

Laikysiu taip pat, kad visi skaitytojai vienodai supranta žymenis $\in, \subset, \subseteq, \emptyset$, suvokia, ką reiškia $B \subseteq A$ bei $C \subset A$, ką vadina aibės A poaibiu B bei jos tikriniu poaibiu C , žino, jog aibės gali būti aprašomos ir apibrėžiamos dvejopai: 1) išvardijant visus jų elementus bei nurodant figūriniuose skliausteliuose tų elementų pavadinimus ar identifikatorius (pavyzdžiui, arabiškų skaitmenų aibė $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$); 2) nurodant apibrėžiamos aibės visiems elementams būdingą savybę, išskiriančią juos iš kitų elementų, nepriklausančių tai aibei (pavyzdžiui, sveikųjų skaičių x , dalių skaičiui 3, aibė $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \pmod{3} = 0\}$, kur $\mathbb{Z}$ – specialus sveikųjų skaičių aibės žymuo).

Aibės sutrumpintai žymėsime didžiosiomis lotyniškoms raidėms ($A, B, C, \dots, M, N, \dots, X, Y, Z$) su indeksais ir be jų, aibių elementus – atitinkamomis mažosiomis lotyniškoms raidėms (su indeksais ir be jų), elementų skaičių baigtinėse aibėse (ir, bendrai, aibių galią) – tomis pačiomis didžiosiomis lotyniškoms raidėms, patalpintomis į vertikalius skliaustus (pavyzdžiui, $|A|, |B|$ ir t. t.). Kai kurioms aibių teorijai svarbioms aibėms suteikiami specialūs žymenys: $\mathbb{N}$ – natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., n , ... aibė, $\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė, $\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė, $\mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė, $\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibė. Mes irgi naudosisime tokiais žymėjimais, kartais dar papildydami juos papildomais ženklais (pavyzdžiui, $\mathbb{Z}^+$ – sveikųjų teigiamų skaičių aibė, $\mathbb{R}^*$ – realiųjų skaičių, nelygių 0, aibė ir pan.).

Remdamasis aibės sąvoka, apibrėšiu binarinio sąryšio $\mathfrak{R}$ aibėje A (tarp tos aibės elementų vienas su kitu) sąvoką, tačiau pradžioje įsivesiu sąryšio sąvokos apibrėžimui reikalingą **aibių dekartinės sandaugos sąvoką**. Ši sąvoka bus reikalinga ir eilėje kitų atvejų.

Aibių A ir B , sudarytų iš elementų $a_i \in A$ ir $b_j \in B$, kur $i=1, 2, 3, \dots, |A|$, o $j=1, 2, 3, \dots, |B|$, dekartine sandauga $A \times B$ vadinsime visų galimų porų (a_i, b_j) (gaunamų „dauginant“ kiekvieną aibės A elementą su kiekvienu aibės B elementu) aibę, turinčią $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ elementų – porų (a_i, b_j) .

Pavyzdžiui, aibės $A = \{0, 1, 2\}$, turinčios $|A|=3$ elementus ir aibės $B = \{\Delta, \square\}$, turinčios $|B|=2$ elementus, dekartinė sandauga yra aibė $A \times B = \{(0, \Delta), (0, \square), (1, \Delta), (1, \square), (2, \Delta), (2, \square)\}$, turinti $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$ elementus.

Binarinį sąryšį $\mathfrak{R}$, egzistuojantį kokiame nors aibėje A (t. y. tarp tos aibės elementų), galima aprašyti (ir tuo pačiu – apibrėžti) aibių teorijos terminais, išskiriant aibėje $A \times A$ tokį tos aibės poaibį, kurį **sudaro visos tos ir tik tos aibės A elementų $a_k \in A$ ir $a_m \in A$ poros (a_k, a_m) , kurios yra sąryšyje $\mathfrak{R}$** . Tą poaibį žymėsime sąryšio $\mathfrak{R}$ žymeniu $\mathfrak{R}$ ir vadinsime **sąryšio $\mathfrak{R}$ aibėje A algebriniu modeliu, arba tiesiog sąryšiu $\mathfrak{R}$, sutapatindami sąryšio vienmatėje aibėje A sąvokas su dvimatės aibės $A \times A$ poaibio sąvoka**: sąryšis $\mathfrak{R}$ aibėje yra dvimatės aibės $A \times A$ poaibis, formaliai apibrėžiamas formule $\{(a_k, a_m) / a_k \in A, a_m \in A, a_k \mathfrak{R} a_m = 1\}$, kurioje $a_k \mathfrak{R} a_m = 1$ reiškia, jog a_k yra sąryšyje $\mathfrak{R}$ su a_m .

Nors **binarinis sąryšis $\mathfrak{R}$, intuityviai suvokiant tą sąvoką, yra ne esybių ir jų porų, o binarinių ryšių tarp esybių aibė, tačiau vaizduodami tuos binarinius ryšius elementų, kuriuos tie ryšiai riša, poromis, kaip tik ir gauname čia ką tik pateiktąjį binarinio sąryšio $\mathfrak{R}$ aibėje A formalų apibrėžimą**, suformuluotą aibių teorijos kalba.

Sąryšio $\mathfrak{R}$ buvimą tarp aibės A elementų a_k ir a_m žymėsime formule $a_k \mathfrak{R} a_m \Leftrightarrow 1$ (arba, naudodamiesi 1.5. skyriaus žymenimis, – teiginiu $\mathfrak{R}(a_k, a_m) \Leftrightarrow 1$, o jo nebuvimą – formule $a_k \mathfrak{R} a_m \Leftrightarrow 0$ (t. y. teiginiu $\mathfrak{R}(a_k, a_m) \Leftrightarrow 0$).

Sąryšį $\mathfrak{R}$ tarp aibės A elementų ir patį aibės $A \times A$ poaibį $\mathfrak{R}$, apibrėžiantį tą sąryšį aibių teorijos terminais, galima aprašyti matrica, turinčia $|A|$ eilučių ir tiek pat stulpelių, atitinkančių aibės A elementus. Tos matricos eilučių k ir stulpelių m sankryžose esančiuose langeliuose (čia k – matricos eilutės ir m – matricos stulpelio numeriai, esantys kartu ir aibės A elementų numeriais) įrašomos teiginių $\mathfrak{R}(a_k, a_m)$ loginės reikšmės, vaizduojančios ryšio $\mathfrak{R}$ tarp atitinkamų aibės A elementų buvimą ar nebuvimą.

Kaip konkretaus sąryšio (ir jo aprašymo, sudarant atitinkamą matricą) pavyzdį, pateiksiu **sąryšio „ $\subseteq$ “, reiškiančio poaibio priklausomybės aibei sąryšį**, aprašymą.

Tarkime, jog aibė A , kurioje nagrinėsime sąryšį „ $\subseteq$ “, sudaro aibės $B = \{0, 1, 2\}$ poaibiai. Visų tų poaibių aibę, atsižvelgiant į tai, kad tokių poaibių skaičius yra lygus $C_{|B|}^0 + C_{|B|}^1 + C_{|B|}^2 + \dots + C_{|B|}^{|B|} = 2^{|B|}$, aibių teorijoje priimta žymėti specialiu žymeniu 2^B , iš kur gauname, jog aibė A yra aibė $2^B = 2^{\{0, 1, 2\}} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

Kadangi aibė A turi $|A| = |2^B| = 2^3 = 8$ elementus, tai matrica, aprašanti sąryšį $C \subseteq D$, kuriame C ir D yra aibės B poaibiai ir tuo pačiu aibės A elementai, bus 8-sios eilės kvadratinė matrica. Ta matrica pavaizduota 41-joje lentelėje. Ji sudaryta taip: kai aibė C , atitinkanti tos matricos eilutę, yra aibės D , atitinkančios tos matricos stulpelį, poaibis, tai matricos langelyje, esančiame C eilutės ir D stulpelio sankirtoje, įrašomas loginis vienetas „1“, o tuose langeliuose, kurie atitinka atvejus, kai eilutės aibė C nėra stulpelio aibės D poaibis, įrašomas loginis nulis „0“.

41. lentelė

$C \setminus D$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$\emptyset$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{0\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{1\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{2\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{0, 1\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{0, 2\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{1, 2\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\{0, 1, 2\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Sukeitę šios matricos eilutes ir stulpelius vietomis, t. y. transponavę tą matricą, gautume matricą, vaizduojančią atvirkštinį sąryšį $(\subseteq)^{-1} = \supseteq$.

Sąryšį $\mathfrak{R}$ tarp aibės elementų galima aprašyti ir formulėmis, jei priimtume, jog mes jau suprantame, ką reiškia tose formulėse panaudoti žymenys.

Pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ galima apibrėžti sąryšį „daugiau“, kurį žymėsime žymeniu „ $>$ “. Jei laikytume, kad mums žinoma, ką reiškia atimties operacija „ $-$ “, loginio ekvivalentumo ženklas „ $\Leftrightarrow$ “ bei bendrumo kvantoriaus ženklas $\forall$, o taip pat yra žinoma, kokią vietą aibėje $\mathbb{R}$ užima jos elementas „0“ ir kokią savybę jis turi, tai sąryšį „ $>$ “ galėtume apibrėžti formule

$$\forall m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{R} [(m - n > 0) \Leftrightarrow (m > n)].$$

Reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad tokie sąryšių „ $\subseteq$ “ ir „ $<$ “ „apibrėžimai“ nesudaro logiškai neprieštaringos nuoseklos (neturinčios savyje „ydingojo rato“) ir pilnos apibrėžimų sistemos, aprašytos 1.5.5. skyrelyje, o yra tik tam tikri įvedamų sąvokų aprašymo pavyzdžiai, padedantys skaitytojui aiškiau, tiksliau ir giliau tas sąvokas suprasti, naudojantis tuo, kad skaitytojui daugelis tuose „apibrėžimuose“ – aprašymuose vartojamų žymėjimų (ženklų, simbolių bei konstrukcijų, sudarytų iš jų ir vykdančių atitinkamų „hieroglifų“ funkcijas) yra žinomi ir suprantami anksčiau įgytos patirties dėka.

Kaip nesunku pastebėti, **binarinio sąryšio $\mathfrak{R}$ aibėje A sąvoka sutampa su 1.5. skyriuje įvesta binarinio santykio sistemoje S tarp ją sudarančių esybių sąvoka**. Galima teigti, jog binarinis sąryšis $\mathfrak{R}$ aibėje A yra algebrinis binarinio santykio $\mathfrak{R}$ sistemoje S modelis, išreikštas aibių teorijos terminais. Iš šio teiginio išplaukia, jog sistemose egzistuojančių santykių ir jų struktūros matematiniam aprašymui galima naudotis aibių teorijos, algebros ir algebrinių struktūrų teorijos matematine kalba ir aparatu. Kaip tik dėl šios priežasties į šios mokymo priemonės sudėtį ir buvo įtrauktas šis skyrelis, skirtas algebrinėms struktūroms: kuriant struktūrų algebrą, tikslinga pasinaudoti jau egzistuojančiu algebrinių struktūrų teorijos matematine kalba ir matematiniu aparatu. Nėra tikslo antrą kartą išradinėti jau išrastą dviratį.

Naudojantis aibių teorijos terminais, galima formaliai aprašyti (o kartu ir apibrėžti) ne tik santykio $\mathfrak{R}$, bet ir 1.5. skyriuje įvestą **savybės P sąvoką**.

