3}$, $S^{\wedge 4}$... iš eilės. Sprendinį rasime greičiau, jei skaičiuosime $S^{\wedge 2}$, $S^{\wedge 4}$, $S^{\wedge 8}$, ..., $S^{\wedge 2^{r-1}}$, $S^{\wedge 2^r}$ iki tokio r , kada $S^{\wedge 2^{r-1}} \cong S^{\wedge 2^r}$ arba $2^r \geq n$.

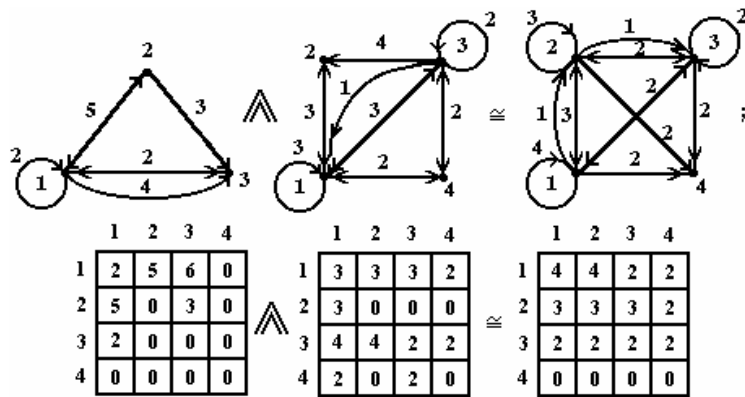
Matrica $S^{\wedge 2^r}$ ir bus pilnų ryšių matrica. Formulės šios matricos langeliuose ir bus pilnų ryšių tarp atitinkamų schemos mazgų formulėmis (žiūr. 194 pav., kur pavaizduota ventilinė schema, tiesioginių ryšių matrica S ir matricos $S^{\wedge 2}$ ir $S^{\wedge 4}$).



194 pav.

Operaciją $S_i \ 1 \ S_j$ galima apibendrinti taip, kad ji būtų taikytina ne tik loginėms, bet ir skaitinėms matricoms, t. y. ne tik paprastiems grafams ir orgrafams, bet ir multigrafams (o taip pat ir multipseudografams). Tokį apibendrinimą galima gauti, apibendrinus konjunkciją $r_{i,u,v} \wedge r_{j,u,v}$ kaip $\min(r_{i,u,v}, r_{j,u,v})$, ir disjunkciją $r_{i,u,v} \vee r_{j,u,v}$ kaip $\max(r_{i,u,v}, r_{j,u,v})$.

Tokios apibendrintos matricinės struktūrų konjunkcijos pavyzdys parodytas 195 pav.



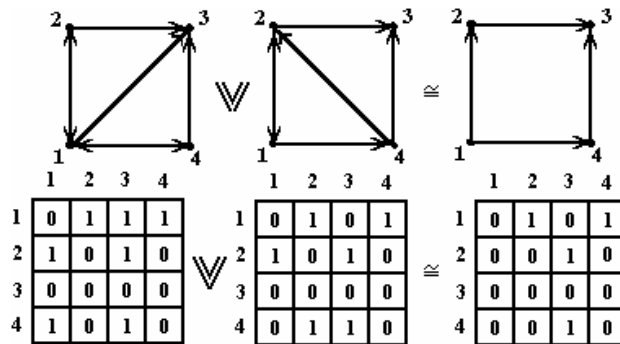
195 pav.

1.9.2.29. Struktūrų matricinės disjunkcijos operacija

Šią operaciją žymėsime $S_2 \approx S_1 \cup S_j$. Naudojantis dualumo principu matematinėje logikoje, struktūrų matricinės disjunkcijos operaciją galima įvesti analogiškai struktūrų matricinės konjunkcijos operacijai, sukeičiant konjunkcijos ir disjunkcijos operacijas vietomis: $r_{2,u,v} = \bigwedge_{t=1}^n (r_{1,u,t} \vee r_{j,t,v})$.

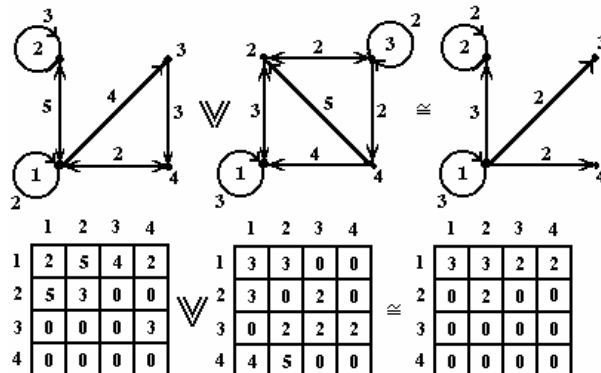
Struktūrų matricinės disjunkcijos pavyzdys pateiktas 196 pav.

Operaciją $S_1 \cup S_j$ taip pat galima apibendrinti taip, kad ji būtų taikytina ne tik loginėms, bet ir skaitinėms matricoms. Tokį apibendrinimą galima gauti, apibendrinus disjunkciją $r_{i,u,v} \vee r_{j,u,v} = \max(r_{i,u,v}, r_{j,u,v})$, o konjunkciją $r_{i,u,v} \wedge r_{j,u,v} = \min(r_{i,u,v}, r_{j,u,v})$.



196 pav.

Apibendrintos matricinės disjunkcijos pavyzdys pateiktas 197 pav.



197 pav.

1.9.2.30. Struktūrų superpozicijos operacijos

Struktūrų superpozicijos operacija – tai tokia operacija, kurios metu turimos sistemos sudėties elementai ar ryšiai tarp jų yra keičiami kitomis sistemomis ar jų kombinacijomis su turimos sistemos elementais.

Struktūrų superpozicijos operacija gali turėti kelias modifikacijas.

Pirmoji šios operacijos modifikacija žymima ženklu

$$S(e) \begin{matrix} S_1, S_2, \dots, S_n \\ a_1, a_2, \dots, a_n, \end{matrix}$$

reiškiančiu, kad struktūroje S jos elementai $a_1, a_2, \dots, a_n$ keičiami struktūromis $S_1, S_2, \dots, S_n$, t. y. vietoj elementų i struktūroje S „įstatomos“ kokių nors sistemų struktūros. Tokią operaciją mes jau nagrinėjome. Tai sistemų kompozicijos operacija $S^{(II)}(S_1^{(I)}, S_2^{(I)}) \cong S^{(II)}(S_1^{(I)}(A_1, A_3), S_2^{(I)}(A_2, A_4, A_5)) \cong S^{(I)}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ (žiūr. 1.9.2.21.2. skyrelį).

Vykdydami šią operaciją, mes į struktūrą $S^{(II)}(S_1^{(I)}, S_2^{(I)})$ galime žiūrėti kaip į struktūrą, turinčią du elementus $S_1^{(I)}$ ir $S_2^{(I)}$, į kurių vietą „įstatomos“ struktūros $S_1^{(I)}(A_1, A_3)$ ir $S_2^{(I)}(A_2, A_4, A_5)$, t. y. galime tvirtinti, kad ši struktūrų kompozicijos operacija yra struktūrų superpozicijos operacija

$$S^{(I)}(e) \begin{matrix} S_1^{(I)}(A_1, A_3), S_2^{(I)}(A_2, A_4, A_5) \\ S_1^{(I)}, S_2^{(I)} \end{matrix}$$

Šios operacijos algoritmą operatorinėje formoje mes jau aprašėme ir iliustravome iš 48., 49., 50. lentelėse duotų operatorių $R_1^{(I)}(A_1, A_3)$, $R_2^{(I)}(A_2, A_4, A_5)$ ir $R^{(II)}(R_1^{(I)}, R_2^{(I)})$ gaudami operatorių $R^{(I)}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ (žiūr. 1.9.2.19. skyrelį). Šis algoritmas tampa paprastesniu, jei struktūrų superpozicija vykdoma natūraliojoje struktūrų aprašymo formoje, nes tuomet kiekviena struktūrų $S_i^{(I)}$ ir $S_j^{(I)}$ pora struktūroje $S^{(II)}(S_1^{(I)}, \dots, S_m^{(I)})$ gali būti surišta tik vienu išėjimo ir tik vienu įėjimo ryšiu kaip ir kiekviena agregatų A_u ir A_v pora bet kurioje iš struktūrų S_i .

Antroji struktūrų superpozicijos operacijos modifikacija žymima ženklu

$$S(r) \begin{matrix} S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{n,n} \\ r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{n,n}, \end{matrix}$$

reiškiančiu, kad struktūroje S jos ryšiai $r_{u,v}$ keičiami struktūromis $S_{u,v}$. Kadangi pasinaudodami fiktyviais elementais, „sujungtais“ tarp savęs ir su realiais elementais „nuliniais“ ryšiais, mes galime visas matricas $S_{u,v}$ padaryti vienodų matavimų kvadratinėmis matricomis, tai antroji struktūrų superpozicijos operacija

$$S(r) \begin{matrix} S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{n,n} \\ r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{n,n} \end{matrix}$$

matricinėje formoje vykdoma, kaip matricų superpozicija, „įstatant“ į kiekvieną matricos S langelį (u,v) atitinkamą matricą $S_{u,v}$ (žiūr. 198 pav.).

$$S(r) \begin{matrix} S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{u,n} \\ r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{u,n} \end{matrix} \cong \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & v & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{u,1} & \dots & r_{u,v} & \dots & r_{u,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \dots & r_{n,n} \end{bmatrix} \end{matrix} \cong \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & v & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{u,1} & \dots & S_{u,v} & \dots & S_{u,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n,1} & S_{n,2} & \dots & S_{n,n} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

198 pav.

Superpozicijos

$$S(r) \begin{matrix} S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{u,n} \\ r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{u,n} \end{matrix}$$

rezultatas yra „matricų matrica“, t. y. matrica S , kurios „langeliai“ – matricos $S_{u,v}$. Matricą S vadinsime „matricų matricos“ šablonu, matricas $S_{u,v}$ – „matricų matricos“ komponentais, kuriais užpildomi šablono langeliai.

Nemažai struktūrų superpozicijos operacijos antrosios modifikacijos pavyzdžių rasime dekartinių operacijų (pavyzdžiui, dekartinės struktūrų daugybos, dekartinės struktūrų kompozicijos, dekartinės struktūrų konjunkcijos ir pan.) aprašymuose.

Trečioji struktūrų superpozicijos operacijos modifikacija sutampa su **matricų algebros tiesiogine matricų sandauga** kartais vadinama **Kronekerio sandauga** ir **matricų algebroje žymima kaip $A \otimes B$** , kur A ir B – bet kokios stačiakampės matricos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{k\ell} \end{pmatrix}.$$

Kronekerio sandauga $A \otimes B$ apibrėžiama kaip matrica, turinti $n \times k$ eilučių ir $m \times \ell$ stulpelių:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}, \quad \text{t. y. kaip matrica, kuri gaunama, „įstačius“ į kiekvieną matricos } A$$

langelį (i,j) atitinkamą matricos A elemento a_{ij} ir matricos B sandaugą.

