

Kadangi, išvedę lygiagretaus postūmio standųjį judesį, mes galime stumdyti ir pačius piešinėlius 111 pav. ir 112 pav. kaip standžias konstrukcijas, tai juos galima lygiagrečiai perkelti taip, kad posūkio centrai O sutaptų. Todėl galima teigti, kad bet koki plokščio objekto perkėlimą plokštumoje, jo neapverčiant, galima įvykdyti, naudojantis dviem standžiais judesiais (dviejų standžių judesių kompozicija): lygiagrečiu postūmiu ir posūkiu aplink duotąjį pastovų centrą O kampu ne didesniu už 360° . Posūkis, lygus 360° , sutapatins bet kurį plokščią objektą patį su savimi.

Galima plokščią objektą transportuoti plokštuma, naudojantis postūmiais ir posūkiais „mažais žingsneliais“ ir įrodyti, kad visų tų posūkių ir postūmių kompozicija yra asociatyvi ir komutatyvi, o taip pat įrodyti, kad tą patį rezultatą, kuris buvo pasiektas daugeliu posūkių ir postūmių, visuomet galima pasiekti tik vienu postūmiu, lygiu visų postūmių vektorių sumai, ir tik vienu posūkiu, lygiu visų posūkių algebrinei sumai. Taigi galima kalbėti apie **standžiųjų judesių kompozicijos algebrą**.

Plokščio objekto veidrodinį atspindį galima apibrėžti kaip simetrišką to objekto perkėlimą į kitą **atspindžio ašies** pusę taip, kad plokščio objekto taškų atstumai nuo atspindžio ašies išliktų tie patys ir pats plokščias objektas nebūtų deformuotas. Tokio perkėlimo metu plokščias objektas apsiverčia kita puse ir orientacija jame keičiasi: jei apeidami kokius nors to objekto taškus mes judėjome laikrodžio rodyklės kryptimi, tai apverstame objekte (**atspindėtame objekto vaizde**), apeidami atitinkamus taškus, mes turėsime judėti jau prieš laikrodžio rodyklę.

Tarkime, jog trikampis $A_1B_1C_1$ perkeltas plokštumoje taip, kad jo orientacija pasikeitė į priešingą, t. y. tapo jam lygiu trikampiu $A_2B_2C_2$, orientuotu priešinga kryptimi (žiūr. 114 pav.).

Randame tų atkarpų vidurio taškus A ir C ir, sujungdami juos tiese, pravedame tiesę AC.

Taškus A_3 ir C_3 randame taip: 1) iš taškų A_2 ir C_2 pravedame statmenis į AC ir pratęsiame juos už tiesės AC; 2) iš taškų A_1 ir C_1 pravedame tieses, lygiagrečias AC, iki susikirtimo su jau pravestais minėtais statmenimis į tiesę AC; 3) susikirtimo taškai ir bus mums reikalingi taškai A_3 ir C_3 .

Nuleisime iš taškų A_1 ir C_1 statmenis į AC ir pažymėsime statmenų susikirtimo taškus A_5 ir C_5 .

639

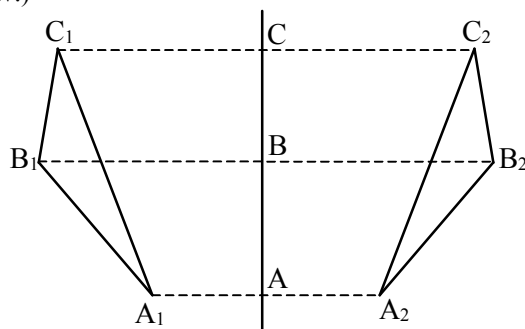
Kadangi $A_1A_3 \parallel AC$ ir $A_1A_5 \perp AC$, $A_2A_3 \perp AC$, tai keturkampis $A_5A_1A_3A_4$ – stačiakampis, todėl $A_1A_3 = A_5A_4$ ir $A_1A_5 = A_4A_3$. Todėl $A_2A_4 = A_4A_3$.

Analogiškai įrodome, jog $C_2C_4 = C_4C_3$. Taigi, taškai A_3 ir C_3 ašies AC atžvilgiu atspindi į taškus A_2 ir C_2 . Tuo pačiu gausime, jog $A_3C_3 = A_2C_2$. Bet $A_2C_2 = A_1C_1$, todėl $A_3C_3 = A_1C_1$ ir todėl keturkampis $A_1C_1C_3A_3$ yra lygiagretainis. Gauname, jog $A_1A_3 = C_1C_3$, t. y. taškai A_1 ir C_1 pastumti ne tik lygiagrečiai AC , bet ir vienodu atstumu – postūmio atstumu.

Analogiškai galima įrodyti, jog taškas B_1 pasistūmėjo lygiagrečiai AC ir tuo pačiu atstumu kaip ir taškai A_1 ir C_1 į padėtį B_3 , o po to atspindėjo į padėtį B_2 .

Taigi, pervesti trikampį $A_1B_1C_1$ į jo apverstą padėtį bet kurioje plokštumos vietoje galima, įvykdžius atitinkamą lygiagretų postūmį ir po to – atspindį (arba pradžioje atspindį ašies AC atžvilgiu, o po to – lygiagretų postūmį, kas tas pats, nes ir šių standžiųjų judesių kompozicija komutatyvi ir asociatyvi).

Kartais gali atsitikti taip, kad postūmio ir neprisireiks, t. y. užteks „nulinio postūmio“. Taip atsitiks tuomet, kai atkarpos A_1A_2 , B_1B_2 ir C_1C_2 bus statmenos atspindžio ašiai, einančiai per tų atkarpų vidurio taškus (žiūr. 115 pav.)



115 pav.

Taigi, bet kokiam plokščio objekto perkėlimui į bet kurią plokštumos vietą ir į bet kurią to objekto padėtį, nedeformuojant to objekto, pakanka trijų standžiųjų judesių: posūkio, postūmio ir atspindžio.

Tačiau, kaip jau buvo parodyta 1.9.1.6. skyrelyje, šie trys pagrindiniai standieji judesiai dar nesudaro grupės tų judesių kompozicijos atžvilgiu. Papildžius tuos tris judesius slenkamuoju atspindžiu ir „tapačiuoju judesiu“ gaunama **standžiųjų judesių grupė plokštumoje**. Palieku skaitytojui išsiaiškinti, ar ši grupė yra Abelio grupė.

Įvedę, kaip jau buvo minėta 1.9.1.6. skyrelyje, dar du papildomus standžiuosius judesius – **sukamąjį atspindį** ir **sraigtinį perkėlimą** – gausime **standžiųjų judesių grupę tų judesių kompozicijos atžvilgiu trimatėje erdvėje**, susidedančią iš septynių standžiųjų judesių.

Galima, panašiai, kaip tai buvo padaryta naudojantis 111, 112, 113, 114, 115 pav., įrodyti, jog šių judesių pilnai pakanka, kad būtų įvykdytas bet koks standusis objekto perkėlimas trimatėje erdvėje, o taip pat, kad tie judesiai sudaro grupę su neutraliuoju elementu – „tapačiuoju judesiu“, tačiau čia to nedarysiu, nes brėžinėliai trimatėje erdvėje tampa tokie sudėtingi ir gremėzdiški, kad juos geriau įsivaizduoti mintyse trimatėje erdvėje, negu piešti popieriaus lape.

Žinoma, galima vietoj brėžinėlių ir stereometrinių įrodymų **naudotis analizinės geometrijos algebriniais metodais, sudarant standžiųjų judesių trimatėje erdvėje algebrinius modelius, vaizduojančius perkeliama objekto kokių nors trijų fiksuotų taškų, negulinčių vienoje tiesėje, koordinačių $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ pasikeitimus kokios nors fiksuotos koordinačių sistemos atžvilgiu**, kai objektas yra perkeliamas trimatėje erdvėje, naudojantis tuo ar kitu pagrindiniu standžiuoju judesiu.

Kaip besikeistų minėtosios koordinatės, objektą stumiant lygiagrečiai sau, sukančiam aplink kokį nors centrą, atspindint kokios nors plokštumos atžvilgiu, transportuojant kokia nors sraigtime linija erdvėje ir pan., atstumai tarp tų taškų, išreiškiami formulėmis

$$d_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad d_{1,3} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2} \quad \text{ir}$$

$$d_{2,3} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}, \quad \text{išliks pastovūs kaip bet kokių objekto perkėlimų invariantės.}$$

Pavyzdžiui, lygiagrečiai stumdami objektą vektoriaus $\vec{v} = (a, b, c)$ kryptimi atstumu $d = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, gausime naujas minėtųjų trijų taškų koordinates: $x_i^{(n)} = x_i^{(s)} + a$,

$y_i^{(n)} = y_i^{(s)} + b$, $z_i^{(n)} = z_i^{(s)} + c$, kur $i=1, 2, 3$, o viršutiniai indeksai „n“ ir „s“ reiškia žodžius „naujas“ ir „senas“. Šiuo atveju atstumai $d_{1,2}$, $d_{1,3}$, $d_{2,3}$ nepasikeis todėl, kad nepasikeis skirtumai tarp tų taškų atitinkamų koordinačių: $x_i^{(n)} - x_j^{(n)} = x_i^{(s)} + a - x_j^{(s)} - a = x_i^{(s)} - x_j^{(s)}$, analogiškai $y_i^{(n)} - y_j^{(n)} = y_i^{(s)} - y_j^{(s)}$, $z_i^{(n)} - z_j^{(n)} = z_i^{(s)} - z_j^{(s)}$ visoms $i=1, 2, 3$ ir $j=1, 2, 3$ reikšmėms.

Objektą sukant aplink ašį ar posūkio centrą, jį perkeliame sraigine linija, atspindint kokios nors plokštumos atžvilgiu ir pan., formulės, pervedančios taškų 1, 2, 3 (ir visų kitų perkeliama objekto taškų) senąsias koordinačių reikšmes į naujas bus sudėtingesnės (siūlyčiau skaitytojiui pabandyti išvesti koordinačių transformacijos formules, vaizduojančias objekto perkėlimą, naudojantis koku nors standžiuoju judesiu plokštumoje, o po to ir trimatėje erdvėje), tačiau atstumai $d_{1,2}$, $d_{1,3}$, $d_{2,3}$ tarp taškų 1, 2, 3 (arba A, B, C) nepasikeis, kaip nepasikeis ir kampai tarp tiesių, kertančių tuos taškus.

Formulės – invariantės leis mums nustatyti kokius taškus 1, 2, 3 (arba A, B, C) judesiai yra leistini, kokie – ne.

Pavyzdžiui, taško „1“ perkėlimui trimatėje erdvėje nėra jokių apribojimų, todėl jo koordinatės x_1 , y_1 , z_1 gali turėti bet kokias realias reikšmes. Perkėlus tašką „1“, taškų „2“ ir „3“ koordinatės gali būti pasirinktos gana įvairiai, tačiau jau nevisiškai laisvai: taškas „2“ gali atsikurti bet kuriame sferos, turinčios centrą taške „1“ ir spindulį $d_{1,2}$, taške, bet niekur kitur, o taškas „3“ tik tokiuose sferos su centru taške „1“ ir su spinduliu $d_{1,3}$ taškuose, kurių atstumas nuo pasirinkto taško „2“ padėtų būtų lygus $d_{2,3}$. Kitaip tariant, laisvai pasirinkę taško „1“ koordinates, o po to jau minėtoje sferoje su spinduliu $d_{1,2}$ pasirinkę taško „2“ padėtį, brėžiame dvi sferas: sferą su centru taške „1“ ir su spinduliu $d_{1,3}$ ir sferą su centru taške „2“ ir su spinduliu $d_{2,3}$. Šių dviejų sferų susikirtimo linija yra apskritimas, aprašomas lygčių sistema

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_{1,3}^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_{2,3}^2, \end{cases}$$

kurioje skaičiai $d_{1,3}$ ir $d_{2,3}$ yra duoti, koordinatės x_1 , y_1 , z_1 – laisvai pasirinkti skaičiai, o koordinatės x_2 , y_2 , z_2 – bet kurie skaičiai, tenkinantys lygybę $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_{1,2}^2$, kurioje x_1 , y_1 , z_1 – tie patys laisvai pasirinktieji skaičiai, o skaičius $d_{1,2}$ – duotasis skaičius. Tas apskritimas ir bus taškų „3“, turinčių koordinates x , y , z , geometrinė vieta trimatėje erdvėje.

Naudojantis šiuo modeliu, galima gauti bet kokią nagrinėjamo objekto perkėlimą trimatėje erdvėje (visas galimas jo padėtis) ir analiziškai nagrinėti, koku pagrindiniu standžiuoju judesiu ar kokia jų kompozicija („algebriskai“ kalbant, **kokiomis koordinačių transformacijos formulėmis, modeliuojančiomis tuos judesius**) galima tą perkėlimą realizuoti.

Analiziniu metodu taip pat galima įsitikinti, jog minėtųjų pagrindinių standžių judesių pilnai pakanka, kad būtų įvykdytas bet koks objekto perkėlimas trimatėje erdvėje, o taip pat tuo, kad minėtieji judesiai sudaro grupę.

Analizinis metodas irgi gana gremėzdiškas būdas, tačiau jis daugeliui skaitytojų gali pasirodyti paprastesnis, nes nereikalauja erdvinės vaizduotės, o tik formulių pertvarkymų bei lygčių sistemų sprendimo, nors tai kartais irgi reikalauja nemažai darbo ir atidumo.

Galima naudotis ir **kombinuotu metodu**, t. y., ir analizinės geometrijos metodais, ir erdvine vaizduote bei stereometrijos dėsniais.

1.9.2.2. Struktūrų vaizdavimo į save ir jų izomorfiško bei homomorfiško modeliavimo operacijos

Ką tik aprašytieji standieji judesiai plokštumoje ir trimatėje erdvėje leidžia atvaizduoti kai kurias simetriškas struktūras į pačias save, tų struktūrų nedeformuojant. Visų galimų tokio struktūrų atvaizdavimo į pačią save nagrinėjimas, leidžia nagrinėti **struktūros simetriškumą**, nustatyti jos **simetrijos elementus** ir priskirti struktūrą tai ar kitai **struktūrų simetrijos klasei**, kaip tai buvo daroma 1.9.1.4. skyrelyje su kristalų struktūromis. Kadangi apie tai jau buvo kalbėta 1.9.1.4. ir 1.9.1.6. skyreliuose, tai čia nebesikartosiu.

Šiai operacijų su struktūromis klasei priklauso ir **struktūrų modeliavimo operacijos**. Tas modeliavimas gali būti **izomorfiškas** (žiūr. 1.8.1., 1.8.2. ir 1.9.1.5. skyrelius), tačiau gana dažnai būna tik **homomorfiškas** (žiūr. 1.8.3. ir 1.9.1.5. skyrelius).

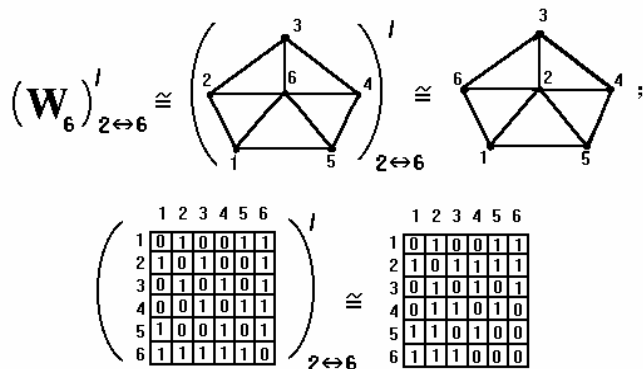
Struktūrų perkėlimo operacijas, kurios buvo ką tik aprašytos 1.9.2.1. skyrelyje, taip pat galima priskirti prie **izomorfiško struktūrų modeliavimo masteliu 1:1 operacijų**, nes perkeltą į kitą vietą duotosios sistemos struktūrą, galima laikyti izomorfišku tos struktūros modeliui, turinčiu tuos pačius matmenis kaip ir pirmavaizdis.

Bendrai gi struktūrų vaizdavimo ir modeliavimo operacijos gali vartoti **bet kokį mastelį**, kartais net nevienodą įvairioms struktūros dalims, t. y. modeliuojant struktūras, jas galima ir **deformuoti**. Tam dabartiniu metu taikomi specialūs kompiuterinių programų paketai.

Sistemos struktūros įvairios **projekcijos**, o taip pat sistemos struktūros modelio **pervedimo iš vienos vaizdavimo kalbos** (pavyzdžiui, iš grafinės į analizinę ir atvirkščiai, iš vienos koordinatinių sistemos į kitą ir pan.) **į kitą vaizdavimo kalbą operacijos** taip pat priklauso šiai operacijų su struktūromis (ir jų modeliais) klasei. Šios klasės operacijos taip pat kompiuterizuojamos ir jų atlikimui galio būti taikomi specialūs programų paketai.

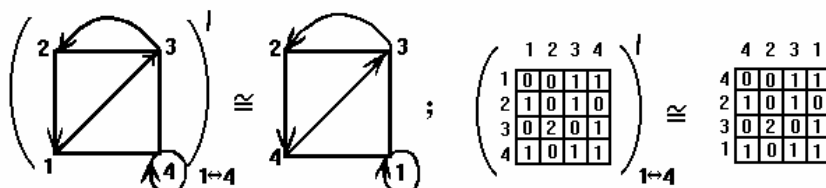
1.9.2.3. Elementų perstatymo (transpozicijos) operacija

Ši operacija gali turėti įvairių modifikacijų, priklausomai nuo to, kiek elementų ir kokia tvarka keičiami. Tačiau visos tos modifikacijos gali būti įvykdytos, naudojantis viena elementaria operacija – **dviejų elementų i ir j sukeitimu vietomis** (elementaria i, j transpozicija). Todėl mes ir apsiribosime kaip tik šia elementaria operacija, priklausančia bendrųjų paprastų monarinių – struktūrų lygyje – ir binarinių – elementų lygyje – operacijų klasei. Elementarios transpozicijos operaciją ir jos rezultatą **žymėsime ženklų** $(S)'_{u \leftrightarrow v}$, reiškiančiu, kad struktūroje S elementai u ir v sukeičiami vietomis. Tokios operacijos pavyzdys parodytas 116 pav. (grafinėje ir matricinėje formose).



116 pav.

Nesunku pastebėti, kad **šią operaciją matricinėje formoje atitinka u-osios eilutės sukeitimas vietomis su v-ąja eilute bei u-ojo stulpelio sukeitimas su v-u-oju stulpeliu, ir nepriklauso nuo to, ką keisime pradžioje: eilutes ar stulpelius**. Perstatinėjimų matricos viduje galima ir nedaryti, **pakeičiant juos matricos eilučių ir stulpelių pernumeravimu**, kaip tai parodyta 117 pav., nes elementų transpozicija yra ne kas kita, kaip elementų pernumeravimas (kitai sakant, jei du pareigūnai keičiasi savo pareigomis, tai ne visada būtina keisti kabinetais, nes galima pakeisti kabinetų iškabą, paliekant pareigūnus savo vietose).



117 pav.

Elementų transpozicijos operacijos rezultatas – struktūra S' – yra izomorfiška operacijos operandui – struktūrai S. Tačiau sistemos, atitinkančios struktūras S ir S', kai sistemos S sudėties elementai, užimantys vietas u ir v, nėra vienodi, gali būti netapačios.

Jei struktūroje S reikia sukeisti vietomis ne vieną porą, o daugiau elementų, elementari dviejų elementų transpozicija kartojama keletą kartų.

Vykdamas kelias elementarias elementų perstatymo operacijas viena po kitos, t. y. atliekant tokių operacijų seką, gaunamas **rezultatas kartais priklauso ne tik nuo to, kokie elementai buvo perstatomi, bet ir nuo tų perstatymų tvarkos sekoje**. Keičiant tą tvarką, gali pasikeisti ir galutinis rezultatas. Kitaip tariant, seka $(S)'_{u \leftrightarrow v}$, $(S')'_{v \leftrightarrow w}$ ne visada duoda tą patį rezultatą kaip ir seka $(S)'_{v \leftrightarrow w}$, $(S')'_{u \leftrightarrow v}$.

Tuo nesunku įsitikinti, įvykdžius su struktūra S , pavaizduota 117 pav., elementarių perstatymų sekas $(S)'_{1 \leftrightarrow 4}$, $(S)'_{4 \leftrightarrow 3}$ ir $(S)'_{4 \leftrightarrow 3}$, $(S)'_{1 \leftrightarrow 4}$.

Pirmuoju atveju buvusią pirmojo elemento vietą užims buvęs trečiasis elementas, buvusią trečiojo elemento vietą – buvęs ketvirtasis, o buvusią ketvirtojo elemento vietą – buvęs pirmasis.

Antruoju atveju buvusio pirmojo elemento vietą užims buvęs ketvirtasis elementas, buvusio trečiojo elemento vietą – buvęs pirmasis, o buvusio ketvirtojo elemento vietą – buvęs trečiasis elementas.

Taip atsitinka todėl, kad pirmuoju atveju trečiasis elementas eina į pirmojo vietą, išstumtasis pirmasis elementas užima ketvirtojo vietą, o pastarasis – trečiojo vietą. Antruoju atveju pirmasis elementas eina į trečiojo vietą, išstumtasis trečiasis elementas užima ketvirtojo vietą, o pastarasis – pirmojo vietą. Išstūmimo sekos, einančios per tarpinį – ketvirtąjį – elementą, eina atvirkštine tvarka ir todėl gaunami skirtingi rezultatai.

Šia savybe kartais naudojamosi **personalo keitimo „politikoje“**, prastumiant „savus“ į aukštesnius ar „reikalingus“ postus.

Nesunku įsitikinti, kad nepriklausomų operacijų sekos $(S)'_{a \leftrightarrow b}$, $(S)'_{c \leftrightarrow d}$ ir $(S)'_{c \leftrightarrow d}$, $(S)'_{a \leftrightarrow b}$ duos vienodus rezultatus, kai $(c \neq a) \wedge (c \neq b) \wedge (d \neq a) \wedge (d \neq b)$.

Elementari elementų perstatymo operacija yra komutatyvi, nes $(S)'_{u \leftrightarrow v} = (S)'_{v \leftrightarrow u}$, tačiau elementų perstatymo operacijų seka bendroju atveju, kai kai kurie perstatymai yra priklausomi, nėra nei komutatyvi, nei asociatyvi.

Kitaip tariant **struktūros elementų perstatymo operacijų kompozicijos operacija nėra nei komutatyvi, nei asociatyvi.**

Sistemos elementų perstatymo operaciją, ją atitinkamai modifikavus, galima panaudoti ir elektronų „peršokimų“ iš vienos orbitalės į kitą (žiūr. 1.9.1.2. skyrelį) modeliavimui (imitavimui).

Tuo tikslu į sistemos struktūrą S , vaizduojančią atomo struktūrą, reikėtų įvesti „tuščius“ elementus, vaizduojančius toje struktūroje neužimtas vietas – neužimtas orbitales, t. y. išplėsti struktūrą S vaizduojančią matricą, įvedant tuos „tuščius“ elementus vaizduojančias „tuščias“ (užpildytas tik nuliais) eilutes ir „tuščius“ stulpelius.

Norėdami, kad atomo struktūros modelis vaizduotų jo elementų sąveikavimo jėgą (ar energiją), nenuliniuose sąveikavimo matricos langeliuose turėtume įrašyti atitinkamus skaičius (panašiai, kaip 117 pav. vaizduojamoje matricoje).

Kadangi, keičiantis atomo struktūros elementų padėčiai (pavyzdžiui, elektronui peršokant iš vienos orbitalės į kitą), keičiasi ir jų sąveikavimo jėga bei energija, tai kiekvieną galimą elektronų konfigūraciją (žiūr. 1.9.1.2. skyrelį) vaizduotų atitinkama struktūrinė matrica, kurios „tuščios“ (t. y. nulinės) eilutės ir stulpeliai vaizduotų neužimtas orbitales. Visose tokiose matricose turėtų būti ir „tuščia“ eilutė bei „tuščias“ stulpelis, vaizduojantys „orbitale“, atitinkančią situaciją, kada elektroną galima laikyti praktiškai atitrūkusiu nuo atomo ir tapusio „laisvu“ elektronu, turinčiu lygią nuliui potencinę energiją.

Elektrono peršokimą iš orbitalės u į orbitale v modeliuotų jau ne atitinkančių tas orbitales eilučių ir stulpelių vienoje matricoje sukeitimas vietomis, kaip tai buvo vaizduojama 116 ir 117 pav., o vienos struktūrinės matricos, vaizduojančios **elektronų konfigūraciją**, buvusią prieš peršokimą (toje matricoje v -sios eilutės ir v -tojo stulpelio visuose langeliuose buvo tik nuliai) pakeitimą kita matrica, vaizduojančia tą elektronų konfigūraciją, kuri atsirado po elektrono peršokimo (toje matricoje u -sios eilutės ir u -tojo stulpelio langeliuose bus tik nuliai).

Lygindami naują ir senąją elektronų konfigūracijas atitinkančias matricas, galėtume įvertinti pokyčius (tame tarpe – ir energetinius), įvykusius atome elektrono peršokimo metu.

Nebūtina visų galimų konfigūracijų matricas turėti iš anksto, iš anksto įvykdžius atitinkamus (gana sudėtingus ir daugiaelektroniniuose atomuose – tik artutinius) paskaičiavimus. Galima turėti tik tų **paskaičiavimų tipinius algoritmus** ir, jais naudojantis, perskaičiuoti senąją elektronų konfigūraciją atitinkančią matricą į naują.

Taigi, įvedę „tuščiųjų“ elementų sąvokas ir išplėtę elementų perstatymo operacijos taikymo sritį, mes gauname, jog tos operacijos rezultatas galėtų būti struktūra, jau ne būtinai izomorfiška buvusiajai, ir tokios operacijos modeliavimui jau būtų reikalingas gana sudėtingas imitacinis modelis.

Sudėtingas imitacinis modelis reikalingas ir modeliuojant pareigūnų sukeitimą vietomis realioje sistemoje, nes **realūs pareigūnai (kaip sistemos ne tik struktūros, bet ir sudėties elementai) nėra tapatūs** ir gali turėti sistemoje ne tik formalius, bet ir neformalius ryšius.

1.9.2.4. Ryšių perkėlimo ir perstatymo operacijos

Šios operacijos taip pat priklauso bendrųjų paprastųjų monarinių – struktūrų lygyje – operacijų klasei ir gali turėti keletą modifikacijų. Tačiau visos tos modifikacijos gali būti sukonstruotos, **naudojantis elementaria ryšio perkėlimo operacija**, žymima ženklu $(S)'_{(u \rightarrow v) \rightarrow (w \rightarrow z)}$, reiškiančiu, jog ryšys iš elemento u į elementą v struktūroje S perkeliamas ir tampa struktūroje $(S)'_{(u \rightarrow v) \rightarrow (w \rightarrow z)}$ nauju ryšiu iš elemento w į elementą z .

Jei reikia sukeisti (perstatyti) struktūroje S ryšius tarp elementų u ir v su ryšiais tarp elementų w ir z , tai tokia elementari ryšių perstatymo operacija žymima $(S)'_{(u \rightarrow v) \leftrightarrow (w \rightarrow z)}$ ir realizuojama, vykdant vienu metu dvi ryšių perkėlimo operacijas: $(S)'_{(u \rightarrow v) \rightarrow (w \rightarrow z)}$ ir $(S)'_{(w \rightarrow z) \rightarrow (u \rightarrow v)}$.