Tarkime, kad mes, nagrinėdami esybes $a_1, a_2, a_3, \dots$, sudarančias visų mums šiuo metu žinomų esybių aibę A , pastebėjome, jog kai kurios esybės $a_{p,1}, a_{p,2}, a_{p,3} \dots$ turi kažką bendro, išskiriančio jas iš visų kitų mums žinomų esybių, tačiau su tokiu bendrumu susiduriame pirmą kartą ir net pavadinimo jam dar neturime. Norėdami supažindinti kitus žmones su atrasta nauja savybe, būdinga esybėms $a_{p,1}, a_{p,2}, a_{p,3} \dots$, mes aibėje A išskiriame specialų jos poaibį P , kurį sudaro tos ir tik tos esybės $a_{p,1}, a_{p,2}, a_{p,3} \dots$, kurios turi tą naują, bendrą visoms toms esybėms, savybę. Pažymėję tą naują savybę to poaibio žymeniu P , mes galime teigti, **jog savybė P yra tas bendras visų poaibio P elementų požymis, kuris juos išskiria iš aibės A** , atskirdamas nuo visų kitų tos aibės elementų, neturinčių to požymio ir sudarančių kitą tos aibės poaibį $\bar{P}$. Paveikdami poaibio P elementus apibendrinančio abstrahavimo operacija $\chi(a_{p,1}, a_{p,2}, a_{p,3} \dots) \chi \forall p, i$, aprašyta 1.5.8. skyrelyje, mes tokiu būdu galime suformuoti atrastos naujos savybės sąvoką, duoti tai savybei pavadinimą ir įjungti ją į jau žinomų savybių sąrašą.

Aibių teorijos terminais aprašę esybių savybes, mes galime, **naudodamiesi tais terminais, formaliai aprašyti ir pačias esybes, vaizduodami jas aibėmis, kurių elementai – tų esybių savybių žymenys**. Pažymėjus tas aibes atitinkamų esybių žymenimis (vardais, identifikatoriais), juos galima panaudoti, aprašant santykius tarp esybių bei tų esybių savybių (tame tarpe ir naujai atrastų savybių, esybių ir santykių) aprašymui. Tokie aprašymai, aišku, nesudarys nuoseklos eksplikitinės (išreikštinės) sąvokų apibrėžimų sistemos, tačiau iš jų galima sudaryti rekurentinę implicitinę apibrėžimų sistemą, neturinčią savyje „ydingojo rato“. Taigi, **aibių teoriją ir jos matematinį aparatą galima panaudoti kaip vieną iš galimų pagrindų, kuriant formalią sistemų teoriją trečiuoju metodu** (žiūr. šios mokymo priemonės „Įvado“ ketvirtąjį skyrelį „Sistemotyros mokslo formavimo metodai“). Įvesdami į aibę, kurios elementai vaizduoja esybes, esančias nagrinėjamos sistemos sudėties elementais,

2) simetriškumą: $\forall a_i \in A \quad \forall a_j \in A \quad (a_i E a_j \Leftrightarrow a_j E a_i)$,

3) tranzityvumą: $\forall a_i \in A \quad \forall a_j \in A \quad \forall a_k \in A \quad [(a_i E a_j \Leftrightarrow 1) \wedge (a_j E a_k \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (a_i E a_k \Leftrightarrow 1)]$.

Iš ekvivalentumo sąryšio E apibrėžimo išplaukia, jog tą sąryšį vaizduojanti matrica būtinai turi būti simetrinė, o jos pagrindinę įstrižainę turi sudaryti vienetukai. Visiems kitiems tos matricos langeliams turi būti būdinga tai, kad jei langeliuose (i, k) ir (k, j) stovi vienetukai ir $i \neq k \neq j$, tai langelyje (i, j) taip pat turi stovėti vienetukas, o taip pat ir langeliuose (j, i) , (k, i) ir (j, k) .

Iš ekvivalentumo sąryšio E apibrėžimo taip pat, pavyzdžiui, išplaukia, jog sąryšis „ $>$ “ aibėje R nėra E , nes sąryšis „ $>$ “ nėra nei refleksyvus, nei simetriškas, o tik tranzityvus.

Netenkina ekvivalentumo sąryšio reikalavimų ir sąryšis „myli“, egzistuojantis žmonių aibėje, nes jis ne visuomet tranzityvus (pavyzdžiui, iš to, kad Petras myli savo žmoną, o ta žmona myli savo pažįstamą Antaną, ne būtinai išplaukia, jog Petras myli Antaną), ne visada simetriškas (dėl ko įvyksta nemažai dramų ir tragedijų), o kartais būna net ir nerefleksyvus (būna juk kartais taip, kad žmogus pats sau tampa nemielas).

Štai sąryšis „lygu“, žymimas ženklu „ $=$ “, yra ekvivalentumo sąryšis aibėje R , nes: 1) $a=a$, 2) iš $a=b$ išplaukia $b=a$, 3) iš $a=b$ ir $b=c$ išplaukia $a=c$.

Mūsų jau nagrinėtas sąryšis $\equiv (\text{mod } n)$ bet kuriam $n \in \mathbb{N}$ taip pat yra ekvivalentumo sąryšis, skaidantis aibę $\mathbb{Z}$ į ekvivalentumo klases $K_n(a)$, kur $a=0, 1, 2, \dots, n-1$, jungiančias kiekvienoje iš klasių $K_n(a)$ ekvivalentumo ryšiu $\equiv (\text{mod } n)$ kiekvieną tos klasės elementą tarpusavyje su kitais tos klasės elementais (tame tarpe ir su tos klasės elementu a), kadangi kiekvieną klasės $K_n(a)$ elementą galima išreikšti bendra formule $a+kn$, kur $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}^+$. Klasėms $K_n(a)$ būdinga tai, kad: 1) jos nėra tuščios, t. y. $\forall a \quad (K_n(a) \neq \emptyset)$; 2) jų sankirtos yra tuščios, t. y. kai $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $a_i \neq a_j$, tai $K_n(a_i) \cap K_n(a_j) = \emptyset$; 3) aibių $K_n(i)$ sąjunga padengia visą aibę $\mathbb{Z}$, t. y. $\bigcup_{i=0}^{n-1} K_n(i) = \mathbb{Z}$.

Nesunku įrodyti, kad ne tik ekvivalentumo sąryšis $\equiv (\text{mod } n)$, bet ir bet kuris kitas ekvivalentumo sąryšis E_A suskaido aibę A į netuščius, nesikertančius ir tą aibę pilnai padengiančius poaibius A_i . Tų aibės A poaibių A_i aibę, žymimą $\pi_E(A)$, kai tie poaibiai tenkina sąlygas: 1) jei

$A_i \in \pi_E(A)$, tai $A_i \neq \emptyset$; 2) jei $A_i \in \pi_E(A)$, $A_j \in \pi_E(A)$ ir $i \neq j$, tai $A_i \cap A_j = \emptyset$; 3) $\bigcup_{i=1}^{|\pi_E(A)|} A_i = A$, vadina **aibės A skaidiniu ekvivalentumo sąryšio E_A atžvilgiu, arba aibės A skaidiniu į ekvivalentumo sąryšio E_A ekvivalentumo klases $K_E(a_i) = A_i$.**

Iš skaidinio apibrėžimo išplaukia, jog $\sum_{i=1}^{|\pi_E(A)|} |A_i| = |A|$, t. y., $|A| = \sum_{i=1}^{|\pi_E(A)|} |K_E(a_i)|$, kur $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$

ir $a_i E a_j = 0$, kai $i \neq j$.

Galima įrodyti ir atvirkštinį teiginį: jei aibę pavyko koku būdu suskaidyti į poaibius A_i , kurie sudaro skaidinį $\pi(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_{|\pi(A)|}\}$, tenkinantį sąlygas:

1) jei $A_i \in \pi(A)$, tai $A_i \neq \emptyset$; 2) jei $A_i \in \pi(A)$, $A_j \in \pi(A)$ ir $i \neq j$, tai $A_i \cap A_j = \emptyset$; 3) $\bigcup_{i=1}^{|\pi(A)|} A_i = A$, tai aibėje

A egzistuoja toks ekvivalentumo sąryšis E , kurio ekvivalentumo klasės $K_E(a_i)$ sutampa su aibės A poaibiais A_i , sudarančiais tą skaidinį, t. y. aibę $\pi(A)$.

Palieku skaitytojų savarankiškai įrodyti abu šiuos teiginius, rodančius, kad tarp ekvivalentumo sąryšio E klasių $K_E(a)$ ir skaidinio $\pi(A)$ elementų – aibės A poaibių A_i – taip pat egzistuoja ekvivalentumo sąryšis.

Aibės A skaidinį į ekvivalentumo sąryšio E ekvivalentumo klases $K_E(a_i) = A_i$, t. y. aibę $\pi_E(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_{|\pi(A)|}\}$ vadina **aibės A faktoraibe ekvivalentumo sąryšio E atžvilgiu ir žymi A/E .**

Mes jau esame susidūrę su faktoriaibių pavyzdžiais. Tai sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ faktoraibės $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, kurias sudaro aibės $\mathbb{Z}$ poaibiai, esantys ekvivalentumo klasėmis $K_n(0)$, $K_n(1)$, ..., $K_n(n-1)$ ekvivalentumo sąryšio $\equiv (\text{mod } n)$ atžvilgiu. Keisdami n , galime gauti įvairias aibės $\mathbb{Z}$ faktoraibes $\mathbb{Z}_n$, turinčias po n elementų – aibės $\mathbb{Z}$ poaibių, kurių kiekvienas jungia sveikuosius skaičius, ekvivalentus vienas kitam tuo, kad tie skaičiai, dalinant juos iš n , duoda vienodas liekanas. Pavyzdžiui, kai $n=2$, aibės $\mathbb{Z}$ faktoraibę $\mathbb{Z}_2$ sudaro du elementai (du aibės $\mathbb{Z}$ poaibiai) – lyginių ir nelyginių sveikųjų skaičių aibės.

Bet kuriai netuščiai aibei A , atsižvelgiant į bet kurią būdingą jos elementams savybę P , galima sudaryti faktoraibę tos savybės pasireiškimo lygio ekvivalentumo atžvilgiu. Kai savybė P turi tik du pasireiškimo lygius (0, kai koks nors $a_i \in A$ tos savybės neturi, 1, kai koks nors $a_j \in A$ tą savybę turi), tai

aibės A faktoraibę A/E_P sudarys tik du elementai: aibė $A_0 \subseteq A$, jungianti visus aibės A elementus, neturinčius savybės P , ir aibė $A_1 \subseteq A$, jungianti visus aibės A elementus, turinčius tą savybę. Žinoma, kai kurių savybių P atžvilgiu gali atsitikti ir taip, jog vienas iš poaibių (A_0 ar A_1) bus tuščias. Tuomet aibės A faktoraibė turės tik vieną elementą – pačią aibę A , nes faktoraibę sudarantys poaibiai pagal apibrėžimą turi būti netušti.