Kai matrica A yra loginė matrica, t. y., kai jos langeliuose įrašytų elementų $r_{u,v}$ reikšmės gali būti lygios tik 1 arba 0, tai matrica $A \otimes B$ bus „matricų matrica“ sudaryta iš matricų B , „įstatytų“ į tuos matricos A langelius (i,j) , kurių $a_{ij}=r_{ij}=1$, ir „nulinų“ matricų, turinčių tokius pačius matavimus kaip ir matrica B , „įstatytų“ į tuos matricos A langelius (i,j) , kurių $a_{ij}=r_{ij}=0$.

Taigi, į tiesioginę matricų sandaugą galima žiūrėti kaip į matricų sandaugą – superpoziciją.

1.9.2.31. Struktūrų dekartinės daugybos operacija

Ši operacija žymima $S_i \text{ c } S_j$ ir priklauso, kaip ir visos kitos dekartinės operacijos, **generuojančių operacijų klasei**. Kiekviena skirtinga pirminių elementų pora, sudaryta iš kurio nors pirmosios struktūros S_i elemento u ir iš bet kurio antrosios struktūros S_j elemento v , generuoja naujos struktūros – operacijos $S_i \text{ c } S_j$ rezultatą – elementą (u, v) . Todėl dekartinės daugybos $S_i \text{ c } S_j$ rezultatas – struktūra $S_c \cong S_i \text{ c } S_j$, kuri vadinama **dekartinė struktūrų S_i ir S_j sandauga**, turi $p=p_i \cdot p_j$ elementų. Jei struktūros S_i elementus pažymėtume identifikatoriais $u_i, v_i, w_i, \dots$, o struktūros S_j elementus – identifikatoriais $u_j, v_j, w_j, \dots$, tai struktūros S_c elementus galėtume žymėti šių identifikatorių poromis: $(u_i, u_j), (u_i, v_j), (u_i, w_j), \dots, (v_i, u_j), (v_i, v_j), (v_i, w_j), \dots, (w_i, u_j), (w_i, v_j), (w_i, w_j), \dots$

Kai struktūroje S_i elementai a_i ir c_i yra sujungti abipusiais ryšiais, tai tą faktą, kaip jau buvo minėta 1.8. skyriuje, sutrumpintai žymėsime $(a_i \text{ adj } c_i)$, ką galima traktuoti kaip kintamųjų a_i ir c_i predikatą, priimančią reikšmę, lygią 1, jei tarp elementų a_i ir c_i yra abipusis ryšys, ir reikšmę, lygią 0, jei tokio ryšio nėra.

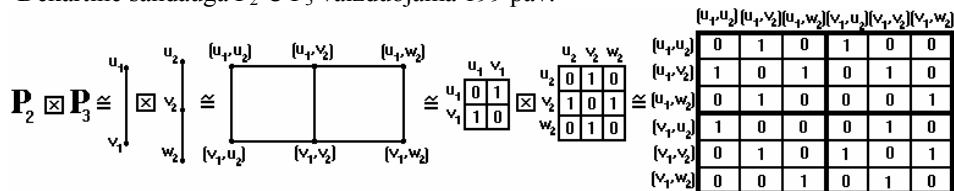
Pasinaudodami šiuo predikatu, galime užrašyti ryšių tarp struktūros S_c elementų sudarymo sąlygą: **struktūros $S_c \cong S_i \text{ c } S_j$ elementai (a_i, b_j) ir (c_i, d_j) jungiami abipusiais ryšiais tada ir tik tada, kada predikatas $\{(a_i=c_i) \wedge (b_j \text{ adj } d_j) \vee [(a_i \text{ adj } c_i) \wedge (b_j=d_j)]\}=1$** . Tai galima užrašyti ir taip: $[(a_i, b_j) \text{ adj } (c_i, d_j)] \Leftrightarrow \{(a_i=c_i) \wedge (b_j \text{ adj } d_j) \vee [(a_i \text{ adj } c_i) \wedge (b_j=d_j)]\}$.

Iš šios formulės išplaukia, jog

$$r_{(a_i, b_j), (c_i, d_j)} = \{[(a_i=c_i) \wedge r_{b_j, d_j}] \vee [(b_j=d_j) \wedge r_{a_i, c_i}]\} \quad \text{ir}$$

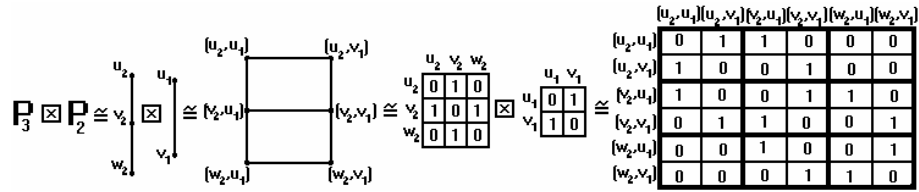
$$r_{(c_i, d_j), (a_i, b_j)} = \{[(a_i=c_i) \wedge r_{d_j, b_j}] \vee [(b_j=d_j) \wedge r_{c_i, a_i}]\}.$$

Dekartinė sandauga $P_2 \text{ c } P_3$ vaizduojama 199 pav.



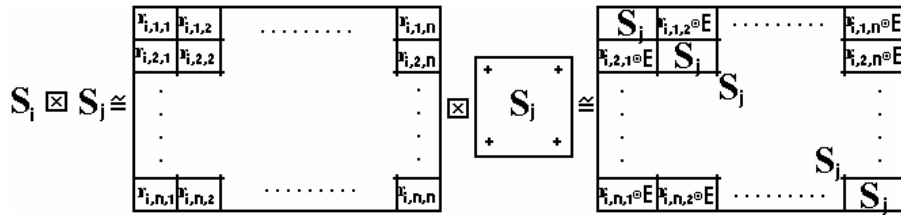
199 pav.

Kadangi ryšio atsiradimo tarp struktūros S_c elementų (a_i, b_j) ir (c_i, d_j) sąlyga yra simetriška operandų S_i ir S_j atžvilgiu, tai **operacija c yra komutatyvi**, t. y. $S_i \text{ c } S_j \cong S_j \text{ c } S_i$. Tai galima pastebėti lyginant 199 ir 200 pav.: dekartinės sandaugos $P_2 \text{ c } P_3$ ir $P_3 \text{ c } P_2$ yra izomorfiškos struktūros. Pertvarkę matricą, vaizduojančią dekartinę sandaugą 200 pav., išrikiuodami stulpelius ir eilutes ta pačia tvarka, kaip 199 pav. matricoje, gautume, jog abi tos matricos yra vienodos.



Operacija c ne tik komutatyvi, bet ir asociatyvi, todėl galima sudaryti ir n -arinę dekartinės daugybos operaciją $\bigotimes_{i=1}^n S_i$.

Nagrinėdami binarinės dekartinės struktūrų sandaugos matricos sudarymo procesą, galima pastebėti dėsningumus, leidžiančius labai greitai ir labai lengvai sudaryti struktūros $S_c = S_i c S_j$ matricą.



Struktūros S_c matrica – tai „matricų matrica“, kuri gaunama, matricos S_i šabloną užpildant matricos S_j šablonais, t. y. vykdant matricoje S_i antrąją superpozicijos operaciją, kurios metu į matricos S_i teigiamos įstrižainės langelius „įstatomos“ matricos S_j , į kitus, „nulinčius“ matricos S_i langelius „įstatomos“ „nulinės“ matricos f , t. y. matricos S_j šablonai, užpildyti nuliais, o į tuos matricos S_j langelius, kurių turinys lygus 1, įstatomos matricos E , t. y. matricos S_j šablonai, kurių teigiamos įstrižainės langeliai užpildyti vienetukais, o visi kiti – nuliais. Šituos dėsningumus iliustruoja 199, 200 ir 201 pav.

Kadangi $r_{u,v} \neq 0 \Leftrightarrow E$, jei $r_{u,v} = 1$ ir $r_{u,v} \neq 0 \Leftrightarrow f$, jei $r_{u,v} = 0$, tai galima sakyti, jog vykdant operaciją $S_i c S_j$, į matricos S_i teigiamos įstrižainės langelius įstatomos matricos S_j , o į visus kitus langelius – matricos $r_{u,v} \neq 0 \Leftrightarrow E$. Tai išplaukia iš tos aplinkybės, kad matricos S_i teigiamojoje įstrižainėje turime sąlygas $u=v$ ir $r_{u,v} = 0$, t. y. $a_i = c_i$ ir $a_i \neq c_i$, todėl belieka sąlyga $b_j \neq d_j$, reiškianti, jog matricos S_i teigiamos įstrižainės langeliai turi būti „užpildomi“ matricomis S_j . Visuose kituose matricos S_i langeliuose $u \neq v$, t. y. $a_i \neq c_i$, todėl $[(a_i \neq c_i) \wedge (b_j = d_j)] = 1$ tik matricos S_j šablonų teigiamų įstrižainių langeliuose, kai $r_{a_i, c_i} = 1$. O kai $r_{a_i, c_i} = 0$, tai gauname, jog visuose matricos S_j šablono, „įstatomo“ į matricos S_i šabloną vietoj nesančio ryšio r_{a_i, c_i} , langeliuose turi būti nuliai.

Kadangi matricą $S_c = S_i c S_j$ sudaro p_i matricos S_j kopijų, kurių kiekviena turi po ℓ_j vienetukų, atitinkančių ℓ_j struktūros S_j lankų, ir ℓ_i matricų E , turinčių po p_j vienetukų, tai bendras matricos S_c vienetukų skaičius lygus $p_i \ell_j + p_j \ell_i$. Tokiu būdu gauname, kad struktūros $S_c = S_i c S_j$ grafas turi $\ell = p_i \ell_j + p_j \ell_i$ lankų ir $p = p_i p_j$ viršūnių. Kai struktūros S_i ir S_j – paprasti grafai, tai ir struktūra

$S_c = S_i c S_j$ – paprastas grafas, turintis $q = \frac{p_i \ell_j + p_j \ell_i}{2} = p_i q_j + p_j q_i$ briaunų ir $p = p_i p_j$ viršūnių.

Formulę $\ell = p_i \ell_j + p_j \ell_i$ galima išvesti ir tiesiogiai iš ryšio $[(a_i, b_j) \text{ adj } (c_i, d_j)]$ egzistavimo sąlygos, ką ir siūlyčiau skaitytojui padaryti savarankiškai. Tai padėtų jam geriau išsiaiškinti matricos $S_c = S_i c S_j$ gavimo algoritmą.