Ryšių perkėlimo ir perstatymo operacijas galima vartoti, perkeliant ir perstatant ne tik orientuotus vienpusius ryšius ($u \rightarrow v$) ir ($w \rightarrow z$), bet ir abipusius ryšius ($u \leftrightarrow v$) ir ($w \leftrightarrow z$). Tai reiškia, jog yra galimos operacijos $(S)'_{(u \leftrightarrow v) \rightarrow (w \leftrightarrow z)}$, $(S)'_{(u \leftrightarrow v) \leftrightarrow (w \leftrightarrow z)}$, $(S)'_{(u \rightarrow v) \rightarrow (w \rightarrow z)}$, $(S)'_{(u \leftrightarrow v) \leftrightarrow (w \leftrightarrow z)}$ ir t. t.

Ryšių perkėlimo ir perstatymo operacijos formaliai galimos ir tuomet, kai vienas (ar net abu) iš perkeliama bei perstatomų ryšių neegzistuoja, t. y., kai $(r_{u,v}=0) \vee (r_{w,z}=0)$ arba $(r_{u,v}=0) \wedge (r_{w,z}=0)$.

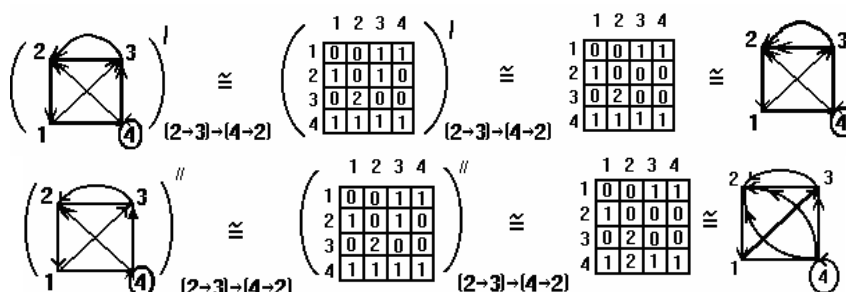
Ryšių perkėlimo ir perstatymo operacijos gali būti taikomos ir multigrafams. Tuomet žymėjimas $(u \Rightarrow v)$ reiškia **visus ryšius**, išeinančius iš elemento u ir įeinančius į elementą v , t. y. struktūros S elementų ryšių matricos langelio (u, v) turinį. Žymėjimas $(u \Leftrightarrow v)$ reiškia visus abipusius elementų u ir v ryšius, t. y. ryšių matricos dviejų langelių – langelio (u, v) ir langelio (v, u) – turinį.

Galimos dvi ryšių perkėlimo multigrafuose modifikacijos: S' ir S'' . Vykdam operaciją $(S)''_{(u \Rightarrow v) \rightarrow (w \Rightarrow z)}$, ryšių matricos langelio (u, v) turinys paaimamas iš to langelio ir **aritmetiškai** pridedamas prie langelio (w, z) turinio, o vykdant operaciją $(S)'_{(u \Rightarrow v) \rightarrow (w \Rightarrow z)}$ – langelio (u, v) turinys **logiškai** pridedamas prie langelio (w, z) turinio, t. y. struktūroje S'' ryšys $r_{s',w,z}$ tampa lygus $r_{s,u,v} + r_{s,w,z}$, o struktūroje S' ryšys $r_{s',w,z}$ tampa lygus $r_{s,u,v} \vee r_{s,w,z} = \max(r_{s,u,v}, r_{s,w,z})$. Ryšys $r_{s',u,v}$ struktūroje S' ir ryšys $r_{s'',u,v}$ struktūroje S'' tampa lygūs 0.*

Jei vykdome operacijas $(S)'_{(u \Leftrightarrow v) \rightarrow (w \Leftrightarrow z)}$ ir $(S)''_{(u \Leftrightarrow v) \rightarrow (w \Leftrightarrow z)}$, tai gauname: $r_{s',w,z} = r_{s,u,v} \vee r_{s,w,z} = \max(r_{s,u,v}, r_{s,w,z})$; $r_{s'',w,z} = r_{s,u,v} + r_{s,w,z}$; $r_{s',z,w} = r_{s,v,u} \vee r_{s,z,w} = \max(r_{s,v,u}, r_{s,z,w})$; $r_{s'',z,w} = r_{s,v,u} + r_{s,z,w}$; $r_{s',u,v} = r_{s'',u,v} = r_{s',v,u} = r_{s'',v,u} = 0$.

Vykdam operacijas $(S)'_{(u \Leftrightarrow v) \leftrightarrow (w \Leftrightarrow z)}$ ir $(S)''_{(u \Leftrightarrow v) \leftrightarrow (w \Leftrightarrow z)}$ langelių (u, v) ir (w, z) turiniai pasikeičia vietomis, t. y. $r_{s',u,v} = r_{s'',u,v} = r_{s,w,z}$, $r_{s',w,z} = r_{s'',w,z} = r_{s,u,v}$. Šiuo atveju struktūros (S') ir $(S)''$ nesiskiria viena nuo kitos, nesiskiria ir operacijos $(S)'_{(u \Leftrightarrow v) \leftrightarrow (w \Leftrightarrow z)}$ ir $(S)''_{(u \Leftrightarrow v) \leftrightarrow (w \Leftrightarrow z)}$, po kurių įvykdymo gauname, kad $r_{s',u,v} = r_{s'',u,v} = r_{s,w,z}$, $r_{s',w,z} = r_{s'',w,z} = r_{s,u,v}$, $r_{s',v,u} = r_{s'',v,u} = r_{s,z,w}$, $r_{s',z,w} = r_{s'',z,w} = r_{s,v,u}$.

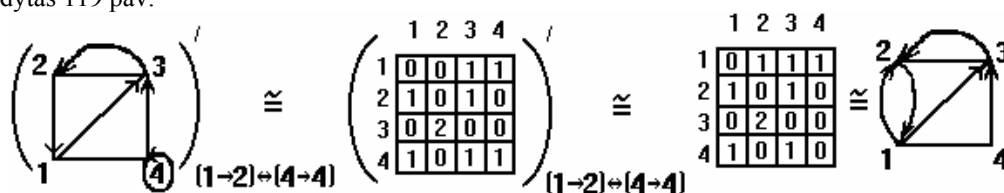
Elementarių ryšių perkėlimo operacijų pavyzdžiai grafinėje ir matricinėje formose parodyti 118 pav.



118 pav.

* Galima turėti bei nagrinėti ir tokias ryšių perkėlimo operacijos modifikacijas, kuriose ryšiai $r_{s,u,v}$, juos perkeliant, neišnyksta, t. y., kai perkeliama tik ryšių kopijos, o patys ryšiai $r_{s',u,v} = r_{s'',u,v} = r_{s,u,v}$ išlieka nepasikeitę. Tokias operacijas žymėsime $(S)^{*}$ ir $(S)^{**}$.

Elementariosios ryšių perstatymo operacijos pavyzdys grafinėje ir matricinėje formose parodytas 119 pav.



119 pav.

Ryšių perkėlimo ir perstatymo operacijų rezultatas paprastai nėra izomorfiškas operando S struktūrai, tačiau kartais gali likti ir izomorfiškas, pavyzdžiui, jei operacijose $(S)'_{(u \rightarrow v) \rightarrow (w \rightarrow z)}$ ir $(S)''_{(u \rightarrow v) \rightarrow (w \rightarrow z)}$ turime $r_{u,v}=0$, arba jei operacijoje $(S)'_{(u \rightarrow v) \leftrightarrow (w \rightarrow z)}$ turime, jog $r_{u,v}=r_{w,z}$.

Sąryšis tarp elementų ryšių ir ryšių matricos langelio turinio keitimo leidžia atsakyti į klausimą, kokie pasikeitimai įvyks sistemos struktūroje, jei jos matricioje sukeisime dvi eilutes u ir w , t. y. įvykdysime keletą transpozicijų $(S)'_{(u \rightarrow v) \leftrightarrow (w \rightarrow v)}$, kur $v = 1, 2, \dots, p$. Po šių transpozicijų visi ryšiai, išeinantys iš elemento u , taps ryšiais, išeinančiais iš elemento w , o visi ryšiai, išeinantys iš elemento w , taps ryšiais, išeinančiais iš elemento u .

Matricos S stulpelių v ir z sukeitimas vietomis taip pat tolygus eilei transpozicijų $(S)'_{(u \rightarrow v) \leftrightarrow (u \rightarrow z)}$, kur $u = 1, 2, \dots, p$. Po šių transpozicijų visi ryšiai, įeinantys į elementą v , taps ryšiais, įeinančiais į elementą z , o visi ryšiai, įeinantys į elementą z , taps ryšiais, įeinančiais į elementą v .

Iš čia išplaukia, jog **matricos eilučių u ir w bei jos stulpelių u ir w sukeitimas vietomis tolygus elementų u ir w sukeitimui vietomis**, ką mes pastebėjome jau anksčiau, nagrinėdami elementų transpozicijos operaciją. Tai reiškia, kad **elementų transpozicijos operacija galėtų būti nelaikoma pirmine ir elementaria**, nes jos rezultatą galima gauti, įvykdžius eilę struktūros tarpelementinių ryšių transpozicijų:

$$(S)'_{u \leftrightarrow w} \equiv \bigwedge_{v=1}^p [(S)'_{(u \rightarrow v) \leftrightarrow (w \rightarrow v)} \wedge (S)'_{(v \rightarrow u) \leftrightarrow (v \rightarrow w)}].$$

Jei elementų perstatymo operacijos iliustracija galėtų būti pareigūnų pasikeitimas užimamomis struktūroje vietomis – pareigybėmis, tai ryšio perkėlimo operaciją galima iliustruoti kokios nors vienos kokio nors pareigūno pareigos perdavimu kitam pareigūnui. Dviejų elementų apsikeitimas visais jų ryšiais tolygus dviejų pareigūnų apsikeitimui visomis pareigomis, t. y. pasikeitimui užimamos sistemos struktūroje vietomis, kas ir iliustruoja teiginį, jog **elementų perstatymo operacija gali būti suvesta į jų ryšių perstatymo operacijas**.

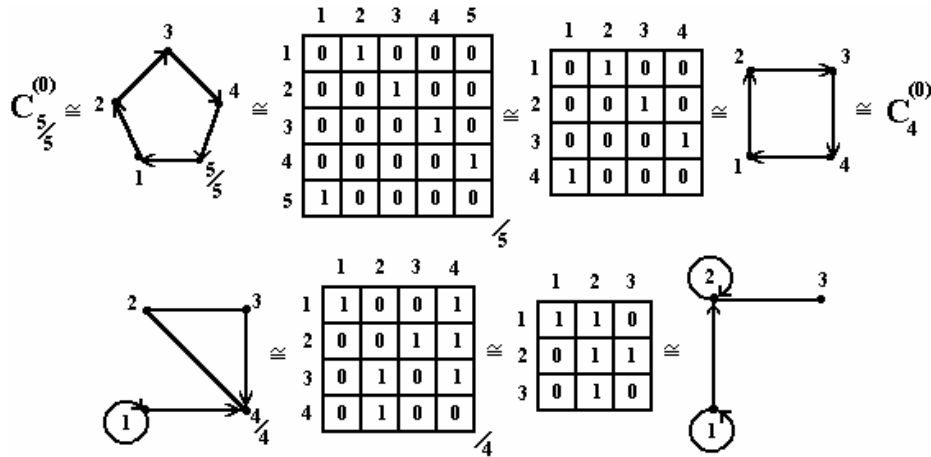
Kai viena po kitos įvykdomos kelios ryšių perkėlimo ar perstatymo operacijos, tai rezultatas gali priklausyti ne tik nuo to, tarp kokių elementų vyko tos operacijos, bet ir nuo to, kokia tvarka tos operacijos buvo vykdomos. Pavyzdžiui, jei struktūroje, pavaizduotoje 119 pav., įvykdytume ryšių perkėlimo operacijų sekas $(S)'_{(2 \rightarrow 3) \rightarrow (3 \rightarrow 4)}$, $(S)'_{(2 \rightarrow 3) \rightarrow (2 \rightarrow 2)}$ ir $(S)'_{(2 \rightarrow 3) \rightarrow (2 \rightarrow 2)}$, $(S)'_{(2 \rightarrow 3) \rightarrow (3 \rightarrow 4)}$, tai gautume skirtingus rezultatus. Tačiau gali būti ir atveju, kai keičiant ryšių perkėlimo bei perstatymo operacijų tvarką, rezultatas nesikeičia.

Iš to kas buvo pasakyta 1.9.2.3. ir 1.9.2.4. skyreliuose išplaukia, jog įvairių **reformų rezultatas gali priklausyti ne tik nuo tų reformų turinio, bet ir nuo to, kokia tvarka tos reformos buvo vykdomos**.

1.9.2.5. Struktūros elemento eliminavimo operacijos

Pirmąją struktūros S elemento eliminavimo operaciją žymėsime S/u , kur „/“ – eliminavimo ženklas, „ S/u “ – elemento u eliminavimo proceso ir jo rezultato žymėjimas, t. y. struktūra, gauta iš struktūros S , **eliminavus elementą u , perduodant jo ryšius likusiems struktūroje elementams**.

Jei struktūra S – paprastas grafas, orgrafas ar pseudografas su loginiais ryšiais $r_{S,v,w}$ tarp jos elementų v ir w , tai aukščiau minėtą ryšių atitekimą elementams „ v “ ir „ w “, eliminavus elementą „ u “ nusako ryšių tarp elementų struktūroje S/u formulė $r_{S/u,v,w} = r_{S,v,w} \vee (r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w})$, kuri rodo, jog netiesioginis ryšys tarp elementų v ir w , ejęs struktūroje S per elementą u (jei toks ryšys buvo, t. y., jei $r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w} = 1$), tampa tiesioginiu ryšiu tarp struktūros S/u elementų v ir w . Struktūros elemento eliminavimo pavyzdžiai parodyti 120 pav.



120 pav.

Matricinėje formoje operacija S/u vykdoma taip:

- 1) matricioje S išbraukiami eilutė u ir stulpelis u;
- 2) iš bet kurio likusio neišbraukto matricos S langelio (v, w) nuleidžiamas vertikalus statmuo į išbrauktą eilutę ir horizontalus statmuo į išbrauktą stulpelį;
- 3) tarp tokiu būdu surastų išbrauktos eilutės langelio (u, w) ir išbraukto stulpelio langelio (v, u) turinių $r_{S,u,w}$ ir $r_{S,v,u}$ sudaroma konjunkcija $r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w}$;
- 4) ši konjunkcija logiškai pridedama prie matricos S langelio (v, w) turinio ir gaunamas matricos S/u langelio (v, w) turinys $r_{S/u,v,w} = r_{S,v,w} \vee (r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w})$.
- 5) procedūros 2, 3 ir 4 pakartojamos kiekvienam neišbrauktam matricos S langeliui ir tokiu būdu gaunama matrica S/u.

Struktūros S elemento u eliminavimo operaciją S/u galima interpretuoti kaip kokios nors pareigybės, atitinkančios struktūros elementą u, likvidavimą sistemos struktūroje S, perduodant to elemento pareigas (funkcijas) kitiems struktūros S elementams.

Kita operacijos S/u interpretacija – tarpinio transporto, ryšių, prekybos, tinklo mazgo likvidavimas, paverčiant ryšius tarp kitų mazgų,ėjusius per mazgą u, betarpiškais ryšiais.

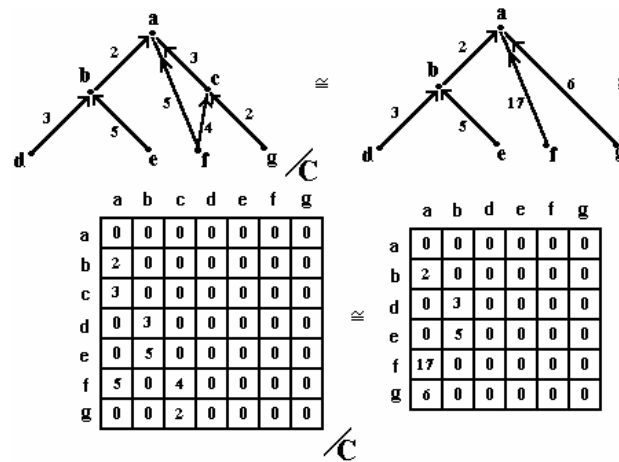
Struktūros elemento eliminavimo operaciją galima interpretuoti ir kaip ventilinės schemos mazgų eliminavimo operaciją (žiūr. 1.16.1.3.2 skyrelį), kuri vartojama, norint rasti pilno ryšio tarp kokių nors schemos mazgų formulę, pavyzdžiui, ventilinės schemos išėjimo funkciją. 121 pav. parodyta, kaip gaunama ventilinės schemos, turinčios tiesioginių ryšių matricą S, išėjimo funkcijos formulė, eliminuojant mazgus 2 ir 3 ir paliekant tik įėjimo mazgą 1, neturintį vidinių įėjimų, ir išėjimo mazgą 4, neturintį išėjimų į vidų.

$$\begin{aligned}
 S &\cong \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & x_1 \vee x_2 & \bar{x}_1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & x_3 & \bar{x}_3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & \bar{x}_2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} ; S_{/2} \cong \begin{array}{c|cc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & \bar{x}_1 \vee x_3 (x_1 \vee x_2) & \bar{x}_3 (x_1 \vee x_2) \\ 3 & 0 & 1 & \bar{x}_2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & \bar{x}_1 \vee x_3 & \bar{x}_3 (x_1 \vee x_2) \\ 3 & 0 & 1 & \bar{x}_2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} ; \\
 S_{/2,3} &\cong \begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & \bar{x}_3 (x_1 \vee x_2) \vee \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee x_3) \\ 4 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}
 \end{aligned}$$

121 pav.

Gavome, kad ventilinės schemos išėjimo funkcija (pilno ryšio tarp pirmojo ir ketvirtojo mazgo funkcija) yra $y = R_{1,4} = \bar{x}_3 (x_1 \vee x_2) \vee \bar{x}_2 [\bar{x}_1 \vee x_3 (x_1 \vee x_2)] = \bar{x}_3 (x_1 \vee x_2) \vee \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee x_3) = x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$.

Struktūros elemento eliminavimo operaciją galima apibendrinti ir multigrafams, formulę $r_{S/u,v,w} = r_{S,v,w} \vee (r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w})$ pakeičiant formule $r_{S/u,v,w} = r_{S,v,w} + r_{S,v,u} \cdot r_{S,u,w}$, t. y. loginės daugybos ir loginės sudėties operacijas pakeičiant aritmetinės daugybos ir aritmetinės sudėties operacijomis (žiūr. 122 pav.).



122 pav.

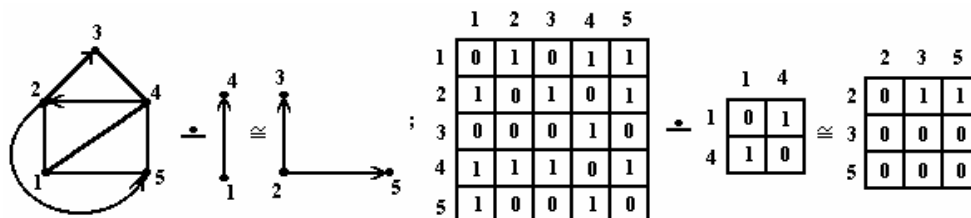
Multigrafo elemento eliminavimo operaciją, kai multigrafas – orientuotas „medis“, vaizduojas sudėtingo gaminio struktūrą, t. y. rodantis, kiek žemesnio lygio elementų įeina į aukštesnio lygio elementą, galima interpretuoti kaip kokio nors **to gaminio tarpinio mazgo atskiros gamybos panaikinimo operaciją**. Kaip matyti iš 122 pav., panaikinus mazgą „c“, detalės „f“ ir „g“ tampa betarpiškai įeinančiomis į gaminį „a“ detalėmis: 17 detalių „f“ ir 6 detalės „g“.

Analogiškai, kaip buvo įvesta struktūros elemento eliminavimo operacija, **galima buvo įvesti ir tarpelementinio ryšio struktūroje S eliminavimo operaciją**. Tačiau tokią operaciją galima įvykdyti, struktūrų atimties operacija, kuri bus įvesta vėliau (žiūr. 1.9.2.23. skyrelį) ir kuri gali eliminuoti ne tik vieną, bet ir keletą ryšių struktūroje. Todėl nėra reikalo turėti specialią tik vieno ryšio eliminavimo operaciją.

Struktūrų atimties operaciją galima modifikuoti taip, kad ji tiktų ne tik ryšių, bet ir struktūros elementų eliminavimo tikslams. Pavyzdžiui, galima įvesti tokią struktūrų atimties operaciją $S_i \div S_j$, kuri skirtųsi nuo 1.9.2.23. skyrelyje aprašytos operacijos $S_i - S_j$ tuo, jog iš struktūros S_i būtų atimami ne tik ryšiai, priklausantys struktūrai S_j (kaip operacijoje $S_i - S_j$), bet ir struktūros S_j elementai kartu su visais jų ryšiais, kuriuos jie turėjo ne tik struktūroje S_j , bet ir struktūroje S_i . Tokia struktūrų atimties operacija realizuotų **antrąją struktūros elementų eliminavimo operaciją, kuri skirtųsi nuo pirmosios tuo, jog eliminuojamų elementų ryšiai neperduodami kitiems struktūros S_i elementams, o dingsta (žūsta) kartu su eliminuojamais elementais**.

Operaciją $S_i \div S_j$ galima būtų interpretuoti kaip struktūros S_i dalies, atitinkančios struktūrą S_j , žuvimą (išėjimą iš rikiuotės avarijos metu ir pan.), kaip elektrono atėmimą iš atomo (žiūr. 1.9.1.3. skyrelį ir jame aprašytą **oksidacijos reakciją**). Operaciją $S_i \div S_j$ ir jos rezultatą vaizduoja 123 pav.

Vykdamat operaciją $S_i \div S_j$ matricinėje formoje, struktūros S_i matricioje išnyksta eilutės ir stulpeliai, atitinkantys struktūros S_j elementus, t. y. tie elementai eliminuojami su visais savo ryšiais, neperduodant tų ryšių kitiems elementams. Tokiu būdu, **antroji elemento eliminavimo operacija matricinėje formoje atitinka eliminuojamo elemento stulpelio ir eilutės išbraukimą**.



123 pav.

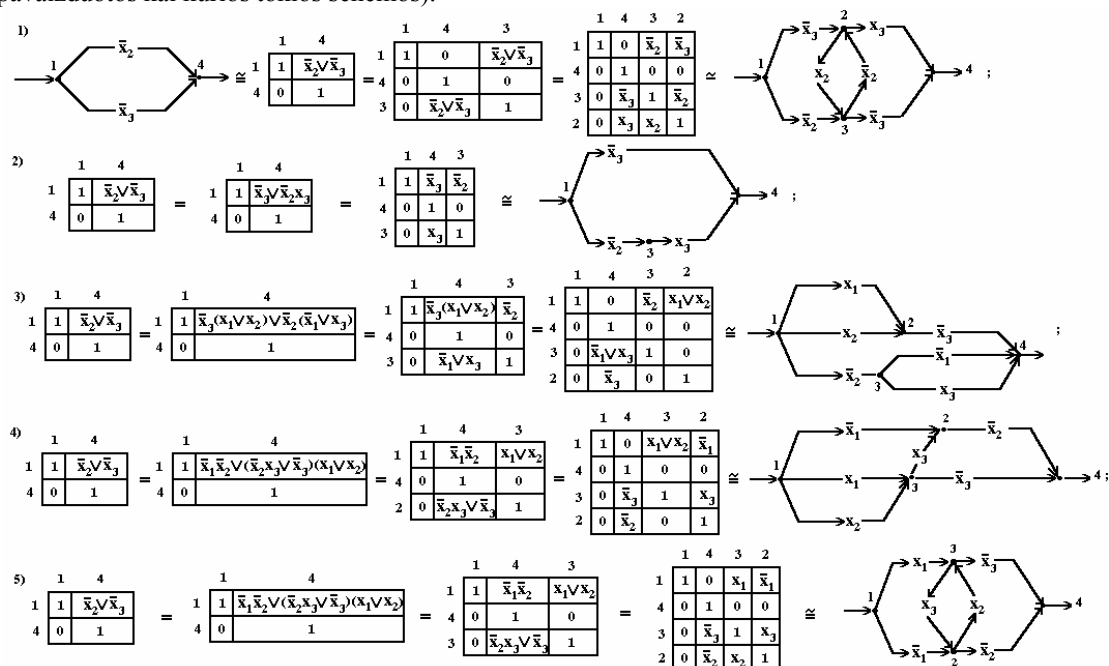
Operaciją $S_i \div S_j$ galima apibendrinti taip, kad ją būtų galima taikyti bet kokioms struktūroms, pavyzdžiui, bet kuriems multigrafams, tačiau tuomet reikėtų įvesti ne tik neigiamų ryšių, bet ir neigiamų elementų sąvokas, interpretuojant neigiamą elemento reikšmę kaip tokio elemento trūkumą, kaip jo nebuvimą toje vietoje, kur jis privalėtų būti. Tada struktūra S_j galėtų būti bet kokia struktūra, o ne tik struktūros S_i dalimi.

1.9.2.6. Naujo elemento įvedimo į struktūrą operacijos

Šios operacijos yra atvirkštinės struktūros elemento eliminavimo operacijos. Todėl jos gali būti interpretuojamos ir kaip eliminuoto elemento atstatymo operacijos. Jei atstatome anksčiau eliminuotą elementą, neįvesdami papildomų ryšių, t. y. tik atstatydami senus eliminuoto elemento ryšius, tai reikia įvykdyti procedūrą, atvirkštinę procedūrai, aprašytai formule $r_{S/u,v,w} = \neg r_{S,v,w} \vee (r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w})$ (arba formule $r_{S/u,v,w} = r_{S,v,w} + r_{S,v,u} \cdot r_{S,u,w}$), t. y. reikia, žinant $r_{S/u,v,w}$ reikšmes, rasti $r_{S,v,w}$, $r_{S,v,u}$ ir $r_{S,u,w}$ reikšmes. Kadangi trys ieškomi kintamieji $r_{S,v,w}$, $r_{S,v,u}$ ir $r_{S,u,w}$ surišti tik viena lygybe, tai jie ją gali tenkinti **nebūtinai tik vienu būdu**. Pavyzdžiui, jei $r_{S/u,v,w} = 1$, tai galimi tokie lygties $r_{S,v,w} \vee (r_{S,v,u} \wedge r_{S,u,w}) = 1$ sprendiniai:

- 1) ($r_{S,v,w} = 0$; $r_{S,v,u} = 1$; $r_{S,u,w} = 1$);
- 2) ($r_{S,v,w} = 1$; $r_{S,v,u} = 0$; $r_{S,u,w} = 0$);
- 3) ($r_{S,v,w} = 1$; $r_{S,v,u} = 0$; $r_{S,u,w} = 1$);
- 4) ($r_{S,v,w} = 1$; $r_{S,v,u} = 1$; $r_{S,u,w} = 0$);
- 5) ($r_{S,v,w} = 1$; $r_{S,v,u} = 1$; $r_{S,u,w} = 1$).

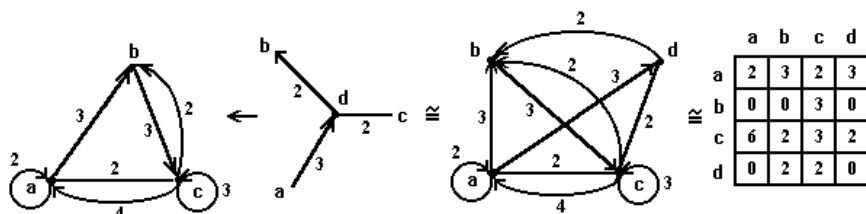
Todėl **eliminuto elemento atstatymo operacija nėra vienareikšmiškai apibrėžta** ir jos rezultatu gali būti skirtingos struktūros. Pavyzdžiui, jei, turėdami matricą, atitinkančią ventilinės schemas išėjimo funkciją (žiūr. 121 pav., o taip pat 1.16.1.3.2. skyrelį šioje mokymo priemonėje), pabandysime atstatyti eliminuotus trečiąjį ir antrąjį tos schemas mazgus, tai gausime ne vieną, o **kelias izomorfiškai skirtingas, tačiau funkcionaliai ekvivalentias schemas** (žiūr. 124 pav., kuriame pavaizduotos kai kurios tokios schemas).