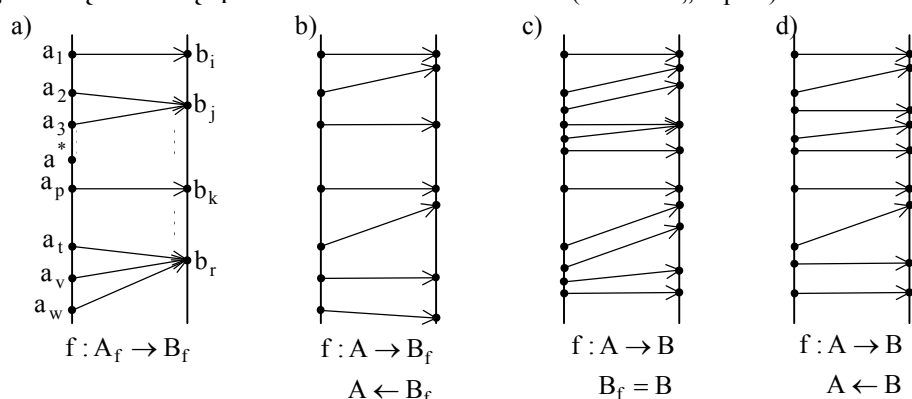
Kai kurios savybės P aibės A elementuose gali pasireikšti ne vienu, o keliais lygiais (pavyzdžiui, žmonės pagal jų ūgį galima suskirstyti į kelias klases). Tuomet ir ekvivalentumo klasių savybės P atžvilgiu bus tiek, kiek ta savybė turi pasireiškimo lygių (savybės P reikšmių $p_1, p_2, \dots, p_n$), o aibės A faktoraibę A/E_P savybės P pasireiškimo lygių ekvivalentumo atžvilgiu sudarys aibės A poaibiai $A_1, A_2, \dots, A_n$, jungiantys aibės A elementus, turinčius vienodą savybės P pasireiškimo lygį.

Akivaizdu, kad vienai ir tai pačiai aibei A pagal kitą jos elementų savybę galima sudaryti kitą faktoraibę, o taip pat aibės A ekvivalentumo klases, gautas skaidant aibę pagal vienos savybės pasireiškimo lygį, galima suskaidyti į smulkesnes ekvivalentumo klases pagal kitos savybės pasireiškimo lygį, gaunant tokiu būdu aibės A poaibius A_{ij} , kuriuos sudaro aibės A elementai, turintys vienodus dviejų savybių pasireiškimo lygius. Tokių aibių, jų poaibių ir tų poaibių faktoraibių sudarymo procesą galima tęsti iki tol, kol žemutinio lygio poaibiuose, sudarančiuose aukštesnio lygio skaidinį, beliks tik po vieną aibės A elementą. Tuo ir grindžiamas objektų klasifikavimo sistemų pagal objektų požymius sudarymo algoritmas. **Klasifikuodami objektus pagal jų požymius ir kurdami antrojo tipo sistemas, mes kaip tik ir sudarinėjame aibių faktoraibes:** pradžioje pagal kokį nors požymį P_1 aibę A suskaidome į netuščius nesikertančius poaibius A_i , padengiančius visą aibę A ir jungiančius savyje aibės A elementus, turinčius vienodą požymio P_1 pasireiškimo lygį; po to pirmojo lygio faktoraibės elementus – poaibius A_i – pagal kitus požymius (faktorius) skaidome į poaibius A_{ij} , sudarydami antrojo lygio faktoraibes ir t. t., kol gauname faktoraibes, sudarytas iš aibės A elementų. Tuo ir baigiamas **hierarchinės klasifikavimo sistemos** sudarymas, kurioje kiekvienas aibės A elementas patenka į atitinkamą (tik jam vienam skirtą) vietą tos sistemos struktūroje. Taip atsiranda aibės elementų klasės, poklasiai, skyriai, poskyriai, būriai, rūšys ir t. t., visiems aibės A įvairių lygių poaibiams ir patiems jos elementams sudaromi ir priskiriami **klasifikaciniai kodai**.

Tokios klasifikavimo procedūros dėka **aibėje A sudaroma tam tikra struktūra ir aibė A tampa antrojo tipo sistema (arba antrojo tipo sistemos modeliu, kai aibės A elementai – realios sistemos S elementų modeliai).**

Binariniai sąryšiai gali egzistuoti ne tik vienoje aibėje, bet ir tarp dviejų aibių A ir B elementų. Tokie sąryšiai (panašiai kaip ir sąryšiai vienoje aibėje A) gali būti apibrėžti kaip aibės $A \times B$ poaibiai. Kadangi aibė $A \times B$ turi $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ elementų – porų (a_i, b_j) , tai ji turi $2^{|A| \cdot |B|}$ poaibių (įskaitant ir tuščiąjį poaibį $\emptyset$), o tai reiškia, jog tuo atveju, kai aibės A ir B yra didelės, gali egzistuoti daug įvairių binarinių sąryšių tarp tų aibių elementų.

Iš tų sąryšių aibės išskirsime ir nagrinėsime tokių jų poaibį, kurio elementams – binariniams sąryšiams $F \subseteq A \times B$ – būdinga, kad **iš kiekvieno aibės A elemento a_i gali eiti tik vienas ryšys į aibę B , sujungiantis tą elementą a_i tik su vienu aibės B elementu** (žiūr. 101 „a“ pav.).



101 pav.

Tokie binariniai sąryšiai $F \subseteq A \times B$ (o jų taip pat gali būti daug) aprašo ir apibrėžia įvairias galimas **vienareikšmes aibės A elementų (o kartu ir pačios aibės A) projekcijas į aibę B (t. y. į aibės B elementus), žymimas $A \rightarrow B$ ir vadinamas **vieno argumento funkcijomis $f: A \rightarrow B$** .**

Funkcija $f: A \rightarrow B$ elementui $a \in A$, vadinamam tos **funkcijos argumentu**, priskiria vieną ir tik vieną elementą $b \in B$, vadinamą **funkcijos reikšme ir žymimą $f(a)$** , todėl funkciją f galima vaizduoti ir užrašu $f(a)=b, a \in A, b \in B$.

Kad binarinis sąryšis $F \subseteq A \times B$, kuriame $A \neq \emptyset$ ir $B \neq \emptyset$, apibrėžtą vieno argumento funkciją $f: A \rightarrow B$ (arba $f(a)=b$), jis turi tenkinti tos **funkcijos vienareikšmiškumo sąlygą** $\forall a [(a \in A) \wedge (b_1 \in B) \wedge (b_2 \in B) \wedge (F \subseteq A \times B) \wedge ((a, b_1) \in F) \wedge ((a, b_2) \in F) \Rightarrow (b_1 = b_2)]$, reiškiančią, jog vienam ir tam pačiam elementui $a \in A$ funkcija $f(a)$ gali turėti tik vieną reikšmę $b \in B$.

Ši sąlyga patenkinama visiems elementams a , pavaizduotiems 101 „a“ pav., nes kiekvienas aibės A elementas projektuojasi tik į vieną aibės B elementą. Į vieną aibės B elementą gali projektuotis ne tik vienas, bet ir keli aibės A elementai, t. y. gali būti, kad $f(a_t)=f(a_v)=f(a_w)=b_r$, kai $a_t \neq a_v \neq a_w$, tačiau joks aibės A elementas negali tenkinti sąlygos $f(a)=b_1 \neq b_2=f(a)$, t. y. funkcija, esant vienai ir tai pačiai argumento reikšmei, negali būti nelygi pačiai sau.

Funkcijos f vienareikšmiškumo sąlyga tenkinama ir tuo atveju, kai aibėje A egzistuoja vienas ar keli (tačiau ne visi) elementai a^* , kurie nepriklauso nė vienam poaibio F elementui, t. y. nė vienai porai $(a_i, b_j) \in F$. Tuomet aibėje A egzistuoja elementai a^* , kuriems **funkcija $f(a)=b$ neapibrėžta**, nes ji neturės jokios reikšmės – elemento b , sąryšiu F priskirto elementui a^* (žiūr. 101 „a“ pav.). Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ neturės jokios baigtinės reikšmės, kai jos argumentas x lygus 0; taip pat funkcija $f(x)=\arcsin x$

nėra apibrėžta visoms toms x reikšmėms, kurių absoliutus dydis $|x|>1$, nes funkcija $\phi(x)=\sin x$ negali turėti reikšmės, didesnės už 1 bei mažesnės už -1 .

Kai elementui $a \in A$ funkcija $f: A \rightarrow B$ yra apibrėžta, t. y., kai egzistuoja toks $b \in B$, kad $f(a)=b$, tuomet tas elementas b vadinamas **elemento a vaizdu, kas užrašoma $b=f(a)$** , o elementas a vadinamas **elemento b pirmavaizdžiu, kas užrašoma $a=f^{-1}(b)$** .

Visi tie aibės A elementai a , kurie turi savo vaizdus $f(a)$ aibėje B , sudaro aibę $A_f \subseteq A$, vadinamą **funkcijos $f(a)$ apibrėžimo sritimi**, o taip pat dar ir **funkcijos $f(a)$ reikšmių pirmavaizdžiu**.

Dažniausiai aibė A apibrėžiama taip, kad ji sutaptų su aibe A_f . Tuomet visa aibė a tampa funkcijos $f: A \rightarrow B$ apibrėžimo sritimi, kas atitinka užrašą $A \rightarrow B$, reiškiantį aibės A projekciją į aibę B .

Pavyzdžiui, funkcijai $b=\frac{1}{a-2}$ aibė A apibrėžiama taip: $A=A_f=\{a \in \mathbb{R} / (a < 2) \vee (a > 2)\}$, t. y. kaip aibė $\mathbb{R}$, iš kurios eliminuotas elementas $a=2$, nes šis elementas negali turėti baigtinio vaizdo $f(a)$, priklausančio aibei $B=B_f=\{b \in \mathbb{R} / b \neq 0\}$.

Apibrėžus aibę A taip, kad $A=\{a \in \mathbb{R} / -1 \leq a \leq 1\}$, ši aibė sutaps su funkcijos $b=\arcsin a$ apibrėžimo sritimi A_f .

Funkcijos $b=f(a)$ apibrėžimo srities A_f visų elementų $a \in A_f$ vaizdų $f(a)$ aibė $f(A_f) \subseteq B$, vadinama **funkcijos $f: A \rightarrow B$ vaizdu**. Funkcijos $f: A \rightarrow B$ vaizdas dažnai žymimas tiesiog $f(A)$, laikant, kad $A_f=A$. Funkcijos f vaizdas $f(A) \subseteq B$, tačiau ne būtinai turi sutapti su visa aibe B . Jis gali būti ir tikriniu jos poaibiu $B_f=f(A)$, kur $B_f \subset B$.

Formaliai funkcijos $f: A \rightarrow B$ (tiksliau $f: A_f \rightarrow B_f$) vaizdas $f(A_f)$ apibrėžiamas taip: $B_f=f(A_f)=\text{Im}f=\{f(a) / a \in A_f\}$.

Kiekvienas aibės $B_f=\text{Im} f$ elementas b būtinai turi pirmavaizdį ir ne būtinai tik vieną (žiūr. 91 „a“ pav., kuriame elementai b_i ir b_k turi po vieną pirmavaizdį, elementas b_j – du pirmavaizdžius, o elementas b_r – net tris pirmavaizdžius). Todėl aibės B_f galia $|B_f|$ negali būti didesnė už aibės A_f galia: visada $|A_f| \geq |B_f|$.

Kai $b \in B_f$ turi tik vieną pirmavaizdį $a=f^{-1}(b) \in A_f$, tai sakoma, jog aibės A elementui a egzistuoja ne tik tiesioginė funkcija f , vienareikšmiškai projektuojanti tą elementą a į aibės B elementą b , bet ir tai **funkcijai f atvirkštinė funkcija f^{-1}** , vienareikšmiškai projektuojanti elemento a vaizdą $f(a)$, t. y. aibės A_f elementą b , į jo pirmavaizdį – aibės A_f elementą a .