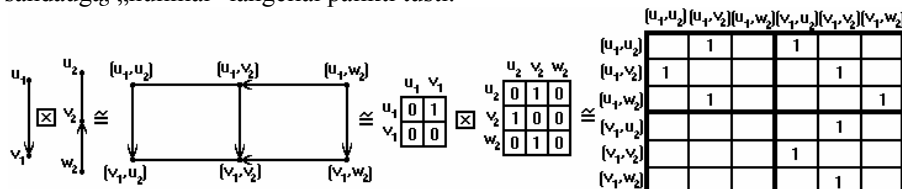
Struktūrų dekartinės daugybos operaciją galime taikyti ne tik paprastiems grafams, bet ir orgrafams. Įvesime žymėjimą $\vec{a} \text{ adj } b$, reiškiantį, kad elementas a veikia į elementą b . Elemento b poveikį į elementą a žymėsime $b \text{ adj } a$ (arba $\overleftarrow{a} \text{ adj } b$). Įvestų predikatų $\vec{a} \text{ adj } b$ ir $b \text{ adj } a$ loginės reikšmės yra lygios kintamųjų $r_{a,b}$ ir $r_{b,a}$ loginėms reikšmėms: $\vec{a} \text{ adj } b \Leftrightarrow r_{a,b}$ ir $b \text{ adj } a \Leftrightarrow r_{b,a}$. Tada orientuoto ryšio tarp struktūros elementų (a_i, b_j) ir (c_i, d_j) egzistavimo sąlygą galima formalizuotai užrašyti taip:

$$[(a_i, b_j) \text{ adj } (c_i, d_j)] \Leftrightarrow \{[(a_i = c_i) \wedge (b_j \text{ adj } d_j)] \vee [(a_i \text{ adj } c_i) \wedge (b_j = d_j)]\}.$$

Nesunku pastebėti, kad ši **orientuoto ryšio egzistavimo sąlyga yra bendresnė negu analogiška sąlyga, anksčiau suformuluota paprastų grafų atvejui: formulė paprastiems grafams**

išplaukia iš formulės orientuotiems grafams, kai predikatas $[(a \xrightarrow{\quad} b) \wedge (a \xleftarrow{\quad} b)] \equiv (a \xleftrightarrow{\quad} b)$ pakeičiamas predikatu $a \text{ adj } b$. Tai natūralu, nes paprastą (neorientuotą) grafą galima traktuoti kaip dalinį orientuoto grafo atvejį, ypatingą tuo, kad jo ryšių matrica – simetriška.

Orgrafų dekartinės daugybos pavyzdys parodytas 202 pav. Jame, matricoje, vaizduojančioje dekartinę sandaugą, „nuliniai“ langeliai palikti tušti.



202 pav.

Ir orgrafų, ir paprastų grafų dekartinei sandaugai galioja tas pats sandaugos matricos gavimo algoritmas ir formulės: $p = p_i \cdot p_j$, $\ell = \ell_i p_j + \ell_j p_i$.

Apibendrinsime dekartinės daugybos operaciją taip, jog ją būtų galima taikyti ir pseudografams, ir multigrafams, ir net multipseudografams.

Šios **apibendrintos operacijos algoritmus** gausime, apibendrindami formulę: $r_{(u_i, v_j), (t_i, w_j)} = \{[(u_i = t_i) \wedge r_{v_j, w_j}] \vee [(v_j = w_j) \wedge r_{u_i, t_i}]\}$. Iš šios formulės matyti, kad struktūra $S_c = S_i \times S_j$ gaunama iš dviejų struktūrų, turinčių struktūros S_c matmenis, kaip tų struktūrų disjunkcija. Pažymėsime tas struktūras S_1 ir S_2 ir priimsime, jog sistemos S_i sudėtį sudaro elementai u_i , t_i ir x_i , o sistemos S_j sudėtį – elementai v_j , w_j ir z_j .

Pirmąją struktūrą S_1 aprašo formulė $(u_i = t_i) \wedge r_{v_j, w_j}$, kurioje u_i ir t_i – bet kurie struktūros S_i elementai, o v_j ir w_j – bet kurie struktūros S_j elementai.

Nagrinėdami struktūros S_1 šabloną (žiūr. 203 pav.), galime pastebėti, kad sąlygą $u_i = t_i$ tenkina tie matricų S_j šablonai, kurie gaunami, įstačius juos į matricos S_1 šabloną vietoj tos matricos teigiamos įstrižinės langelių (tie šablonai 203 pav. užtušuoti). Kadangi užtušuotuose matricos S_1 langeliuose $(u_i = t_i) = 1$, o visuose kituose langeliuose $(u_i = t_i) = 0$, tai iš formulės $(u_i = t_i) \wedge r_{v_j, w_j}$ išplaukia, kad jei struktūra S_j yra paprastas grafas, orgrafas ar pseudografas, tai užtušuotų matricos S_1 langelių, kuriuose $(u_i = t_i) = 1$, turinys sutaps su atitinkamų matricos S_j langelių turiniu r_{v_j, w_j} , o visi kiti matricos S_1 langeliai bus „nuliniai“ (nes $1 \wedge r_{v_j, w_j} = r_{v_j, w_j}$, o $0 \wedge r_{v_j, w_j} = 0$). Tai ir parodyta 203 pav. Kitaip tariant,

$$S_1 \cong S_j(r) \quad \begin{matrix} S_j, S_j, \dots, S_j, f \\ r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{n,n}, \quad \forall_{\substack{u_i, t_j \\ u_i \neq t_j}} (r_{u_i, t_j}). \end{matrix}$$

	(u_i, v_i)	(u_i, w_i)	(u_i, z_i)	(t_i, v_i)	(t_i, w_i)	(t_i, z_i)	(x_i, v_i)	(x_i, w_i)	(x_i, z_i)
(u_i, v_i)	r_{v_j, v_j}	r_{v_j, w_j}	r_{v_j, z_j}	0	0	0	0	0	0
(u_i, w_i)	r_{w_j, v_j}	r_{w_j, w_j}	r_{w_j, z_j}	0	0	0	0	0	0
(u_i, z_i)	r_{z_j, v_j}	r_{z_j, w_j}	r_{z_j, z_j}	0	0	0	0	0	0
(t_i, v_i)	0	0	0	r_{v_j, v_j}	r_{v_j, w_j}	r_{v_j, z_j}	0	0	0
(t_i, w_i)	0	0	0	r_{w_j, v_j}	r_{w_j, w_j}	r_{w_j, z_j}	0	0	0
(t_i, z_i)	0	0	0	r_{z_j, v_j}	r_{z_j, w_j}	r_{z_j, z_j}	0	0	0
(x_i, v_i)	0	0	0	0	0	0	r_{v_j, v_j}	r_{v_j, w_j}	r_{v_j, z_j}
(x_i, w_i)	0	0	0	0	0	0	r_{w_j, v_j}	r_{w_j, w_j}	r_{w_j, z_j}
(x_i, z_i)	0	0	0	0	0	0	r_{z_j, v_j}	r_{z_j, w_j}	r_{z_j, z_j}

S_j		
	S_j	
		S_j

203 pav.

Jei S_j – multigrafas, tai formulė $(u_i=t_i) \wedge r_{v_j, w_j}$ tampa neapibrėžta. Tačiau ją galima apibendrinti, laikant $(u_i=t_i)=1$, $(u_i \neq t_i)=0$ ir pakeičiant loginę daugybą aritmetine daugyba. Tuomet matricos S_c sudarymo taisyklė, pavaizduota 201 pav., galios ne tik grafams, orgrafams ir pseudografams, bet ir multigrafams (žiūr. 204 ir 205 pav.).

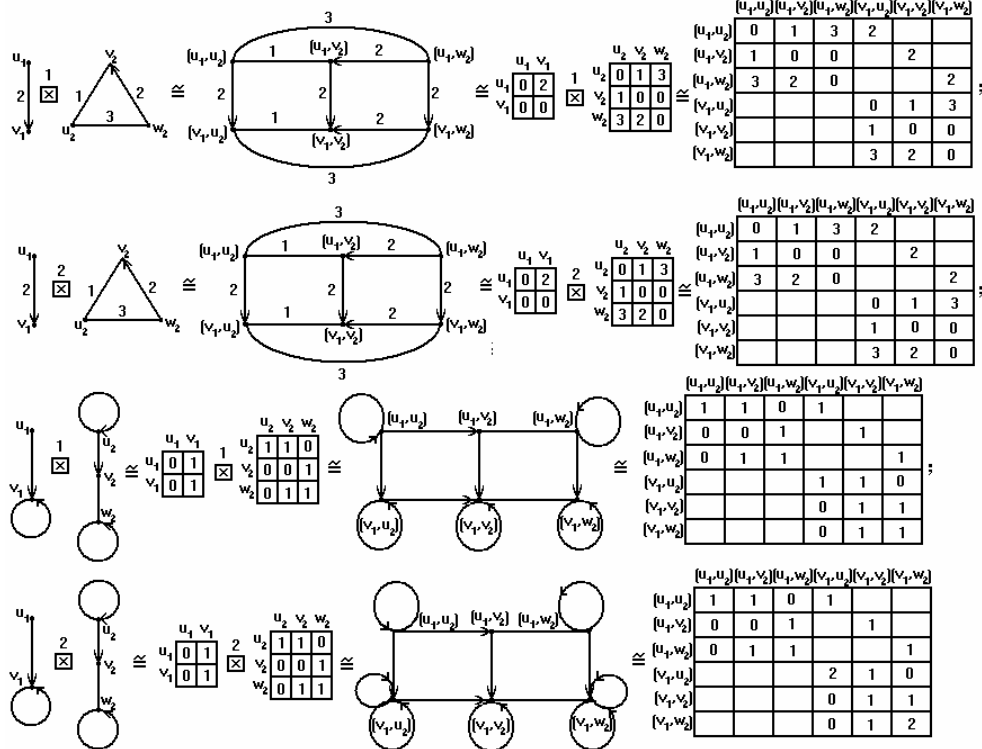
$$S_1 \cong \begin{matrix} & \begin{matrix} (u_i, v_i) & (u_i, w_i) & (u_i, z_i) & (t_i, v_i) & (t_i, w_i) & (t_i, z_i) & (x_i, v_i) & (x_i, w_i) & (x_i, z_i) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (u_i, v_i) \\ (u_i, w_i) \\ (u_i, z_i) \\ (t_i, v_i) \\ (t_i, w_i) \\ (t_i, z_i) \\ (x_i, v_i) \\ (x_i, w_i) \\ (x_i, z_i) \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{u_i, u_i} & & & r_{u_i, t_i} & & & r_{u_i, x_i} & & \\ & r_{u_i, u_i} & & & r_{u_i, t_i} & & & r_{u_i, x_i} & \\ & & r_{u_i, u_i} & & & r_{u_i, t_i} & & & r_{u_i, x_i} \\ r_{t_i, u_i} & & & r_{t_i, t_i} & & & r_{t_i, x_i} & & \\ & r_{t_i, u_i} & & & r_{t_i, t_i} & & & r_{t_i, x_i} & \\ & & r_{t_i, u_i} & & & r_{t_i, t_i} & & & r_{t_i, x_i} \\ r_{x_i, u_i} & & & r_{x_i, t_i} & & & r_{x_i, x_i} & & \\ & r_{x_i, u_i} & & & r_{x_i, t_i} & & & r_{x_i, x_i} & \\ & & r_{x_i, u_i} & & & r_{x_i, t_i} & & & r_{x_i, x_i} \end{bmatrix} \end{matrix} \cong \begin{bmatrix} r_{u_i, u_i} \odot E_j & r_{u_i, t_i} \odot E_j & r_{u_i, x_i} \odot E_j \\ r_{t_i, u_i} \odot E_j & r_{t_i, t_i} \odot E_j & r_{t_i, x_i} \odot E_j \\ r_{x_i, u_i} \odot E_j & r_{x_i, t_i} \odot E_j & r_{x_i, x_i} \odot E_j \end{bmatrix}$$

204 pav.