124 pav.

Dar daugiau įvairių rezultatų galima gauti, atstatant eliminuotą multigrafo elementą, t. y. sprendžiant lygtį $r_{S,v,w} + r_{S,v,u} \cdot r_{S,u,w} = a$, kur a – duota $r_{S/u,v,w}$ reikšmė.

Tačiau jei į struktūrą S įvedamas naujas elementas, **nurodant jo ryšius su kitais struktūros S elementais**, tai tos **operacijos rezultatas randamas vienareikšmiškai**: prie struktūros S matricos pridama papildoma eilutė ir papildomas stulpelis, į kurių atitinkamus langelius įrašomos iš naujo elemento išeinančių ir į jį įeinančių ryšių reikšmės (žiūr. 125 pav.).



125 pav.

Nesunku pastebėti, jog tokia naujo elemento įvedimo į struktūrą S operacija yra tik dalinis išplėstinės struktūrų aritmetinės sudėties operacijos, kuri bus aprašyta 1.9.2.22. skyrelyje atvejis. Todėl ženklelį „ $\leftarrow$ “ 125 pav. galima pakeisti į ženklą „ $+$ “.

Pirmoji naujo elemento įvedimo operacija, atitinkanti (nors ir nevienareikšmiškai) pirmąją elemento eliminavimo operaciją, gali būti interpretuojama kaip **jau egzistuojančių sistemoje elementų ryšių (jų funkcijų, pareigų) dekompozicijos operacija**, neįvedant į struktūrą naujų ryšių, o tik dekomponuojant jau esamus ryšius ir perskirstant juos taip, kad dalis tų ryšių tektų įvedamam naujam elementui. Tokiu būdu, jei elemento eliminavimo pirmoji operacija atitinka kokios nors pareigybės likvidavimą, užkraunant jos funkcijas kitiems elementams, tai naujo elemento įvedimo pirmoji operacija atitinka naujos pareigybės įvedimą, norint palengvinti kitų pareigūnų darbą, t. y. perduodant naujam elementui dalį jų funkcijų.

Antroji naujo elemento įvedimo operacija, atitinkanti elemento eliminavimo antrąją operaciją, gali būti interpretuojama kaip **naujos pareigybės struktūroje atsiradimas, kai atsiranda naujų darbų (naujų funkcijų, naujų ryšių)**. Tokiu būdu atsiradęs naujas elementas neperima jau esančių sistemoje ryšių bei funkcijų, o ateina į sistemą su naujais ryšiais bei funkcijomis, t. y. nedekomponuodamas jau esančios struktūros, įveda į ją naujus ryšius. Antroji naujo elemento įvedimo operacija gali būti panaudota ir vaizduojant išorinio elektrono įjungimą į elektroninį apvalkalą cheminės reakcijos metu (žiūr. 1.9.1.3. skyrelį ir jame aprašytą **redukcijos reakciją**).

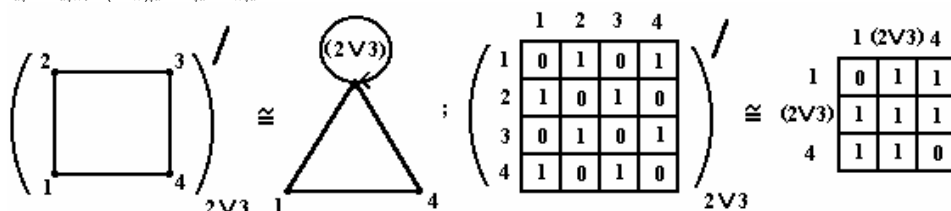
Kaip jau buvo minėta, tokią naujo elemento įvedimo operaciją matricinėje formoje galima realizuoti, pasinaudojant struktūrų aritmetinės sudėties operacija, sudedant struktūros S matricą su įvedamo naujo elemento ryšių matrica, t. y. prirašant struktūros S matricoje naują stulpelį ir naują eilutę, kaip tai buvo parodyta 125 pav.

1.9.2.7. Elementų jungimo (stambinimo) operacijos

Elementų jungimo operacijos yra giminingos elemento eliminavimo pirmajai operacijai ir skiriasi nuo jos tik tuo, kad, jungiant du elementus į vieną, jų ryšiai nepasiskirsto tarp kitų elementų, o susijungia ir tampa naujo (jungtinio) elemento ryšiais. Pavyzdžiui, jungiant du elementus z ir w į vieną, jų vietoje atsiranda naujas elementas (z, w) , kuriam atitenka visi elementų z ir w ryšiai, t. y. $\forall u \{ [r_{u,(z,w)} = (r_{u,z} \vee r_{u,w})] \wedge [r_{(z,w),u} = (r_{z,u} \vee r_{w,u})] \}$. Šitokią operaciją elementų z ir w struktūroje S žymėsime ženklu $(S)'_{z \vee w}$. Jos pavyzdys parodytas 126 pav.

Vykdamt operaciją $(S)'_{z \vee w}$, matricinėje formoje struktūros S matricoje stulpeliai ir eilutės, atitinkančios elementus z ir w išnyksta ir vietoj jų atsiranda stulpelis ir eilutė $(z \vee w)$, kurių langelių turinys gaunamas kaip atitinkamų langelių iš eilučių a ir stulpelių z ir w turinių disjunkcija:

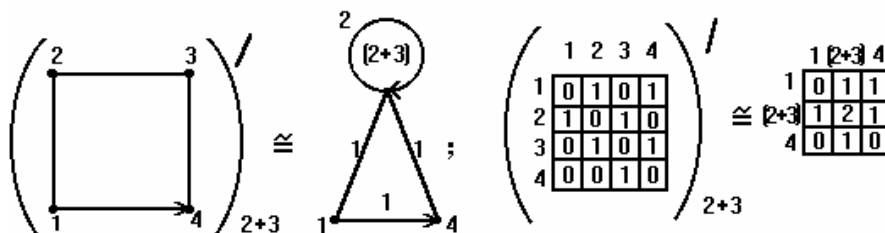
$$r_{u,(z \vee w)} = r_{u,z} \vee r_{u,w}; \quad r_{(z \vee w),u} = r_{z,u} \vee r_{w,u}.$$



126 pav.

Operaciją $(S)'_{z \vee w}$ galima būtų taikyti ir multigrafams, jei apibendrintume disjunkcijos operaciją: $(r_{z,u} \vee r_{w,u}) = \max(r_{z,u}, r_{w,u})$.

Galima ir kita elementų jungimo operacijos modifikacija $(S)'_{z+w}$, kurią vykdant sutampantys ryšiai ne susilieja, o aritmetiškai sudedami $\forall u [(r_{u,(z+w)} = r_{u,z} + r_{u,w}) \wedge (r_{(z+w),u} = (r_{z,u} + r_{w,u}))]$. Tokios operacijos pavyzdys parodytas 127 pav.

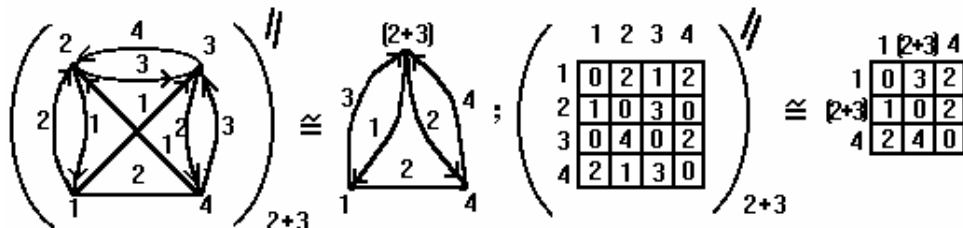


127 pav.

Tokiu būdu pirmoji elementų jungimo operacija $(S)'_{z \vee w}$ gimininga struktūrų sąsajos operacijai $S_i \cup S_j$, o antroji – $(S)'_{z+w}$ – struktūrų aritmetinės sudėties operacijai $S_i + S_j$ (žiūr. 1.9.2.21.1. ir 1.9.2.22. skyrelius).

Galimos ir tokios elementų jungimo operacijų modifikacijos $(S)''_{z \vee w}$ ir $(S)''_{z+w}$, kada ryšiai tarp jungiamų elementų z ir w , buvę struktūroje S , elementų jungimo metu išnyksta, t. y. kada grafas negali pavirsti pseudografu. Vienos iš tokių modifikacijų pavyzdys parodytas 128 pav.

Modifikacijos $(S)''$ atitinka tuos atvejus, kai ryšiai $r_{z,w}$ ir $r_{w,z}$ tarp jungiamų elementų z ir w – tarpusavio informavimo ryšiai. Šie ryšiai, sujungus elementus z ir w , išnyksta.



128 pav.

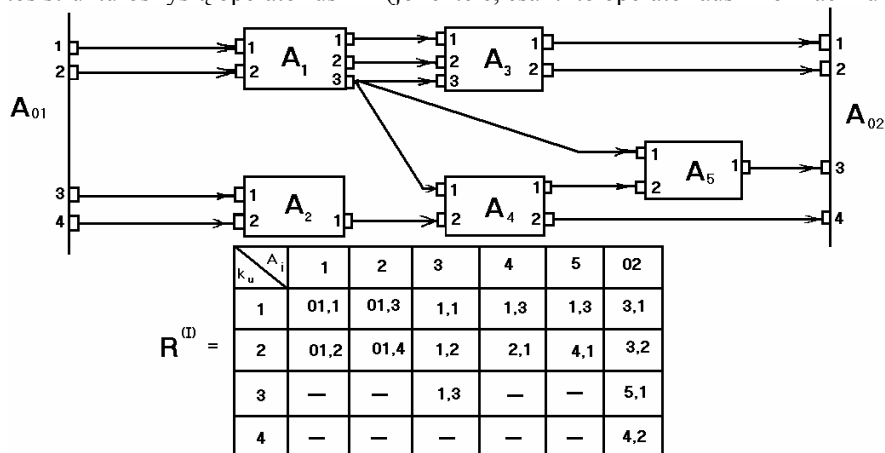
Modifikacijos $(S)'$ atitinka atvejus, kai ryšiai $r_{z,w}$ ir $r_{w,z}$ yra darbų, kurių rezultatai reikalingi visai sistemai, vykdymo etapai, duodantys tarpinius rezultatus. Jungiant elementus, darbų vykdymo etapai neišnyksta, ir todėl juos turi įvykdyti „jungtinis“ elementas.

Galima kalbėti ir apie operacijas, atvirkštines elementų jungimo operacijoms, t. y. apie **elemento dekompozicijos operacijas**. Tačiau tokias operacijas galima įvykdyti, naudojantis jau aprašytais naujo elemento įvedimo operacijomis, todėl elementų dekompozicijai specialių operacijų neįvedinėjame.

1.9.2.8. Ryšių jungimo operacijos

Jei tarp elementų v ir w yra keletas juos jungiančių elementarių ryšių, tai tuos ryšius galima sujungti į vieną sudėtingą ryšį. Pavyzdžiui, keletą laidų, jungiančių du elektrinės ar elektroninės sistemos mazgus, galima sujungti į vieną bendrą kabelį, jungiantį tuos mazgus, o tų laidų įėjimo ir išėjimo kontaktus – į bendrus įėjimo ir išėjimo štekerius. Tokia elementarių ryšių jungimo operacija aprašyta [32]. Ji vartojama, pereinant nuo sistemos struktūros aprašo kanoninės formos prie natūraliosios aprašo formos.

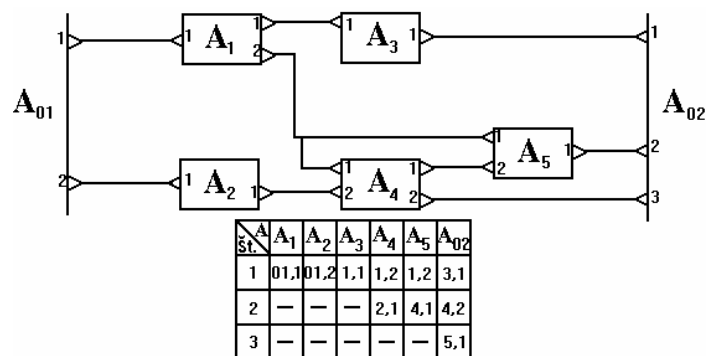
Kanoninė forma vaizduoja elementarius tarpusavio ryšius tarp sistemos agregatų kontaktų, o taip pat tarp tų agregatų ir sistemos išorinės aplinkos kontaktų. Kanoninė forma atitinka principinę sistemos (pavyzdžiui, kokio nors elektrinio, elektroninio, radioelektroninio prietaiso) schemą. Sistemos struktūros pavaizdavimo kanoninėje formoje pavyzdys parodytas 129 pav., kur duotas tos struktūros ryšių operatorius $R^{(1)}$ (jo lentelė, esanti to operatoriaus informaciniu modeliu).



129 pav.

Natūralioji struktūrų aprašo forma vaizduoja jungtinius tarpusavio ryšius tarp sistemos agregatų ir jų ryšius su aplinkos įėjimų ir išėjimų rozetėmis, atitinkančiomis agregatus jungiančių kabelių štekerius. Natūraliojoje formoje dažnai vaizduojamos įvairios montazinės

schemos. Natūraliosios formos pavyzdys, atitinkantis kanoninę formą, pavaizduotą 129 pav., parodytas 130 pav. Ten pat pavaizduota ir natūraliosios formos jungimo operatoriaus $S^{(1)}$ lentelė.



130 pav.

Ryšių jungimo operaciją galima įvykdyti ne tik grafinėje, bet ir iškart lentelinėje formoje, t. y., turint operatoriaus $R^{(1)}$ lentelę, pavaizduotą 129 pav., iškart galima gauti operatoriaus $S^{(1)}$ lentelę, pavaizduotą 130 pav. Tam užtenka visus elementarius ryšius tarp dviejų agregatų sujungti į vieną kabelį (kabelį gali sudaryti ir vienas elementarus ryšys, jeigu daugiau ryšių tarp tų agregatų nėra), o visus kontaktus, atitinkančius vieną kabelį, – į štekерius ir rozetes. **Ryšių jungimo operacija yra visiškai apibrėžta** ir duoda vieną apibrėžtą rezultatą – naują **struktūrą, homomorfinę tos operacijos operandui**. Jei norime, kad būtų galima vienareikšmiškai **atvirkštinė operacija, grąžinanti struktūros aprašymą iš natūraliosios į pradinę kanoninę jos formą**, reikia, pereinant iš kanoninės į natūraliąją formą, pasižymėti, kaip elementarus ryšiai, jungiami į sudėtingus (t. y. į kabelius) arba (o tai yra tas pats) – kaip elementarus kontaktai jungiami į štekерius. Kitaip tariant, reikia sudaryti **agregatų štekерių (rozečių) sudėties lentelę**. Tokios lentelės pavyzdys – 46 lentelė, kurioje parodyta, kokie struktūros, pavaizduotos 129 pav., agregatų ir aplinkos įėjimo kontaktai p ir kokie išėjimo kontaktai q priklauso atitinkamiems struktūros, pavaizduotos 130 pav., štekерiams.

46. lentelė

Agregatai Štekерiai		A ₀₁		A ₁		A ₂		A ₃		A ₄		A ₅		A ₀₂
		Kontaktai		q		p		q		p		q		p
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		2	2	2	2	—	2	2	—	—	—	—	—	2
		—	—	3	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—
2		3	—	3	—	—	—	—	2	2	2	—	—	4
		4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3		—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3

Turėdami štekерių lentelę, mes galime vienareikšmiškai iššifruoti kiekvieno štekерio bei jį atitinkančio kabelio turinį ir, naudodamiesi operatoriaus $S^{(1)}$ lentele, galime **grįžti nuo natūraliosios struktūros aprašymo formos prie kanoninės**.

Pavyzdžiui, 130 pav. pirmąją aplinkos A_{01} išėjimo štekерį pakeičiame tos pačios aplinkos išėjimo kontaktais 1 ir 2 ir tuo pačiu kabelyje, jungiančiame šį štekерį su agregatu A_1 , išskiriame du elementarius kanalus. Agregato A_1 pirmąją išėjimo štekерį pakeičiame išėjimo kontaktais 1, 2 ir 3, o antrąją – išėjimo kontaktu 3. Analogiškai antrąją aplinkos A_{01} išėjimo štekерį pakeičiame tos aplinkos išėjimo kontaktais 3 ir 4 ir t. t., kol galų gale gauname kanoninę formą, pavaizduotą 129 pav. bei ryšių operatoriaus $R^{(1)}$ lentelėje. Lentelėse reikia laikytis vienodos štekерių numeravimo tvarkos.

Galima ir tokia struktūros elementų **ryšių jungimo operacijos modifikacija**, kai elementarus ryšiai sujungiami taip, kad vietoj dviejų (ar daugiau) elementarių ryšių gaunamas vienas elementarus ryšys, o vietoj dviejų (ar daugiau) kontaktų gaunamas vienas kontaktas.

Tokios ryšių jungimo operacijos algoritmas formaliai niekuo nesiskiria nuo jau aprašyto ryšių jungimo į kabelius, o kontaktų – į štekерius algoritmo. Skirtumas čia tik toks: rezultate atsiranda struktūra, kurioje vietoj štekерių ir kabelių gauname kontaktus ir elementarius kanalus. **Pirmoji ryšių jungimo operacijos modifikacija „fiziškai“ nesupaprastina sistemos struktūros, o tik perveda vieną tos struktūros atvaizdavimo formą į paprastesnę**, vaizduojančią elementarius ryšius tarp agregatų štekерių, ir dar – kiekvieno jungtinio ryšio ir kiekvieno štekерio sudėtį. **Antroji ryšių jungimo operacijos modifikacija supaprastina „fizinę“ sistemos struktūrą**, nes vietoj kelių ryšių tarp vieno

elemento išėjimo ir kito elemento įėjimo atsiranda tik vienas ryšys. Tokiu būdu iš multigrafų gali būti gauti paprasti grafai ir orgrafai, t. y. iš aritmetinių matricų – loginės.

Jei tarp struktūros elementų yra po keletą ryšių ir tie ryšiai – homogeniniai, tai, norint supaprastinti tokios struktūros aprašymą, galima pasinaudoti **antrąja ryšių jungimo operacijos modifikacija su tokiu papildymu**, kad jungiami ryšiai aritmetiškai sumuojami (sudedami), nustatant tokiu būdu **jungtinių ryšių „svorius“**, išreikštus elementarių ryšių „svorio“ vienetais.

1.9.2.9. Elementų jungimo į struktūrą T_n operacija

Elementų į jungimo į medžius T_n operaciją žymėsime $\bigoplus_{i=1}^n i$, kur n – elementų skaičius.

Operacija $\bigoplus_{i=1}^n i$ nėra vienareikšmė net tuo atveju, kai visi elementai i yra visiškai vienodi, nes, kai $n > 3$, gali būti gautas jau ne vienas, o keli neizomorfiški medžiai T_n , kurių skaičius sparčiai didėja, didinant n (žiūr. 1.9.1.1. skyrelį).

Tuo labiau nevienareikšmiškas operacijos $\bigoplus_{i=1}^n i$ rezultatas, kai jungiamieji elementai i nėra vienodi.

Kai visi elementai i yra skirtingi (individualūs), tai, kaip jau buvo minėta 1.9.1.1. skyrelyje, medžių T_n , besiskiriančių vienas nuo kito savo briaunų (žymimų jungiamų elementų numerių poromis) aibėmis, skaičius yra lygus n^{n-2} , ir operacija $\bigoplus_{i=1}^n i$ yra vienareikšmiškai apibrėžta tik kai $n=2$, nes tuomet gaunamas tik vienas medis $T_2 \cong P_2 \cong K_2 \cong A_1$.

Kai $n=3$, tai gaunami jau trys izomorfiški medžiai T_3 , priklausantys grandinių P_3 klasei. Juos galima laikyti ir žvaigždėmis A_2 .

Kadangi medžių T_3 viršūnės jau turi nevienodus laipsnius, tai, prijungdami ketvirtąją viršūnę prie skirtingus laipsnius turinčio medžio T_3 viršūnių, gausime jau neizomorfiškus medžius. Kai $n=4$, gauname 16 medžių T_4 , priklausančių dviems neizomorfiškoms klasėms. Pirmąją klasę sudaro 4 izomorfiškos žvaigždės A_3 , o antrąją – $\frac{4!}{2} = 12$ izomorfiškų grandinių P_4 .

Struktūros T_5 priklauso jau trims neizomorfiškoms klasėms (žiūr. 54 pav.). Pirmąją sudaro $\frac{5!}{2} = 60$ izomorfiškų grandinių P_5 , antrąją – 5 izomorfiškos žvaigždės A_4 , o trečiąją – struktūros, gaunamos iš žvaigždžių A_3 , pridėdant prie kurio nors vieno jų spindulių po vieną briauną ir ją atitinkančią viršūnę. Tokių struktūrų klasę sudaro $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ izomorfiškų medžių T_5 . Iš viso gauname $5 + 60 + 60 = 125 = 5^3 = 5^{5-2}$ medžių T_5 , kas patvirtina teoremą, kad iš $n \geq 2$ skirtingų elementų galima sudaryti n^{n-2} skirtingų medžių T_n .

Bendrai, kai nevienodų elementų skaičius $n \geq 2$, į skirtingų medžių T_n aibę būtinai įeina $\frac{n!}{2}$ izomorfiškų grandinių P_n , prie kurių, kai $n \geq 4$, prisideda dar po n izomorfiškų žvaigždžių A_{n-1} , o kai $n \geq 5$ – dar po $n(n-1)(n-2)$ tokio tipo izomorfiškų medžių, kurie gaunami, konstruojant iš duotų skirtingų n elementų žvaigždės A_{n-2} , kurių skaičius yra $C_n^2 \cdot P_2 = n(n-1)$, ir prijungiant prie kiekvienos tokios žvaigždės bet kurio iš $n-2$ „spindulių“ dar po vieną briauną ir viršūnę. Kai $n \geq 6$, atsiranda ir kitokių neizomorfiškų medžių T_n .

Pavyzdžiui, kai $n=6$, tai gauname jau 1296 medžius, priklausančius 6 neizomorfiškoms struktūrų klasėms (žiūr. 54 pav.). Pirmąją klasę sudaro izomorfiškos grandinės P_6 , kurių skaičius – $\frac{6!}{2} = 360$. Antroji klasė – 6 izomorfiškos žvaigždės A_5 . Trečiąją klasę sudaro struktūros, gautos jau aprašytu būdu iš žvaigždžių A_4 , prijungiant prie kurio nors jų „spindulio“ po briauną ir viršūnę. Tokių T_6 skaičius yra lygus $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Ketvirtoji klasė gaunama iš žvaigždžių A_3 , prijungiant prie kurio nors jos „spindulio“ po atvirą grandinę, susidedančią iš dviejų grandžių ir dviejų viršūnių. Tos klasės medžių skaičius lygus $C_6^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Ir bendrai, kai $n \geq 6$, medžių T_n aibėje, susidedančioje iš n^{n-2}

medžių, būtinai atsiranda $C_n^{n-2} \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot 2! = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = \frac{n!}{n-4!}$ tokio tipo medžių, sudarytų iš

žvaigždžių A_{n-3} , pridedant prie bet kurio nors bet kurios tokios žvaigždės „spindulio“ po atvirą grandinę, sudarytą iš dviejų grandžių ir dviejų viršūnių. Penktąją izomorfiškai skirtingą izomorfiškų medžių T_6 klasę sudaro medžiai, gauti iš žvaigždžių A_3 , pridedant prie dviejų kurių nors iš trijų žvaigždės spindulių po briauną ir viršūnę. Tos klasės izomorfiškų medžių skaičius lygus $C_6^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Ir bendrai, kai $n \geq 6$, tai į medžių T_n aibės sudėtį įeina $C_n^{n-2} (n-2)(n-3) \cdot 2 = n(n-1)(n-2)(n-3)$ tokio tipo izomorfiški medžiai, sudaryti iš A_{n-3} žvaigždžių, pridedant prie bet kurių dviejų (iš $n-3$) žvaigždės A_{n-3} „spindulių“ po atvirą atkarpą ir viršūnę. Šeštąją neizomorfišką izomorfiškų medžių klasę sudaro medžiai T_6 , gaunami, sujungiant dviejų grandinių P_3 , sudarytų iš visiškai skirtingų elementų, vidurines viršūnes. Tuos medžius galima gauti ir iš žvaigždžių A_3 , prijungiant prie kurio nors jos „spindulio“ galo iškart po dvi likusias viršūnes. Kadangi prijungiamųjų viršūnių prijungimo tvarka šiuo atveju neturi reikšmės, tai tokių medžių skaičius turi būti lygus $\frac{C_6^4 \cdot 4 \cdot 3}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2} = 90$. Nesunku įsitikinti, jog $6+360+120+360+360+90=1296=6^4$.

Skaitytojui gali kilti klausimas, kaip nustatyti neizomorfiškų struktūrų skaičių medžių T_n aibėje ir kaip rasti pačias tas struktūras. Sprendžiant šią problemą, galima pasinaudoti 1.9.1.1. skyrelyje išvardintomis sąlygomis, kurias turi tenkinti medžio T_n viršūnių laipsniai, ir ten pat aprašytu metodu surandant visas galimas tų laipsnių d_i reikšmių kombinacijas bei analizuojant visus skirtingus viršūnių su skirtingais laipsniais sujungimo būdus.

Priėmę, kad $d_1 = d_n = 1$, mes buvome gavę tokias galimas likusiųjų $n-2$ viršūnių laipsnių d_i reikšmių kombinacijas:

kai $n=4$:

1) (2; 2); 2) (3; 1);

kai $n=5$:

1) (2; 2; 2); 2) (3; 2; 1); 3) (4; 1; 1);

kai $n=6$:

1) (2; 2; 2; 2); 2) (3; 2; 2; 1); 3) (3; 3; 1; 1); 4) (4; 2; 1; 1); 5) (5; 1; 1; 1).

Kadangi antroji d_i reikšmių kombinacija (3; 2; 2; 1) gali būti realizuota dviem neizomorfiškais viršūnės, turinčios laipsnį $d_i = 3$, įjungimo būdais:

a) $1 \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } 2 \text{ --- } 1$ ir b) $1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } 1$,
 $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$

tai medžių T_6 aibėje susidaro 6 neizomorfiškos izomorfiškų struktūrų klasės, kas ir pavaizduota 54 pav.

Analogiškai samprotaudami, kai $n=7$, gauname $n-2=5$ sveikaskaitinių nežinomųjų Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 lygtį $Y_2+Y_3+Y_4+Y_5+Y_6=5$, kurią sprendami gauname tokias simetrinių nežinomųjų Y_i galimų reikšmių kombinacijas:

1) (5; 0; 0; 0; 0); 2) (4; 1; 0; 0; 0); 3) (3; 2; 0; 0; 0); 4) (3; 1; 1; 0; 0);

5) (2; 2; 1; 0; 0); 6) (2; 1; 1; 1; 0); 7) (1; 1; 1; 1; 1).

Iš jų gauname tokias d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 reikšmių kombinacijas:

1) (6; 1; 1; 1; 1); 2) (5; 2; 1; 1; 1); 3) (4; 3; 1; 1; 1); 4) (4; 2; 2; 1; 1);

5) (3; 3; 2; 1; 1); 6) (3; 2; 2; 2; 1); 7) (2; 2; 2; 2; 2).