Kartais atvirkštinėmis vadinamos ne tik vienareikšmės, bet ir daugiareikšmės funkcijos.

Pavyzdžiui, funkcija $y=\cos x$ projektuoja aibės $X=\mathbb{R}$ elementus – skaičius $x \in \mathbb{R}$ – į aibės $Y=\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ elementus $y \in Y$. Kiekvienas aibės X elementas x turi vieną ir tik vieną vaizdą $y=\cos x$, priklausančią aibei Y . Tačiau tą patį vaizdą gali turėti be galo daug aibės X elementų, kuriuos būtų galima sugrupuoti į ekvivalentumo klases pagal požymį: visi vienos ekvivalentumo klasės elementai x turi vienodą funkcijos $\cos x$ reikšmę. Aibės X poaibyje $X_0=\{x_0 \in \mathbb{R} / 0 \leq x_0 \leq \pi\}$ visi aibės X_0 elementai x_0 turi tik po vieną vaizdą aibėje $Y=\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$, todėl kiekvienam tos aibės elementui y , būtinai esančiam kokio nors elemento $x_0 \in X_0$ vaizdu, aibėje X_0 būtinai egzistuoja vienas ir tik vienas to vaizdo $y=\cos x_0$ pirmavaizdis x_0 . Todėl egzistuoja funkcijos f , vadinamos $y=\cos x_0$ atvirkštinė funkcija f^{-1} , vadinama $x_0=\arccos y$. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė $Y=\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$, o jos vaizdas – aibė $X_0=\{x_0 \in \mathbb{R} / 0 \leq x_0 \leq \pi\}$.

Tačiau kiekvienas aibės Y elementas funkcijos $y=\cos x$ atžvilgiu, kaip jau buvo minėta, aibėje $X=\mathbb{R}$ turi be galo daug pirmavaizdžių $2k\pi \pm x_0 = 2k\pi \pm \arccos y$, kur $k=0, \pm 1, \pm 2$, t. y. $k \in \mathbb{Z}$. Visi šie vaizdų

$y = \cos x$ pirmavaizdžiai $x = 2k\pi \pm \arccos y$ gaunami, projektuojant aibę $Y = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ į aibę $X_0 = \{x_0 \in \mathbb{R} / 0 \leq x_0 \leq \pi\}$ taip, kad kiekvienas $y \in Y$ vienareikšmiškai projektuojasi į $x_0 = \arccos y$, priklausanti aibei X_0 , o po to tą projekciją kartojant į aibes $X_1, X_{-1}, X_2, X_{-2}, \dots, X_k, X_{-k}, \dots$, kur $X_k = \{x \in \mathbb{R} / 2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi\}$, t. y. kiekvienam pirmavaizdžiui x_0 sudarant po vieną ekvivalentumo klasę $\{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi \pm x_0, k \in \mathbb{Z}\}$, į kurias vienareikšmiškai projektuojasi aibės Y elementai $y = \cos x$.

Funkciją, vienareikšmiškai projektuojančią kiekvieną y iš funkcijos $y = \cos x$ reikšmių srities $Y = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ į aibės $X = \mathbb{R}$ ekvivalentumo klasę $\{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi \pm \arccos y, k \in \mathbb{Z}\}$, sudarytą iš skaičių x , turinčių vienodą vaizdą $y = \cos x$, žymi $x = \text{Arccos } y$. Ji yra normali vienareikšmė funkcija aibės X ekvivalentumo klasių $K_*(x) = \{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi \pm \arccos y, k \in \mathbb{Z}\}$ atžvilgiu, nes kiekvieną y projektuoja tik į vieną aibės X faktoriaibės elementą – aibės X elementų ekvivalentumo klasę $K_*(x)$, tačiau aibės $X = \mathbb{R}$ elementų – skaičių x – atžvilgiu ji yra daugiareikšmė „funkcija“, atvirkštinė funkcijai $y = \cos x$. Taigi funkcijos $y = \cos x$ pirmavaizdį sudaro ne vienas skaičius $x \in \mathbb{R}$, o begalinė skaičių $x \in \mathbb{R}$ aibė, sudaranti ekvivalentumo klasę $K(x_0) = \{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi \pm \arccos y, k \in \mathbb{Z}\}$, kur $x_0 = \text{Arccos } y$. Abi funkcijas – $x = \arccos y$ ir $x = \text{Arccos } y$ – vadina funkcijomis, atvirkštinėmis funkcijai $y = \cos x$, nors funkciją $x = \text{Arccos } y$ galima vadinti funkcija tikrąja to žodžio prasme tik laikant jos reikšmę ne kokią nors skaičių $x \in \mathbb{R}$, o aibės $\mathbb{R}$ faktoriaibės $\mathbb{R}/E$ elementą – jau minėtąją ekvivalentumo klasę $K_*(x)$, sudarytą iš tokių skaičių $x \in \mathbb{R}$, kuriems funkcijos $y = \cos x$ reikšmės yra vienodos.

Ir vienareikšmių vieno argumento funkcijų aibėje pasitaiko funkcijų, kurių vaizdai (o kartais – ir apibrėžimo sritys) atrodo gana įmantriai. Funkcijos, turinčios gana paprastą apibrėžimo sritį ir gana įmantriai sudarytą reikšmių sritį bei dar įmantresnę sąryšio tarp funkcijos argumentų reikšmių ir pačios funkcijos reikšmių struktūrą, pavyzdžiu galėtų būti **Oilerio (L.Eulerio) funkcija $\varphi(n)$** . Ši funkcija išreiškia sąryšį tarp natūraliųjų skaičių pradinės sekos ilgio n ir toje sekoje esančių skaičių, turinčių savybę neturėti su skaičiumi n didesnių už 1 bendrų daliklių, skaičiaus, žymimo $\varphi(n)$, ir apibrėžiama formule $\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} / (1 \leq k \leq n) \wedge (\text{DBD}(k, n) = 1)\}|$, kurioje $\text{DBD}(k, n)$ reiškia didžiausią bendrąjį skaičių k ir n daliklį.

Iš šio apibrėžimo išplaukia, jog funkcijos $\varphi(n)$ reikšmė yra lygi skaičiui tokių natūraliųjų skaičių $k \leq n$, kurie neturi su skaičiumi n bendrųjų daliklių, didesnių už 1, t. y. skaičiui tokių $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, kurių bendrasis didžiausias daliklis su skaičiumi n yra lygus 1.

Paskaičiuosime kai kurias funkcijos $\varphi(n)$ reikšmes.

Kai $n=1$, tai k gali turėti tik vieną reikšmę $k=1$. Tuomet $\text{DBD}(k, n) = \text{DBD}(1, 1) = 1$, iš kur išplaukia, jog natūraliųjų skaičių sekoje, sudarytoje iš vieno skaičiaus, yra vienas skaičius turintis $\text{DBD}(k, n)$ lygų 1. Todėl $\varphi(1) = 1$.

Kai $n=2$, skaičius k gali turėti dvi reikšmes: 1 ir 2. Kadangi $\text{DBD}(1, 2) = 1$, $\text{DBD}(2, 2) = 2$, tai $\varphi(2) = 1$.

Analogiškai gauname, jog $\varphi(3) = 2$, nes $\text{DBD}(1, 3) = 1$, $\text{DBD}(2, 3) = 1$, $\text{DBD}(3, 3) = 3$.

Tęsdami skaičiavimus, gauname, jog $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(9) = 6$, $\varphi(10) = 4$ ir t. t.

Nesunku pastebėti ir įrodyti, kad kai $n=p$, kur p – koks nors pirminis skaičius (pavyzdžiui, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ir t. t.), tai $\varphi(p) = p-1$, nes tik tuo atveju, kai $k=p$, $\text{DBD}(k, p) = \text{D}(p, p) = p$, o visais kitais atvejais, kai $k < p$, $\text{DBD}(k, p) = 1$.

Rasime dviejų pirminių skaičių p_1 ir p_2 sandaugos $p_1 \cdot p_2$ Oilerio funkcijos $\varphi(n) = \varphi(p_1 \cdot p_2)$ reikšmę. Iš dviejų skirtingų pirminių skaičių p_1 ir p_2 vienas bus didesnis už kitą. Tarkime, jog $p_2 > p_1$. Tuomet natūraliųjų skaičių seką nuo 1 iki $n = p_1 \cdot p_2$ sudarys skaičiai 1, 2, ..., $p_1 - 1$, p_1 , $p_1 + 1$, ..., $p_2 - 1$, p_2 , ..., $(p_1 - 1)p_2$, ..., $(p_2 - 1)p_1$, ..., $p_1 p_2$. Šioje sekoje bus p_2 skaičių, dalių iš p_1 (tai skaičiai p_1 , $2p_1$, $3p_1$, ..., $(p_2 - 1)p_1$, $p_1 p_2$) ir p_1 skaičių, dalių iš p_2 (tai skaičiai p_2 , $2p_2$, $3p_2$, ..., $(p_1 - 1)p_2$, $p_1 p_2$), tarp kurių skaičius $p_1 p_2$ pasikartos. Taigi, sekoje 1, 2, ..., $p_1 p_2$ tik $p_1 + p_2 - 1$ skaičių turės su skaičiumi $n = p_1 p_2$ didesnius už 1 DBD. Todėl $\varphi(p_1 \cdot p_2) = p_1 p_2 - p_1 - p_2 + 1 = p_2(p_1 - 1) - (p_1 - 1) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) = \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2)$.

Analogiškai galima įrodyti, jog **ši formulė galioja ne tik pirminiems skaičiams, bet ir bet kuriems skaičiams m ir n , neturintiems didesnių už 1 bendrų daliklių**, t. y. galima įrodyti teoremą, jog, **jei $\text{DBD}(m, n) = 1$, tai $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$** . Formulė $(p_1 \neq p_2) \Rightarrow [\varphi(p_1 \cdot p_2) = \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2)]$ yra dalinis formulės $[\text{DBD}(m, n) = 1] \Rightarrow [\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)]$ atvejis.

Kadangi daugybos operacija „ $\cdot$ “ yra asociatyvi operacija, tai $\varphi(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = \varphi(p_1 \cdot (p_2 \cdot p_3)) = \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2 \cdot p_3) = \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2) \cdot \varphi(p_3)$, ir, bendrai, $\varphi\left(\prod_{i=1}^r p_i\right) = \prod_{i=1}^r \varphi(p_i) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1)$.

Remiantis lygybe $\varphi(p^n) = p^n - |\{k \in \mathbb{N} / (1 \leq k \leq p^n) \wedge (\text{DBD}(k, p) = p)\}|$, nesunku įrodyti, jog $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Pavyzdžiui, aibėje $\{1, 2, 3, \dots, p, p+1, \dots, 2p, \dots, 3p, \dots, p^2\}$ tik skaičiai $p, 2p, 3p, \dots, pp$ turi su skaičiumi p bendrąjį didžiausią daliklį didesnę už 1. Todėl $|\{k \in \mathbb{N} / (1 \leq k \leq p^2) \wedge (\text{DBD}(k, p) = p)\}| = p$, iš kur išplaukia $\varphi(p^2) = p^2 - p$. Analogiškai gauname, jog aibėje $\{1, 2, 3, \dots, p^3\}$ yra p^2 skaičių $p, 2p, \dots, p^2, p^2 + p, p^2 + 2p, \dots, p^3$, dalių skaičiui p , iš kur $\varphi(p^3) = p^3 - p^2$ ir t. t.