Antrąją struktūrą S_2 aprašo formulė $(v_j=w_j) \wedge r_{u_i, t_i}$. Sąlygą $v_j=w_j$ tenkina visi matricos S_2 šablono langeliai, kurie sudaro matricų S_j visų šablonų, įstatytų į matricą S_i vietoj kiekvieno jos langelio, teigiamų įstrižainių langelius. Šie matricos S_2 langeliai 204 pav. užpildyti r_{u_i, t_i} reikšmėmis, o visi kiti matricos S_2 langeliai – „nuliniai“, nes, jei struktūra S_i – paprastas grafas, orgrafas ar pseudografas, tai, kai $(v_j=w_j)=1$, tai $(v_j=w_j) \wedge r_{u_i, t_i} = r_{u_i, t_i}$, o kai $(v_j=w_j)=0$, tai $(v_j=w_j) \wedge r_{u_i, t_i} = 0$. Tą patį gausime ir multigrafo atveju, pakeisdami loginę daugybą aritmetine. Tokiu būdu gauname, kad

$$S_2 = S_1(r) \bigvee_{u_i, t_j} (r_{u_i, t_j} \odot E_j) = (r_{u_i, t_j} \odot E_j),$$

kur E_j – vienetinė matrica, turinti matricos S_j matmenis.



205 pav.

Struktūrą S_c iš struktūrų S_1 ir S_2 galima gauti dviem būdais: 1) interpretuojant disjunkcijos operaciją kaip $(a \vee b) = \max(a, b)$ ir naudojantis formule $S_1 = S_1 \vee S_2$, 2) pakeičiant loginę sumą aritmetine suma, t. y. naudojantis formule $S_2 = S_1 + S_2$.

Pirmoji ir antroji apibendrintos dekartinės struktūrų daugybos modifikacijos skiriasi viena nuo kitos tik tada, kai abu tos operacijos komponentai – struktūros S_i ir S_j – yra pseudografi. Visais kitais atvejais abi modifikacijos duoda tą patį rezultatą.

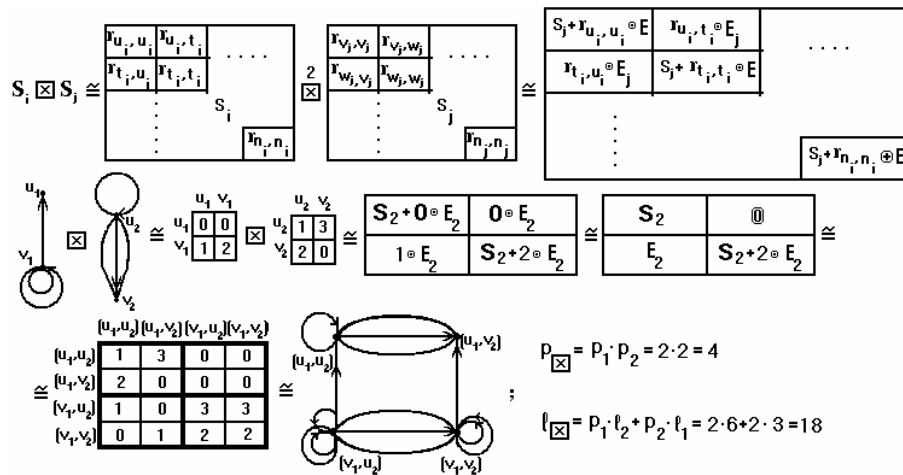
205 pav. parodoti apibendrintos dekartinės struktūrų daugybos abiejų modifikacijų rezultatai. Tušti matricių langeliai reiškia, kad atitinkamos tarpelementinių ryšių reikšmės lygios 0.

Analizuodami 205 pav., galime pastebėti struktūros $S_2 = S_1 \overset{2}{\underset{c}{\times}} S_j$ grafo sudarymo algoritmą: tą grafą sudarantys „vertikalieji komponentai“ yra pirmojo dekartinės sandaugos operando S_i kopijos, o „horizontalieji“ – antrojo operando S_j kopijos.

Analizuodami 199, 200 ir 202 pav., galime pastebėti, kad ši taisyklė galioja ir neapibendrintai struktūrų dekartinei daugybai.

Antrajai apibendrintos dekartinės struktūrų daugybos modifikacijai $S_i \overset{2}{\underset{c}{\times}} S_j$ galioja ir neapibendrintos dekartinės struktūrų daugybos formulės: $p_c = p_i \cdot p_j$ ir $\ell_c = \ell_i \cdot p_j + \ell_j \cdot p_i$.

Pirmajai modifikacijai $S_i \overset{1}{\underset{c}{\times}} S_j$ formulė $\ell_c = p_i \ell_j + p_j \ell_i$ galioja jau ne visada. Todėl tikslinga laikyti bendrąja struktūrų dekartinės daugybos operacija antrąją jos modifikaciją, t. y. priimti tokį bendrąjį struktūrų dekartinės daugybos operacijos apibrėžimą, kuris parodytas 206 pav. Tame pačiame 206 pav. parodytas ir tokios operacijos pavyzdys.



206 pav.

Kadangi operacija $\otimes$ yra komutatyvi ir asociatyvi, tai galima sudaryti n -arinę struktūrų dekartinės daugybos apibendrintą operaciją $\overset{m}{\underset{c}{\times}} S_i$ ir išvesti n -arinės dekartinės sandaugos elementų ir

ryšių tarp jų skaičiaus apskaičiavimo formules. Pavyzdžiui, jei $S_c \cong \overset{4}{\underset{c}{\times}} S_i$, tai $p_c = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$,

$\ell_c = \ell_1 p_2 p_3 p_4 + \ell_2 p_1 p_3 p_4 + \ell_3 p_1 p_2 p_4 + \ell_4 p_1 p_2 p_3$.

Nesunku įrodyti, kad bendruoju atveju, kai dekartinės sandaugos dauginamųjų skaičius yra m ,

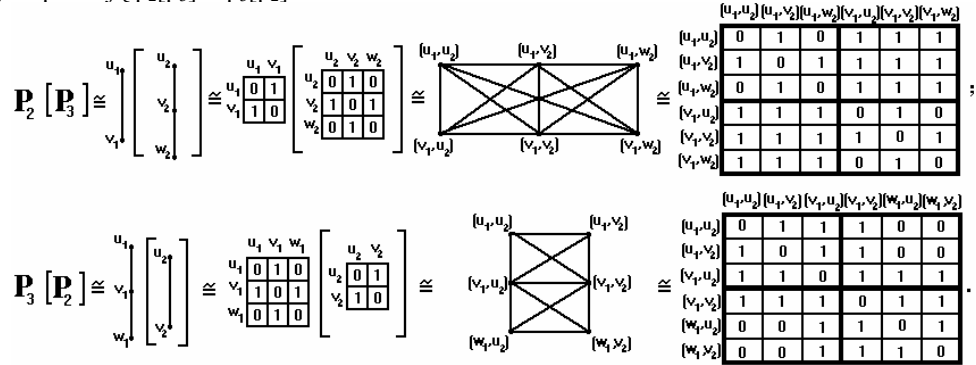
gauname $p_m = \prod_{i=1}^m p_i$, $\ell_m = \sum_{i=1}^m (\ell_i \prod_{j=1, j \neq i}^m p_j)$. Tą įrodymą palieku skaitytojiui.

1.9.2.32. Struktūrų dekartinės kompozicijos operacija

Ši operacija žymima $S_i[S_j]$. Jos rezultatas – struktūra, turinti $p = p_i \cdot p_j$ elementų (a_i, a_j) , (a_i, b_j) , (a_i, c_j) , ..., (b_i, a_j) , (b_i, b_j) , (b_i, c_j) , ..., (c_i, a_j) , (c_i, b_j) , (c_i, c_j) , ..., ryšių tarp kurių egzistavimo sąlyga

formalizuotai užrašoma taip: $[(a_i, b_j) \text{ adj } (c_i, d_j)] \Leftrightarrow \{[(a_i = c_i) \wedge (b_j \text{ adj } d_j)] \vee (a_i \text{ adj } c_i)\}$. Tai reiškia, kad $r_{(a_i, b_j), (c_i, d_j)} \equiv \{[(a_i = c_i) \wedge r_{b_j, d_j}] \vee r_{a_i, c_i}\}$.

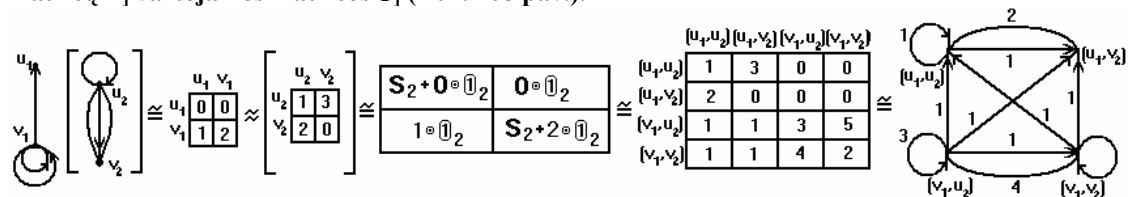
Kadangi ryšių formulė jau nėra simetriška operandų S_i ir S_j atžvilgiu, tai struktūrų dekartinės kompozicijos operacijai jau negalioja perstatomumo dėsnis. Tai iliustruoja 207 pav., kur parodyti operacijų $p_2[p_3]$ ir $p_3[p_2]$ rezultatai.



207 pav.

Struktūros $S_i[S_j]$ matrica sudaroma panašiai, kaip ir struktūros S_i c S_j matrica, ir skiriasi nuo pastarosios tik tuo, kad vietoj matricų E_j vartojamos matricos 3_j , kurių visi langeliai užpildyti vienetukais.

Struktūrų dekartinės kompozicijos operaciją galima apibendrinti taip, jog šią operaciją galima būtų taikyti ir pseudografams, ir multigrafams. Apibendrinimas vykdomas panašiai, kaip tai buvo daroma, įvedant operaciją $S_i \overset{2}{c} S_j$. Apibendrintos dekartinės kompozicijos rezultato matrica gaunama panašiai, kaip ir apibendrintos dekartinės struktūrų daugybos $S_i \overset{2}{c} S_j$ matrica, tik vietoj matricų E_j vartojamos matricos 3_j (žiūr. 208 pav.).