Pirmoji, antroji, trečioji ir septintoji kombinacijos turi tik po vieną realizaciją, nes tose kombinacijose, perstatinėdami gautas d_i reikšmes, gautume tik izomorfiškas struktūras.

Ketvirtojoje kombinacijoje galimos dvi neizomorfiškos realizacijos:

a) $\text{---} 4 \text{ --- } 2 \text{ --- } 2 \text{ ---}$ ir b) $\text{---} 2 \text{ --- } 4 \text{ --- } 2 \text{ ---}$.
 $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$

Penktojoje kombinacijoje taip pat galimos dvi neizomorfiškos realizacijos:

a) $\text{---} 3 \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ ---}$ ir b) $\text{---} 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ ---}$.
 $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$

Šeštojoje kombinacijoje galimos trys neizomorfiškos realizacijos:

a) $\text{---} 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } 2 \text{ --- } 2 \text{ ---}$; b) $\text{---} 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ --- } 2 \text{ ---}$; c) $\text{---} 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 2 \text{ ---}$.
 $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$ $\begin{array}{c} | \\ 2 \\ | \\ 2 \end{array}$

Kaip matome, neizomorfiškų struktūrų skaičius medžių T_7 aibėje yra lygus $1+1+1+2+2+3+1=11$, kaip ir buvo pažymėta 1.9.1. skyrelyje.

Panašiu metodu galima nustatyti, kad medžių T_8 aibė turi 23 neizomorfiškas struktūras bei rasti visas tas struktūras ir t. t. (žiūr. [98]).

Analogiškai, kaip buvo daroma nagrinėjant medžius T_5 ir T_6 , galima apskaičiuoti izomorfiškų medžių skaičių kiekvienoje neizomorfiškoje klasėje.

Kadangi operacija $\bigoplus_{i=1}^n$ nėra apibrėžta, kai duotas tik medžio viršūnių skaičius, tai, norint gauti konkretų medį T_n , tenka nurodyti jo struktūrą. Kai visi elementai vienodi, pakanka nurodyti, kuriai iš neizomorfiškų klasių tas T_n priklauso, o kai elementai nevienodi, tai reikia dar ir sunumeruoti medžio viršūnes toje struktūroje.

Kai kurie **elementų jungimo į medžius operacijos taikymai** bus aprašyti 1.9.2.27. skyrelyje. Čia pažymėsiu tik tai, kad, naudojantis šia operacija, galima aprašyti **polimerizacijos procesus** (žiūr. 1.9.1.3. skyrelį).

1.9.2.10. Sistemų struktūrų sudėtingumo charakteristikų apskaičiavimo operacijos

Nors sistemos ir jos struktūros sudėtingumo sąvokos, kaip jau buvo minėta 1.6.4.13. skyrelyje, pačios yra gana sudėtingos ir (šių eilučių autoriaus nuomone) yra reliatyvios, tačiau tai dar nereiškia, jog iš viso negali būti **objektyvių kiekybinių rodiklių** vienaip ar kitaip (vienpusiškai ar beveik pilnai, daugiau ar mažiau tiksliai) charakterizuojančių **sistemos struktūros sudėtingumą**.

Tokių charakteristikų reikšmių apskaičiavimui ir skiriamos matematinės operacijos, kurias nagrinėsime šiame skyrelyje, pratęsdami 1.6.4.13. skyrelyje pradėtą nagrinėjimą. Jos priklauso struktūrų algebros elementinių operacijų klasės **struktūrų charakteristikų apskaičiavimo operacijų poklasiui**, apie kurį jau buvo kalbėta 1.9.2. skyrelyje.

Sistemos struktūros sudėtingumą visų pirma charakterizuoja jos **elementų skaičius n** . Kai kurie autoriai jį laiko pagrindine sistemos struktūros sudėtingumo charakteristika ir bando ta charakteristika naudotis, skirstydami sistemų struktūras į **paprastas, sudėtingas ir labai sudėtingas**.

Pavyzdžiui, teigiama, jog gamybinio proceso operatyvinio valdymo (operatyvinio planavimo) sistemos struktūrą galima priskirti prie paprastų, kai valdomųjų (planuojamų) rodiklių skaičius yra artimas 10 (t. y. mažesnis arba nedaug viršijantis tą skaičių), o gaminamų gaminių nomenklatūra (gaminų tipų skaičius) yra mažesnė už 100 arba artima tam skaičiui. Kai minėtieji dydžiai žymiai viršija šiuos skaičius ir yra artimi, atitinkamai, 100 ir 1000, tai gamybos proceso operatyvinio planavimo ir to proceso operatyvinio valdymo sistemos struktūra priskiriama prie sudėtingų, o tiems dydžiams viršijant 100 ir 10000 – prie labai sudėtingų operatyvinio planavimo sistemų struktūrų.

Analogiškai, apskaitos sistemų įmonėje struktūra laikoma paprasta, kai įmonėje dirba nedaugiau 1000 darbuotojų, įmonėje naudojamų įvairių žaliavų nomenklatūra neviršija 100 ir gaminamų gaminių nomenklatūra taip pat neviršija 100. Kai šie skaičiai yra viršijami, tačiau neviršijami skaičiai, atitinkamai, 10000, 1000 ir 1000, tai apskaitos sistemos struktūra priskiriama prie sudėtingų, o viršijant ir šiuos skaičius – prie labai sudėtingų struktūrų.

Optimalaus gamybos valdymo sistemos struktūra priskiriama prie paprastų, kai valdomųjų kintamųjų ir apribojimų skaičiai neviršija 100 ir 100, prie sudėtingų, kai tie skaičiai neviršija 1000 ir 1000, ir prie labai sudėtingų, kai valdomųjų kintamųjų ir apribojimų skaičiai matuojami dešimtimis tūkstančių.

Charakteristikos n nustatymui jokių ypatingų matematinių operacijų nereikia, reikia tik įvykdyti sistemos „inventorizaciją“ ir suskaičiuoti (bei užregistruoti) jos elementus.

Vaizduojant sistemos vidinę struktūrą matrica, ši sistemos struktūros charakteristika charakterizuoja tos matricos dydį – jos eilučių ir stulpelių skaičių, tačiau ji dar nieko nesako apie tos matricos turinį. O tai ir reiškia, jog ši kiekybinė sistemos struktūros sudėtingumo charakteristika apibūdina sistemos struktūros sudėtingumą tik dalinai, ir todėl reikalingos dar ir kitos kiekybinės charakteristikos, papildančios pastarąją.

Viena tokių papildomų charakteristikų yra vienetukų skaičius vidinių ryšių matricoje, vaizduojančioje vidinę struktūrą loginėje stratoje (žiūr. 1.7.7.1. skyrelį), arba, kitaip tariant, **tarpelementinių vienpusių ryšių skaičius $S(n)$ sistemos vidinėje struktūroje**, kurį 1.9.1.1. skyrelyje žymėjome ℓ ir esame ten apskaičiavę eilei tipinių struktūrų. Ten pateiktos ir **charakteristikos $S_n = \ell$ bei jai giminingos charakteristikos q apskaičiavimo formulės – šių charakteristikų apskaičiavimo operacijų matematiniai modeliai**.

Naudodamiesi jau įvestomis absoliutinėmis charakteristikomis n ir $S(n)$, galime įvesti santykinę charakteristiką – **tarpelementinių ryšių vidutinį tankį struktūroje, kurį apibrėšime formule**

$\mu = \frac{S(n)}{n}$. Ši charakteristika rodo, kiek vienpusių tarpelementinių ryšių vidutiniškai tenka vienam struktūros elementui, ir charakterizuoja **vidutinį struktūros vidinį sudėtingumą**, nepriklausantį nuo sistemos dydžio, kai tuo tarpu **charakteristikos n ir $S(n)$ labiau atspindi sistemos struktūros sudėtingumą, išplaukiantį iš sistemos dydžio ir augantį kartu su juo** (žiūr. 1.6.4.13. skyrelį).

Nesunku apskaičiuoti μ kai kurioms tipinėms struktūroms ir palyginti jų vidinį sudėtingumą.

Pavyzdžiui, struktūros P_n ir T_n turi vienodas μ reikšmes: $\mu_T = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n}$ ir $\mu_P = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n}$, artėjančias prie 2, kai $n \rightarrow \infty$.

Todėl galima teigti, jog grandinių P_n ir medžių T_n vidutiniai ryšių tankiai μ , kai n – didelis skaičius, yra praktiškai pastovūs ir beveik lygūs 2, arba, kitaip tariant, grandinių ir medžių vidinis struktūrų sudėtingumas bei jų elementų apkrovimas tarpusavio bendravimo ryšiais, kai n – pakankamai didelis skaičius, augant sistemos dydžiui (jos elementų skaičiui n), praktiškai nesikeičia.

Struktūrose C_n visiems elementams ryšių tankis yra vienodas ir pastovus: $\mu_C = \frac{2n}{n} = 2$.

Struktūrose $P_n^{(0)}$ ir $T_n^{(0)}$ vidutiniai ryšių tankiai μ taip pat yra praktiškai pastovūs, o struktūroje $C_n^{(0)}$ – pastovūs, tik dvigubai mažesni negu struktūrose P_n , T_n ir C_n .

Kadangi struktūroje W_n charakteristika $S(n)=4(n-1)$, tai $\mu_W = \frac{4(n-1)}{n} = 4 - \frac{4}{n}$ – taip pat praktiškai pastovus dydis, tik dvigubai didesnis negu struktūrose P_n ir T_n . Šios struktūros elementams, priklausantiems „rato“ „lankui“, ryšių tankis μ visą laiką yra visiems vienodas ir pastovus dydis, lygus 3, o centriniam elementui ryšių tankis $\mu=n-1$ neribotai didėja, didėjant n .

Kube Q_m ryšių tankis μ kiekvienam elementui vienodas ir lygus kubo matavimų skaičiui m , nes $\mu_Q = \frac{\ell_m}{p_m} = \frac{m \cdot 2^m}{2^m} = m$. Didėjant struktūros Q_m matavimų skaičiui m , ryšių tankis joje didėja proporcingai matavimų skaičiui, t. y. struktūros Q_m sudėtingumas, didėjant m , didėja ne tik „išoriškai“, nes eksponentiškai didėja elementų skaičius $n=p_m=2^m$, bet ir todėl, kad tiesiškai didėja $\mu=m$, t. y. auga vidinis struktūros sudėtingumas.

Bigrafinėse struktūrose $K_{n,m}$ vidutinis ryšių tankis μ , priklauso nuo to, kaip keičiasi charakteristikos n ir m , ir gali keistis gana įvairiai.

Kai $n=m \rightarrow \infty$, tai $\mu = \frac{2nm}{m+n} = \frac{2n^2}{2n} = n$ artėja prie begalybės, t. y. sistemos struktūros sudėtingumas, didėjant elementų skaičiui, auga ir „išoriškai“ ir „vidiniai“.

Kai vienas iš dydžių n ar m (pavyzdžiui, n) išlieka pastovus, o kitas (pavyzdžiui, m) keičiasi, tai gauname, jog tokioje struktūroje vidutinis ryšių tankis $\mu = \frac{2nm}{m+n} = \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$, didėjant m , artėja prie $2n$.

Pavyzdžiui, žvaigždėse $K_{1,m}$, vidutinis ryšių tankis μ , didėjant žvaigždės „spindulių“ skaičiui m , artėja prie 2, kai visiems elementams, priklausantiems žvaigždės „spinduliams“, ryšių tankis μ visą laiką išlieka vienodas ir pastovus, o centrinio žvaigždės elemento ryšių tankis, didėjant m , neribotai didėja.

Bendruoju atveju gauname, jog struktūroje $K_{n,m}$ vidutinis ryšių tankis $\mu = \frac{2nm}{n+m} = \frac{2}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$, kai abu dydžiai m ir n didėja, neribotai auga, o kai didėja tik vienas iš jų, – artėja prie pastovaus dydžio, lygaus dvigubai pastoviosios charakteristikos (n ar m) reikšmei.

Sistemų, turinčių pilno grafo K_n struktūrą, visiems elementams ryšių tankis yra vienodas ir lygus $\mu = \frac{n(n-1)}{n} = n-1$. Jis neribotai didėja, didėjant struktūros elementų skaičiui, todėl tokių struktūrų vidinis sudėtingumas, didėjant elementų skaičiui, neribotai didėja, kartu didėjant ir išoriniam struktūros sudėtingumui.

Analogiškai gali būti apskaičiuoti vidutiniški ryšių tankiai ir visoms kitoms struktūroms. Priklausomai nuo struktūros tipo dydis μ , kai $n \geq 2$, gali svyruoti nuo $\frac{1}{2}$ struktūroje $P_2^{(0)}$ iki n pilno pseudografo struktūroje, kurioje kiekvienas elementas surištas su visais kitais struktūros elementais, o taip pat ir su pačiu savimi. Tokios struktūros matriciniame modelyje visi n^2 langelių užpildyti vienetais.

Išvesime dar vieną struktūros vidinio sudėtingumo charakteristiką, kurią pavadinsime **struktūros vidutiniu santykinio rišlumu (struktūros vidutiniu santykinio rišlumo koeficientu)**

$$\rho = \frac{S(n)}{S_{K_n}(n)} = \frac{S(n)}{n(n-1)}.$$

Ši charakteristika lygi struktūroje esančių vienpusių ryšių skaičiaus $S(n)$ santykiui su tiek pat elementų turinčio pilno grafo vienpusių ryšių skaičiumi, o taip pat struktūros ryšių vidutinio tankio santykiui su pilno grafo ryšių vidutiniu tankiu.

Apskaičiuosime ρ kai kurioms tipinėms struktūroms.

Paprastose grandinėse P_n ir medžiuose T_n vidutinis struktūros santykinio rišlumo koeficientas

$$\rho = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}, \text{ didėjant } n, \text{ mažėja artėdamas prie } 0.$$

Analogiškai gauname, jog struktūroje C_n vidutinis santykinis rišlumo koeficientas yra lygus

$$\rho_C = \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}, \text{ struktūrose } P_n^{(0)}, T_n^{(0)}, C_n^{(0)} \text{ tas koeficientas dvigubai mažesnis negu struktūrose}$$

P_n, T_n ir C_n atitinkamai. Didėjant n , visose tose struktūrose ρ artėja prie 0.

Struktūroje W_n vidutinis santykinis rišlumo koeficientas yra lygus $\rho_W = \frac{4(n-1)}{n(n-1)} = \frac{4}{n}$, t. y.

dvigubai didesnis negu struktūrose P_n ir T_n .

Visose tokiose struktūrose, didėjant n , vidutinis santykinis rišlumo koeficientas, charakterizuojantis visų galimų ryšių santykinį panaudojimą struktūroje, proporcingai arba beveik proporcingai mažėja, artėdamas prie 0.

Struktūroje Q_m tas koeficientas $\rho_Q = \frac{m \cdot 2^m}{2^m \cdot (2^m - 1)} = \frac{m}{2^m - 1}$ taip pat mažėja, augant m ,

artėdamas prie 0. Didžiausią reikšmę jis turi, kai $m=1$, t. y., kai $Q_m = P_2 = K_2$. Tuomet $\rho_Q = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Struktūroje } K_{n,m} \text{ gauname } \rho &= \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)} = \frac{2}{\left(1 + \frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{2}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m} + 1 - \frac{1}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Kai m ir n dideli skaičiai (arba bent vienas iš jų – didelis skaičius), tai $\rho \approx \frac{2}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{n}{m}\right)} =$

$$= \frac{2}{(1+\sigma)\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)} = \frac{2\sigma}{(1+\sigma)^2}, \text{ kur } \sigma = \frac{m}{n}. \text{ Jei priimtume, jog } \sigma = \frac{n}{m}, \text{ gautume tą pačią formulę}$$

$$\rho \approx \frac{2\sigma}{(1+\sigma)^2}.$$

Kai $\sigma=1$, tai struktūros $K_{m,n}$ santykinis vidutinis rišlumas ρ pasiekia didžiausią reikšmę, lygią

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{n}} \approx \frac{1}{2}, \text{ kurią jis gali pasiekti esant didelėms } m \text{ ir } n \text{ reikšmėms, nes kai } m \neq n \text{ ir } \sigma > 1 \text{ arba } \sigma < 1, \text{ tai}$$

$$\rho \approx \frac{2\sigma}{(1+\sigma)^2} < \frac{1}{2}, \text{ kadangi } \frac{1}{2} - \frac{2\sigma}{(1+\sigma)^2} = \frac{\sigma^2 + 2\sigma + 1 - 4\sigma}{2(1+\sigma)^2} = \frac{(\sigma-1)^2}{2(\sigma+1)^2} > 0.$$

Žinoma, esant mažoms n ir m reikšmėms, ρ gali būti didesnis už $\frac{1}{2}$ ir net pasiekti maksimalų galimą dydį $\rho = 1$.

$$\text{Pavyzdžiui, kai } m=n=1, \text{ tai gauname struktūrą } K_{1,1}=P_2=K_2 \text{ ir } \rho = \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)} = 1.$$

Akivaizdu, kad struktūros K_n turi maksimalią paprastiems grafams bei orgrafams galimą ρ reikšmę, lygią 1.

Taigi, visiems grafams ir orgrafams ρ gali keistis ribose $0 < \rho \leq 1$ ir tik tokio tipo struktūrose kaip K_n bei $K_{n,m}$ gali nemažėti, didėjant struktūros elementų skaičiui.

Daugumoje struktūrų, didėjant elementų skaičiui jose, ρ mažėja, artėdamas prie 0. Tai reiškia, jog **daugumoje struktūrų, didėjant elementų skaičiui, mažėja panaudojamų galimų ryšių dalis.**

Sunumeruosime visus galimus ryšius tarp struktūros elementų, suteikdami jiems numerius $j=1, 2, 3, \dots, n(n-1)$.*

Tarkime, jog **tarpelementinis ryšys j gali turėti k_j būsenų**, t. y. tuo ar kitu momentu būti vienoje iš k_j būsenų.

Paprastiausiu atveju $k_j=2$. Tuomet vieną iš būsenų, reiškiančių ryšio nebuvimą, galima pažymėti 0, o antrąją būseną, reiškiančią ryšio buvimą, 1. Tokiu būdu gautume **tarpelementinių ryšių loginėje stratoje kokybinį sistemos struktūros modelį**, vaizduojantį tik ryšių buvimą ar nebuvimą ir nevaizduojantį tų **ryšių intensyvumo** bei kitų galimų tų ryšių charakteristikų.

Norėdami atvaizduoti ne tik atitinkamų ryšių buvimą ar nebuvimą, bet ir jų intensyvumą bei kitas tų ryšių charakteristikas, galime priimti, jog tokių būsenų skaičius k_j gali būti didesnis už 2.

Prisimindami, kad **mikropasaulyje surištų vienas su kitu elementų charakteristikos keičiasi ne tolydžiai, o diskrečiai** – kvantais (žiūr. 1.9.1.2. skyrelį), mes galime teigti, jog **modeliuodami procesus mikrolygyje, mes visuomet galime pasirinkti tokias baigtines sveikas dydžių k_j reikšmes, kad jų pakaktų visų galimų situacijų atvaizdavimui.**

Pavadinsime situaciją, charakterizuojamą kokia nors ryšių tarp struktūros S elementų būsenų kombinacija, **struktūros būseną**.

Apskaičiuosime visų galimų struktūros S , kurią charakterizuoja elementų skaičius n , vienpusių tarpelementinių ryšių skaičius $S(n)=n\mu=n(n-1)\rho$ ir tarpelementinių ryšių būsenų skaičiai k_j , būsenų skaičių $W(n)$.

Akivaizdu, kad tas skaičius $W(n)$ negali viršyti maksimalaus tai struktūrai būsenų skaičiaus $W(n) = \prod_{j=1}^{S(n)} k_j = \prod_{j=1}^{n\mu} k_j = \prod_{j=1}^{n(n-1)\rho} k_j$. Dažniausiai skaičius $W(n)$ būna mažesnis už $W(n)$, nes **dažniausiai**

ne kiekviena tarpelementinių ryšių būsenų kombinacija gali būti realizuojama.

Gali egzistuoti tam tikri apribojimai, neleidžiantys realizuoti kai kurioms ryšių būsenų kombinacijoms, ir kuo daugiau tų apribojimų, tuo mažesnė struktūros būsenų įvairovė, tuo lengviau prognozuoti tokios sistemos reakciją į tą ar kitą poveikį.

$$\text{Todėl santykiai } \eta_1 = \frac{W(n)}{W(n)} = \frac{W(n)}{\prod_{j=1}^{S(n)} k_j} \text{ ir } \eta_2 = \frac{W(n)}{\prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j} = \frac{\prod_{j=1}^{S(n)} k_j}{\prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j}, \text{ irgi gali būti panaudoti kaip}$$

kiekybinės struktūros S sudėtingumo charakteristikos.

Pavadinsime tas charakteristikas **struktūros būsenų rinkinio pilnumo pirmuoju ir antruoju koeficientais**.

Paprastumo dėlei, priimsime, jog visi k_j yra vienodi ir lygūs k . Tuomet gausime, jog

$$\eta_1 = \frac{W(n)}{\prod_{j=1}^{S(n)} k_j} = \frac{W(n)}{k^{S(n)}} = W(n) \cdot k^{-n\mu} = W(n) \cdot k^{-\rho \cdot n(n-1)}, \quad \eta_2 = \frac{\prod_{j=1}^{S(n)} k_j}{\prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j} = \frac{k^{S(n)}}{k^{n(n-1)}} = \frac{k^{\rho \cdot n(n-1)}}{k^{n(n-1)}} = k^{(\rho-1)n(n-1)} = k^{-(1-\rho)n(n-1)}.$$

Apskaičiuosime η_2 kai kurioms struktūroms.

* Čia nenagrinėsime pseudografų ir multigrafų, o tik paprastus grafus bei orgrafus, kuriuose maksimalus ryšių skaičius tarp n elementų lygus $n(n-1)$ arba mažesnis.

Struktūroms K_n mes jau esame gavę, jog $\rho=1$. Todėl tokioms struktūroms $\eta_2=1$.

Struktūroms $K_{n,m}$, kai n ir m yra dideli skaičiai, mes buvome gavę, jog, kai $n=m$, tai $\rho \approx \frac{1}{2}$, o kai $n \neq m$, tai $\rho < \frac{1}{2}$. Todėl atvejui, kai $n=m$, gauname, jog $\eta_2 \approx k^{-0,5n(n-1)}$, o tai reiškia, jog

koeficientas η_2 , didėjant struktūros elementų skaičiui n , mažėja, artėdamas prie 0.

Taigi, didėjant sistemų, turinčių struktūrą $K_{n,m}$, elementų skaičiui, toje struktūroje visų galimų būsenų dalis, lyginant ją su visomis galimomis būsenomis pilnuose grafuose, turinčiuose tą patį elementų skaičių, mažės, artėdama prie 0. Tuo labiau ta dalis mažės atvejais, kai $n \neq m$, nes tuomet $\rho < \frac{1}{2}$ ir $1-\rho > \frac{1}{2}$.

Kadangi visų kitų mūsų nagrinėtųjų struktūrų ρ , didėjant n , artėja prie 0, tai **visų tų struktūrų η_2 , didėjant n , artės prie 0 dar greičiau, negu struktūrų $K_{n,m}$, kai $n=m$.**

Koeficiento η_1 reikšmės negali būti apskaičiuotos, žinant vien tik struktūros elementų skaičių n , tarpelementinių ryšių skaičių $S(n)$ ir ryšių būsenų skaičių k , nes visi tie skaičiai neduoda informacijos, kokios ryšių būsenų kombinacijos gali būti realizuotos, kokios – ne.

Tačiau galime teigti, jog visiems paprastiems grafams ir orgrafams $0 < \eta_1 \leq 1$, nes realus struktūros būsenų skaičius negali viršyti maksimalaus galimo.

Koeficientą η_1 galima apytikriai įvertinti, renkant statistinę informaciją apie struktūroje S realizuojamas būsenas. Stebėdami struktūrą S pakankamai ilgą laiką ir registruodami tas būsenas, į kurias patenka sistema, mes galime apytikriai įvertinti struktūros būsenų, į kurias ta struktūra patenka, dažnius ir nustatyti realizuotų struktūros būsenų skaičių. Lygindami tą skaičių su maksimaliu

$W(n) = \prod_{j=1}^{S(n)} k_j$, galime apskaičiuoti jų santykį ir teigti, jog reali η_1 reikšmė yra apytikriai lygi tam

santykiui, būdama, galbūt, šiek tiek didesnė už jį.

Dar vieną kiekybinę struktūros sudėtingumo charakteristiką galima gauti, nagrinėjant struktūros būsenos kitimą laike, t. y. nagrinėjant jos **fazines trajektorijas** ir lyginant **realizuojamų fazinių trajektorijų pradinių atkarpų**, turinčių ilgį r žingsnių, **skaičių $v(r)$** su tokio pat ilgio **visų galimų fazinių trajektorijų pradinių atkarpų skaičiumi**.

Pažymėję visų realizuojamų pradinių fazinės trajektorijos atkarpų, turinčių ilgį r , skaičių $v(r)$,

galime įvesti charakteristiką $f_1(r) = \frac{v(r)}{[W(n)]^r} = \frac{v(r)}{\left(\eta_1 \prod_{j=1}^{S(n)} k_j\right)^r} = \frac{v(r)}{\left(\eta_1 \eta_2 \prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j\right)^r}$ ir

$$f_2(r) = \frac{[W(n)]^r}{\left(\prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j\right)^r} = \frac{\left(\eta_1 \eta_2 \prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j\right)^r}{\left(\prod_{j=1}^{n(n-1)} k_j\right)^r} = (\eta_1 \eta_2)^r.$$

Šias charakteristikas vadinsime **fazinės trajektorijos realizuojamų ir galimų pradinių atkarpų rinkinio pilnumo charakteristikomis** (pirmąja ir antrąja). Jos rodo, kurią dalį fazinių trajektorijų, kurios logiškai galėtų būti leistinos, struktūra realizuoja iš tikrųjų.

Iš tų charakteristikų apskaičiavimo formulų matome, jog, didėjant struktūros elementų skaičiui n , tik struktūros K_n charakteristika $f_2(r)$ gali neartėti prie 0.

Visų kitų struktūrų charakteristika $f_2(r)$, didėjant n ir r , gana sparčiai artėja prie 0.

Tai reiškia, jog, nors **didėjant erdvės ir laiko mastams (didėjant n ir r), realizuojama įvairovė (realizuojamų įvairių situacijų skaičius) auga milžiniškais tempais (tą augimą apibūdina kombinatorinės formulės), tačiau esant bent menkiausiems apribojimams, realizuojamos įvairovės dalis, lyginant ją su visa logiškai galima įvairove, didėjant erdvės ir laiko mastams, sparčiai mažėja, artėdama prie 0. Ar ne iš čia išplaukia didžiųjų skaičių dėsniai?**

Charakteristiką $f_1(r)$ (kaip ir jau anksčiau minėtąją charakteristiką η_1) galima apytikriai nustatyti, renkant statistinę informaciją apie struktūros funkcionavimą, t. y. registruojant visus struktūros S būsenos pokyčius laike ir atrenkant, kokie tos struktūros perėjimai iš vienos būsenos į

kitą pasitaiko (ir todėl yra realizuojami), o kokie – niekad nepasitaiko ir, matyt, dėl kokių nors priežasčių nėra realizuojami.