Kai skaičius $n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$, tai iš funkcijos $\varphi(n)$ multiplikatyvumo išplaukia, jog $\varphi(n) = \varphi(p_1^{n_1}) \cdot \varphi(p_2^{n_2}) \cdot \varphi(p_3^{n_3}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_r^{n_r}) = (p_1^{n_1} - p_1^{n_1-1}) \cdot (p_2^{n_2} - p_2^{n_2-1}) \cdot (p_3^{n_3} - p_3^{n_3-1}) \cdot \dots \cdot (p_r^{n_r} - p_r^{n_r-1})$.

Šių Oilerio funkcijos savybių, t. y. šios tas savybes apibendrinančios formulės, pilnai pakanka, kad bet kuriai n reikšmei būtų galima apskaičiuoti funkcijos $\varphi(n)$ reikšmę.

Pavyzdžiui, $\varphi(5) = 5 - 1 = 4$, ką jau esame radę tiesiogiai; $\varphi(6) = \varphi(2 \cdot 3) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 2$; $\varphi(7) = 7 - 1 = 6$; $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 4$; $\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^2 - 3 = 6$; $\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = (2 - 1) \cdot (5 - 1) = 4$; $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$; $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = (2^2 - 2) \cdot (3 - 1) = 4$; $\varphi(13) = 13 - 1 = 12$; $\varphi(14) = 2 \cdot 7 = (2 - 1) \cdot (7 - 1) = 6$; $\varphi(15) = 3 \cdot 5 = 8$; $\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$ ir t. t.

Taigi, Oilerio funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė $\mathbb{N}$, nes kiekvienam natūraliam skaičiui n egzistuoja apibrėžta funkcijos $\varphi(n)$ reikšmė. Nors $\varphi(n)$ taip pat priklauso $\mathbb{N}$, tačiau $\varphi(n)$ reikšmių aibė nesutampa su $\mathbb{N}$ ir ją aprašyti nėra lengva, nors apskaičiuoti $\varphi(n)$ reikšmę kiekvienam n nėra sunku.

Pavyzdžiui, $\varphi(720) = \varphi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = (2^4 - 2^3) \cdot (3^2 - 3) \cdot (5 - 1) = 8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$; $\varphi(721) = \varphi(7 \cdot 103) = (7 - 1) \cdot \times (103 - 1) = 612$; $\varphi(719) = (719 - 1) = 718$.

Taigi, $\varphi(n)$ reikšmė, keičiantis n , gali gana stipriai „šokinėti“, „peršokdama“ kai kurias reikšmes, priklausančias $\mathbb{N}$, ir net niekada nepatekdama į jas. Palieku skaitytojui pagalvoti, kaip atrodo Oilerio funkcijos vaizdas ir ar priklauso jam skaičiai 3, 5 ir 7, o taip pat, ar egzistuoja tokie to vaizdo taškai, kurie turi tik po vieną pirmavaizdį.

Dar „įmantresnį“ sąryšį vaizduoja **Dirichlė (P. Dirichlet) funkcija**, nors jos apibrėžimo ir funkcijos reikšmių sritys atrodo labai paprastai: $X = \mathbb{R}$, $Y = \{0, 1\}$.

Dirichlė funkciją galima apibrėžti taip:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in \mathbb{Q}, \text{ t. y., kai } x - \text{racionalus skaičius,} \\ 0, & \text{kai } (x \in \mathbb{R}) \wedge (x \notin \mathbb{Q}), \text{ t. y., kai } x - \text{iracionalus skaičius.} \end{cases}$$

Šią funkciją galima apibrėžti ir formule $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(m! \pi x))^{2n}$, rodančia, jog Dirichlė funkcija priklauso antrajai Bero klasifikacijos funkcijų klasei.

Siūlyčiau skaitytojui pabandyti įsivaizduoti Dirichlė funkcijos „grafiką“. Juk ši funkcija yra trūki kiekviename savo apibrėžimo srities taške!

Vėlesniuose šios mokymo priemonės skyreliuose mums teks susidurti ne tik su realaus, bet ir su kompleksinio kintamojo funkcijomis, turinčiomis ne tik po vieną, bet ir po kelis argumentus, o taip pat ir su nepilnai apibrėžtomis funkcijomis.

Su realaus kintamojo kelių argumentų funkcijomis mes jau esame susidūrę, sudarydami objekto išorinio modelio išėjimų ir perėjimų funkcijas, o taip pat 1.9.1.4. skyrelyje, nagrinėdami bėgančias ir stovinčias bangas.

Kai sudarant funkciją $f: A \rightarrow B$, aibė A yra projektuojama į aibę B taip, kad kiekvieno funkcijos f apibrėžimo srities elemento $a \in A$ vaizdas $f(a) = b$ turi tik vieną pirmavaizdį $f^{-1}(b)$ (žiūr. 101 „b“ pav.), tai tokią funkciją f vadina **injektyviaja funkcija**, arba tiesiog **injekcija**. Injekcija $f(a) = b$ **formaliai apibrėžiama** taip: jei funkcija $f(a)$ yra injekcija, tai formulė $\forall a_i \in A \quad \forall a_j \in A \quad \forall_{f(a_i) \in B} [(f(a_i) = b) \wedge (f(a_j) = b) \Rightarrow (a_i = a_j)]$ yra teisinga formulė.

Šio apibrėžimo kvadratinuose skliausteliuose esančią implikaciją $(f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow (a_1 = a_2)$, reiškiančią, jog iš funkcijos, esančios injekcijos reikšmių lygybės išplaukia jos argumentų lygybė, galima pakeisti jai ekvivalenčia implikacija $(a_1 \neq a_2) \Rightarrow (f(a_1) \neq f(a_2))$, reiškiančią, jog iš argumentų nelygybės išplaukia injekcijų nelygybė.

Kai funkcijos $f: A \rightarrow B$ apibrėžimo sritis A projektuojasi į aibę B taip, kad funkcijos vaizdas $f(A)$ sutampa su visa aibe B (t. y. kai $B_f = B$) ir todėl kiekvienam aibės B elementui b aibėje A visada galima surasti bent vieną tokį elementą $a \in A$, kad $f(a) = b$, tai tokią funkciją vadina **siurjektyviaja funkcija**, arba tiesiog **siurjekcija** (žiūr. 101 „c“ pav.).

Kai funkcija $f: A \rightarrow B$ yra kartu ir injekcija ir siurjekcija, tai tokią funkciją vadina **bijektyviaja funkcija**, arba tiesiog **bijekcija** (žiūr. 101 „d“ pav.).

Kai funkcija yra injekcija, tai kiekvienam aibės B_f sudarytos iš aibės A_f elementų a vaizdų $f(a) = b$, elementui b egzistuoja funkcijos $f(a)$ atžvilgiu atvirkštinė funkcija $f^{-1}(b) = a$.

Kai funkcija $f: A \rightarrow B$ yra bijekcija, tai atvirkštinė funkcijai $f(a) = b$ funkcija $f^{-1}(b) = a$ egzistuoja kiekvienam aibės B elementui b .

Bijekcijos pavyzdžiu gali būti tapatumo funkcija $\text{id}_A: A \rightarrow A$, kuri apibrėžiama taip: $\forall a \in A$ ($\text{id}_A(a)=a$).

Bet kuri tiesinė funkcija $f: X \rightarrow Y$, išreiškiama formule $y=kx+b$, kurioje $x \in X=\mathbb{R}$, $y \in Y=\mathbb{R}$, $k=\text{const}$, $k \in \mathbb{R}$, $b=\text{const}$, $b \in \mathbb{R}$, taip pat yra bijekcija.

Funkcija $\psi_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $\psi_n(a)=K_n(a)$, kurioje $\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė, $\mathbb{Z}_n$ – jau mūsų nagrinėtoji likinių klasių moduliui n aibė (sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ faktoriaibė ekvivalentumo sąryšio $\equiv(\text{mod } n)$ atžvilgiu), $K_n(a)$ – elemento $a \in \mathbb{Z}$ ekvivalentumo klasė ekvivalentumo sąryšio $\equiv(\text{mod } n)$ atžvilgiu (t. y. $K_n(a)=\{a+nk/k \in \mathbb{Z}\}$), yra surjekcija, nes bet koks sveikasis skaičius a , priklausantis aibei $\mathbb{Z}$, priklauso ir $\bar{a}$, t. y. funkcijos reikšmių sričiai. Tačiau funkcija $\psi_n(a)$ nėra bijekcija, nes ji nėra injekcija, kadangi $\psi_n(a)=\psi_n(a+n)$, nors $a \neq a+n$.

Ką tik nagrinėtoji Oilerio funkcija $\psi(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, skaičiuojanti aibėje $\{1, 2, \dots, n\}$ esančių natūraliųjų skaičių k , neturinčių su skaičiumi n bendrų daliklių, didesnių už 1, skaičių, nėra nei injekcija (nes, pavyzdžiui, $\psi(1)=\psi(2)$, $\psi(3)=\psi(4)$), nei surjekcija, nes tos funkcijos vaizdas yra tik tikrinis aibės $\mathbb{N}$ poaibis ir egzistuoja skaičiai $b \in \mathbb{N}$, neturintys pirmavaizdžių (pavyzdžiui $\psi^{-1}(3)=\emptyset$).

Funkcija $f_F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, priskirianti kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ atitinkamą **Fibonačio skaičių** $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ nėra pilnai injektyvi, nes $F_1=F_2$ (t. y. $f_F(1)=f_F(2)=1$, kai $1 \neq 2$), nors toliau, kai $n > 2$, ši funkcija tenkina injektyvumo sąlygą. Taigi, funkciją $f_F(n)=F_n$ yra beveik injekcija, bet vis dėlto ne injekcija.

Ši funkcija nėra surjekcija, nes, pavyzdžiui, skaičiai 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15 ir t. t. nėra Fibonačio skaičiai, t. y. šie aibės $B=\mathbb{N}$ elementai neturi pirmavaizdžių aibėje $A=\mathbb{N}$.

Teorinėje (aksiomatinėje) aritmetikoje gana svarbų vaidmenį vaidina **funkcija succ: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$** , kuri apibrėžiama formule $\text{succ}(n)=n+1$. Ši funkcija „žinodama“ sekos, sunumeruotos natūriniais skaičiais, eilinio nario numerį n , „išrenka“ kitą, esantį tuoj pat po jo tos sekos narį, turintį numerį $n+1$. Funkcija $\text{succ}(n)$ yra injektyvi, nes kiekvienam skaičiui n ji „išrenka“ vieną ir tik vieną skaičių $n+1$. Tačiau ši funkcija nėra bijekcija, nes ji nevisiškai tenkina reikalavimus, keliamus surjekcijoms. Tiesa, ji skiriasi nuo funkcijos, generuojančios Fibonačio skaičius, kuri taip pat nėra surjekcija todėl, kad jos vaizdų aibėje $B=\mathbb{N}$ egzistuoja be galo daug skaičių, neturinčių pirmavaizdžių aibėje $A=\mathbb{N}$, kai tuo tarpu funkcijos $\text{succ}(n)$ reikšmių aibėje B_F trūksta tik vieno skaičiaus, būtent skaičiaus 1, kad B_F sutaptų su $B=\mathbb{N}$. Kitaip tariant, funkcija $\text{succ}(n)=n+1$ yra beveik surjekcija, bet vis dėlto ne surjekcija, nes skaičius $1 \in \mathbb{N}$ neturi pirmavaizdžio, priklausančio $\mathbb{N}$: $\text{succ}^{-1}(1)=\emptyset$.