208 pav.

Iš struktūros $S_i[S_j]$ sudarymo algoritmo išplaukia, jog tos matricos vienetukų ir struktūros $S_i[S_j]$ grafo lankų skaičius ℓ lygus $p_i \ell_j + p_j^2 \ell_i$. Šią formulę galima gauti ir tiesiog iš sąlygos $[(a_i, b_j) \text{ adj } (c_i, d_j)] \Leftrightarrow \{[(a_i = c_i) \wedge (b_j \text{ adj } d_j)] \vee (a_i \text{ adj } c_i)\}$, nes sąlygą $(a_i = c_i) \wedge (b_j \text{ adj } d_j)$ gali tenkinti $p_i \ell_j$ struktūros $S_i[S_j]$ grafo viršūnių skirtingų porų, o sąlygą $(a_i \text{ adj } c_i)$ tenkina $p_j^2 \ell_i$ porų.

Dekartinės kompozicijos operacija, netenkindama komutatyvumo dėsnio reikalavimų, **tenkina asociatyvumo dėsnio reikalavimus**. Įrodysime šį teiginį.

Pažymėsime struktūrą $S_i[S_j]$ ženklu $S_{i,j}$ ir palyginsime struktūras $S_1[S_{2,3}]$ ir $S_{1,2}[S_3]$. Paimsime šiose struktūrose porą elementų, pavyzdžiui, (a_1, b_2, c_3) ir (d_1, e_2, f_3) . Nustatysime ryšio tarp jų reikšmės abiejose iš šių struktūrų.

Struktūroje $S_1[S_{2,3}]$ gausime, kad $r_{(a_1, b_2, c_3), (d_1, e_2, f_3)} \equiv \{[(a_1 = d_1) \wedge r_{(b_2, c_3), (e_2, f_3)}] \vee r_{a_1, d_1}\} \equiv \{[(a_1 = d_1) \wedge [(b_2 = e_2) \wedge r_{c_3, f_3}] \vee r_{b_2, e_2}] \vee r_{a_1, d_1}\} \equiv \{[(a_1 = d_1) \wedge (b_2 = e_2) \wedge r_{c_3, f_3}] \vee [(a_1 = d_1) \wedge r_{b_2, e_2}] \vee r_{a_1, d_1}\}$.

Struktūroje $S_{1,2}[S_3]$ gausime, kad $r_{(a_1, b_2, c_3), (d_1, e_2, f_3)} \equiv \{[(a_1, b_2) = (d_1, e_2)] \wedge r_{c_3, f_3}\} \vee r_{(a_1, b_2), (d_1, e_2)} \equiv \{[(a_1 = d_1) \wedge (b_2 = e_2) \wedge r_{c_3, f_3}] \vee [(a_1 = d_1) \wedge r_{b_2, e_2}] \vee r_{a_1, d_1}\} \equiv \{[(a_1 = d_1) \wedge (b_2 = e_2) \wedge r_{c_3, f_3}] \vee [(a_1 = d_1) \wedge r_{b_2, e_2}] \vee r_{a_1, d_1}\}$.

Gavome, kad ryšiai abiejose struktūrose sutampa, t. y., kad $S_1[S_2[S_3]] = (S_1[S_2])[S_3]$.

Todėl $S_1[S_{2,3}]$ ir $S_{1,2}[S_3]$ galime žymėti vienodai, pavyzdžiui, $S_{1,2,3}$.

Nesunku įrodyti, kad toks dėsningumas galioja ir didesniai operandų skaičiui. Pavyzdžiui, galioja izomorfizmai $S_1[S_2[S_3[S_4]]] \equiv S_{1,2}[S_{3,4}] \equiv S_{1,2,3}[S_4] \equiv S_{1,2,3,4}$.

Galioja ir bendrasis sudėtingos dekartinės kompozicijos rezultato lankų skaičiaus ℓ apskaičiavimo dėsnis. Pavyzdžiui, struktūros $S_1[S_{2,3}]$ grafas turi $\ell = p_1 \cdot \ell_{2,3} + p_{2,3}^2 \cdot \ell_1 = p_1(p_2 \cdot \ell_3 + p_3^2 \ell_2) + p_2^2 \cdot p_3^2 \ell_1 = p_1 p_2 \ell_3 + p_1 p_3^2 \ell_2 + p_2^2 p_3^2 \ell_1$ lankų. Struktūros $S_1[S_2[S_3[S_4]]]$ grafas turi $\ell = p_{1,2} \ell_{3,4} + p_{3,4}^2 \ell_{1,2} = p_1 p_2 (p_3 \cdot \ell_4 + p_4^2 \ell_3) + p_3^2 \cdot p_4^2 (p_1 \ell_2 + p_2^2 \ell_1) = p_1 p_2 p_3 \ell_4 + p_1 p_2 p_4^2 \ell_3 + p_1 p_3^2 p_4^2 \ell_2 + p_2^2 p_3^2 p_4^2 \ell_1 = \ell_1 p_2^2 p_3^2 p_4^2 + p_1 \ell_2 p_3^2 p_4^2 + p_1 p_2 p_3^2 p_4^2 + p_1 p_2 p_3 \ell_4$ lankų.

Pasinaudodami rastu dėsningumu, galime iškart užrašyti:

$$\ell_{1,2,3,4,5} = \ell_1 p_2^2 p_3^2 p_4^2 p_5^2 + \ell_2 p_1 p_3^2 p_4^2 p_5^2 + \ell_3 p_1 p_2 p_4^2 p_5^2 + \ell_4 p_1 p_2 p_3 p_5^2 + \ell_5 p_1 p_2 p_3 p_4,$$

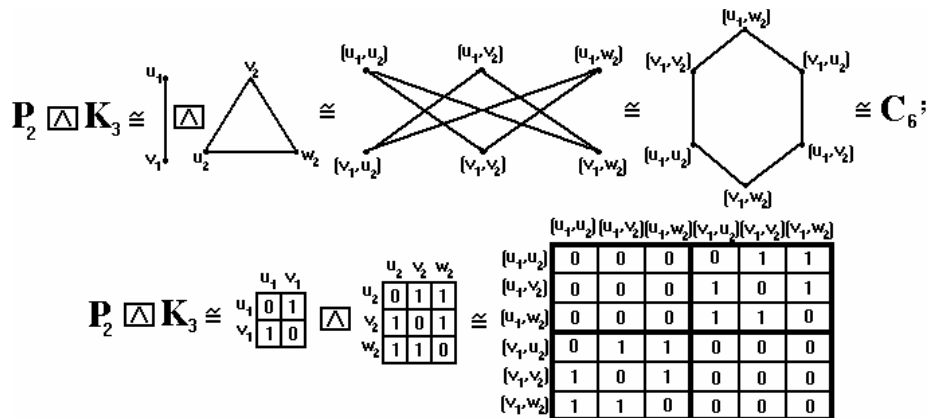
$$\ell_{1,2,3,\dots,m} = \sum_{k=1}^m \left[\left(\prod_{i=1}^{k-1} p_i \right) \cdot \ell_k \cdot \left(\prod_{i=k+1}^m p_i^2 \right) \right] = \ell_1 p_2^2 p_3^2 \dots p_m^2 + p_1 \ell_2 p_3^2 \dots p_m^2 + p_1 p_2 \ell_3 p_4^2 p_5^2 \dots p_m^2 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{m-1} \ell_m.$$

1.9.2.33. Struktūrų dekartinės konjunkcijos operacija

Šią operaciją žymėsime ženklu $S_i \sqcap S_j$. Struktūros $S_i \sqcap S_j$ grafas turi $p = p_i \cdot p_j$ elementų (viršūnių). Ryšio $r_{(a_i, b_j), (c_i, d_j)}$ tarp viršūnių (a_i, b_j) ir (c_i, d_j) reikšmę nustato formulė: $r_{(a_i, b_j), (c_i, d_j)} = (r_{a_i, c_i} \wedge r_{b_j, d_j})$, kurią galima laikyti operacijos $\sqcap$ apibrėžimu.

Struktūrų dekartinės konjunkcijos pavyzdys grafinėje ir matricinėje formose parodytas 209 pav. Nesunku pastebėti ir, naudojantis formule $r_{(a_i, b_j), (c_i, d_j)} = (r_{a_i, c_i} \wedge r_{b_j, d_j})$ įrodyti, kad

$$S_i \sqcap S_j \cong S_i(r) \bigvee_{u_i, v_i} \bigvee_{v_i} (r_{u_i, v_i} \odot S_j).$$

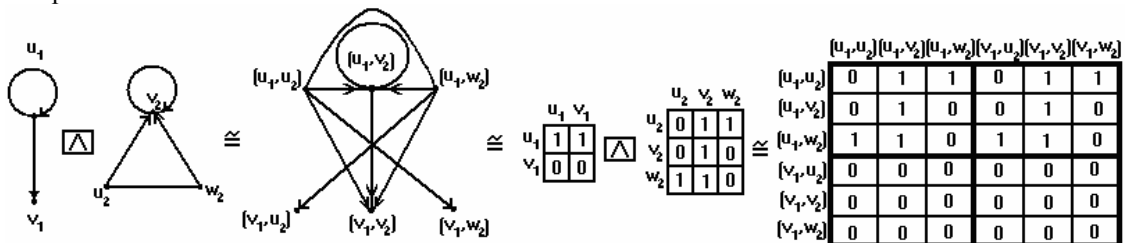


209 pav.

Struktūros $S_i \sqcap S_j$ matrica gaunama įstačius į struktūros S_i langelius matricas S_j , jei tuose matricos S_i langeliuose stovi 1, arba matricas $+_j$, jei tuose langeliuose stovi 0.

Kai struktūros S_i ir S_j – paprasti grafai, tai $p_d = p_i \cdot p_j$, $\ell_d = \ell_i \cdot \ell_j$, $q_d = 2q_i \cdot q_j$. Jei struktūros S_i ir S_j – orgrafai ar pseudografai, tai formulės $p_d = p_i \cdot p_j$, $\ell_d = \ell_i \cdot \ell_j$ taip pat galioja. Tai nesunku įrodyti, naudojantis formule $r_{(a_i, b_j), (c_i, d_j)} = (r_{a_i, c_i} \wedge r_{b_j, d_j})$ – dekartinės konjunkcijos apibrėžimu.

Dekartinės konjunkcijos pavyzdys, kai operandai S_i ir S_j – orgrafai bei pseudografai, parodytas 210 pav.



210 pav.

Nesunku pastebėti ir įrodyti, kad struktūros S_i d S_j matricos sudarymo algoritmas – matricų r_{u_i, v_i} $0S_j$ antrojo tipo superpozicijos į matricos S_i langelius algoritmas – galioja ne tik paprastiems grafams, bet ir orgrafams bei pseudografams.