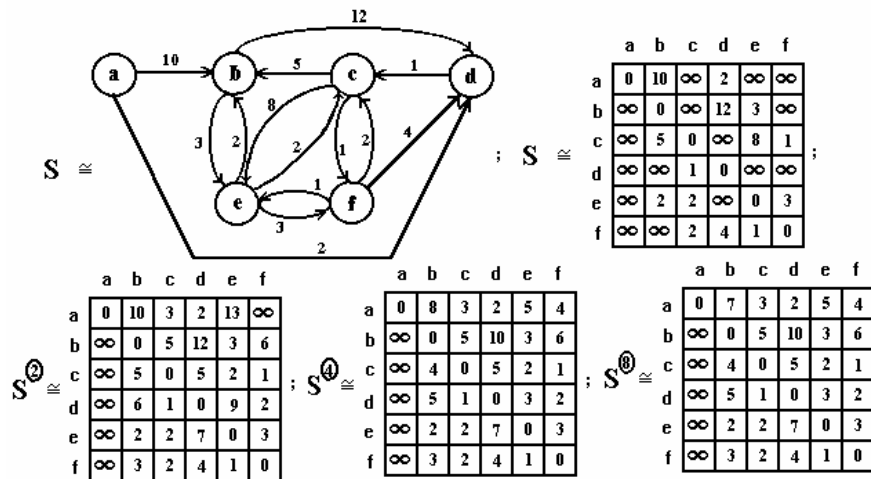
Plačiau apie sistemų ir jų struktūrų sudėtingumo charakteristikas skaitytojas gali pasiskaityti šių eilučių autoriaus preprinte „Системы и их сложность“, apie kurį jau buvo užsiminta šios mokymo priemonės „Įvade“.

Pereisime prie **struktūrų algebros operacijų, skirtų struktūrų kitų charakteristikų (ne tik sudėtingumo) apskaičiavimui**: „atstumų“ tarp elementų nustatymui, pilnų trumpiausių ciklų radimui bei jų ilgių apskaičiavimui ir pan.

1.9.2.11. Šimbelo daugybos operacija

Ši operacija vartojama, **norint surasti trumpiausius (arba ilgiausius) maršrutus tarp transporto tinklo mazgų ir nustatyti jų ilgį**.

Tarkime, jog turime transporto tinklą, pavaizduotą 131 pav. Sudarome tam tinklui **tiesioginių ryšių Šimbelo matricą**, nurodydami jos langeliuose tiesioginių ryšių tarp atitinkamų mazgų ilgį. Jei kokie nors transporto mazgai u ir v nesusiję tiesioginiu ryšiu, tai langelyje (u, v) rašome begalybės ženklą ∞ (žiūr. 131 pav.). Įvesime operaciją, vadinamą **Šimbelo daugybos operacija** $S_i \otimes S_j \cong S_k$, kuri taikoma kvadratinėms vienodų matavimų matricoms ir apibrėžiama formule $r_{k,u,v} = \min_t (r_{i,u,t} + r_{j,t,v})$.



131 pav.

Naudojantis šia operacija, įvedama **Šimbelo laipsnio sąvoka**:

$$S \otimes S = S^{(2)}, S^{(2)} \otimes S = S^{(3)}, \dots, S^{(m)} \otimes S = S^{(m+1)}.$$

Nesunku įrodyti, kad $S^{(m)} \otimes S^{(n)} = S^{(m+n)}$. (Įrodykite!)

Kadangi tiesioginių ryšių Šimbelo matricose $\forall u (r_{u,u}=0)$, tai formulė $\min_t (r_{u,t} + r_{t,v}) = \min(r_{u,1}+r_{1,v}, r_{u,2}+r_{2,v}, \dots, r_{u,u}+r_{u,v}, \dots, r_{u,v}+r_{v,u}, \dots, r_{u,n}+r_{n,v})$, aprėpdama visus „dviejų žingsnių“, o taip pat ir „vieno žingsnio“ (tiesioginius) ryšius, duoda trumpiausio vieno ir dviejų žingsnių kelio tarp mazgų u ir v ilgį. Todėl matricos $S^{(2)}$ elementai – trumpiausių vieno ar dviejų žingsnių ryšių tarp tinklo mazgų ilgiai, matricos $S^{(3)}$ elementai – trumpiausių vieno, dviejų ar trijų žingsnių ryšių tarp mazgų ilgiai ir t. t.

Jei transporto tinklas turi n mazgų ir yra P_n , tai aišku, kad $S^{(n-1)} \cong S^{(n)} \cong S^{(n+1)} \cong \dots$ (Įrodykite!).

Jei transporto tinklas – ne paprasta grandinė P_n , tai tinkle galima rasti keletą paprastų grandinių ir jose grandžių skaičius negali būti nei didesnis, nei lygus $n-1$.

Jei didžiausią grandžių skaičių turinčioje grandinėje grandžių skaičius lygus k , tai gausime, kad $S^{(k)} \cong S^{(k+1)} \cong S^{(k+2)} \cong \dots$

Iš to išplaukia **trumpiausių atstumų tarp transporto tinklo mazgų radimo algoritmas**:

1. Sudarome tiesioginių ryšių ilgį matricą S .

2. Naudodamiesi Šimbelo daugybos operacija apskaičiuojame $S^{(2)}, S^{(4)}, \dots, S^{(2^{r-1})}, S^{(2^r)}$, skaičiuodami iki tol, kol nebus patenkinta viena iš sąlygų:

a) $S^{(2^{r-1})} \cong S^{(2^r)}$ arba

b) $2^r \geq n-1$.

Matrica $S^{(2^r)}$ ir bus **trumpiausių atstumų matrica** (žiūr. 131 pav.). Grįždami nuo matricos $S^{(2^r)}$ prie matricos $S^{(2^{r-1})}$, o po to – prie matricos $S^{(2^{r-2})}$ ir t. t., mes galime surasti trumpiausius maršrutus, atitinkančius trumpiausius atstumus, gautus matricoje $S^{(2^r)}$. **Trumpiausio maršruto radimo algoritmą** pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu.

Pavyzdžiui, jei mums reikia nustatyti trumpiausią maršrutą nuo mazgo a iki mazgo b transporto tinkle, pavaizduotame 131 pav., tai, žiūrėdami į matricą $S^{(8)}$ (kur $8 > (n-1=5)$), randame, kad tokio maršruto ilgis lygus 7. Lygindami matricose $S^{(8)}$ ir $S^{(4)}$ langelių (a, b) reikšmes, randame, kad $(r_{4,a,b}=8) > (r_{8,a,b}=7)$. Tai reiškia, kad maršrutas a, b – sudėtingas ir, pereinant nuo $S^{(4)}$ prie $S^{(8)}$, jis keitėsi. Randame maršruto (a, b) sudėtinės dalis struktūroje $S^{(4)}$, iš kurių buvo sudarytas maršrutas (a, b) struktūroje $S^{(8)}$: $(a,b)=(ac)+(cb)$, nes $r_{8,a,b}=r_{4,a,c}+r_{4,c,b}=3+4=7$.

Lygindami $r_{4,a,b}$ ir $r_{2,c,b}$ matricose $S^{(4)}$ ir $S^{(2)}$, randame, kad $r_{2,c,b} > r_{4,c,b}$, iš kur darome išvadą, kad maršrutas (c, b) – sudėtingas ir $r_{4,c,b}=r_{2,c,e}+r_{2,e,b}=2+2$ arba $r_{4,c,b}=r_{2,c,f}+r_{2,f,b}=1+3$.

Analogiškai nustatome, kad $r_{4,a,c}=r_{2,a,d}+r_{2,d,c}$; $r_{2,c,e}=r_{1,c,f}+r_{1,e,f}$; $r_{2,e,b}=r_{1,e,b}$; $r_{2,c,f}=r_{1,c,f}$; $r_{2,f,b}=r_{1,f,e}+r_{1,e,b}$, iš kur gauname, kad $(a,b)=(a,d,c,f,e,b)$.

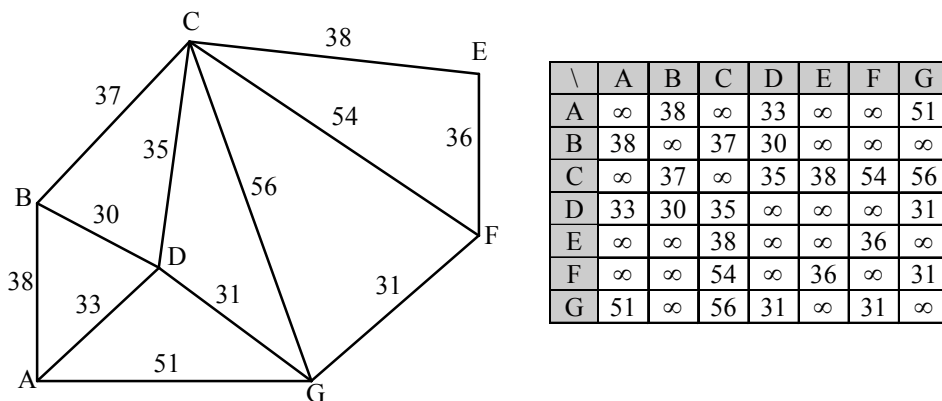
1.9.2.12. Mažiausiojo jungiančio medžio (MJM) radimo operacija

Mažiausiuoju jungiančiu medžiu (MJM) vadinamas jungusis grafas, jungiantis į tinklą visas grafo viršūnes taip, kad visų to grafo briaunų ilgių suma būtų mažiausia.

Akivaizdu, kad **MJM priklauso medžių T_n tipui**, nes, kaip žinome, medžiai T_n (o tame tarpe ir jų atmaina – grandinės P_n) yra jungieji grafai, turintys mažiausią briaunų skaičių, lygų $n-1$. Todėl **bet kuriame jungiajame grafe, turinčiame n viršūnių ir nesančiame T_n , visuomet galima sumažinti briaunų skaičių bent viena briauna ir tuo pačiu sumažinti briaunų ilgių sumą, nepažeidžiant grafo jungumo**.

MJM radimo uždaviniai turi praktinį taikymą, nes leidžia rasti **minimalius tinklus, jungiančius tos ar kitos paslaugos vartotojus**.

Tarkime, jog turime gyvenvietes A, B, C, D, E, F ir G, sujungtas **kelių tinklu**, pavaizduotu 132 pav. To **kelių tinklo matriciniu modeliu** gali būti tiesioginių ryšių matrica (TRM), kuri sudaroma analogiškai kaip ir Šimbelo matrica, tik į pagrindinės teigiamos įstrižainės langelius įrašome ne nulius, o begalybės ženklus.



132 pav.

Tarkime, jog nutarta tas gyvenvietes A, B, C, D, E, F ir G sujungti telefono linijomis, tiesiant jas šalia jau esančių kelių. Kaip reikia tempti tas telefono linijas, kad bendras jų ilgis būtų trumpiausias (ir jų tiesimo išlaidos būtų mažiausios)?

Taigi, reikia rasti turimame kelių tinklu MJM. Minimalų jungiantį medį, duotajame tinklu galima rasti, naudojantis labai paprastu ir efektyviu **Kruskalo (J.Kruskal) algoritmu**.

Kai kelių tinklas vaizduojamas grafiškai, tai tas algoritmas toks:

1) surandame duotajame tinklu **trumpiausiąją briauną** ir ją kaip nors pažymime, jog žinotume, kad ji priklauso MJM, ir nepasirinktume dar kartą, ieškodami kitų briaunų, priklausančių MJM;

2) tarp likusių (dar nepažymėtų) briaunų, **nesudarančių su jau pažymėtomis uždaru ciklą**, vėl surandame pačią trumpiausią briauną ir ją pažymime;

3) tikriname, ar pažymėtos briaunos **jau jungia visas duotojo grafo viršūnes**; jei sujungtos dar ne visos grafo viršūnės, tai vėl kartojame antrąjį algoritmo žingsnį iki tol, kol visos viršūnės tampa sujungtos; jei visos grafo viršūnės sujungtos, tai apskaičiuojame pažymėtųjų briaunų „ilgių“ sumą ir algoritmas baigia darbą.

Pritaikysime Kruskalo algoritmą grafo, pavaizduoto 132 pav., MJM paieškai.

1. Surandame trumpiausiąją briauną. Tokia briauna pasirodo besanti $BD=30$. Pažymime tą briauną, priskirdami ją MJM.

2. Tarp likusiųjų (nepažymėtųjų) briaunų vėl ieškome trumpiausios. Tokių briaunų, pasirodo, yra dvi: $DG=31$ ir $GF=31$. Pasirenkame bet kurią iš jų, pavyzdžiui DG . Pasirinktiosios briaunos sudaro grandinę BDG , jungiančią jau tris viršūnes. Kadangi dar liko nesujungtų viršūnių, kartojame antrąjį Kruskalo algoritmo žingsnį.

3. Tarp likusiųjų briaunų susirandame trumpiausiąją. Kadangi briauna $GF=31$ nesudaro ciklo su jau pasirinktomis briaunomis, tai pasirenkame ir pažymime tą briauną. Gauname grandinę $BDGF$, jungiančią jau 4 (iš 7) viršūnes. Kartojame antrąjį Kruskalo algoritmo žingsnį.

4. Išsirenkame briauną $AD=33$, nes ji yra trumpiausia tarp likusiųjų ir nesudaro ciklo su jau pasirinktomis. Gauname medį, jungiantį jau 5 viršūnes (iš 7).

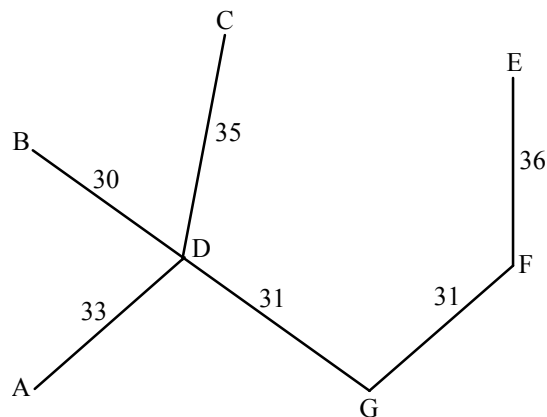
5. Dabar jau negalėtume rinktis briaunų AB ir AG , net jei jos būtų trumpiausios, nes gautume su jau pasirinktomis briaunomis uždarus ciklus. Pasirodo, jog trumpiausioji tarp likusiųjų briaunų, kurios nesudaro ciklo, yra briauna $CD=35$. Pasirenkame ir pažymime ją. Dabar jau turime medį, jungiantį 6 viršūnes (iš 7). Tęsiame algoritmo darbą, žinodami, jog nebus galima rinktis ne tik briaunų AB ir AG , bet ir briaunų BC , CG ir CF .

6. Pasirenkame trumpiausiąją briauną tarp likusiųjų. Tai briauna $FE=36$, nesudaranti ciklą su aukščiau pasirinktomis. Pažymėję briauną FE , matome, jog jau turime medį, jungiantį visas 7 viršūnes. Tai ir yra ieškomasis MJM. Jis parodytas 133 pav. $MJM\ ilgis=30+31+31+33+35+36=196$.

Dydis 196 gali reikšti minimalų MJM ilgį, minimalią telefono linijų ar elektros tinklų įrengimo kainą, minimalų laiką, reikalingą pašto išvežiojimui į gyvenvietes ir pan. Taigi, MJM radimo algoritmas gali būti taikomas gana plačiai.

Kruskalo algoritmą galima taikyti ne tik grafiniam, bet ir **matriciniam kelių tinklo modeliui**, kas yra net patogiau, kai tinklas yra didelis ir MJM radimui tikslinga panaudoti kompiuterius, sudarius atitinkamą programą.

MJM taip pat galima ieškoti matricinėje formoje, įrašant į MJM matricos langelius pasirinktųjų lankų bei briaunų ilgius.



133 pav.

Tiesioginių ryšių matricoje (TRM) pasirinktuosius lankus bei briaunas žymėsime, pakeisdami tos matricos atitinkamuose langeliuose esančius skaičius, vaizduojančius briaunų ilgius, begalybės ženkla ∞ . Tai leis išvengti pakartotino jau kartą pasirinktų lankų bei briaunų pasirinkimo.

Panašiu būdu, t. y. įrašydami į atitinkamus TRM langelius begalybės ženklus ∞ , mes galėsime išvengti ir tokių lankų bei briaunų pasirinkimo, kurie galėtų sujungti konstruojamame MJM jau esančių grandinių galus į ciklus.

Pailiustruosiu **matricinį Kruskalo algoritmą**, sudarydamas MJM matricą tam tinklui, kurio TRM buvo duota 132 pav.

1. Nagrinėjame duotąją TRM, ieškodami trumpiausiųjų briaunų bei lankų. Randame, jog trumpiausi lankai yra $BD=DB=30$, sudarantys briauną, jungiančią viršūnes B ir D.

2. Į būsimojo MJM matricą (kuri dar tuščia), turinčią tiek pat eilučių ir stulpelių, kiek ir TRM, įjungiamo briauną BD, t. y. į MJM matricos langelius (B, D) ir (D, B) įrašome skaičius 30.

3. Pasirinktąją briauną „eliminuojuame“ iš TRM. Tuo tikslu į TRM langelius (B, D) ir (D, B) įrašome begalybės ženklus ∞ , taip užkirsdami kelią pakartotinam briaunos BD pasirinkimui.

4. Kadangi turimoji MJM matrica kol kas jungia tik du duotojo tinklo mazgus (B ir D) iš turimų septynių, tai pereiname prie Kruskalo algoritmo sekančio žingsnio. Išsirenkame tiesioginių ryšių matricoje trumpiausią lanką. Tokių lankų yra 4: $DG=GD=GF=FG=31$. Jie atitinka dvi briaunas. Pasirenkame vieną iš jų, pavyzdžiui, tą, kuri jungia mazgus D ir G. „Eliminuojame“ tą briauną TRM, įrašydami į jos langelius (D, G) ir (G, D), vaizduojančius lanką DG ir GD ilgius, begalybės ženklus. Į MJM langelius (D, G) ir (G, D) įrašome skaičius 31.

Kadangi briauna DG su aukščiau įrašytąja į MJM matricą briauna BD sudaro grandinę BDG, tai, norėdami išvengti ciklo sudarymo, iš TRM „eliminuojuame“ briauną GB, įrašydami į jos langelius (G, B) ir (B, G) begalybės ženklus ∞ .

5. Dabar MJM matricoje jau yra 3 duotojo grafo viršūnės (B, D ir G) iš turimų 7. Tęsiame Kruskalo algoritmą ir TRM ieškome trumpiausių lankų. Tokių lankų randame du: $GF=FG=31$. Jie vaizduoja briauną, jungiančią mazgus G ir F. „Eliminuojame“ tą briauną TRM, įrašydami į jos langelius (G, F) ir (F, G) vietoj skaičių 31 begalybės ženklus. Į MJM matricos langelius (G, F) ir (F, G) įrašome skaičių 31. Dabar į MJM matricą įrašytos trys briaunos sudaro grandinę BDGF. Norėdami išvengti ciklų susidarymo, TRM turime „eliminuoti“ briaunas BF ir DF, įrašydami į jos langelius (B, F), (F, B), (D, F) ir (F, D) begalybės ženklus. Kai kuriuose iš tų langelių galėjo ir anksčiau būti begalybės ženklai, nes duotasis grafas nebuvo pilnas grafas K_7 , todėl naudojantis Kruskalo matriciniu algoritmu „rankiniu“ būdu į tokius langelius nieko įrašinėti nebereikia (kaip, pavyzdžiui, šiuo atveju), tačiau, naudojantis kompiuteriu, paprasčiau yra pakartotinai įrašyti begalybės ženklą, neanalizuojant TRM langelių turinio.

6. Kadangi MJM matrica jungia dar tik 4 duotojo grafo viršūnes (B, D, G ir F) iš 7, tai tęsiame Kruskalo algoritmo darbą. Analizuojame TRM ir randame, jog trumpiausi lankai yra $AD=DA=33$. Į MJM matricos langelius (A, D) ir (D, A) įrašome skaičius 33, o TRM langelių (A, D) ir (D, A) turinį pakeičiame į begalybės ženklus ∞ . Dabar MJM matricoje šalia jau aukščiau buvusios grandinės BDGF atsiranda dar dvi grandinės ADGF, kurios kartu sudaro medį, turintį jau 5 viršūnes. Norėdami išvengti ciklų susidarymo „eliminuojuame“ iš TRM briaunas AB, AG ir AF, įrašydami į TRM langelius (A, B), (B, A), (A, G), (G, A), (A, F), (F, A) begalybės ženklus ∞ .

7. Tęsdami Kruskalo algoritmo darbą, analizuojame TRM ir randame, jog trumpiausi tarp likusių yra lankai $DC=CD=35$, sudarantys briauną, jungiančią viršūnes D ir C. Į MJM matricos langelius (D, C) ir (C, D) įrašome skaičius 35, o į TRM tuos pačius langelius – begalybės ženklus. Dabar MJM modelyje atsiranda dar keturios naujos grandys CDA, CDB, CDG ir CDGF. Norėdami išvengti ciklų susidarymo iš TRM „eliminuojuame“ briaunas AC, BC ir FC, įrašydami į tos matricos langelius (A, C), (C, A), (B, C), (C, G), (G, C), (F, C), (C, F) begalybės ženklus.

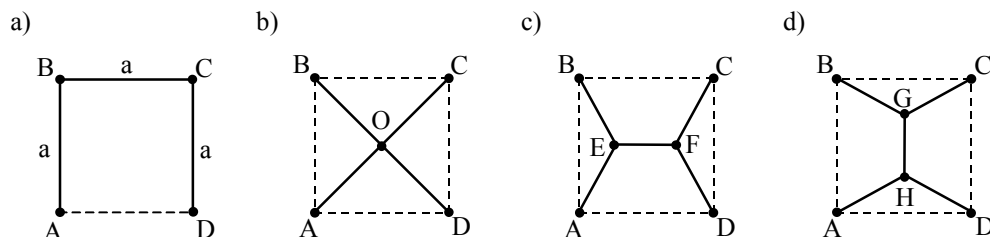
8. Dabar MJM jau jungia 6 viršūnes iš septynių ir belieka padaryti paskutinį algoritmo žingsnį. TRM išsirenkame trumpiausius lankus $EF=FE=36$, jungiančius viršūnes E ir F. Į MJM matricos langelius (E, F) ir (F, E) įrašome skaičius 36, o TRM jau galime ir nebekeisti, nes jos analizuoti daugiau nebereikės. Norėdami sužinoti MJM ilgį, turime sudėti jį sudarančių briaunų ilgius. Gauname $BC+CD+DG+GF+FE+AB=30+31+31+33+35+36=196$, t. y. lygiai pusę visų užpildytų MJM matricos langelių sumos.

Matricinį MJM radimo algoritmą galima modifikuoti, norint surasti trumpiausią turnyrą, jungiantį visas grafo viršūnes, kai grafo ryšių matrica yra ne būtinai simetrinė, t. y. kai lankų (i, j) ir (j, i) ilgiai ne būtinai vienodi.

Nesunku sudaryti ir **programą kompiuteriui, realizuojančią matricinį Kruskalo algoritmą**, nes jis yra gana paprastas. Galbūt, nepatyrusiems programuotojams pradžioje bus šiek tiek keblakas TRM briaunų „eliminavimas“, užkertant kelią ciklų susidarymui. Tačiau ir jie gana greitai pastebės, kad šią procedūrą galima supaprastinti, sudarant visas galimas poras su jau įrašytą į MJM matricą grafo viršūnių žymėjimais ir su dabar įrašomos į MJM briaunos dviejų viršūnių žymėjimais. Tai supaprastina programavimą, tiesa, šiek tiek padidinant į TRM įrašomų begalybės ženklų skaičių.

1.9.2.13. Šteinerio medžių sudarymo operacija

Jungiančiojo medžio ilgį kartais pavyksta sutrumpinti, įvedant į grafą papildomas viršūnes – tarpinius tinklo mazgus. Pavyzdžiui, keturias kvadrato, turinčio kraštinę, lygią a, viršūnes galima sujungti medžiu, turinčiu bendrą briaunų ilgį, trumpesnę negu to kvadrato MJM ilgis, lygus 3a (žiūr. 134 „a“ pav.)



134 pav.

Pavyzdžiui, jei įvestume papildomą mazgą O kvadrato centre, tai gautume medį, turintį „žvaigždės“ struktūrą (žiūr. 134 „b“ pav.), kurios visų keturių „spindulių“ bendras ilgis būtų lygus $2a\sqrt{2} \approx 2,8a < 3a$.

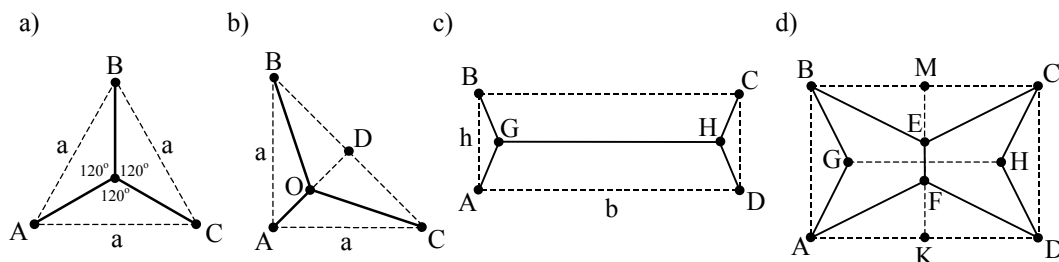
Tačiau pasirodo, jog ir šis medis dar nėra pats trumpiausias. Pavyzdžiui, įsivedę du papildomus mazgus E ir F (žiūr. 134 „c“ pav.) taip, kad $\angle AEB = \angle AEF = \angle BEF = \angle CFD = \angle DFE = \angle DFC = 120^\circ$, gautume, jog $|AE| = |BE| = |DF| = |CF| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|EF| = a - a \frac{\sqrt{3}}{3}$. Bendras viso tokio medžio ilgis būtų $a(1 + \sqrt{3}) \approx 2,73a$. Šis medis trumpesnis už anksčiau gautus, nes $a(1 + \sqrt{3})$ yra mažiau ne tik už $3a$, bet ir už $2a\sqrt{2}$.

Tą patį rezultatą gautume, įsivedę du papildomus mazgus G ir H (žiūr. 134 „d“ pav.) taip, kad $\angle AHD = \angle AHG = \angle DHG = \angle BGC = \angle BGH = \angle CGH = 120^\circ$.

Tinklo taškai, iš kurių trys išeinančios atkarpos sudaro kampus, lygius 120° , vadinami **Šteinerio taškais** (J.Steiner, XIX a. Berlyno universiteto matematikas), o medžiai, kurių visi vidiniai mazgai yra Šteinerio taškai – **Šteinerio medžiais**. Taškai E, F, G ir H 134 pav. yra Šteinerio taškai, o 134 „c“ ir „d“ pav. pavaizduoti medžiai – Šteinerio medžiai.

Kaip matyti iš 134 pav., kvadratui galima sudaryti du vienodus Šteinerio medžius, kurių ilgio $[\text{ŠM}]$ santykis su MJM ilgiu $[\text{MJM}]$ yra $\frac{[\text{ŠM}]}{[\text{MJM}]} = \frac{a(1 + \sqrt{3})}{3a} \approx 0,91$, t. y. kvadrato ŠM ilgis sudaro apie 91% kvadrato MJM ilgio. Tai reiškia, jog tiesiant komunikacinius (telefono, elektros, kanalizacijos, šiluminius ir pan.) tinklus, perėjimas nuo MJM prie ŠM gali sutaupyti apie 9% tų tinklo ilgio (o kartu – ir tų tinklų tiesimui reikalingų lėšų). Net palyginus su 134 „b“ pav. pavaizduota „žvaigžde“, Šteinerio medis yra juntamai ekonomiškė: sutaupoma apie 3,5% ilgio, nes $\frac{1 + \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot 100\% \approx 96,59\%$.