Su funkcijomis galima atlikti gana daug įvairių operacijų. Tarp jų gana dažna yra **funkcijų kompozicijos (superpozicijos) operacija**, kartais vadinama dar ir **funkcijų „sandaugos“ operacija**. Apibrėšime šią operaciją.

Tarkime, jog turime dvi funkcijas: $f: A \rightarrow B$ ir $\varphi: B \rightarrow C$. Šių funkcijų kompozicija φf (superpozicija $\varphi(f(a))=c$) vadinsime funkciją $\varphi f = \varphi(f(a)): A \rightarrow C$, projektuojančią aibės A elementus per tarpinę aibę B į aibės C elementus. Kitaip tariant, funkcijos φf reikšmės (aibės C elemento c), atitinkančios duotąjį argumentą $a \in A$, nustatymas yra **dvietaipė procedūra**: 1) pradžioje funkcija $f: A \rightarrow B$ „suranda“ aibėje B elementą $b=f(a)$, atitinkantį duotąjį funkcijos f argumentą $a \in A$; 2) po to funkcija $\varphi: B \rightarrow C$, pasinaudodama aibės B elementu $b=f(a)$ kaip argumentu, aibėje C suranda elementą $c=\varphi(b)=\varphi(f(a))$ – funkcijų f ir φ kompozicijos $\varphi f = \varphi(f(a))$ rezultatą.

Taigi, jei $f: A \rightarrow B$ ir $\varphi: B \rightarrow C$, tai $\varphi f = \varphi(f(a)): A \rightarrow C$.

Iš funkcijų vienareikšmiškumo savybės ir funkcijų kompozicijos operacijos apibrėžimo išplaukia **funkcijų kompozicijos (superpozicijos) asociatyvumas**: jei $f: A \rightarrow B$, $\varphi: B \rightarrow C$ ir $\psi: C \rightarrow D$, tai $(\psi\varphi)f = \psi(\varphi f) = \psi\varphi f$.

Iš tikrųjų, juk visiškai tas pats:

1) ar mes pradžioje nustatysime sąryšį tarp aibių B ir D elementų b ir d , pasinaudodami aibės C elementais c kaip tarpiniais, o po to, pasinaudodami aibės B elementais b kaip tarpiniais, nustatysime sąryšį tarp aibės A elementų a ir aibės D elementų d , t. y. gausime funkciją $(\psi\varphi)f: A \rightarrow D$;

2) ar mes pradžioje, pasinaudodami aibės B elementais b kaip tarpiniais, nustatysime sąryšį tarp aibės A elementų a ir aibės C elementų c , o po to, pasinaudodami aibės C elementais c kaip tarpiniais, surasime, kokie aibės D elementai d atitinka aibės A elementus a , t. y. gausime funkciją $\psi(\varphi f): A \rightarrow D$.

Funkcijos $(\psi\varphi)f$ ir $\psi(\varphi f)$ dėl funkcijų f , φ ir ψ vienareikšmiškumo bus vienareikšmiškos ir lygios, todėl galima užrašyti: $(\psi\varphi)f = \psi(\varphi f) = \psi\varphi f$, o taip pat $\psi(\varphi(f(a)))=d$.

Vienos ir tos pačios funkcijos $\psi\varphi f$ gavimo procedūrą, naudojantis kompozicijomis $(\psi\varphi)f$ ir $\psi(\varphi f)$, vaizduoja 102 pav., kuriame parodyti funkcijų kompozicijos (superpozicijos) taikymo etapai abiem variantams.

$$\begin{array}{ccc}
 (\psi\varphi)f & & \psi(\varphi f) \\
 ((C \rightarrow D)(B \rightarrow C))(A \rightarrow B) & (C \rightarrow D)((B \rightarrow C)(A \rightarrow B)) \\
 (B \rightarrow D)(A \rightarrow B) & (C \rightarrow D)(A \rightarrow C) \\
 A \rightarrow D & A \rightarrow D
 \end{array}$$

102 pav.

Funkcijų kompozicijos asociatyvumo savybę pailiustruosiu, lygindamas kompozicijų (OS)F ir O(SF) rezultatus, kai O – jau nagrinėtoji Oilerio funkcija $O: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, žymima $\varphi(n)$; S – taip pat jau nagrinėtoji funkcija $\text{succ}(n)=n+1$; F – irgi nagrinėta funkcija $f_F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pervedanti Fibonačio skaičiaus numerį n į to skaičiaus reikšmę F_n , kurią galima apibrėžti šiomis formulėmis: 1) $F_1=F_2=1$; 2) kai $n \geq 3$, tai $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

Iš aibės $A=\mathbb{N}$ paėmę pirmuosius dešimt elementų, apskaičiuosime funkcijų O, S ir F reikšmes, o po to ir jų kompozicijų reikšmes. Skaičiavimo rezultatus suvesime į 42-ją lentelę.

42. lentelė

n	O	S	F	OS	SF	(OS)F	O(SF)	(OS)F-O(SF)
1	1	2	1	1	2	1	1	0
2	1	3	1	2	2	1	1	0
3	2	4	2	2	3	2	2	0
4	2	5	3	4	4	2	2	0
5	4	6	5	2	6	2	2	0
6	2	7	8	6	9	6	6	0
7	6	8	13	4	14	6	6	0
8	4	9	21	6	22	10	10	0
9	6	10	34	4	35	24	24	0
10	4	11	55	10	56	24	24	0
11	10	12	89	4	...	...	...	...
12	4	13	144	12	...	...	...	...
13	12	14	233	6	...	...	...	...
14	6	15	377	8	...	...	...	...
15	8	16	610	8	...	...	...	...
16	8	17	987	16	...	...	...	...
17	16	18	1597	6	...	...	...	...
18	6	19	2584	18	...	...	...	...
19	18	20	4181	8	...	...	...	...
20	8	21	6765	12	...	...	...	...
21	12	22	10946	10	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

42-sios lentelės analizė patvirtina teiginį apie funkcijų kompozicijos (superpozicijos) asociatyvumą.

Nesunku įrodyti, kad **funkcijų kompozicija ne visada komutatyvi**. Tam pakanka vieno pavyzdžio. Tokiu pavyzdžiu galėtų būti jau minėtų dviejų funkcijų O ir F kompozicijos OF ir FO, kurių reikšmių apskaičiavimo rezultatus vaizduoja 43-oji lentelė.

43. lentelė

n	O	F	OF	FO	OF-FO
1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	0
3	2	2	1	1	0
4	2	3	2	1	1
5	4	5	4	3	1
6	2	8	4	1	3
7	6	13	12	8	4
8	4	21	12	3	9
9	6	34	16	8	8
10	4	55	40	3	37
...	...	...	...	...	...

Kaip matyti iš 43-osios lentelės, $OF \neq FO$, kas ir įrodo funkcijų kompozicijos nekomutatyvumą.

Naudodamiesi funkcijų kompozicija, galime sukonstruoti tokį funkcijos, atvirkštinės duotajai funkcijai f, apibrėžimą, kuris, atitinkdamas, mūsų jau naudotą intuityviai suvokiamą atvirkštinės funkcijos sąvoką, yra gana bendras, t. y. atitinkantis bet kokio atvirkštinio elemento (t. y. ne tik funkcijos) apibrėžimą.

Priminsime, kad funkcija id_A yra tapatumo funkcija, projektuojanti kiekvieną aibės A elementą į patį save, t. y. $\forall_i (\text{id}_A(a_i)=a_i)$, o funkcija id_B yra tapatumo funkcija, projektuojanti kiekvieną aibės B elementą į patį save, t. y. $\forall_j (\text{id}_B(b_j)=b_j)$.

Tarkime, kad duota **funkcija f: A→B**, kuri yra tokia, jog **egzistuoja funkcija g: B→A** ir tų funkcijų kompozicijos $fg=\text{id}_B$ ir

$gf=id_A$. Tuomet funkcija g vadinama funkcija, atvirkštine funkcijai f , ir žymima $g=f^{-1}$.

Iš funkcijų vienareikšmiškumo išplaukia, kad, jei kokia nors funkcija f turi atvirkštinę funkciją f^{-1} , tai tokia funkcija f^{-1} gali būti tik viena.

Tačiau ne kiekviena funkcija turi atvirkštinę funkciją. Pavyzdžiui, Oilerio funkcija $\varphi(n)$ neturi atvirkštinės funkcijos, nes, žinodami funkcijos $\varphi(n)$ reikšmę, mes negalime vienareikšmiškai nustatyti tos reikšmės pirmavaizdį (pavyzdžiui, kai $\varphi(n_1)=1$, tai n_1 gali būti lygus ir 1, ir 2, kai $\varphi(n_2)=2$, tai n_2 gali būti lygus ir 3, ir 4, ir 6). Neturi atvirkštinės funkcijos ir Dirichlė funkcija, nes kai Dirichlė funkcijos reikšmė yra lygi 0, tai pirmavaizdžiu gali būti be galo daug iracionalių skaičių, priklausančių $\mathbb{R}$, o kai Dirichlė funkcija lygi 1, tai pirmavaizdžiu gali būti be galo daug racionalių skaičių, priklausančių aibei $\mathbb{Q}$.

Nesunku įrodyti, kad funkcija $f: A \rightarrow B$ turi atvirkštinę funkciją $f^{-1}: B \rightarrow A$ visuose aibės B taškuose tada ir tik tada, kada funkcija $f: A \rightarrow B$ yra bijekcija. Šio beveik akivaizdaus teiginio įrodymą palieku skaitytojui.

Skaitytojui palieku ir šių teiginių įrodymą:

- 1) jei kokios nors funkcijos yra injektorius, tai ir jų kompozicija yra injektorius;
- 2) jei kokios nors funkcijos yra surjektorius, tai ir jų kompozicija yra surjektorius;
- 3) jei kokios nors funkcijos yra bijektorius, tai ir jų kompozicija yra bijektorius.

Galima taip pat įrodyti teoremą, kad jei funkcijos $f: A \rightarrow B$ ir $\varphi: B \rightarrow C$ yra bijektorius, tai galioja lygybė $(\varphi f)^{-1} = f^{-1} \varphi^{-1}$.

Įrodysiu šią teoremą, remdamasis funkcijų kompozicijos asociatyvumu, teorema apie tai, kad bijekcija visada turi atvirkštinę funkciją, o taip pat atvirkštinės funkcijos apibrėžimu bei tapatumo funkcijų savybėmis.

Kadangi funkcijos $f: A \rightarrow B$ ir $\varphi: B \rightarrow C$ yra bijektorius, tai jos turi atvirkštines funkcijas $f^{-1}: B \rightarrow A$ ir $\varphi^{-1}: C \rightarrow B$, kurios tenkina lygybes: $ff^{-1}=id_B$, $f^{-1}f=id_A$, $\varphi\varphi^{-1}=id_C$, $\varphi^{-1}\varphi=id_B$.

Sudarysime kompozicijas $(\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1})$ ir $(f^{-1}\varphi^{-1})(\varphi f)$ ir apskaičiuosime jų rezultatus:

- 1) $(\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1}) = \varphi(f f^{-1}) \varphi^{-1} = \varphi id_B \varphi^{-1} = (\varphi id_B) \varphi^{-1} = \varphi \varphi^{-1} = id_C$;
- 2) $(f^{-1}\varphi^{-1})(\varphi f) = f^{-1}(\varphi^{-1}\varphi) f = f^{-1} id_B f = (f^{-1} id_B) f = f^{-1} f = id_A$.