Struktūrų dekartinės konjunkcijos operaciją galima taip apibendrinti, kad ji tiktų ne tik paprastiems grafams bei pseudografams, bet ir multigrafams.

Vienas iš tokių apibendrinimo būdų – traktuoti konjunkcijos operaciją formulėje $r_{(a_1 b_j), (c_i, d_j)} = (r_{a_i, c_i} \wedge r_{b_j, d_j})$ kaip minimumo radimo operaciją $a \wedge b = \min(a, b)$.

Kitas apibendrinimo būdas – traktuoti konjunkcijos (loginės daugybos) operaciją kaip aritmetinės daugybos operaciją $a \wedge b = a \cdot b$.

Taikydami šiuos apibendrinančius konjunkciją traktavimus paprastiems grafams, orgrafams bei pseudografams, gauname tuos pačius rezultatus, kuriuos gautume ir nesinaudodami šiais apibendrinančiais traktavimais, nes

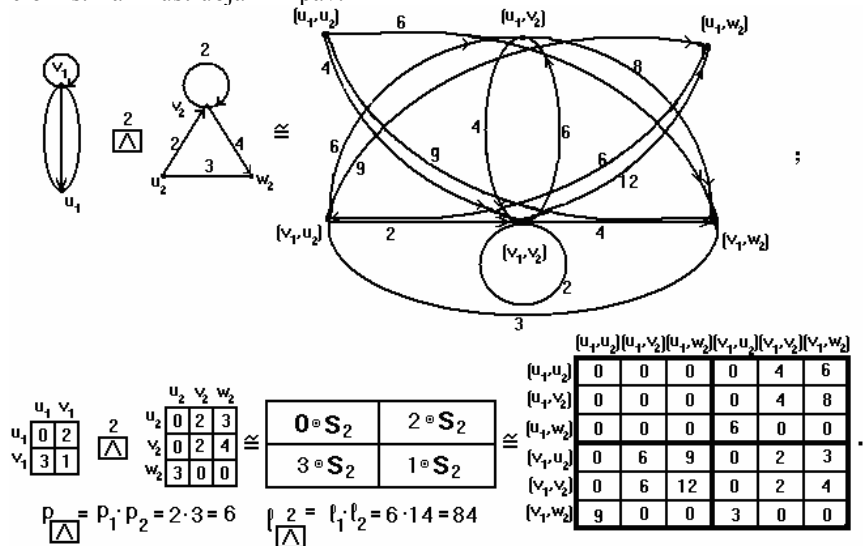
$$1 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = \min(0, 1) = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \wedge 0 = \min(0, 0) = 0 \cdot 0 = 0; \quad 1 \wedge 1 = \min(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Jei taikysime apibendrinančius traktavimus multigrafams, tai rezultatai, gauti naudojantis pirmuoju traktavimu, ir rezultatai, gauti naudojantis antruoju traktavimu, nesutaps.

Jei naudosisimės antrąja konjunkcijos interpretacija, tai, kaip nesunku įrodyti, formulės $p_d = p_i \cdot p_j$, $\ell_d = \ell_i \cdot \ell_j$ ir

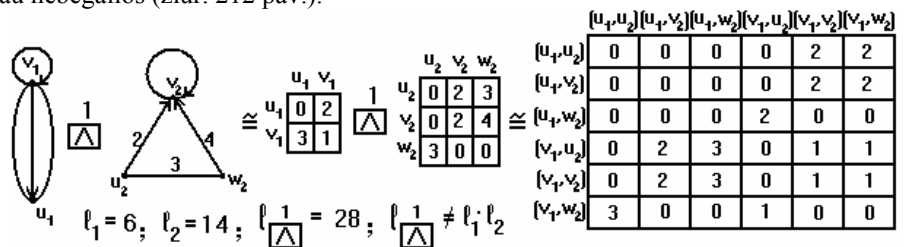
$$S_i \text{ d } S_j \cong S_i(r) \bigvee_{u_i} \bigvee_{v_i} (r_{u_i, v_i} \odot S_j)$$

liks galiojančiomis. Tai iliustruoja 211 pav.



211 pav.

Jei naudotumėmės pirmąją konjunkcijos interpretaciją, tai liktų galiojančia tik bendroji visoms dekartinėms operacijoms formulė $p = p_i \cdot p_j$, o lankų skaičiaus formulė $\ell = \ell_i \cdot \ell_j$ ir matricų superpozicijos formulė jau nebegalios (žiūr. 212 pav.).



212 pav.

Tai rodo, jog konjunkcijos (kaip loginės daugybos) antrasis interpretavimas, apibendrinant ją ir pakeičiant aritmetine daugyba, yra universalesnis negu pirmoji interpretacija. Tai dar kartą įrodo loginių operacijų „tikimybinės“ interpretacijos pranašumą, lyginant su L. Zadeh vartojama interpretacija $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ (plačiau apie tai žiūr. [55]). Žinoma, ir pirmąją interpretaciją galima padaryti universalia ir neprieštaraujančia Bulio algebrai (žiūr., pavyzdžiui,

[52, 56]), tačiau tuomet reikia įvesti neigiamus skaičius, t. y. interpretuoti loginį neigimą kaip skaičiaus ženklo keitimą: $\neg x = -x$. **Grafų teorijoje patogesnė antroji interpretacija, todėl mes ja ir naudosimės dekartinės konjunkcijos apibendrinimui.**

Kadangi paprastiems grafams, orgrafams ir pseudografams galioja tapatybė $a \wedge b = a \cdot b$, o multigrafų atveju mes $a \wedge b$ interpretuojame kaip $a \cdot b$, tai **lygybę $r_{(a_1 b_j), (c_i d_j)} = r_{a_i, c_i} \cdot r_{b_j, d_j}$ galima laikyti operacijos $S_i \text{ d } S_j$ bendru apibrėžimu, tos operacijos rezultato apskaičiavimo algoritmo pagrindine formule.**

Kadangi ir konjunkcija, ir aritmetinė daugyba yra komutatyvios ir asociatyvios operacijos, tai galima įvesti ne tik binarinę, bet ir n -arinę dekartinės struktūrų konjunkcijos operaciją $\text{d } S_i$.

Šios operacijos rezultata – struktūrą $\text{d } S_i$ – galima gauti, įvykdžius $(m-1)$ antrojo tipo superpozicijų (bet kokia tvarka, pradedant įstatinėti bet kurią S_i į bet kurią kitą S_i , po to – į superpozicijos rezultata, kurią nors iš dar likusių S_i ir t. t.).

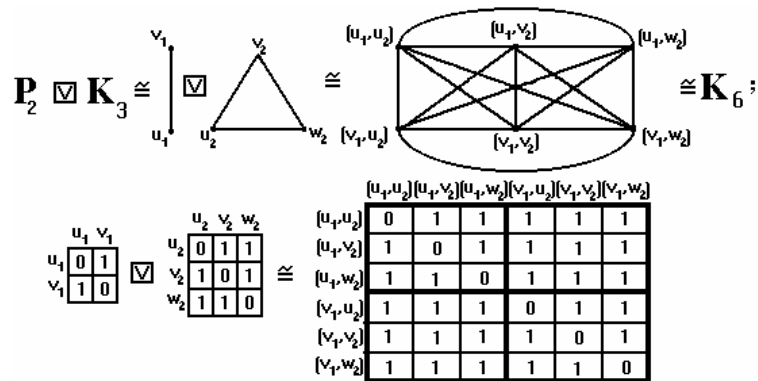
$$\text{Nesunku įrodyti, kad } p_m = \prod_{i=1}^m p_i, \text{ o } \ell_m = \prod_{i=1}^m \ell_i.$$

$$\text{Jei visos } S_i \text{ – paprasti grafai, tai } q_m = 2^{m-1} \prod_{i=1}^m q_i.$$

1.9.2.34. Struktūrų dekartinės disjunkcijos operacija

Šią operaciją žymėsime ženklu $S_i * S_j \cong S^*$. Struktūros S^* grafas turi $p = p_i \cdot p_j$ elementų (viršūnių). Ryšio $r_{(a_1 b_j), (c_i d_j)}$ tarp viršūnių (a_i, b_j) ir (c_i, d_j) reikšmę nustato formulė: $r_{(a_1 b_j), (c_i d_j)} = r_{a_i, c_i} \vee r_{b_j, d_j}$, kurią galima laikyti dekartinės disjunkcijos apibrėžimu.

Operacijos $S_i * S_j$ pavyzdys grafinėje ir matricinėje formose parodytas 213 pav.



213 pav.

Struktūros $S_i * S_j$ matrica gaunama, įstatant matricas S_j į tuos matricos S_i langelius, kuriuose stovi nuliai, ir vienetines matricas 3_j į tuos matricos S_j langelius, kuriuose stovi vienetai.

Jei struktūros S_i ir S_j – paprasti grafai, tai

$$\ell * = \ell_i p_j^2 + (p_i^2 - \ell_i) \ell_j = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 - \ell_i \ell_j,$$

$$q * = q_i p_j^2 + (p_i^2 - 2q_i) q_j = q_i p_j^2 + q_j p_i^2 - 2q_i q_j.$$

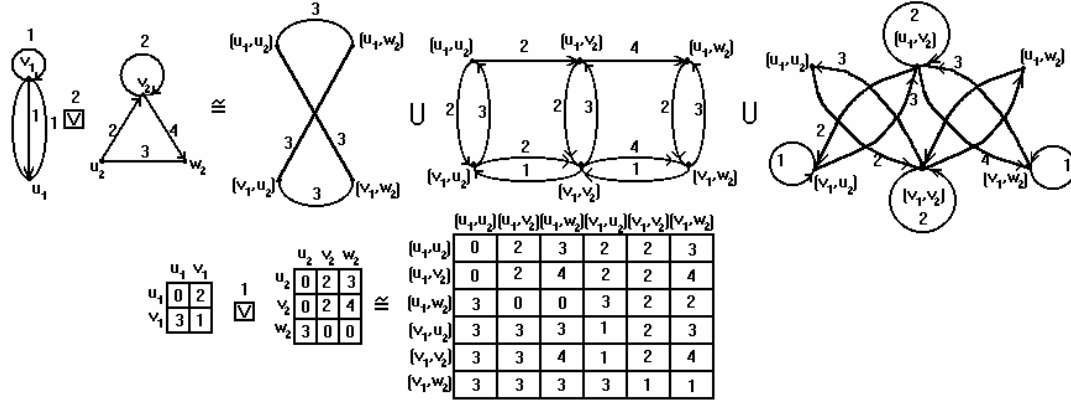
Dekartinės disjunkcijos operacija gali būti taikoma ne tik paprastiems grafams, bet ir orgrafams bei pseudografams. Šiuo atveju, palyginus su paprastais grafais, niekas nesikeičia, tik ne visuomet gali būti taikoma formulė $q * = q_i p_j^2 + q_j p_i^2 - 2q_i q_j$, nes ne visuomet ryšius tarp struktūros elementų sudaro briaunose. Lankų skaičiaus $\ell *$ formulė lieka ta pati, taip pat lieka galiojančiu struktūros $S^* = S_i * S_j$ sudarymo algoritmas:

$$S_i * S_j \cong S_i(r) \bigvee_{u_i, v_i}^{r_{u_i, v_i}} 3_j \vee S_j$$

Struktūrų dekartinės disjunkcijos operaciją galima taip apibendrinti, kad ją būtų galima taikyti ir multigrafams.