Dar daugiau sutaupoma, pereinant nuo MJM prie ŠM lygiakraščiame trikampyje (žiūr. 135 „a“ pav.). Jame ŠM ir MJM ilgių santykis tampa lygus $\frac{a\sqrt{3}}{2a} \cdot 100\% \approx 86,6\%$, ir sutaupoma apie 13,4% ilgio.



135 pav.

Kitokios formos trikampiuose ekonomija jau mažesnė. Pavyzdžiui, stačiakampio lygiašonio trikampio (žiūr. 135 „b“ pav.) ŠM ilgis sudaro $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \cdot 100\% \approx 96,56\%$ MJM ilgio, nes $|OD| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $|AO| = |AD| - |OD| = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} a$, $[\text{ŠM}] = |OB| + |OC| + |OA| = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} a$, $[\text{MJM}] = 2a$.

Dar padidinus trikampio ABC kampą A, santykis $\frac{[ŠM]}{[MJM]}$, dar labiau priartėtų prie 1. Kai tas kampas taptų lygus 120° , Šteinerio taškas sutaptų su trikampio viršūne A ir ŠM ilgis $[ŠM]$ taptų lygus MJM ilgiui $[MJM]$.

Kai trikampio ABC kampas $A \geq 120^\circ$, trumpiausiu medžiu, jungiančiu visas tris trikampio viršūnes, tampa MJM. Jo ilgis $[MJM]$ yra lygus bukąjį kampą sudarančių kraštinių ilgių sumai. Trikampiai, turintys kampą, didesnę arba lygų 120° , negali turėti savo viduje nei Šteinerio taško, nei Šteinerio medžio.

Stačiakampiai gali turėti po vieną (žiūr. 135 „c“ pav.), o kartais – ir po du Šteinerio medžius (žiūr. 135 „d“ pav.). Tai priklauso nuo santykio $k = \frac{h}{b}$ tarp stačiakampio pločio (aukščio) h ir jo ilgio b.

Kad sumažintume nagrinėtinų situacijų skaičių, priimsime, kad visada $b \geq h$, t. y., kad $k \leq 1$, nes atvejus, kai $b \leq h$ ir $k \geq 1$, visada galima suvesti į atitinkamus atvejus $b \geq h$, sukeičiant b ir h vietomis, t. y., pasukant stačiakampį 90° kampu aplink savo centrą.

Šteinerio medį, kurį sudaro atkarpos, jungiančios Šteinerio taškus G ir H (žiūr. 135 „c“ pav.) tarpusavyje ir su stačiakampio viršūnėmis, vadinsime „horizontaliuoju“ Šteinerio medžiu (HŠM), o Šteinerio medį, kurį sudaro atkarpos, jungiančios Šteinerio taškus E ir F (žiūr. 135 „d“ pav.) tarpusavyje ir su stačiakampio viršūnėmis, vadinsime „vertikaliuoju“ Šteinerio medžiu (VŠM).

Kai $b \geq h$, tai stačiakampis visada turi HŠM ir jo ilgis $[HŠM] = 2(|AG| + |BG|) + |GH| = 2\left(2h \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} + 2h \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + b - 2h \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = b + h\sqrt{3}$. „Vertikalusis“ ŠM stačiakampyje, kai $b \geq h$, egzistuoja ne

visada, o tik tada, kai $|ME| + |FK| \leq h$ (žiūr. 135 „d“ pav.), t. y. kai $b \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \leq h$, iš kur gauname VŠM

egzistavimo sąlygą $\frac{h}{b} = k \geq \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Taigi, kai $k \in (0; \frac{1}{\sqrt{3}})$, tai stačiakampis turi tik vieną Šteinerio

medį HŠM, kurio ilgis $[HŠM] = b + h\sqrt{3} = b(1 + k\sqrt{3})$, o kai $k \in [\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]$, tai stačiakampis turi du Šteinerio

medžius: HŠM ir VŠM. „Vertikalojo“ ŠM ilgis $[VŠM] = 2(|AF| + |FD|) + |EF| = 2\left(2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{6} + 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{6}\right) + h - 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{6} = h + b\sqrt{3} = b(k + \sqrt{3})$.

Kadangi, kai $h > 0$ visada $b + h\sqrt{3} < b + 2h$, tai visada $[HŠM] < [MJM]$: $\frac{[HŠM]}{[MJM]} = \frac{b + h\sqrt{3}}{b + 2h} = \frac{1 + k\sqrt{3}}{1 + 2k} = 1 - \frac{k(2 - \sqrt{3})}{1 + 2k} \approx 1 - \frac{0,268}{2 + \frac{1}{k}} < 1$. Didžiausią ekonomiją, lygią $\approx 9\%$, gauname, kai $k = 1$, t. y., kai

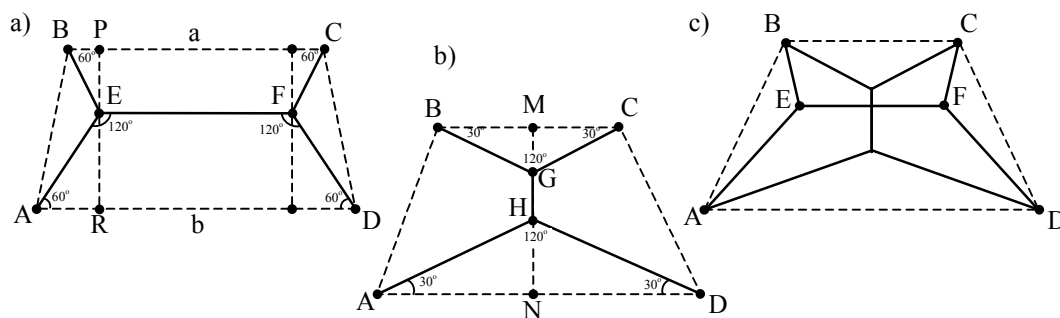
stačiakampis tampa kvadratu. Mažėjant k, ekonomija mažėja, artėdama prie 0, kai $k \rightarrow 0$.

Kai $b \geq h$, tai $[VŠM] > [HŠM]$: $\frac{[VŠM]}{[HŠM]} = \frac{k + \sqrt{3}}{1 + k\sqrt{3}} = 1 + \frac{k - 1 + \sqrt{3} - k\sqrt{3}}{1 + k\sqrt{3}} = 1 + \frac{(\sqrt{3} - 1)(1 - k)}{1 + k\sqrt{3}} > 1$.

Kai $k = \sqrt{3} - 1$, tai $[VŠM] = [MJM]$, o kai $k < \sqrt{3} - 1$, tai $[VŠM] > [MJM]$. Tik kai $k \in (\sqrt{3} - 1; 1)$, $[VŠM] < [MJM]$. Todėl stačiakampiuose neapsimoka ieškoti „vertikaliųjų“ ŠM, nes jie, jei ir egzistuoja, niekada nebūna trumpesni už „horizontaliuosius“ ŠM, o kartais net būna ilgesni už MJM. Pakanka surasti „horizontalųjį“ ŠM kuris visada egzistuoja, niekada nebūna ilgesnis už „vertikalųjį“ ŠM ir visada šiek tiek trumpesnis už MJM.

Išnagrinėsime, kada ir kiek Šteinerio medžių turi lygiašonė trapecija.

Kad lygiašonė trapecija, turinti pagrindus $b > a$ ir aukštį h, turėtų horizontalųjį Šteinerio medį (HŠM), būtina ir pakanka, kad būtų tenkinama sąlyga $\frac{b-a}{2}\sqrt{3} \leq h \leq \frac{b+a}{2}\sqrt{3}$. Įrodysime tai (žiūr. 136 „a“ pav.)



136 pav.

Tarkime, jog lygiašonė trapecija ABCD turi HŠM. Tuomet $\angle DAB$ turi būti ne mažesnis už 60° . Todėl $\frac{2h}{b-a} > \sqrt{3}$, iš kur gauname, jog $h > \frac{b-a}{2} \sqrt{3}$. Be to atkarpos EF ilgis $|EF|$ turi būti ne mažesnis už 0. Todėl $\frac{a+b}{2} - \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ} \geq 0$, iš kur $h \leq \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$. Kai $h = \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$, tai taškai E ir F susilieja su kraštinėmis AB ir CD ir HŠM tampa MJM. Taigi, sąlygos $\frac{b-a}{2} \sqrt{3} < h \leq \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$ būtinumas, kad lygiašonė trapecija turėtų HŠM, įrodytas.

Tarkime dabar, kad sąlyga $\frac{b-a}{2} \sqrt{3} < h \leq \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$ yra tenkinama. Tuomet $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{2h}{b-a} > \sqrt{3}$, t. y. $\angle BAD > 60^\circ$. Tai reiškia, jog tiesės AE ir DF, sudarančios su AD kampus, lygius 60° , eis trapecijos viduje ir būtinai susikirs su tiesėmis BE ir CF, sudarančiomis su tiesė BC kampus, lygius 60° , kokiuose tai taškuose E ir F, esančiuose trapecijos ABCD viduje. Kadangi $h \leq \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$, tai taškas E bus kairiau taško F (arba sutaps su juo, kai $h = \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$). Gavome, jog sąlygos $\frac{b-a}{2} \sqrt{3} < h \leq \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$ pilnai pakanka, kad egzistuotu HŠM.

Apskaičiuosime to HŠM ilgį $[HŠM] = 2(|AE| + |BE|) + |EF|$ (žiūr. 136 „a“ pav.)

Kadangi $\angle AER = \angle BEP = 30^\circ$, tai $|AE| = 2|AR|$ ir $|BE| = 2|BP|$, o $|EF| = b - 2|AR| = a - 2|BP| = \frac{a+b}{2} - (|AR| + |BP|)$. Todėl $[HŠM] = 4(|AR| + |BP|) + \frac{a+b}{2} - (|AR| + |BP|) = \frac{a+b}{2} + 3(|AR| + |BP|)$. Kadangi $|AR| = |ER| \operatorname{tg} 30^\circ = |RE| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$; $|BP| = |PE| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$; $|AR| + |BP| = (|RE| + |PE|) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, tai $[HŠM] = \frac{a+b}{2} + h \sqrt{3}$.

Taigi, kai lygiašonės trapecijos aukštinė tenkina sąlygas $\frac{b-a}{2} \sqrt{3} < h \leq \frac{a+b}{2} \sqrt{3}$, tai ji turi HŠM ir to HŠM ilgis $[HŠM] = \frac{a+b}{2} + h \sqrt{3}$.

Surasime būtiną ir pakankamą „vertikalaus“ Šteinerio medžio (VŠM) lygiašonėje trapecijoje egzistavimo sąlygą.

Tarkime, jog lygiašonė trapecija turi VŠM (žiūr. 136 „b“ pav.). Tuomet $\angle BAD > \angle HAD$ ir kampo BAD tangentes yra didesnis už $\frac{\sqrt{3}}{3}$, t. y. $\frac{2h}{b-a} > \frac{\sqrt{3}}{3}$, arba $h > \frac{b-a}{6} \sqrt{3}$.

Be to atkarpos GH ilgis $|GH|$ turi būti ne mažesnis už 0, iš kur išplaukia, jog $|MN| - |HN| - |GM| \geq 0$, arba $h - \frac{b\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{6} \geq 0$. Todėl trapecijos aukštinė h turi tenkinti sąlygą $h \geq \frac{a+b}{6} \sqrt{3}$.

Kadangi kai $a > 0$, visuomet $b+a > b-a$, tai iš sąlygos $h \geq \frac{b+a}{6} \sqrt{3}$ būtinai išplaukia ir sąlyga $h > \frac{b-a}{6} \sqrt{3}$.

Nesunku įrodyti, jog sąlyga $h \geq \frac{a+b}{6}\sqrt{3}$ yra būtina ir pakankama VŠM egzistavimo lygiašonėje trapezijoje sąlyga. Šį įrodymą palieku skaitytojui.

Apskaičiuosime $[VŠM]=2(|AH|+|BG|)+|GH|$ (žiūr. 136 „b“ pav.). Kadangi $|AH|=2|HN|$, $|BG|=2|MG|$, $|GH|=h-(|HN|+|MG|)$, tai $[VŠM]=4(|HN|+|MG|)+h-(|HN|+|MG|)=3(|HN|+|MG|)+h=$
 $=3 \cdot \left(\frac{b\sqrt{3}}{6} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) + h = \frac{b+a}{2}\sqrt{3} + h$.

Taigi, kai lygiašonės trapezijos aukštinė h tenkina sąlygą $h \geq \frac{b+a}{6}\sqrt{3}$, tai toje trapezijoje egzistuoja VŠM ir jo ilgis $[VŠM]=\frac{b+a}{2}\sqrt{3} + h$.

Palyginsime $[HŠM]$ ir $[VŠM]$ ir išvesime sąlygą, kada jie lygūs ar trumpesni vienas už kitą.

Kad $[HŠM]$ būtų ne ilgesnis už $[VŠM]$, turi būti tenkinama sąlyga $\frac{b+a}{2} + h\sqrt{3} \leq \frac{a+b}{2}\sqrt{3} + h$, arba $h(\sqrt{3}-1) \leq \frac{b+a}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Kadangi $\sqrt{3}-1 > 0$, tai gauname, jog, kai $h = \frac{b+a}{2}$, tai $[HŠM]=[VŠM]$; kai $h < \frac{b+a}{2}$, tai $[HŠM] < [VŠM]$, o kai $h > \frac{b+a}{2}$, tai $[HŠM] > [VŠM]$.

Kadangi lygiašonėje trapezijoje (net ir tuo atveju, kai ji „išsigimsta“ į stačiakampį, kvadratą, trikampį ir net atkarpą) $b \geq a$, tai galime įsivesti kintamąjį koeficientą $0 \leq p \leq 1$ ir išreikšti a per b : $a = pb$. Priimsime, kad visais atvejais $b > 0$.

Tuomet $[HŠM]$ egzistavimo sąlygą $\frac{b-a}{2}\sqrt{3} < h \leq \frac{a+b}{2}\sqrt{3}$ galima išreikšti nelygybėmis $\frac{1-p}{2}\sqrt{3} < \frac{h}{b} \leq \frac{1+p}{2}\sqrt{3}$, jo ilgi – lygybe $[HŠM] = b \frac{1+p}{2} + h\sqrt{3}$, o VŠM egzistavimo sąlygą – nelygybe $\frac{h}{b} \geq \frac{1+p}{6}\sqrt{3}$, jo ilgi – lygybe $[VŠM] = b \frac{1+p}{6}\sqrt{3} + h$.

Nesunku išvesti ir $[HŠM]$ ir $[VŠM]$ lygybės sąlygą – lygybę $\frac{h}{b} = \frac{p+1}{2}$.

Norėdami visas tas sąlygas pavaizduoti grafiškai, turime išsiaiškinti santykius tarp jų.

Aišku, kad visais atvejais, kai $p > 0$, žemutinė HŠM egzistavimo riba $\frac{1-p}{2}\sqrt{3}$ yra mažesnė už viršutinę HŠM egzistavimo ribą $\frac{1+p}{2}\sqrt{3}$. Tai reiškia, jog intervalas $\left(\frac{1-p}{2}\sqrt{3}, \frac{1+p}{2}\sqrt{3} \right)$ yra netuščias ir egzistuoja lygiašonės trapezijos, turinčios HŠM.

Aišku taip pat, kad žemutinė VŠM egzistavimo riba $\frac{1+p}{6}\sqrt{3}$ yra mažesnė už viršutinę HŠM egzistavimo ribą. Tai reiškia, jog egzistuoja trapezijos, turinčios du ŠM: ir HŠM ir VŠM.

Ne visai aiškus santykis tarp žemutinių HŠM ir VŠM egzistavimo ribų $\frac{1-p}{2}\sqrt{3}$ ir $\frac{1+p}{6}\sqrt{3}$. Keičiantis p , jos gali tapti lygios bei susikeisti vietomis. Rasime tokią p reikšmę, prie kurios tos ribos tampa lygios: $\frac{1-p}{2}\sqrt{3} = \frac{1+p}{6}\sqrt{3}$, $3(1-p)=1+p$, $2=4p$ $p=\frac{1}{2}$.

Kai $p < \frac{1}{2}$, tai $\frac{1-p}{2}\sqrt{3} > \frac{1+p}{6}\sqrt{3}$, o kai $p > \frac{1}{2}$, tai $\frac{1-p}{2}\sqrt{3} < \frac{1+p}{6}\sqrt{3}$.

Išsiaiškinsime santykį tarp $[HŠM]$ ir $[VŠM]$ lygybės sąlygos $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}$ ir jau minėtųjų ribų.

Aišku, kad $\frac{1+p}{6}\sqrt{3} < \frac{1+p}{2} < \frac{1+p}{2}\sqrt{3}$, t. y., kad [HŠM] ir [VŠM] lygybės linija (tiesė $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}$) yra tarp žemutinės VŠM egzistavimo ribos (tiesės $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{6}\sqrt{3}$) ir viršutinės HŠM egzistavimo ribos (tiesės $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}\sqrt{3}$). Belieka išsiaiškinti tiesės $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}$ santykį su žemutine HŠM egzistavimo riba – tiesė $\frac{h}{b} = \frac{1-p}{2}\sqrt{3}$. Kad [HŠM] ir [VŠM] lygybės tiesė $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}$ būtų ne žemiau žemutinės HŠM egzistavimo ribos, reikia, kad būtų tenkinama nelygybė $\frac{1+p}{2} \geq \frac{1-p}{2}\sqrt{3}$. Spręsdami šią nelygybę, gauname $p(1+\sqrt{3}) \geq \sqrt{3}-1$, iš kur, kadangi $1+\sqrt{3} > 0$, išplaukia, jog $p \geq \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

Reiškia, tiesės $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}$ ir $\frac{h}{b} = \frac{1-p}{2}\sqrt{3}$ kertasi taške $p=2-\sqrt{3} \approx 0,268$ ir, kai $p > 2-\sqrt{3}$, tiesė $\frac{h}{b} = \frac{1+p}{2}$, būdama aukščiau tiesės $\frac{h}{b} = \frac{1-p}{2}\sqrt{3}$, dalija dviejų ŠM egzistavimo sritį (žiūr. 137 pav.) į dvi dalis: žemutinę, kurioje $[HŠM] < [VŠM]$, ir viršutinę, kurioje $[HŠM] > [VŠM]$.

Kaip matyti iš 137 pav., lygiašonės trapecijos gali neturėti nė vieno ŠM (sritis OKMN), turėti tik HŠM (sritis MPN), turėti tik VŠM (sritis KMS ir sritis virš tiesės ST), turėti ir [VŠM] ir [HŠM] (sritis PMST). Tuo atveju, kai lygiašonė trapecija turi du ŠM, gali būti atveju, kai $[HŠM] = [VŠM]$ (atkarpa RU), o taip pat, kai $[HŠM] < [VŠM]$ (sritis PMRU), ir kai $[HŠM] > [VŠM]$ (sritis URST).

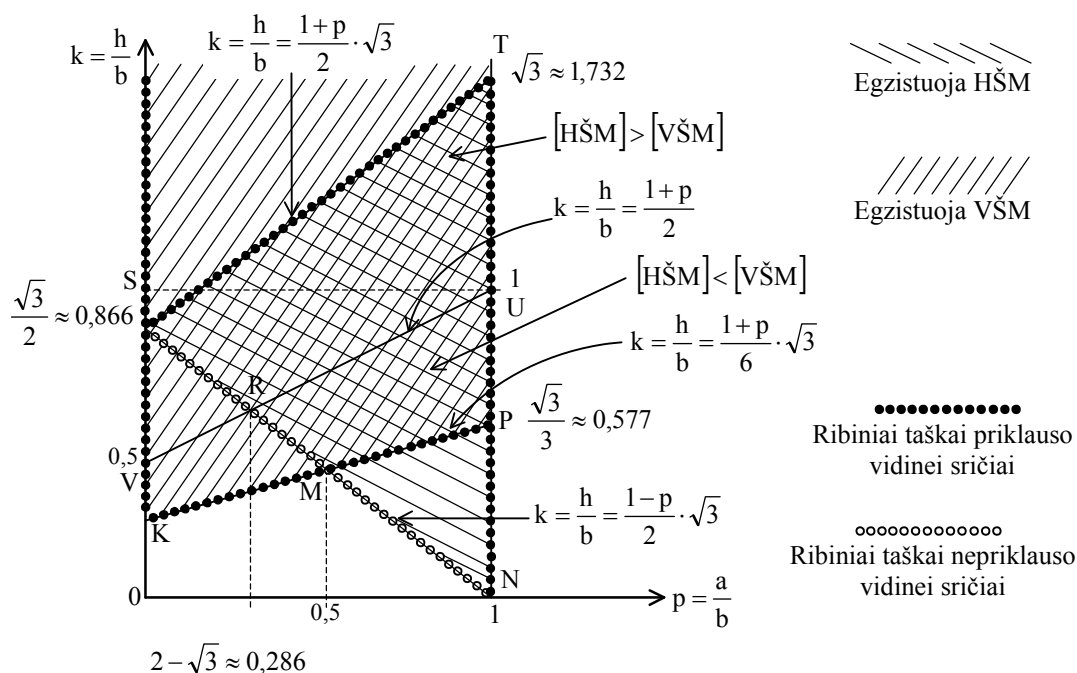
Tiesė $p=1$, einanti per taškus N, P, U, T,... yra stačiakampių sritis, nes ji atitinka lygiašonės „trapecijas“, kurių viršutinis pagrindas a lygus apatiniam pagrindui b.

Tiesė $p=0$, einanti per taškus O, K, V, S,... yra lygiašonių trikampių sritis, nes ji atitinka lygiašonės „trapecijas“, kurių viršutinis pagrindas a=0.

Kadangi stačiakampyje pagal minėtąjį susitarimą aukštinė $h \leq b$ ir $\frac{h}{b} \leq 1$, tai iš 137 pav.

išplaukia, jog stačiakampiai visada turi HŠM, o nuo $k = \frac{h}{b} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ – turi dar ir VŠM, tačiau tuomet, kai egzistuoja VŠM ir HŠM, stačiakampio [HŠM] yra mažesnis už jo [VŠM] ir tik taške U, kuriame $k = \frac{h}{b} = 1$, nes atitinka kvadratą, gauname lygybę $[HŠM] = [VŠM]$. Visa tai atitinka rezultatus, gautus anksčiau, nagrinėjant kvadratą ir stačiakampį. 137 pav. vaizduoja ir tą atvejį, kai stačiakampio aukštinės h ir pagrindo b santykis nebūtų ribojamas 1, t. y., kada būtų nagrinėjami visi galimi atvejai, neapsiribojant jų aibės puse ir neatmetant kitos (simetriškos jai) atvejų aibės pusės. Tuomet gautume, jog stačiakampyje, kol $k = \frac{h}{b} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (žiūr. atkarpą NP 137 pav.) egzistuoja tik vienas ŠM ir tas ŠM yra HŠM. Toliau didinant $k = \frac{h}{b}$, atsiranda VŠM, kuris egzistuoja visoms $k = \frac{h}{b}$ reikšmėms, tenkinančioms sąlygą $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Kai $k > \sqrt{3}$, stačiakampis tampa toks aukštas ir „siauras“, kad jame jau nebegali egzistuoti HŠM ir belieka tik VŠM, kuris išlieka visoms $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$ reikšmėms.

Reikėtų pažymėti, kad lygiašonės trapecijos HŠM ir VŠM ilgių apskaičiavimo formulės $[HŠM] = b\frac{1+p}{2} + h\sqrt{3}$ ir $[VŠM] = b\frac{1+p}{2}\sqrt{3} + h$, kai $p \rightarrow 1$, pereina į stačiakampio formules $[HŠM] = b + h\sqrt{3}$ ir $[VŠM] = b\sqrt{3} + h$, sutampančias su mūsų jau aukščiau gautomis formulėmis (žiūr. 135 pav.).



137 pav.

Kai $k = \frac{h}{b} \rightarrow 1$, tai gauname kvadratą, ir [HŠM] bei [VŠM] formulės pereina į kvadrato [ŠM] formulę $b(1+\sqrt{3})=a(1+\sqrt{3})$. Taigi, stačiakampių (ir tame tarpe kvadrato, buvo galima nenagrinėti atskirai, o gauti visas reikalingas formules, laikant stačiakapius daliniais lygiašonės trapecijos atvejais).

Nagrinėdami 137 pav. tiesę $p=0$, vaizduojančią lygiašonių trikampių sritį, pastebime, kad intervale $0 \leq \frac{h}{b} < \frac{\sqrt{3}}{6}$ lygiašoniai trikampiai neturi nė vieno ŠM. Tai sutampa su aukščiau gautais rezultatais, kad trikampiai, turintys kampą, didesnę negu 120° , negali turėti ŠM. Kai lygiašonio trikampio viršūnės kampas tampa lygus 120° , jo aukštinė h tampa lygi $\frac{b\sqrt{3}}{6}$, kur b – to trikampio pagrindo ilgis, kas sutampa su taško K ordinatė $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Kai $\frac{h}{b} > \frac{\sqrt{3}}{6}$, trikampyje atsiranda ŠM, kuris yra gaunamas iš trapecijos VŠM, kai $a \rightarrow 0$, o kartu ir $p = \frac{a}{b} \rightarrow 0$. Bet kurio lygiašonio trikampio ŠM ilgį galima apskaičiuoti, naudojantis lygiašonės trapecijos [VŠM] formule, įstačius joje vietoj p nulį ir pakeitus h dydžiu kb , kur $k = \frac{h}{b}$.

Pavyzdžiui, taške S, kurio ordinatė $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vaizduojančiame lygiakraštį trikampį, turintį kraštinės, lygias b , ir aukštinę h , lygią $b \frac{\sqrt{3}}{2}$, gauname: $[VŠM] = b \frac{1+p}{2} \sqrt{3} + h = \frac{b}{2} \sqrt{3} + b \frac{\sqrt{3}}{2} = b\sqrt{3}$, kas sutampa su anksčiau išvesta lygiakraščio trikampio ŠM ilgio formule (žiūr. 135 „a“ pav.).

Jei paimtume lygiašonių trikampį, pavaizduotą 135 „b“ pav., kuriame $b=a\sqrt{2}$ ir $h_b = \frac{b}{2}$, iš kur išplaukia, jog $k = \frac{h}{b} = \frac{1}{2}$, tai gautume, kad tą trikampį 137 pav. vaizduoja taškas V. To trikampio ŠM ilgį gautume iš formulės $[VŠM] = b \frac{1+p}{2} \sqrt{3} + h$, įstatę į ją $p=0$, $h = \frac{b}{2}$ ir $b=a\sqrt{2}$: $b \frac{1+p}{2} \sqrt{3} + h =$

$$= \frac{b}{2}\sqrt{3} + \frac{b}{2} = b\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) = a\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \text{ kas sutampa su anksčiau gauta formule.}$$

Kad lygiašonio trikampio ŠM galima gauti iš lygiašonės trapecijos VŠM, mažinant trapecijos pagrindą a ir jos aukštinę h bei nekeičiant b, palieku įsitikinti skaitytojų, modeliuojant tokį procesą, o kartu ir įsitikinti, jog lygiašonio trikampio ŠM negalima gauti iš lygiašonės trapecijos HŠM, nes mažinant kraštinės BC ilgį $|BC|=a$ (žiūr. 136 „a“ pav.), taškai E ir F turės susilieti į vieną tašką anksčiau negu taškai B ir C. Kitaip tariant, lygiašonės trapecijos HŠM išnyks anksčiau, negu mes, mažindami a, iš jos gausime lygiašonį trikampį. Tuo tarpu VŠM išliks, tik jo taškai H ir G (žiūr. 136 „b“ pav.) susilies su taškais B ir C į vieną tašką – lygiašonio trikampio viršūnę.