Iš (1) ir (2) išplaukia, kad funkcijos $f\varphi: A \rightarrow C$ ir $f^{-1}\varphi^{-1}: C \rightarrow A$ yra atvirkštinės viena kitai, todėl $(\varphi f)^{-1} = f^{-1}\varphi^{-1}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Yra gana daug funkcijų, kurios, nebūdamos bijekcijomis, turi atvirkštines funkcijas, tačiau ne visoms savo reikšmių srities reikšmėms. Pavyzdžiui, jau minėtoji funkcija $f_F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, generuojanti Fibonačio skaičius, neturi atvirkštinės funkcijos, kai $f_F(n)=F_n=1$, nes tuomet n gali būti ir 1 ir 2. Visoms kitoms F_n reikšmėms egzistuoja vienas ir tik vienas funkcijos $f_F(n)=F_n$ pirmavaizdis – Fibonačio skaičiaus numeris n – ir todėl egzistuoja atvirkštinė funkcija F . Tačiau, nors visos funkcijos $f_F(n)=F_n$ reikšmės priklauso $\mathbb{N}$, ne kiekvienas skaičius iš $\mathbb{N}$ yra Fibonačio skaičius. Todėl lygtis $f_F(n)=m$, kur $m \in \mathbb{N}$, ne visada turi sprendinį ir todėl sakoma, jog tokiaime taške m funkcija $f_F(n)=F_n$ neturi atvirkštinės funkcijos. Pavyzdžiui, lygtis $f_F(n)=12$ neturi sprendinio, kai tuo tarpu lygtys $f_F(n_1)=8$ ir $f_F(n_2)=13$ turi sprendinius $n_1=6$ ir $n_2=7$. Todėl $f_F^{-1}(12)=\emptyset$, $f_F^{-1}(8)=6$ ir $f_F^{-1}(13)=7$.

Neturi baigtinio sprendinio ir lygtis $\frac{1}{x}=0$, todėl funkcija $y=\frac{1}{x}$ neturi baigtinio pirmavaizdžio, kai $y=0$. Be to ji nėra apibrėžta taške $x=0$, nes tame taške ji neturi baigtinio vaizdo. Visoms kitoms $x \in \mathbb{R}$ reikšmėms, išskyrus $x=0$, funkcija $y=\frac{1}{x}$ egzistuoja ir turi atvirkštinę funkciją $f^{-1}: Y \rightarrow X$, t. y. funkciją $x=\frac{1}{y}$, kuri yra apibrėžta visoms $y \in \mathbb{R}$ reikšmėms, išskyrus $y=0$. Taigi skaičiai $x=0$ ir $y=0$ nepriklauso nei

funkcijos $y=\frac{1}{x}$, nei jai atvirkštinės funkcijos $x=\frac{1}{y}$, nei apibrėžimo, nei reikšmių sritims X_f ir Y_f . Kitaip

variant, vaizduojant sąryšius tarp aibių $X=\mathbb{R}$ ir $Y=\mathbb{R}$ elementų, atitinkančius funkcijas $y=\frac{1}{x}$ ir $x=\frac{1}{y}$, tokio tipo paveikslėliais, kokie pateikti 101 pav., visi aibių X ir Y elementai, išskyrus elementus $x=0$ ir $y=0$, būtų surišti abipusiais vienareikšmiais ryšiais, o elementai $x=0$ ir $y=0$ neturėtų nė vieno (nei išinančio, nei ateinančio) ryšio.

Naudojantis funkcijos sąvoka, į algebrinių struktūrų teorijos leksikoną galima įvesti labai svarbią tai teorijai binarinės algebrinės operacijos sąvoką.

Binarinė algebrinė operacija, apibrėžta aibėje A ir žymima $a_i * a_j$, kur $a_i \in A$, $a_j \in A$, $a_i * a_j = a_k \in A$, o simbolis „*“ reiškia bet kokios algebrinės operacijos su aibės A elementais ženklą

(pavyzdžiui, algebrinės skaičių ar vektorių sudėties ženklą „+“, algebrinės skaičių ar matricų daugybos ženklą „·“, vektorių vektorinės daugybos ženklą „×“, teiginių disjunkcijos ženklą „∨“, keitinių kompozicijos ženklą „o“, aibių sankirtos ženklą „∩“ ir pan.), **vadinsime funkciją $f: A \times A \rightarrow A$, projektuojančią aibės A elementų, vadinamų operacijos $*$ operandais, porą į vieną aibės A elementą, vadinamą operacijos rezultatu.** Algebrinė operacija „ $*$ “, kuri, operuodama su operandais $a_i \in A$ ir $a_j \in A$, duoda rezultatą $a_k \in A$ – atitinkamą poros aibės A elementų a_i ir a_j projekciją į vieną aibės A elementą, paprastai yra **vaizduojama lygybe $a_i * a_j = a_k$** . Kartais ta lygybė užrašoma **operatorinėje formoje: $*(a_i, a_j) = a_k$** . Tuomet operacijos ženklą „ $*$ “ vadina **operatorium** (binariniu operatorium). **Kai operacija „ $*$ “ yra asociatyvi, t. y., kai galioja lygybė $(a_i * a_j) * a_k = a_i * (a_j * a_k)$, tai binarinis operatorius „ $*$ “ gali tapti n -arinu.** Tuomet algebrinę operaciją, susidedančią iš eilės besikartojančių binarinių operacijų „ $*$ “, galima pavaizduoti paprasčiau: vietoj $((\dots((a_1 * a_2) * a_3) * \dots * a_n))$ rašyti $a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n = \prod_{i=1}^n a_i$.

Binarinių algebrinių operacijų pavyzdžiai:

1) algebrinės skaičių $a_i \in \mathbb{R}$ ir $a_j \in \mathbb{R}$ sudėties „+“ operacija $a_i + a_j = a_k \in \mathbb{R}$ yra funkcija $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, projektuojanti operacijos „+“ operandų a_i ir a_j , vadinamų dėmenimis, porą į operacijos rezultatą $a_i + a_j = a_k$, vadinamą tų operandų suma;

2) skaičių $a_i \in \mathbb{R}$ ir $a_j \in \mathbb{R}$ algebrinės daugybos „·“ operacija yra funkcija $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, projektuojanti operandų a_i ir a_j , vadinamų dauginamaisiais, reikšmių porą į operacijos rezultatą $a_i \cdot a_j = a_k \in \mathbb{R}$, vadinamą sandauga.

Dabar jau galima įvesti vieną svarbiausių šio skyrelio sąvokų – algebrinės struktūros sąvoką.

Kaip jau matėme šio skyrelio pradžioje, aibė A su joje egzistuojančiu apibrėžtu binariniu sąryšiu $\mathfrak{R}$ gali būti kokios nors sistemos S vidinės struktūros modeliu. **Todėl aibę A su joje apibrėžtais vienu ar keliais binariniais sąryšiais $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k$ būtų galima vadinti algebrine struktūra**, ir mes ją vadinsime **algebrine struktūra plačiąja prasme**.

Tačiau **algebrinių struktūrų teorijoje priimta vadinti algebrinėmis struktūromis** siauresnę jų klasę – **aibes su jose apibrėžtomis viena ar keliomis algebrinėmis operacijomis**.

Šitaip apibrėžta algebrinių struktūrų aibė yra algebrinių struktūrų plačiąja prasme tikrinis poaibis, nes:

1) kiekviena algebrinė operacija pagal apibrėžimą yra funkcija, o kiekvieną funkciją galima laikyti sąryšiu, todėl **kiekviena algebrinė struktūra siaurąja prasme yra algebrinė struktūra plačiąja prasme**;

2) ne kiekvienas binarinis sąryšis, apibrėžtas aibėje A , yra tos aibės elementų funkcija, kadangi sąryšyje dalyvaujantys aibės A elementai a gali būti surišti taip, kad kiekvienas elementas būtų surištas ne su vienu, o su keliais tos aibės elementais, todėl **ne kiekviena algebrinė struktūra plačiąja prasme yra algebrinė struktūra siaurąja prasme**.

Tačiau bet kurį binarinį sąryšį, tame tarpe ir sąryšį, nesantį funkcija, galima aprašyti naudojantis funkcijomis.

Pavyzdžiui, kiekvieną binarinį sąryšį $\mathfrak{R}$ aibėje A , nepriklausomai nuo to, su keliais elementais būtų surištas kiekvienas aibės A elementas (ar aibių A ir B elementai), galima vienareikšmiškai aprašyti logine funkcija $f_{\mathfrak{R}}: A \times A \rightarrow \{0, 1\}$ (arba logine funkcija $f_{\mathfrak{R}}: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$), nes, kaip jau buvo parodyta šio skyrelio pradžioje, kiekvieną binarinį sąryšį $\mathfrak{R}$ galima aprašyti matrica, įrašant į tos matricos langelius vienetą arba nulį, žyminčius orientuoto ryšio nuo elemento, atitinkančio to langelio eilutę, į elementą, atitinkantį to langelio stulpelį, buvimą ar nebuvimą. Tiesa, funkcija $f_{\mathfrak{R}}$ nebus tokio tipo funkcija, kuri projektuotų aibės A elementų poras į tos pačios aibės elementus, nes funkcijos $f_{\mathfrak{R}}$ reikšmės yra loginės reikšmės, nesančios aibės A elementais, tačiau bendrame vieno argumento funkcijos $f: A \rightarrow B$ apibrėžime nėra reikalavimo, kad aibių A ir B elementai turėtų tą pačią prigimtį ir priklausytų tai pačiai aibei, sudarydami jos poaibius. Taigi, į aibę A , struktūrizuotą sąryšiu $\mathfrak{R}$, visuomet galima įvesti loginę funkciją $f_{\mathfrak{R}}$, aprašančią tą sąryšį, ir tokiu būdu transformuoti aibę A su sąryšiu $\mathfrak{R}$ tarp jos elementų į teiginių $a_i \mathfrak{R} a_j$ aibę, turinčią $|A| \cdot |A| = |A|^2$ elementų, iš kurių tiek teiginių bus lygūs 1, kiek aibėje A su sąryšiu $\mathfrak{R}$ yra orientuotų vienpusių ryšių tarp tos aibės elementų.

Gautoje teiginių $a_i \mathfrak{R} a_j$ aibėje bus apibrėžta bet kuri klasikinės teiginių algebros operacija ir todėl tų teiginių aibę bus galima laikyti algebrine struktūra siaurąja prasme. Iš kitos gi pusės, abi aibės: aibė A su sąryšiu $\mathfrak{R}$ ir teiginių $a_i \mathfrak{R} a_j$ aibė yra vienos ir tos pačios struktūros S (vieno ir to paties sąryšio $\mathfrak{R}$) izomorfiški modeliai. Todėl galima sakyti, jog, pereidami nuo struktūros S modelio, kurį sudaro aibė A su binariniu sąryšiu $\mathfrak{R}$, prie jos modelio, kurį sudaro teiginių $a_i \mathfrak{R} a_j$ aibė su jų loginėmis reikšmėmis, vaizduojančiomis ryšių tarp aibės A elementų sąryšyje $\mathfrak{R}$ buvimą bei nebuvimą, mes **algebrinę struktūrą plačiąja prasme transformuojame į izomorfišką algebrinę struktūrą siaurąja prasme**. O

tai reiškia, jog visas algebrines struktūras plačiąja prasme galima nagrinėti kaip algebrines struktūras siaurąja prasme: vienos iš jų iškart gali būti pripažintos esančios algebrinėmis struktūromis siaurąja prasme, kitos gali būti į jas suvestos kaip tik aprašytu būdu.