Pirmąjį apibendrinimo tipą $S_i * S_j$ gautume, jei pasinaudotume formule $r_{(a_i b_j), (c_i, d_j)} = r_{a_i, c_i} \vee r_{b_j, d_j} = \max(r_{a_i, c_i}, r_{b_j, d_j})$.

Tokios operacijos pavyzdys parodytas 214 pav.



214 pav.

Operacija $S_i * S_j$, jei S_i ir S_j – paprasti grafai, orgrafai ir pseudografai, sutampa su operacija $S_i * S_j$, t. y., operaciją $S_i * S_j$ galima būtų laikyti bendrąja struktūrų disjunkcijos operacija ir apibrėžti ją formule $r_{(a_i b_j), (c_i, d_j)} = \max(r_{a_i, c_i}, r_{b_j, d_j})$. Tačiau multigrafų atveju, vartojant operaciją $S_i * S_j$, formulė $\ell * = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 - \ell_i \ell_j$ jau nebegalioja, kas rodo tokio apibendrinimo trūkumą.

Antrąjį dekartinės disjunkcijos apibendrinimo tipą multigrafams gautume, jei pasinaudotume disjunkcijos interpretacija, vartojama tikimybių logikoje:

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B).$$

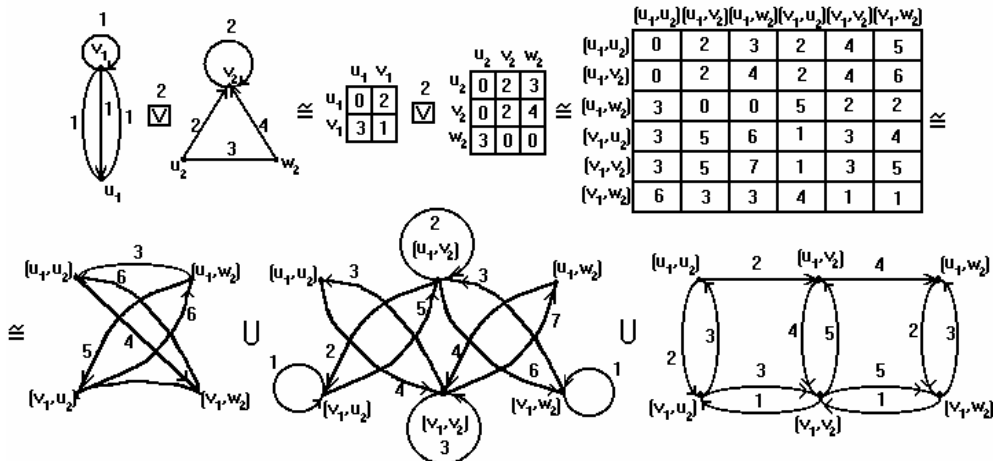
Jei $A \wedge B = 0$, tai gautume:

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B).$$

Iš čia išplauktų, kad, jei struktūros S_i ir S_j neturi bendrų elementų, tai

$$S_i * S_j \cong S_i(r) \bigvee_{u_i, v_i}^{S_j + r_{u_i, v_i}} 3_j$$

Tokios operacijos pavyzdys parodytas 215 pav.



215 pav.

Kadangi, laikydami, kad $A \wedge B = 0$, mes laikome, jog $\ell_i \ell_j = 0$, tai vietoj formulės $\ell_* = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 - \ell_i \ell_j$ gauname formulę $\ell_2 = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 - \ell_i \ell_j$. Šią formulę iliustruoja 215 pav., kur $\ell_1 = 0+2+3+1=6$; $\ell_2 = 2+3+2+4+3=14$; $p_1=2$; $p_2=3$; $\ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 = 6 \cdot 9 + 14 \cdot 4 = 54 + 56 = 110$.

Šis apibendrinimas taip pat turi didelį trūkumą, dėl kurio negali būti laikomas pakankamai universaliu ir tinkamu kaip apibendrintas dekartinės disjunkcijos apibrėžimas: lygybė $r_{a_i, c_i} \vee r_{b_j, d_j} = r_{a_i, c_i} + r_{b_j, d_j}$ paprastų grafų, orgrafų ir pseudografų atveju galioja ne visada. Ji negalioja, kai $r_{a_i, c_i} \wedge r_{b_j, d_j} = 1$.

Iš operacijų $\overset{1}{*}$ ir $\overset{2}{*}$ analizės išplaukia, jog reikia ieškoti tokio operacijos $\overset{3}{*}$ apibendrinimo $\overset{3}{*}$, kuris būtų universalus, t. y. vienodai tiktų multigrafams, pseudografams ir paprastiems grafams ir iš kurio apibendrintų algoritmų ir formulių išplauktų, kaip dalinis atvejis, neapibendrintos dekartinės paprastų grafų disjunkcijos algoritmas bei formulės.

Tokią apibendrinimą galima būtų gauti, jei disjunkciją $a \vee b$ traktuotume kaip $a+b-a \wedge b$, kur $a \wedge b$, kai a ir b nepriklausomi, galima pakeisti $a \cdot b$.

Taip apibrėžta operacija $S_i \overset{3}{*} S_j$, kur $r_{(a_i b_j), (c_i, d_j)} = r_{a_i, c_i} + r_{b_j, d_j} - r_{a_i, c_i} \cdot r_{b_j, d_j}$, paprastų grafų, orgrafų ir pseudografų atveju visiškai sutaps su operacija, o taip pat liks galiojančiais, formulė $\ell_* = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 - \ell_i \ell_j$ ir algoritmas

$$S_i \overset{3}{*} S_j \equiv S_i(r) \overset{r_{u_i, v_i} \odot 3_j \vee S_j}{\underset{\forall_{u_i} \forall_{v_i} (r_{u_i, v_i})}{}}$$

kaip daliniai bendrosios formulės $\ell_3 = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_i^2 - \ell_i \ell_j$ ir bendrojo algoritmo

$$S_i \overset{3}{*} S_j \equiv S_i(r) \overset{(r_{u_i, v_i} \odot 3_j + S_j - r_{u_i, v_i} \odot S_j)}{\underset{\forall_{u_i} \forall_{v_i} (r_{u_i, v_i})}{}}$$

atvejai.

Vienintelis apibendrintos operacijos $S_i \overset{3}{*} S_j$ „trūkumas“ toks: multigrafų atveju gana dažnai gauname, jog $(r_{a_i, c_i} \cdot r_{b_j, d_j}) > (r_{a_i, c_i} + r_{b_j, d_j})$, iš kur išplaukia, jog, kai S_i ir S_j – multigrafai, struktūroje

$S_i \overset{3}{*} S_j$ kai kurie ryšiai gali būti neigiami.

Žodis „trūkumas“ pavartotas kabutėse todėl, kad tai – ne operacijos $\overset{3}{*}$ apibendrinimo trūkumas, o iš to apibendrinimo išplaukiantis reikalavimas išplėsti (apibendrinti) struktūros sąvoką – nagrinėti struktūras ne tik su teigiamais, bet ir su neigiamais ryšiais. Apie struktūras su neigiamais ryšiais jau buvo kalbėta ir anksčiau (žiūr. 1.9.2.20. ir 1.9.2.23. skyrelius). Čia nagrinėjamas atvejis aiškiai rodo, kad neigiamo ryšio sąvoką ne tik galima įvesti ir ją interpretuoti, bet ir reikia, nes tokios sąvokos reikalingumas išplaukia iš vidinių struktūrų teorijos reikmių, jos dėsningumų.

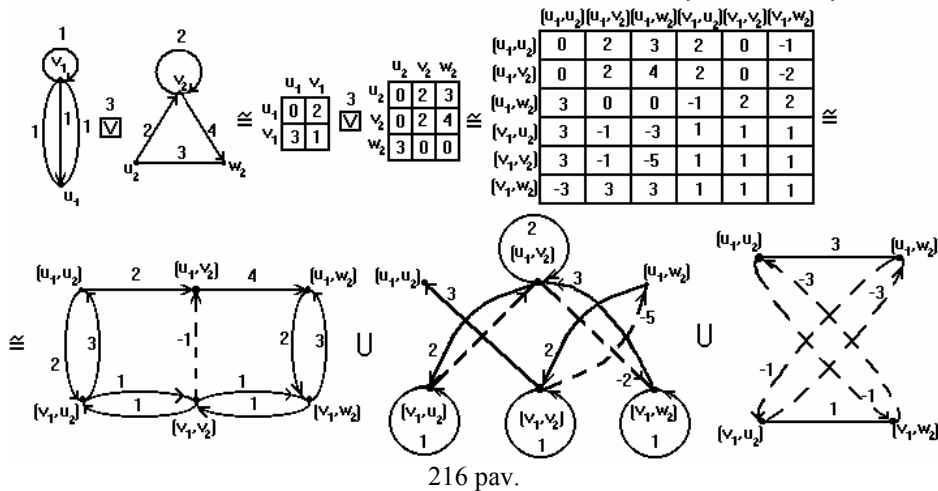
Bendrosios dekartinės struktūrų disjunkcijos operacijos $S_i \overset{3}{*} S_j$, kurią mes toliau žymėsime $S_i \overset{3}{*} S_j$ ir apibrėšime formule $r_{(a_i b_j), (c_i, d_j)} = r_{a_i, c_i} + r_{b_j, d_j} - r_{a_i, c_i} \cdot r_{b_j, d_j}$, pavyzdys parodytas 216 pav.

Nesunku apskaičiuoti apibendrintos dekartinės disjunkcijos rezultato lankų skaičių ir nustatyti, kad $\ell_1 = 0+2+3+1=6$; $p_1=2$; $\ell_2 = 0+2+3+0+2+4+3+0+0=14$; $p_2=3$; $p=p_1 \cdot p_2=2 \cdot 3=6$; $\ell = 2+3+2-1+2+4+2-2+3-1+2+2+3-1-3+1+1+1+3-1-5+1+1+1-3+3+3+1+1+1=26$; $p_1^2 \ell_2 + p_2^2 \ell_1 - \ell_1 \ell_2 = 4 \cdot 14 + 9 \cdot 6 - 6 \cdot 14 = 26$.

Operacija $S_i \overset{3}{*} S_j$ – komutatyvi ir asociatyvi, todėl galima kalbėti ne tik apie binarinę, bet ir apie m -arinę dekartinės disjunkcijos operaciją $\overset{m}{*}_{i=1} S_i$.