Nagrinėdami 137 pav., galime pastebėti, kad taškas S, turintis ordinatę $k = \frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir

vaizduojantis lygiakraštį trikampį, yra ypatingas: jis priklauso ne tik sričiai, kurioje egzistuoja lygiašonių trapecijų VŠM, bet ir yra srities NST, kurioje egzistuoja lygiašonių trapecijų HŠM, ribinis taškas, priklausantis atkarpai SN, vaizduojančiai lygiašonės trapecijas, kurių šoniniai kampai prie apatinio pagrindo yra lygūs 60° ir todėl jų HŠM yra išsigimę į MJM, nes jose taškai E ir F (žiūr. 136 „a“ pav.) yra tapę atkarpų AB ir CD taškais. Todėl šiuo atveju, mažinant a iki 0, lygiašonės trapecijos išsigimęs HŠM neišnyks, o atitinkamai sutrumpins b ir lygiagrečiai pačioms sau suartinus atkarpas AB ir DC taip, kad taškai B ir C susilietų į vieną tašką, taps lygiakraščio trikampio MJM. Tuo nesunku

įsitikinti ir formaliai (analiziškai): įstačius į formulę $[HŠM] = b\frac{1+p}{2} + h\sqrt{3}$ vietoj p nulį, o vietoj h –

sandaugą kb, kur $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, gausime $b\frac{1+p}{2} + h\sqrt{3} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\sqrt{3} = \frac{b}{2}(1+3) = 2b$, kas sutampa su lygiakraščio trikampio [MJM].

Panašiai samprotaudami, galėtume padaryti išvadą, kad taške R (žiūr. 137 pav.), turėtume gauti lygybę $[VŠM] = [HŠM] = [MJM]$. Kitaip tariant, taškas R turėtų vaizduoti trapeciją, kuri privalėtų tenkinti šią lygybę.

Patikrinsime šią hipotezę. Taško R abscisė $p = 2 - \sqrt{3}$, o ordinatė $k = \frac{h}{b} = \frac{1-p}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Lygiašonės trapecijos VŠM ilgis tame taške yra $[VŠM] = b\frac{1+p}{2}\sqrt{3} + h = b\frac{1+2-\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} + b\frac{1-2+\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{2}(3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3}) = b\sqrt{3}$. Tos trapecijos išsigimusio HŠM ilgis $[HŠM] = b\frac{1+p}{2} + \sqrt{3}h = b\frac{1+2-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\frac{1-2+\sqrt{3}}{2}b\sqrt{3} = \frac{b}{2}(3-\sqrt{3}-3+3\sqrt{3}) = b\sqrt{3}$. Rasime tos

trapecijos [MJM]. Pradžioje apskaičiuosime jos šoninės kraštinės ilgį $\ell = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(b\frac{1-p}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(b\frac{1-p}{2}\right)^2} = \frac{b(1-p)}{2}\sqrt{3+1} = b(1-p) = b(\sqrt{3}-1). \text{ Kadangi } \sqrt{3}-1 < 1, \text{ tai } \ell < b \text{ ir}$$

$[MJM] = a + 2\ell = pb + 2b(\sqrt{3}-1) = b(2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2) = b\sqrt{3}$. Taigi, tikrai taške R gauname lygybę $[VŠM] = [HŠM] = [MJM]$.

Kad galėtume palyginti [HŠM] ir [VŠM] su [MJM] kituose 137 pav. taškuose, t. y. kitose lygiašonėse trapecijose, išsivesime pagalbinį dydį $s = \frac{\ell}{b}$, kur ℓ – trapecijos šoninės kraštinės ilgis

$$\ell = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{4k^2 + (1-p)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{4k^2 + p^2 - 2p + 1}. \text{ Tuomet } s = \frac{\sqrt{4k^2 + p^2 - 2p + 1}}{2}, \text{ kur}$$

$$k = \frac{h}{b}, p = \frac{a}{b}.$$

Kai $\ell \leq b$, t. y., kai $0 \leq s \leq 1$, tai lygiašonės trapecijos $[MJM] = a + 2\ell = b(p+2s)$, o kai $\ell \geq b$, t. y., kai $s \geq 1$, tai tos trapecijos $[MJM] = a + \ell + b = b(1+p+s)$. Kai $\ell = b$, tai $s = 1$, ir abi [MJM] formulės sutampa: $[MJM] = b(2+p)$.

Panagrinėsime atvejį $s \in [0; 1]$ ir palyginsime $[MJM]$ ir $[H\check{S}M]$, t. y. rasime jų skirtumą ir išsiaiškinsime, kada tas skirtumas $[MJM] - [H\check{S}M]$ yra lygus 0, kada jis yra teigiamas, kada – neigiamas.

$$\text{Iš formulės } s = \frac{\sqrt{4k^2 + (1-p)^2}}{2} \text{ gauname } k = \frac{\sqrt{4s^2 - (1-p)^2}}{2}. \text{ Todėl } [H\check{S}M] = b \frac{1+p}{2} + h\sqrt{3} = b \left(\frac{1+p}{2} + k\sqrt{3} \right) = \frac{b}{2} (1+p + 2k\sqrt{3}) = \frac{b}{2} \left(1+p + \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2} \right).$$

$$[MJM] - [H\check{S}M] = b(p+2s) - \frac{b}{2} \left(1+p + \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2} \right) = \frac{b}{2} \left(p+4s-1 - \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2} \right).$$

Kai $p+4s-1 = \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2}$, tai $[MJM] = [H\check{S}M]$, kai $p+4s-1 > \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2}$, tai $[MJM] > [H\check{S}M]$, o kai $p+4s-1 < \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2}$, tai $[MJM] < [H\check{S}M]$.

Pradžioje išspręsimė nelygybę $p+4s-1 \geq \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2}$, t. y. rasime sąryšį tarp s ir p , kuris tenkintų šią nelygybę.

Abi šios nelygybės pusės yra teigiamos. Dešinioji yra teigiama todėl, kad ji lygi $2k\sqrt{3} = 2\frac{h}{b}\sqrt{3}$, kur h ir b – teigiami dydžiai. Kairioji yra teigiama todėl, kad $p+4s-1 = \left(\frac{a}{b} + 4 \cdot \frac{\ell}{b} - 1 \right) =$

$= \frac{4}{b} \left(\ell - \frac{b-a}{4} \right)$, kur $\ell = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + h^2} > \frac{b-a}{2}$, ir todėl $\ell - \frac{b-a}{4} > 0$. Taigi, pakėlus abi šios nelygybės puses kvadratu, nelygybės ženklas nepasikeis.

Gauname $p^2 + 8sp - 2p + 16s^2 - 8s + 1 \geq 12s^2 - 3(1-p)^2$, arba $(1-p)^2 + 16s^2 + 8sp - 8s \geq 12s^2 - 3(1-p)^2$. Iš šios nelygybės išplaunkia nelygybę $4(1-p)^2 - 8s(1-p) + 4s^2 \geq 0$, arba $(1-p)^2 - 2s(1-p) + s^2 \geq 0$.

Taigi, gavome, jog $[MJM] = [H\check{S}M]$, kai $(1-p-s)^2 = 0$, t. y., kai $s = 1-p$, o visais kitais atvejais $[MJM] > [H\check{S}M]$. Atvirkščios nelygybės intervale $s \in [0; 1]$, pasirodo, būti negali.

Kai $s = 1-p$, tai $k = \frac{\sqrt{4s^2 - (1-p)^2}}{2} = \frac{1-p}{2}\sqrt{3}$, o tai reiškia, jog lygiašonės trapecijos, kurių $[H\check{S}M] = [MJM]$, priklauso $H\check{S}M$ egzistavimo srities NST (žiūr. 137 pav.) žemutinei ribai NS, kurioje, kaip jau buvo minėta, $H\check{S}M$ išsigimsta į MJM ir todėl $[H\check{S}M]$ tampa lygus $[MJM]$.

Tai patvirtina ir tiesioginiai paskaičiavimai: kai $s = 1-p$, tai $[MJM] = b(p+2s) = b(2-p) = 2b-a$, o $[H\check{S}M] = \frac{b}{2} (1+p + 2k\sqrt{3}) = \frac{b}{2} (1+p + 3-3p) = b(2-p) = 2b-a$.

Kai $s > 1-p$, tai, didėjant s , didėja ir $[MJM] = b(p+2s)$ ir $[H\check{S}M] = \frac{b}{2} \left(1+p + \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2} \right)$, tačiau $[MJM]$ didėja sparčiau negu $[H\check{S}M]$, nes, kai $s > 1-p$, tai $\frac{d[MJM]}{ds} > \frac{d[H\check{S}M]}{ds}$. Todėl skirtumas $[MJM] - [H\check{S}M]$ tampa teigiamas ir didėja, didėjant s .

$$\text{Pavyzdžiui, kai } s=1, \text{ tai } [MJM] - [H\check{S}M] = b(p+2) - \frac{b}{2} \left(1+p + \sqrt{12-3(1-p)^2} \right) = \frac{b}{2} \left(p+3 - \sqrt{9+6p-3p^2} \right) = \frac{b}{2} \left(p+3 - \sqrt{(p+3)^2 - 4p^2} \right).$$

Gautas rezultatas rodo, jog $[MJM] > [H\check{S}M]$, kai $p > 0$ ir $[MJM] = [H\check{S}M]$, kai $p = 0$.

Taigi, kai $s \in [0; 1-p]$, tai $H\check{S}M$ neegzistuoja, kai $s = 1-p$, tai $[H\check{S}M] = [MJM]$, o kai $s \in (1-p; 1]$, tai $[H\check{S}M] < [MJM]$. Kitaip tariant, kai $0 \leq \ell < b-a$, tai lygiašonės trapecijos neturi $H\check{S}M$, kai $\ell = b-a$, tai tos trapecijos turi išsigimusį $H\check{S}M$, kuris kartu yra ir jų MJM , o kai $b-a < \ell \leq b$, tai $[H\check{S}M] < [MJM]$.

Analogiškai galima išsiaiškinti santykį tarp $[H\check{S}M]$ ir $[MJM]$, kai $s > 1$ ir $[MJM] = b(1+p+s)$, o taip pat sąryšį tarp $[V\check{S}M]$ ir $[MJM]$ įvairiose p ir k reikšmių srityse (žiūr. 137 pav.). Palieku tai skaitytojui savarankiškam darbui. **Toks darbas padės jam geriau įsisavinti sisteminės analizės, apie kurią bus kalbama antroje šios mokymo priemonės dalyje, esmę.** Juk lygiašonės trapecijos Šteinerio medžių egzistavimo sąlygų nagrinėjimas čia buvo pateiktas ne todėl, kad mums būtų taip jau svarbu žinoti, kada lygiašonė trapecija kokią Šteinerio medį turi ir kada jo ji neturi, bet todėl, kad **vėliau tuo nagrinėjimu būtų galima pasinaudoti kaip iliustracija, aiškinantis tokias sisteminės analizės**

savybes kaip jos pilnumas (t. y. visų galimų atvejų peržiūra) **bei 1.9.1.2. skyrelyje jau minėto atotyčio principo taikymą.** Šį principą 1913 m. suformulavo N. Boras atominės fizikos reiškiniams, ir iš to principo išplaukia, kad Niutono mechanikos dėsnius galima interpretuoti kaip ribinius reliatyvistinės kvantinės fizikos dėsnių atvejus. Tačiau šių eilučių autoriaus nuomone, **atotyčio principą galima laikyti bendrasisteminio principu ir taikyti ne tik atominėje fizikoje.** Tuo tikslu ir buvo parodyta, kaip iš lygiašonės trapecijos [HŠM] ir [VŠM] bei [MJM] apskaičiavimo formulių galima gauti analogiškas formules stačiakampiams bei lygiašoniams trikampiams, interpretuojant juos kaip ribinius lygiašonių trapecijų atvejus. Vėliau (1.13. ir 1.16. skyreliuose) mes turėsime progos įsitikinti, kad **jei kokia nors teorija, hipotezė ar formulė, išreiškianti kokį nors dėsni, netenkina atotyčio principo reikalavimų, tai ji yra gana abejotina ar net klaidinga.** Taigi, sisteminėje analizėje atotyčio principu galima naudotis kaip veiksmingu „instrumentu“, tikrinant įvairias hipotezes bei modelius.

Atsižvelgdamas į sisteminės analizės įgūdžių ugdymo svarbą, rekomenduočiau skaitytojui savarankiškai įrodyti, jog 137 pav. pavaizduotoje srityje OKMN, kurią apibrėžia predikatas

$[(0 \leq p \leq 0,5) \wedge (0 \leq s \leq \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{p}{3} + \frac{p^2}{3}})] \vee [(0,5 \leq p \leq 1) \wedge (0 \leq s \leq 1-p)]$, trumpiausias medis, jungiantis visas

keturias lygiašonės trapecijos viršūnes, yra [MJM] = $b(p+2s)$. Taip pat rekomenduočiau įrodyti, kad

srityje NRU, kurią apibrėžia predikatas $(2 - \sqrt{3} \leq p \leq 1) \wedge (1-p \leq s \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{p^2}{2}})$, trumpiausias medis,

jungiantis visas keturias lygiašonės trapecijos viršūnes, yra $[HŠM] = \frac{b}{2} \left(1 + p + \sqrt{12s^2 - 3(1-p)^2} \right)$.

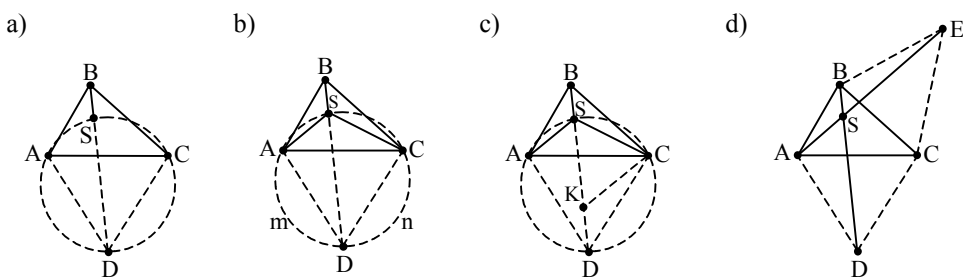
Panašią analizę būtų naudinga pratęsti ir visų kitų 137 pav. pavaizduotų sričių atžvilgiu.

Mes iki šiol ieškojome Šteinerio taškų ir sudarinėjome Šteinerio medžius simetriškose figūrose, kuomet būdavo labai lengva surasti kampus tarp Šteinerio medžių šakų ir tų figūrų kraštinių. **O kaip surasti Šteinerio tašką bet kokiame trikampyje,** kurio nė vienas jo kampų neviršija 120° , t. y., kai Šteinerio taškas tokiame trikampyje turėtų egzistuoti?

Gana paprastą tokio taško radimo procedūrą dar XVII a. pirmojoje pusėje pasiūlė Galilėjaus mokinys italų fizikas ir matematikas E. Toričelis (E. Torricelli). Aprašysiu šią procedūrą, pavadindamas ją **Toričelio procedūra.**

Tarkime, jog turime trikampį ABC, kurio bet kuris kampas nėra didesnis už 120° (žiūr. 138 „a“ pav.).

Pasirenkame bet kurią to trikampio kraštinę (pavyzdžiui AC) ir sudarome lygiakraštį trikampį ADC. Apibrėžiame apskritimą aplink tą trikampį ir sujungiame taškus B ir D tiese. Tos tiesės susikirtimo taškas S su apskritimo lanku trikampyje ABC ir yra to trikampio Šteinerio taškas. Įrodysiu tai.



138 pav.

Tuo tikslu sujungsiau tašką S tiesiomis atkarpomis su trikampio ABC viršūnėmis (žiūr. 138 „b“ pav.). $\angle ASD = \angle ACD$, nes abu šie kampai remiasi į tą patį apskritimo lanką AmD. Kadangi $\angle ACD = 60^\circ$, tai ir $\angle ASD = 60^\circ$. Analogiškai gauname, kad $\angle DSC = 60^\circ$. Todėl $\angle ASC = \angle ASD + \angle DSC = 120^\circ$. Kadangi $\angle ASB + \angle ASD = 180^\circ$, tai $\angle ASB = 120^\circ$. Analogiškai gauname, kad ir $\angle CSB = 120^\circ$. Taigi, taškas S – trikampio ABC Šteinerio taškas.

Įrodysiu dabar, kad Šteinerio medžio ilgis yra lygus atkarpos BD ilgiui, t. y. įrodysiu, kad $|BD| = |AS| + |BS| + |CS|$. Tuo tikslu atkarpoje SD atidėsiu atkarpą SK, kad $|SK| = |SC|$ (žiūr. 138 „c“ pav.). Gausime lygiašonį trikampį KSC. Kadangi $\angle KSC = 60^\circ$, tai lygiašoniame $\triangle KSC$ kampai $\angle SKC = \angle SCK = 60^\circ$, t. y. $\triangle KSC$ – lygiakraštis trikampis ir $|KC| = |SC|$.

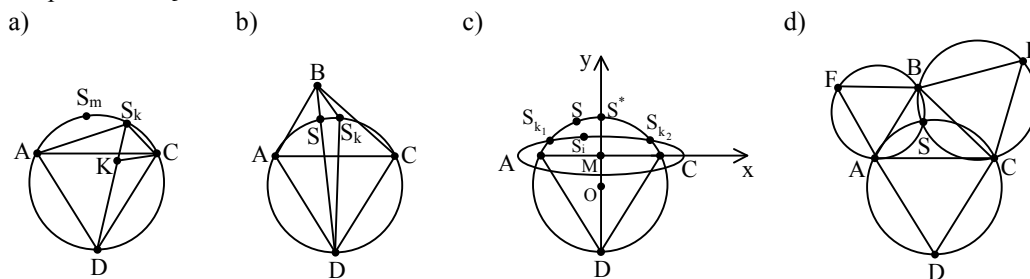
Nagrinėdami 138 „c“ pav., gauname: 1) $\angle DKC = 180^\circ - \angle CKS = 120^\circ$; 2) $\angle SCA = \angle SCK - \angle ACK = 60^\circ - \angle ACK$; 3) $\angle KCD = \angle ACD - \angle ACK = 60^\circ - \angle ACK$. Todėl $\angle SCA = \angle KCD$.

Kadangi $\triangle ASC$ ir $\triangle DKS$ turi po vienodą kraštinę ir du atitinkamai lygius kampus prie jos, tai tie trikampiai yra lygūs ir $|AS|=|DK|$. Todėl $|BD|=|DK|+|KS|+|SB|=|AS|+|SC|+|SB|$, ką ir reikėjo įrodyti.

Galima buvo ir nebrėžti apskritimo, o sudaryti du lygiakraščius trikampius $\triangle ADC$ ir $\triangle BEC$ (kaip parodyta 138 „d“ pav.) ir sujungti tų trikampių viršūnes D ir E tiesėmis su $\triangle ABC$ viršūnėmis B ir A. Tų tiesių susikirtimo taškas S ir bus $\triangle ABC$ Šteinerio taškas. Šio fakto įrodymą palieku skaitytojui.

Dabar, kai jau išmokome sudaryti ŠM bet kokiam trikampiui, neturinčiam kampų, didesnių už 120° , belieka atsakyti į vieną gana sudėtingą klausimą: **kaip įrodyti, kad Šteinerio medis tokiame trikampyje tikrai yra pats trumpiausias medis, jungiantis visas tris to trikampio viršūnes?** Lygiakraščiame trikampyje tai įrodyti visai nesunku, tačiau tas įrodymas bet kokiame trikampyje, neturinčiame kampų nemažesnių kaip 120° , yra žymiai sudėtingesnis. Atrodo, jog turėtų egzistuoti paprastesnis (negu čia pateikiamas) įrodymas, tačiau man jo rasti kol kas nepavyko. Galbūt, tai padaryti pavyks skaitytojui. Įrodymą suskaidysiu į penkių teoremų įrodymus.

Teorema Nr. 1. Lygiakraščio trikampio viršūnės atstumas iki aplink tą trikampį apibrėžto apskritimo lanko, į kurį remiasi tos viršūnės kampas, bet kurio taško yra lygus to taško atstumui iki kitų trikampio viršūnių sumai.



139 pav.

Tarkime, jog turime lygiakraštį trikampį ACD . Aplink jį apibrėšime apskritimą (žiūr. 139 „a“ pav.)

Pasirinksime bet kurią to trikampio viršūnę (pavyzdžiui, D) ir apskritimo lanką, į kurį remiasi tos viršūnės kampas ADC , paimsime bet kokią tašką (pavyzdžiui S_k). Sujungsime tą tašką tiesiomis atkarpomis AS_k , CS_k ir DS_k su visomis trimis to trikampio viršūnėmis. Teorema Nr.1. teigia, jog $|DS_k|=|AS_k|+|CS_k|$. Jos įrodymą pradėsime nuo to, kad atkarpoje S_kD atidėsime tašką K taip, kad $|S_kK|=|S_kC|$. Panašiai, kaip jau darėme, nagrinėdami Toričelio procedūrą, įrodysime, kad $\triangle S_kKC$ yra lygiakraštis ir kad $\triangle CKD=\triangle CS_kA$, iš kur ir išplaukia lygybė, kurią reikėjo įrodyti.

Galima buvo paimti bet kurį lanko AS_kC tašką, pavyzdžiui, tašką S_m (žiūr. 139 „a“ pav.). Atkarpos $|DS_m|$ ilgis gali būti jau kitoks negu $|DS_k|$, tačiau tuomet kitokie bus ir atkarpų $|S_mA|$ ir $|S_mC|$ ilgiai, o lygybė $|DS_m|=|S_mA|+|S_mC|$ išliks.

Teorema Nr. 2. Lanko ASC , kur S yra $\triangle ABC$ Šteinerio taškas, bet kurio taško S_k , nesutampančio su Šteinerio tašku S, atstumų suma iki $\triangle ABC$ viršūnių A, B ir C yra didesnė negu Šteinerio taško S atstumų suma iki tų viršūnių.

Naudodamiesi Toričelio procedūra, surasime $\triangle ABC$ Šteinerio tašką S ir lanką ASC paimsime tašką S_k , nesutampančią su S (žiūr. 139 „b“ pav.). Teorema Nr.2. teigia, jog $|AS_k|+|BS_k|+|CS_k|>|AS|+|BS|+|CS|$. Įrodysime tai.

Iš teoremos Nr.1. išplaukia, jog $|AS_k|+|CS_k|=|DS_k|$ ir $|AS|+|CS|=|DS|$. Tuomet $|AS_k|+|CS_k|+|BS_k|=|DS_k|+|BS_k|$, o $|AS|+|CS|+|BS|=|DS|+|BS|=|DB|$. Kadangi tiesės DB ilgis yra mažesnis negu laužtinės DS_kB , tai iš to ir išplaukia nelygybė, kurią reikėjo įrodyti.

Įrodę, kad lanką ASC nėra taškų, kurių atstumų suma iki trikampio ABC viršūnių būtų trumpesnė ar lygi Šteinerio taško S atstumų sumai, pereisime prie skritulio segmento ASC vidinių taškų S_i nagrinėjimo.

Teorema Nr. 3. Jei per bet kurį segmento ASC vidinį tašką S_i nubrėžtume elipsę taip, kad tos elipsės židiniai būtų taškai A ir C (žiūr. 139 „c“ pav.), tai tos elipsės viršutinio lanko susikirtimo su apskritimo lanku ASC taškai S_{k1} ir S_{k2} bus nutolę nuo taško D toliau negu visi kiti tos elipsės viršutinio lanko taškai.

Šios teoremos įrodymui pravesime abscisių x ašį, sutampančią su tiese AC. Iš atkarpos AC vidurio taško M iškelsime statmenį lanko ASC (kur S –Šteinerio taškas) link. Priimsime šį statmenį teigiamąjį ordinačių y ašimi, o to statmens susikirtimo su abscisių x ašimi tašką M – dekartinių koordinačių sistemos centru. Atstumą $|MA|=|MC|$ priimsime lygų c, t. y. priimsime, jog $|AC|=|AD|=|DC|=2c$.

Tuomet taško A koordinatės bus $x_A=-c$, $y_A=0$, taško C koordinatės $x_C=c$, o $y_C=0$, taško D koordinatės $x_D=0$, $y_D=-c\sqrt{3}$, apskritimo, apibrėžto aplink lygiakraštį $\triangle ADC$, centro O koordinatės $x_O=0$, $y_O=-c\frac{\sqrt{3}}{3}$, ordinačių ašies susikirtimo su apskritimo lanku ASC taško S^* koordinatės $x_{S^*}=0$, $y_{S^*}=c\frac{\sqrt{3}}{3}$, apskritimo spindulio r ilgis $|OA|=|OC|=|OD|=|OS|=|OS^*|=|OS_{k_1}|=|OS_{k_2}|=\frac{2c\sqrt{3}}{3}$.

Rasime elipsės, turinčios židinius taškuose A ir C bei kertančios skritulio segmento ASC vidinį tašką S_i (žiūr. 139 „c“ pav.), lygties $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ koeficientų a ir b reikšmes. Iš elipsės apibrėžimo išplaukia, jog $|AS_i|+|CS_i|=2a=\text{const}$ bet kuriam elipsės taškui (S_i, S_{k_1}, S_{k_2} ir t. t.). Todėl $a=\frac{|AS_i|+|CS_i|}{2}=\frac{|AS_{k_1}|+|CS_{k_1}|}{2}=\frac{|AS_{k_2}|+|CS_{k_2}|}{2}$. Koeficiento b reikšmę galime rasti iš elipsę charakterizuojančios lygybės $b^2=a^2-c^2$.

Apibrėžto aplink $\triangle ACD$ apskritimo lygtį gausime, įstatę į lygtį $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$ koordinatės x_o, y_o ir spindulio r reikšmes: $x^2+\left(y+\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{2c\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4c^2}{3}$.

Žinodami elipsės ir apskritimo lygtis, galime rasti ir jų susikirtimo taškų koordinates. Pavyzdžiui, taško S_{k_1} (žiūr. 139 „c“ pav.) koordinatės yra tokios: $x_{S_{k_2}}=\frac{a}{bc}\sqrt{a^2-4b^2}$, $y_{S_{k_2}}=\frac{b^2\sqrt{3}}{c}$. Taško S_{k_1} koordinatės: $x_{S_{k_1}}=-x_{S_{k_2}}$, $y_{S_{k_1}}=y_{S_{k_2}}$.

Rasime atstumo nuo taško D iki elipsės viršutinio lanko bet kurio taško S_i priklausomybę nuo to taško ordinatės y_{S_i} : $|DS_i|^2=(x_{S_i}-x_D)^2+(y_{S_i}-y_D)^2=(x_{S_i}-0)^2+(y_{S_i}+c\sqrt{3})^2=x_{S_i}^2+y_{S_i}^2+2cy_{S_i}\sqrt{3}+3c^2$. Kadangi $\frac{x_{S_i}^2}{a^2}+\frac{y_{S_i}^2}{b^2}=1$, tai $x_{S_i}^2=a^2\left(1-\frac{y_{S_i}^2}{b^2}\right)$, iš kur $|DS_i|^2=a^2+y_{S_i}^2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)+2cy_{S_i}\sqrt{3}+3c^2=-\frac{c^2}{b^2}y_{S_i}^2+2cy_{S_i}\sqrt{3}+a^2+3c^2$.

Diferencijuodami šią lygybę, galime rasti $\frac{d|S_iD|}{dy_{S_i}}$. Gauname $2|S_iD|\frac{d|S_iD|}{dy_{S_i}}=-2\frac{c^2}{b^2}y_{S_i}+2c\sqrt{3}$, iš kur $\frac{d|S_iD|}{dy_{S_i}}=\frac{c}{|S_iD|}\left(\sqrt{3}-\frac{c}{b^2}y_{S_i}\right)$.