Išvesime lankų skaičiaus $\overset{\ell_m}{*}_{i=1}$ formulę. Pažymėsime $\ell_{1,2}$ bendrą lankų skaičių struktūroje $S_1 \overset{3}{*} S_2$ ir rasime $\ell_{1,2,3}$ – lankų skaičių struktūroje $S_1 \overset{3}{*} S_2 \overset{3}{*} S_3$.

$$\begin{aligned} \ell_{1,2,3} &= \ell_{1,2}p_3^2 + \ell_{3,4}p_{1,2}^2 - \ell_{1,2}\ell_3 = (\ell_1p_2^2 + \ell_2p_1^2 - \ell_1\ell_2)p_3^2 + \ell_3p_1^2p_2^2 - \ell_3(\ell_1p_2^2 + \ell_2p_1^2 - \ell_1\ell_2) = \\ &= \ell_1p_2^2p_3^2 + \ell_2p_1^2p_3^2 - \ell_1\ell_2p_3^2 + \ell_3p_1^2p_2^2 - \ell_1\ell_3p_2^2 - \ell_2\ell_3p_1^2 + \ell_1\ell_2\ell_3 = \sum_{i=1}^3 \ell_i \prod_{j=1, j \neq i}^3 p_j^2 - \sum_{i=1}^3 p_i^2 \prod_{j=1, j \neq i}^3 \ell_j + \prod_{i=1}^3 \ell_i. \end{aligned}$$



Analogiškai rasime, kad

$$\begin{aligned} \ell_{1,2,3,4} &= \ell_{1,2}p_{3,4}^2 + \ell_{3,4}p_{1,2}^2 - \ell_{1,2}\ell_{3,4} = p_3^2p_4^2(\ell_1p_2^2 + \ell_2p_1^2 - \ell_1\ell_2) + p_1^2p_2^2(\ell_3p_4^2 + \ell_4p_3^2 - \ell_3\ell_4) - \\ &- \ell_{1,2}\ell_{3,4} = \ell_1p_2^2p_3^2p_4^2 + \ell_2p_1^2p_3^2p_4^2 - \ell_1\ell_2p_3^2p_4^2 + \ell_3p_1^2p_2^2p_4^2 + \ell_4p_1^2p_2^2p_3^2 - \ell_3\ell_4p_1^2p_2^2 - \\ &- \ell_1\ell_3p_2^2p_4^2 - \ell_1\ell_4p_2^2p_3^2 + \ell_1\ell_3\ell_4p_2^2 - \ell_2\ell_3p_1^2p_4^2 - \ell_2\ell_4p_1^2p_3^2 + \ell_2\ell_3\ell_4p_1^2 + \ell_1\ell_2\ell_3p_4^2 + \ell_1\ell_2\ell_4p_3^2 - \\ &- \ell_1\ell_2\ell_3\ell_4 = \sum_{i=1}^4 \ell_i \prod_{j=1, j \neq i}^4 p_j^2 - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1, j \neq i}^4 \ell_i \ell_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^4 p_k^2 + \sum_{i=1}^4 p_i^2 - \prod_{j=1}^4 \ell_j - \prod_{i=1}^4 \ell_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jei } S \equiv \sum_{i=1}^m S_i, \text{ tai } \ell = \ell_{1,2,3,\dots,m} &= \left[\sum_{i=1}^m \frac{\ell_i}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\ell_i \ell_j}{p_i^2 p_j^2} + \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \frac{\ell_i \ell_j \ell_k}{p_i^2 p_j^2 p_k^2} - \right. \\ &- \sum_{i=1}^{m-3} \sum_{j=i+1}^{m-2} \sum_{k=j+1}^{m-1} \sum_{r=k+1}^m \frac{\ell_i \ell_j \ell_k \ell_r}{p_i^2 p_j^2 p_k^2 p_r^2} + \dots + (-1)^{m+1} \prod_{i=1}^m \frac{\ell_i}{p_i^2} \cdot \prod_{i=1}^m p_i^2. \end{aligned}$$

Šią formulę galima būtų užrašyti kompaktiškiau, jei įvestume specialų ženklą $\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^i a_i$, reiškiantį visų C_m^j skirtingų sandaugų sumą, kurioje kiekviena sandauga susideda iš j skirtingų daugiklių a_i , paimtų iš jų aibės $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$. Tada gausime, kad $\ell = \ell_{1,2,3,\dots,m} = \sum_{j=1}^m [(-1)^{j+1} \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^i \frac{\ell_i}{p_i^2}] \cdot \prod_{k=1}^m p_k^2$.

1.9.2.35. Struktūrų dekartinė sudėtis

Šią operaciją žymėsime ženklu $S_i \circ S_j$ ir apibrėšime formule $r_{(a_i b_j), (c_i, d_j)} = r_{a_i, c_i} + r_{b_j, d_j}$. Iš šios formulės išplaukia, kad ši operacija sutampa su antrąja apibendrintos dekartinės disjunkcijos modifikacija, t. y. $S_i \circ S_j \equiv S_i \circ^2 S_j$. Tiksliau sakant, $S_i \circ^2 S_j$ yra ne kas kita, kaip struktūrų dekartinė aritmetinė suma. Todėl 215 pav. yra tuo pačiu metu ir operacijos $S_1 \circ S_2$ pavyzdys. Operacijai $S_i \circ S_j$ galioja algoritmas

$$S_i \circ S_j \equiv S_i(r) \bigvee_{u_i, v_i}^{S_j + r_{u_i, v_i} \odot 3_j} (r_{u_i, v_i})$$

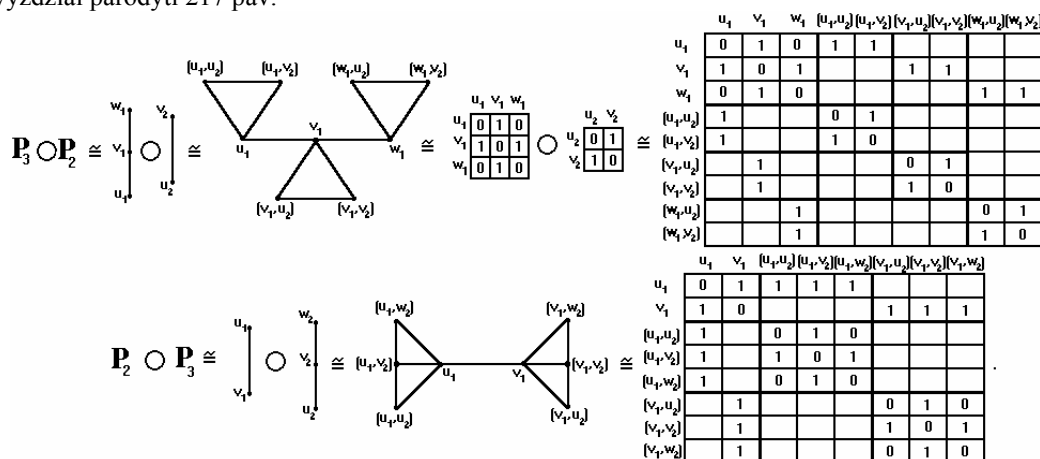
ir formulės: $p_j = p_i \cdot p_j$, $\ell_j = \ell_i p_j^2 + \ell_j p_j^2$, o jei struktūros S_i ir S_j yra paprasti grafai, tai ir formulė $q_j = q_i p_j^2 + q_j p_j^2$.

Operacija $S_i \circ S_j$ – komutatyvi ir asociatyvi, todėl galima kalbėti ir apie m -arinę dekartinės sudėties operaciją $\bigcirc_{i=1}^m S_i$. Jai galioja formulės: $p_m = \prod_{i=1}^m p_i$, $\ell_m = \sum_{i=1}^m [\ell_i \prod_{j=1}^m p_j^2]$.

Galima buvo įvesti ir struktūrų dekartinės atimties operaciją $S_i \setminus S_j$, tačiau, jei įvesime, kaip jau buvo minėta, neigiamo ryšio sąvoką, tai gausime: $S_i \setminus S_j \cong S_i \circ ((-1) \circ S_j)$, t. y. dekartinė struktūrų atimtis gali būti išreikšta struktūrų dekartine sudėtimi ir todėl nėra reikalo turėti atskirą struktūrų dekartinės atimties operaciją.

1.9.2.36. Grafų karūna

Grafų karūna – tai binarinė operacija $S_i (S_j)$, kuri kiekvienai grafo S_i viršūnei gamina po vieną grafo S_j kopiją ir sujungia visus tos kopijos elementus su ta grafo S_i viršūne. Grafų karūnų pavyzdžiai parodyti 217 pav.



217 pav.

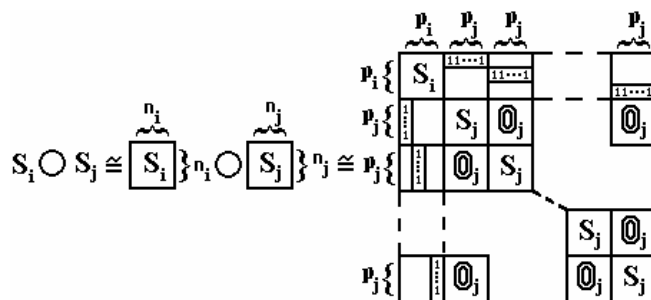
Kaip matyti iš 217 pav., grafų karūnos operacija nėra komutatyvi, nes jei $S_i \neq S_j$, tai ir $(S_i \circ S_j) \neq (S_j \circ S_i)$.

217 pav. iliustruoja ir struktūros $S_i (S_j)$ matricos sudarymo dėsningumus, išplaukiančius iš struktūros $S_i (S_j)$ sudarymo algoritmo, kurį galima laikyti **daliniu pirmosios struktūrų superpozicijos operacijos algoritmo atveju**

$$S_i (S_j) \cong S_i (\ell) \bigcirc_{u_i}^{K_j} S_j$$

reiškiančiu, kad kiekvienas struktūros S_i elementas, nenutraukiant ryšių tarp jų struktūroje S_i , pakeičiamas juo pačiu ir visais galimais ryšiais surišta su juo struktūros S_j kopija.

Struktūros $S_i (S_j)$ sudarymo algoritmą vaizduoja 218 pav., rodantis, kad struktūros $S_i (S_j)$ matrica – tai „matricų matrica“, kurioje pirmąją matricę eilutę sudaro matrica S_i ir p_i (kur p_i – struktūros S_i elementų skaičius) matricę, turinčią po p_i eilučių, eilės tvarka užpildomų vienetukais, ir po p_i stulpelių; pirmąją šios „matricų matricos“ matricę stulpelį sudaro matrica S_i ir p_i matricę, turinčią po p_i stulpelių, eilės tvarka užpildomų vienetukais, ir po p_j eilučių; visa kita (likusioji) „matricų matricos“ dalis sudaryta iš p_i^2 matricos S_j šablonų, sudarančių kvadratinę „matricų matricę“, kurios teigiamąją pagrindinę „matricinę įstrižainę“ sudaro matricos S_j , o visi kiti matricę S_j šablonai užpildyti nuliais, t. y. matricomis 0_j .



218 pav.