Kai $y_{S_i}=\frac{b^2\sqrt{3}}{c}$, tai $\frac{d|S_iD|}{dy_{S_i}}=0$. Kadangi $\frac{d^2|S_iD|}{dy_{S_i}^2}=-\frac{c^2}{b^2|S_iD|}<0$, tai taškuose, kuriuose $y_{S_i}=\frac{b^2\sqrt{3}}{c}$, atstumas $|S_iD|$ pasiekia maksimumą.

O tokias ordinautes, kaip jau esame apskaičiavę, turi apskritimo ir elipsės viršūnių lankų susikirtimo taškai S_{k_1} ir S_{k_2} . Tai ir įrodo teoremos Nr.3 teiginį, jog taškai S_{k_1} ir S_{k_2} yra labiausiai nutolę nuo taško D elipsės taškai.

Teorema Nr. 4. Bet kuriam vidinio skritulio segmento ASC taškui S_i galioja nelygybė $|AS_i|+|BS_i|+|CS_i|>|AS|+|BS|+|CS|$, kur S – trikampio ABC Šteinerio taškas.

Šios teoremos įrodymas susideda iš dešimties žingsnių:

1) nubrėžiame elipsę per tašką S_i , turinčią židinius taškuose A ir C, kaip tai darėme įrodinėdami teoremą Nr.3 (žiūr. 139 „c“ pav.);

2) randame elipsės ir apskritimo viršūnių lankų susikirtimo taškus S_{k_1} ir S_{k_2} ;

3) $|AS_i|+|CS_i|=|AS_{k_1}|+|CS_{k_1}|$, kadangi taškai S_i ir S_{k_1} priklauso tai pačiai elipsei;

4) $|AS_{k_1}|+|CS_{k_1}|=|DS_{k_1}|$, nes taškas S_{k_1} priklauso apskritimo lankui ASC ir jam galima taikyti teoremą Nr.1;

5) $|DS_i|+|S_iB|\geq|DS_i|+|SB|$, nes laužtinė DS_iB turi būti ilgesnė už tiesę DB ; lygybės ženklas atsiranda todėl, kad vidinis taškas S_i gali gulėti ir ant tiesės DS_i , kur S – Šteinerio taškas;

6) $|DS_k|>|DS_i|$, nes S_i – elipsės taškas, esantis vidiniu segmento ASC tašku, todėl negalintis sutapti su elipsės tašku S_k , priklausančiu apskritimo lankui, o tuomet iš teoremos Nr.3 išplaukia nelygybė $|DS_k|>|DS_i|$;

7) ketvirtajame šio įrodymo žingsnyje mes buvome gavę, jog $|DS_k|=|AS_k|+|CS_k|$, o trečiajame žingsnyje, kad $|AS_k|+|CS_k|=|AS_i|+|CS_i|$, todėl iš nelygybės, gautos šeštajame žingsnyje, išplaukia: $|AS_i|+|CS_i|>|DS_i|$;

8) iš nelygybės $|AS_i|+|CS_i|>|DS_i|$ išplaukia $|AS_i|+|CS_i|+|BS_i|>|DS_i|+|BS_i|$;

9) kadangi $|DS_i|+|BS_i|\geq|DS_i|+|SB|$ (žiūr. penktąjį žingsnį), tai iš aštuntojo žingsnio nelygybės gauname $|AS_i|+|CS_i|+|BS_i|>|DS_i|+|SB|$;

10) kadangi $|DS|=|AS|+|CS|$ (žiūr. teoremą Nr.1), tai $|AS_i|+|BS_i|+|CS_i|>|AS|+|BS|+|SC|$, ką ir reikėjo įrodyti.

Taigi, Šteinerio medis yra trumpesnis už bet kurį kitą medį, jungiantį trikampio ABC , neturinčio kampų, didesnių už 120° , viršūnes bet kuriuo atveju: ir kai medžio centru pasirenkami taškai segmento ASC viduje, ir kai jie pasirenkami ant jo ribos. Kai taškas S_i pasirenkamas ant tiesės AC , tai elipsė išsigimsta į atkarpą AC , o taškais S_{k_1} ir S_{k_2} tampa taškai A ir C . Teorema Nr.3 galioja ir šiuo atveju, kai S_i guli ant atkarpos AC ir yra jos vidinis taškas, nes $DA=DC=2c>DS_i$. Todėl galioja ir teorema Nr.4.

Belieka įrodyti, kad bet koks medis trikampyje, jungiantis trikampio viršūnes su trikampio vidiniu tašku, esančiu ne tik segmente ASC , bet ir virš lanko ASC , yra ilgesnis už Šteinerio medį.

Teorema Nr. 5. Kiekvieną tašką S_i , priklausančią trikampio ABC vidui arba jo kraštinei ir nesutampantį su Šteinerio tašku S , galime laikyti nors vieno iš trijų segmentų ASC , ASB ir CSB vidiniu tašku (žiūr. 139 „d“ pav.).

Šios teoremos įrodymas susideda iš keturių žingsnių:

1) taške S visų trijų apskritimų lankai susikerta ir gaunami kampai $\angle ASC=\angle CSB=\angle BSA=120^\circ$ bei nepersidengiantys trikampiai ASC , CSB ir BSA , padengiantys visą trikampio ABC plotą;

2) bet koks taškas S_i , priklausantis trikampiui ABC (jo kraštinėms ar jo vidui), būtinai patenka nors į vieną iš trikampių ASC , CSB ir BSA ;

3) tarkime, kad taškas S_i , nesutampantis su Šteinerio tašku S , patenka į trikampį CSB ; tuomet jis būtinai bus segmento CSB vidiniu tašku S_i (žiūr. 139 „d“ pav.).

4) tuomet iš teoremos Nr.4 išplaukia, jog $|AS_i|+|BS_i|+|CS_i|>|AS|+|BS|+|CS|$; panašią nelygybę gautume ir tuo atveju, kai taškas S_i būtų patekęs į kurį nors kitą trikampį (į jo vidų ar kraštinę).

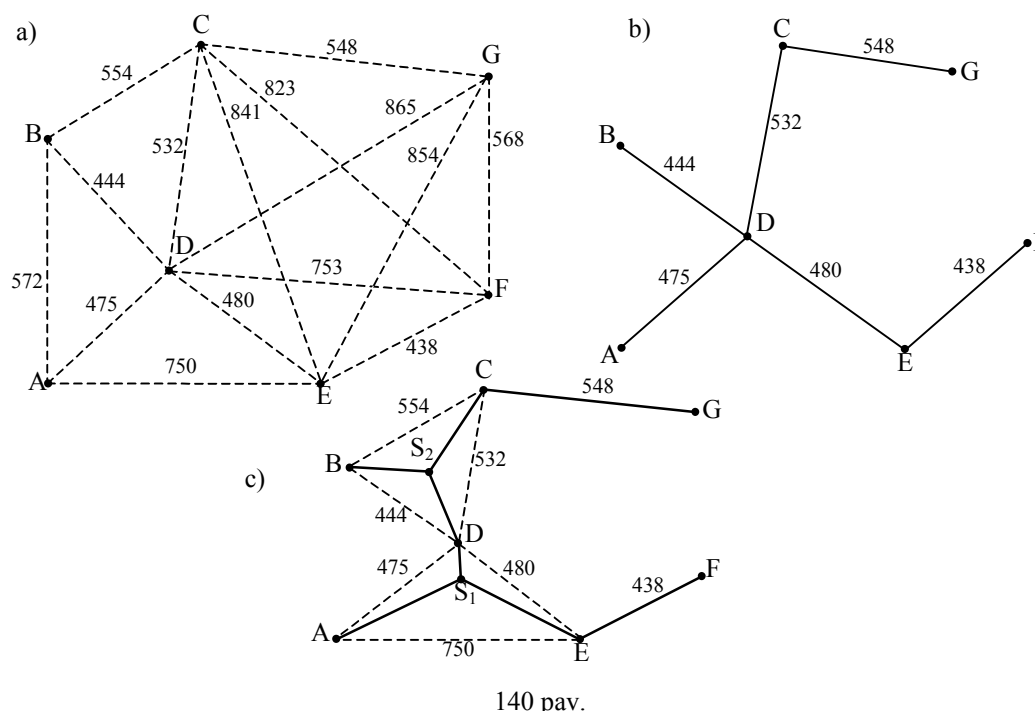
Taigi, bet kuriam trikampio ABC taškui S_i , nesutampančiam su Šteinerio tašku S , teisinga nelygybė $|AS_i|+|BS_i|+|CS_i|>|AS|+|BS|+|CS|$, t. y. **Šteinerio medis bet kuriame trikampyje, neturinčiame kampų, mažesnių už 120° , yra trumpiausias medis, jungiantis visas tris trikampio viršūnes.**

Naudodamiesi panašiais metodais, galime įrodyti, kad Šteinerio medis kvadrato pavaizduotas 134 „c“ ir 134 „d“ pav., taip pat yra pats trumpiausias medis iš visų galimų medžių, jungiančių visas keturias kvadrato viršūnes.

Ieškodami trumpiausių medžių, jungiančių n mazgų, susiduriame su gana sudėtinga problema: didėjant mazgų (viršūnių) skaičiui n , galimų Šteinerio medžių skaičius labai sparčiai didėja. Pavyzdžiui, kai $n=7$, galimų įvairių Šteinerio medžių, kuriuos reikėtų peržiūrėti, kad išsirinktum trumpiausią, gali būti jau tūkstančiai, o kai $n=10$ – milijonai. Kai $n=20$, peržiūrėtinų Šteinerio medžių skaičius matuojamas jau milijardais, ir net moderniausioji kompiuterinė technika tokioje situacijoje padėti jau nebegali.

Tačiau sprendžiant praktinius uždavinius galima pasitenkinti sprendiniu, pakankamai artimu optimaliam, ir nebūtina perrinkinėti milijonus bei milijardus variantų. Pavyzdžiui, vietoj to, kad ieškotume minimalaus Šteinerio medžio, galima surasti MJM, ką, naudojantis Kruskalo algoritmu, galima padaryti gana greitai, net esant gana dideliame mazgų skaičiui n . Tai, žinoma, dažniausiai bus ne pats trumpiausias medis, tačiau net blogiausiu atveju, kaip 1990 m. įrodė F.Vangas (F.Hwang) ir Ding Žu Du (Ding – Zhu Du), tokio sprendinio skirtumas, lyginant su pačiu trumpiausiu medžiu, niekada nebus didesnis už 13,4%, o dažniausiai jis neviršys net 5%. Iš kur atsiranda skaičius 13,4%, mes nesunkiai suvoksime, prisiminę, kad lygiakraščio trikampio [ŠM] yra 13,4% trumpesnis už to trikampio [MJM]. Ir tai yra pati didžiausia ekonomija, kurią galime gauti, pereidami nuo [MJM] prie [ŠM].

Suradę MJM, mes galime gautąjį sprendimą šiek tiek pagerinti, įvesdami Šteinerio taškus kai kurių MJM kampų, mažesnių nei 120° , viduje, kaip tai parodyta 140 pav.



Pradžioje iš duotojo tinklo (žūr. 140 „a“ pav.), naudodamiesi Kruskalo algoritmu, gauname to tinklo MJM (žūr. 140 „b“ pav.), kurio ilgis 2917 vienetų. Po to trikampiuose ADE ir BDC įvedame Šteinerio taškus S_1 ir S_2 ir tokiu būdu gauname vieną iš galimų Šteinerio medžių, kurio ilgis – 2809 vienetų. Pereidami nuo MJM prie ŠM šiuo atveju sutaupome apie 3,7% medžio ilgio. Šis pavyzdėlis paimtas iš knygos [109], kurioje pasakyta, kad, pasirodo, šis ŠM yra pats trumpiausias medis iš visų galimų. Tuo buvo įsitikinta, atlikus kompiuteriu kelis tūkstančius galimų Šteinerio medžių palyginimą. Tačiau, kaip matėme, šį Šteinerio medį mes gavome gana greitai, vadovaudamiesi paprastais samprotavimais, kad trikampiuose, neturinčiuose kampų, didesnių nei 120° bei lygių 120° , perėjimas nuo MJM prie ŠM, leidžia sutrumpinti medžio ilgį ir tuo daugiau, kuo trikampis artimesnis lygiakraščiu. Dauguma studentų, kuriems šių eilučių autorius buvo uždavęs šį trumpiausio jungiančio medžio paieškos uždavinį, surado kaip tik šį sprendinį, pateikdami jį kaip „pakankamai artimą optimaliam“, nežinodami, kad šis sprendinys ir yra optimalus sprendinys. Tūkstančių galimų šiuo atveju Šteinerio medžių variantų parinkimas ir palyginimas, jei jį ir būtume įvykdę, nebūtų leidęs sutrumpinti duotąsias septynias viršūnes jungiantį medį, o būtų suteikęs tik žinojimą, kad geresnių sprendinių nėra. Ar visada apsimoka taip brangiai mokėti už vien tik tokį žinojimą? Todėl praktikoje gana dažnai apsiribojama pirmuoju gautu pakankamai geru sprendiniu, toliau nebeieškant „kupetoje šieno auksinės adatos“, kurios gal ir iš viso toje kupetoje nėra (kaip šiuo atveju).

Jei nagrinėjamu atvejų (žiūr. 140 pav.) būtų apsiriboję MJM ir nebūtume išvedę tų dviejų Šteinerio taškų S_1 ir S_2 , tai net ir tuo atveju būtume ne taip jau toli nuo optimalaus sprendinio, nes šiuo atveju optimalus ŠM skiriasi nuo MJM tik apie 3,7%.

1.9.2.14. Oilerio ciklu bei kelių duotoje struktūroje radimo operacija

Ši skyrelį pradėsime nuo uždavinio, kurio sprendimas davė pradžią grafų teorijai.

XVIII a. pradžioje Karaliaučiaus miestą Priegliaus upė dalijo į keturias dalis: dvi salas A ir B bei į dešinią ir kairią krantus D ir K. Tas miesto dalis jungė septyni tiltai (žiūr. 141 „a“ pav.).

Miesto gyventojams parūpo surasti tokį pasivaikščiojimo maršrutą, kuriuo būtų galima apeiti miestą, pereinant kiekvieną jo tiltų lygiai po vieną kartą, ir sugrįžti į tą pačią vietą, iš kurios prasidėjo pasivaikščiojimas. Kadangi miestelėnų bandymai rasti tokį maršrutą buvo nesėkmingi, tai tas uždavinys pasiekė vieną žymiausių tų laikų matematiką – Leonardą Oilerį (Leonhard Euler, 1701–1783), kuris ir įrodė, kad tokio maršruto būti negali.

Sprendamas ši uždavinį L.Oileris suvedė to uždavinio modelį į grafą, kuriame Karaliaučiaus miesto dalys buvo pavaizduotos neorientuoto grafo viršūnėmis, o tiltai – to grafo briaunomis (žiūr. 141 „b“ pav.).

Ne kiekvienas grafas turi tiltą. Pavyzdžiui, nei ciklas C_n , nei pilnas grafas K_n , kai $n > 2$, neturi tiltų.

Flerio algoritmas Oilerio keliui rasti susideda iš tokių žingsnių.

1. Įsitikiname, kad duotajame grafe Oilerio kelias egzistuoja, t. y. įsitikiname, kad duotasis grafas turi dvi ir tik dvi nelyginio laipsnio viršūnes.

2. Pasirenkame vieną iš tų viršūnių kaip Oilerio kelio pradžią. Kita nelyginio laipsnio viršūnė bus Oilerio kelio pabaiga.

3. Jei iš pasirinktos viršūnės išeina tik viena briauna, tai pasirenkame ją, o jei tokių briaunų yra keletas, tai pasirenkame bet kurią iš tų, kuri nėra grafo tiltas. Pasirinktą briauną pažymime kaip briauną, priklausančią Oilerio keliui, suteikdami jai eilinį numerį, ir pačią briauną eliminuojame iš grafo.

4. Jei grafe dar liko neeliminuočių (t. y. neperkeltų į Oilerio kelią) briaunų, tai grįžtame į trečiąjį algoritmo žingsnį ir tęsiame algoritmo darbą. Jei grafe neeliminuočių briaunų jau nebeliko, tai reiškia, jog jau sudarytas Oilerio kelias ir algoritmas baigė darbą.

Flerio algoritmas Oilerio ciklui rasti labai panašus į ką tik aprašytąjį algoritmą ir skiriasi nuo jo pirmuoju ir antruoju žingsniais.

1. Įsitikiname, kad duotasis grafas turi Oilerio ciklą, t. y., kad visų jo viršūnių laipsniai yra lyginiai.

2. Pasirenkame bet kurią grafo briauną, pažymime ją kaip priklausančią Oilerio ciklui ir eliminuojame iš grafo, patys pasilikdami vienoje iš pasirinktos briaunos viršūnių.

3. Toliau kartojame trečiąjį ir ketvirtąjį ką tik aprašytojo algoritmo Oilerio keliui rasti žingsnius iki tol, kol algoritmas baigia darbą.

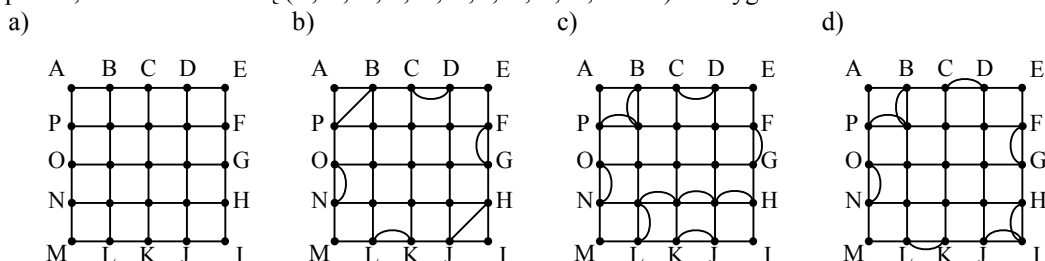
Oilerio ciklo radimo algoritmas gali būti gana plačiai taikomas praktikoje.

Pavyzdžiui, norint sudaryti optimalų šiukšlių surinkimo mašinos maršrutą, reikia sudaryti Oilerio ciklą grafe, kurio briaunos yra miesto gatvės ir gatvelės, viršūnės – jų sankryžos. Oilerio ciklas leidžia taupyti laiką ir benzina, pravažiuojant kiekviena gatve (ar dešiniąja bei kairiąja jos puse, jei gatvėje intensyvus judėjimas ir šiukšlės surenkamos atskirai kiekvienoje gatvės pusėje) tik po vieną kartą. Su panašiu uždaviniu susiduria miestelio paštininkas, susidarydamas sau pašto išnešiojimo maršrutą, policijos patrulis, apvažiuodamas naktį miesto gatves ir gatveles ir pan. Teigiama, kad taikant grafų teoriją vien tik Niujorko miesto tvarkymo tarnybų transporto maršrutams sudaryti, sutaupoma apie 25 milijonus dolerių per metus.

Sprendžiant Oilerio kelių ir Oilerio ciklo sudarymo uždavinius, neretai susiduriama su atvejais, kai nagrinėjamas grafas neturi Oilerio ciklo bei Oilerio kelių. Tuomet tenka užsiimti to grafo **oilerizacija**, t. y., kai kurių to grafo briaunų papildomu dubliavimu, tuo padidinant kai kurių grafo viršūnių laipsnius nuo nelyginių iki lyginių. Ryšium su tuo iškyla **optimalios oilerizacijos** uždavinys: kaip grafa, neturintį Oilerio ciklo, paversti grafu, turinčiu tokį ciklą, sudubliavus minimalų turimų briaunų skaičių. Sprendžiant optimalios oilerizacijos uždavinį gali tapti svarbiomis ir tokios briaunų charakteristikos kaip briaunų „ilgiai“ c_{ij} (pravažiavimo iš punkto „i“ į punktą „j“ trukmės bei kainos ir pan.), kas neturėjo reikšmės sprendžiant Oilerio ciklo radimo uždavinį, kai grafas turėjo Oilerio ciklą ir nereikėjo oilerizacijos.

Pailiustruosi, kaip sprendžiamas grafo optimalios oilerizacijos uždavinys, kai visos duotojo grafo briaunos yra vienodos, t. y. turi vienodus „svorius“ c_{ij} , ir minimizuojamas tik papildomai įvedamų briaunų, dubliuojančių jau esančias, skaičius.

Tarkime, jog turime grafa, pavaizduotą 142 „a“ pav. Dauguma šio grafo viršūnių turi lyginius laipsnius, tačiau 12 viršūnių (B, C, D, F, G, H, J, K, L, N, O ir P) – nelyginius.



142 pav.

Galėtų pasirodyti, kad optimalios oilerizacijos rezultatas – tai grafas, pavaizduotas 142 „b“ pav., nes visos jo viršūnės turi lyginius laipsnius ir tai pasiekta įvedus tik 6 papildomas briaunas PB, CD, FG, HJ, KL ir NO. Tačiau šis grafas nėra oilerizavimo rezultatas, nes papildomos briaunos PB ir HJ reiškia ne kokį nors pakartotiną pravažiavimą jau esančia gatve, o dviejų naujų gatvių atsiradimą, kas neįeina į Oilerio ciklo sudarymo uždavinio sudėtį, ieškant optimalių maršrutų. Juk naujų gatvių

pravedimas gali būti surištas su daug didesnėmis išlaidomis negu ta ekonomija, kurią gautume trumpindami maršrutą, ir todėl gali atsipirkti tik tada, kada planuojamu maršrutu bus naudojamos labai intensyviai. Žodžiu, uždavinys, sprendžiantis, kada apsimoka tiesti naujas gatves, yra visai kito tipo uždavinys, nepriklausantis Oilerio ciklo radimo uždavinių klasei.

Grafas, pavaizduotas 142 „c“ pav. yra grafo, pavaizduoto 142 „a“ pav., oilerizavimo rezultatas. Visos to grafo viršūnės turi lyginius laipsnius ir todėl šis grafas turi Oilerio ciklą, kurį galima rasti naudojantis Flerio algoritmu. Tačiau ši oilerizacija nėra optimali, nes jai prireikė 10 papildomų briaunų, kai tuo tarpu grafą iš 142 „a“ pav. galima oilerizuoti, įvedant mažesnę papildomų briaunų skaičių.

142 „d“ pav. vaizduojamas optimalios oilerizacijos rezultatas – Oilerio grafas (t. y. grafas, turintis Oilerio ciklą), kuriam gauti reikia tik aštuonių papildomų briaunų.

Oilerizuojant grafus, kurių briaunos turi nevienodus svorius c_{ij} , dubliuojančių briaunų įvedimas pradedamas nuo tų dubliuotųjų briaunų dubliavimo, kurios turi mažiausius svorius, ir parenkamas toks galutinis oilerizavimo variantas, kuriame papildomai įvestų briaunų svorių suma yra mažiausia.

1.9.2.15. Hamiltono ciklo ir Hamiltono optimalaus ciklo duotajame tinkle radimo operacijos

Tarkime, jog turime struktūrą, kurią sudaro p jos elementų (tą struktūrą vaizduojančio grafo viršūnių), žymimų numeriais 1, 2, ..., i , ..., j , ..., p , ir ℓ vienpusių ryšių (to grafo lankų) $(i \rightarrow j)$, jungiančių elementą „i“ su elementu „j“.

Tarkime, jog tą struktūrą vaizduojantis grafas yra svorinis, t. y., jo lankai $(i \rightarrow j)$ yra charakterizuojami tam tikrais svoriais c_{ij} , vaizduojančiais arba atstumą nuo mazgo „i“ iki mazgo „j“, arba perėjimo iš mazgo „i“ į mazgą „j“ trukmę, arba to perėjimo kainą ir pan. Šiame skyrelyje dydžius c_{ij} laikysime dydžiais, kurių sumas būtų pageidautina minimizuoti.

Kai tiesioginis perėjimas iš mazgo „i“ į mazgą „j“ (pavyzdžiui, iš būsenos „i“ į būseną „j“) yra neįmanomas ar neleistinas, tai laikysime, jog tokiais atvejais $c_{ij} = \infty$. Kai $\forall i \forall j (c_{ij} = c_{ji})$, tai tokį svorinį grafą vadinsime simetrišku. Simetriškuose grafuose galima vietoj lankų $(i \rightarrow j)$ ir $(j \rightarrow i)$ iškart nagrinėti briaunas $(i \leftrightarrow j)$.

Šiame skyrelyje mes nagrinėsime du uždavinius, surištus su žymaus airių matematiko ir astronomo V. R. Hamiltono (W. R. Hamilton) vardu.

Pirmasis uždavinys – tai ciklo C_n (arba orientuoto ciklo $C_n^{(0)}$), jungiančio visas duotojo grafo viršūnes taip, kad kiekviena viršūnė įeity į tą ciklą po vieną ir tik po vieną kartą, radimo uždavinys, sutrumpintai vadinamas **Hamiltono ciklo radimo uždaviniu**.

Atrodytų, jog šis uždavinys turėtų būti panašus į Oilerio ciklo radimo uždavinį, nes jų formuluotės gali būti gautos viena iš kitos, sukeitus viršūnės ir briaunos sąvokas vietomis, tačiau, kaip neužilgo pamatysime, šių uždavinių sprendimo algoritmai žymiai skiriasi. Skiriasi ir Oilerio bei Hamiltono ciklo egzistavimo duotajame grafe sąlygos.

Jei Oilerio ciklo egzistavimą ar neegzistavimą duotajame grafe nustatyti yra nesunku, tai Hamiltono ciklo atžvilgiu iki šiol dar nesurastas toks požymis, kuris kartu būtų ir būtinas ir pakankamas tokių ciklų egzistavimo (ar neegzistavimo) požymis. Suformuluotos ir įrodytos tik kai kurios dar nepakankamai stiprios teoremos apie atskiras būtinas bei pakankamas Hamiltono ciklo egzistavimo sąlygas, dar neleidžiančios kiekvienu atveju vienareikšmiškai atsakyti į klausimą, ar duotasis grafas turi (ar neturi) Hamiltono ciklą.

Viena tokių teoremų – jau mums žinomo (žiūr. 1.9.1.2. skyrelį) kvantinės fiziko teoretiko P. Dirako (P. Dirac) teorema, teigianti, jog jei grafo, turinčio ne mažiau kaip tris viršūnes, kiekviena viršūnė sujungta ne mažiau kaip su puse visų duotojo grafo viršūnių, tai to pilnai pakanka, kad tas grafas

turėtų Hamiltono ciklą. Kitaip tariant, **Dirako teoremą galima užrašyti taip: „ $[\forall i (\deg v_i \geq \frac{p}{2}) \wedge (p \geq 3)] \rightarrow \text{grafas turi Hamiltono ciklą}$ “**. Ši implikacija visada yra teisinga, tačiau atvirkštinė implikacija ne visada teisinga, todėl **Dirako požymis yra pakankamas, bet nėra būtinas Hamiltono grafo egzistavimo požymis**.

Pavyzdžiui, bigrafas $K_{3,3}$, turintis 6 viršūnes, kurių kiekviena surišta su trimis kitomis, tenkina Dirako teoremos sąlygas ir todėl turi Hamiltono ciklą, kuo nesunku įsitikinti ir tiesiogiai, tačiau toks ciklas egzistuoja ir struktūroje C_6 , nors joje kiekviena viršūnė surišta tik su dviem kitomis (t. y. mažiau negu su puse viršūnių) ir todėl netenkina Dirako teoremos sąlygos $\forall i (\deg v_i \geq \frac{p}{2})$.