Kiekvieną binarinę sąryšį $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$ galima aprašyti funkcijomis ir šiek tiek kitu būdu. Galima sudaryti visų aibės A poaibių aibę 2^A ir visų aibės B poaibių aibę 2^B . Nepriklausomai nuo to, kokie orientuoti vienpusiai ryšiai eitų sąryšyje $\mathfrak{R}$ iš aibės A elementų į aibės B elementus, juos visus vienareikšmiškai galima aprašyti funkcija $f_{\mathfrak{R}A \rightarrow B}: A \rightarrow 2^B$, nes kiekvienam $a \in A$ aibėje 2^B visuomet atsiras vienas ir tik vienas jos elementas – aibės B poaibis, kuris sutaps su tais aibės B elementais, į kuriuos sąryšis $\mathfrak{R}$ „projektuoja“ tą aibės A elementą a . Taip pat nepriklausomai nuo to, kaip aibės B elementai b „projektuoti“ į aibės A elementus sąryšyje $\mathfrak{R}$, visuomet galima sudaryti tokią funkciją $f_{\mathfrak{R}B \rightarrow A}: B \rightarrow 2^A$, kuri vienareikšmiškai aprašytų visus aibės B elementų orientuotus vienpusius ryšius su aibės A elementais, t. y. su tos aibės poaibiais, esančiais aibės 2^A elementais. Kadangi aibės A elementai a gali būti interpretuojami kaip tos aibės poaibiai, turintys savo sudėtyje tik po vieną aibės A elementą, tai ir aibės A elementus a galima laikyti aibės 2^A elementais. Analogiškai, aibės B elementus taip pat galima laikyti aibės 2^B elementais. Pakeitę sąryšio $\mathfrak{R}$ ryšius tarp elementų $a \in A$ ir elementų $b \in B$ atitinkamais ryšiais tarp aibių 2^A ir 2^B kai kurių elementų, mes gausime tą pačią struktūrą S vaizduojantį modelį, kuris jau priklausys algebrinių struktūrų siaurąja prasme aibei.

Kadangi egzistuoja būdai (ir ne vienas), leidžiantys bet kokios algebrinės struktūros plačiąja prasme nagrinėjimą suvesti į algebrinės struktūros siaurąja prasme nagrinėjimą, kurio metu galima taikyti turtingesnę ir galingesnę matematinę aparatą, tai mes toliau šiame skyrelyje nagrinsime pagrindinai tik algebrines struktūras siaurąja prasme.

Šitaip susiaurinę algebrinės struktūros sąvoką, **algebrine struktūra vadinsime bet kurią netuščią aibę A su joje apibrėžtų algebrinių operacijų $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ netuščia baigtine aibe**, sutrumpintai žymėdami tokią algebrinę struktūrą **žymeniu $(A, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$** , kuriame $A \neq \emptyset$, $n \geq 1$, $f_1, f_2, \dots, f_n$ – funkcijos, apibrėžiančios algebrines operacijas aibėje A .

Pradėsime nuo pačių paprasčiausių algebrinių struktūrų $(A, *)$ su viena binarine algebrine operacija „*“, apibrėžiama kaip kokia nors funkcija $f_1: A \times A \rightarrow A$.

Algebrinės struktūros su viena binarine operacija pavyzdžiu gali būti algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}, +)$, t. y. sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ su joje apibrėžta sveikųjų skaičių algebrinės sudėties operacija: bet kurie $a \in \mathbb{Z}$ ir $b \in \mathbb{Z}$ gali būti operacijos „+“ operandais. Ir ta operacija visada duoda rezultatą $a+b$, priklausančią aibei $\mathbb{Z}$.

Kitos panašios algebrinės struktūros pavyzdys – algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}, \bullet)$, kurioje operacija „•“ – sveikųjų skaičių daugybos operacija.

Tačiau struktūrą $(\mathbb{Z}, :)$, kurioje operacija „:“ yra skaičių dalybos operacija, jau negalime priskirti algebrinėms struktūroms su apibrėžta algebrine operacija. Ši operacija galėtų tapti apibrėžta racionaliųjų skaičių aibėje $\mathbb{Q}$, o taip pat realiųjų skaičių aibėje, kai iš jų eliminuotume skaičių 0. Pažymėję tokius aibes žymenimis $\mathbb{Q}^*$; $\mathbb{R}^*$, gautume algebrines struktūras $(\mathbb{Q}^*, :)$, $(\mathbb{R}^*, :)$.

Algebrinės struktūros $(A, *)$ su viena binarine operacija pagal tam tikrų savybių turėjimą bei neturėjimą skirstomos į algebrines struktūras, esančias ar nesančias grupoidais; grupoidus, esančius ar nesančius pusgrupėmis; pusgrupes, esančias ar nesančias monoidais; monoidus, esančius ar nesančius grupėmis; grupes, esančias ar nesančias Abelio grupėmis ir t. t.

Iš algebrinės struktūros apibrėžimo išplaukia, jog algebrinė struktūra $(A, *)$ turėtų būti **uždara** operacijos „*“ atžvilgiu.

Kadangi kartais nagrinėjamos ir tokios struktūros, kurios nėra uždaros kokios nors operacijos su jos elementais atžvilgiu, nes operacijos rezultatas jau nebepriklauso struktūros elementų aibei A , tai struktūroms $(A, *)$, uždaroms operacijos „*“ atžvilgiu, suteikiamas specialus pavadinimas. Jos vadinamos **grupoidais**, t. y. struktūromis, iš kurių, įvedus papildomus reikalavimus, galima išskirti algebrinių struktūrų teorijoje (o taip pat ir eilėje kitų mokslų: kristalografijoje, atominėje fizikoje, chemijoje ir, žinoma, pačioje matematikoje: algebroje, geometrijoje, topologijoje) gana svarbią algebrinių struktūrų klasę – algebrines struktūras, vadinamas grupėmis.

Grupoido pavyzdys – algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}^+, *)$, kurioje $\mathbb{Z}^+$ – teigiamų sveikųjų skaičių aibė, o „*“ – kėlimo laipsniu operacija $a * b = a^b$, kai $a \in \mathbb{Z}^+$ ir $b \in \mathbb{Z}^+$, nes sveikojo teigiamo skaičiaus a laipsnis a^b , kai b – sveikas teigiamas skaičius, taip pat yra sveikasis teigiamas skaičius.

O štai struktūra $(\mathbb{Q}, *)$, kurioje $\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė, o „*“ – minėtoji kėlimo laipsniu operacija, jau nėra grupoidas, nes, pavyzdžiui, kai skaičiai $a=3,5$ ir $b=\frac{1}{2}$ priklauso $\mathbb{Q}$, skaičius $3,5^{\frac{1}{2}}$ jau nėra racionalusis skaičius.

Antra svarbi algebrinių struktūrų savybė – **asociatyvumas** operacijos „ $*$ “ atžvilgiu. **Algebrinė struktūra $(A, *)$ yra asociatyvi operacijos „ $*$ “ atžvilgiu, jei visiems aibės A elementams a, b, c teisinga lygybė $(a*b)*c=a*(b*c)$.**

Tai galima užrašyti taip:

$\forall a \forall b \forall c [(a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in A) \wedge [(a*b)*c=a*(b*c)]] \leftrightarrow [(A, *) \in \{\text{asociatyviosios algebrinės struktūros}\}]$.

Ši formulė reiškia ne tik **asociatyvios algebrinės struktūros apibrėžimą**, bet ir atvirkštinį teiginį: jei algebrinė struktūra $(A, *)$ yra asociatyvi, tai visiems aibės A elementams galioja lygybė $(a*b)*c=a*(b*c)$.

Asociatyviose algebrinėse struktūrose $(A, *)$ formulėse $(a*b)*c=a*(b*c)$ skliaustelių $()$ galima ir nebevertoti, o rašyti $(a*b)*c=a*(b*c)=a*b*c$. Tai reiškia, jog tokiose algebrinėse struktūrose **binarinę operaciją „ $*$ “ galima vartoti kaip n -arinę**, t. y. galima vartoti formulę $\prod_{i=1}^n a_i$ vietoj $a_1*a_2*a_3*...*a_{n-1}*a_n$.

Tokių formulių pavyzdžiai: $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$.

Algebrinės struktūros $(A, *)$, kurios operacijos „ $*$ “ atžvilgiu yra uždaros ir asociatyvios, vadinamos pusgrupėmis.

Pusgrupės pavyzdys – algebrinė struktūra $(M_n(\mathbb{R}), \bullet)$, kurioje $M_n(\mathbb{R})$ – n -sios eilės kvadratinų matricų su realiais elementais aibė, o „ $\bullet$ “ – matricų daugybos operacija.

Ši algebrinė struktūra yra pusgrupė todėl, kad ji, visų pirma, yra uždara operacijos „ $\bullet$ “ atžvilgiu, nes, sudauginus dvi n -osios eilės kvadratinės matricas, sudarytas iš realių skaičių, gaunama n -sios eilės kvadratinė matrica, sudaryta iš realių skaičių; antra, kaip žinoma iš matricų algebros, matricų daugyba yra asociatyvi operacija.

O štai ką tik minėtoji algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}^+, *)$, kurioje operacija „ $*$ “ yra kėlimo laipsniu operacija, yra tik grupoidas, bet nėra pusgrupė, nes, pavyzdžiui, $(2*3)*4 \neq 2*(3*4)$, kadangi $(2*3)*4 = (2^3)*4 = 2^{12}$, o $2*(3*4) = 2^{(3*4)} = 2^{3^4} = 2^{81}$ ir tai yra 2^{69} karto daugiau už 2^{12} .

Kai kuriose algebrinėse struktūrose $(A, *)$ gali egzistuoti taip vadinamas **neutralusis elementas**, kuris žymimas specialiu žymeniu e ir apibrėžiamas formule:

$$\{b \in A \wedge \forall a [(a \in A) \wedge (a*b=b*a=a)]\} \rightarrow (b=e).$$

Iš šio apibrėžimo išplaukia, jog jei algebrinėje struktūroje $(a, *)$ egzistuoja neutralusis elementas e , tai kiekvienam aibės A elementui a galioja formulė $a*e=e*a=a$.

Neutraliųjų elementų pavyzdžiai: 1) **adicinėje (adityviojoje) algebrinėje struktūroje $(\mathbb{R}, +)$** , kurioje aibė A yra realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$, o operacija „ $+$ “ yra realiųjų skaičių sudėties operacija „ $+$ “, neutraliuoju elementu yra skaičius 0, nes bet kuriam $a \in \mathbb{R}$ galioja formulė $a+0=0+a=a$; 2) **multiplikacinėje (multiplikatyviojoje) algebrinėje struktūroje $(\mathbb{R}, \bullet)$** , kur „ $\bullet$ “ yra realiųjų skaičių daugybos operacija, neutraliuoju elementu yra skaičius 1, nes bet kuriam $a \in \mathbb{R}$ yra teisinga formulė $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; 3) jau minėtoji pusgrupė $(M_n(\mathbb{R}), \bullet)$ taip pat turi neutralųjį elementą – vienetinę matricą E (arba I), kurios teigiamos įstrižainės elementai yra vienetai, o visi kiti elementai nuliai.

Nesunku įrodyti teoremą: jei algebrinėje struktūroje $(A, *)$ egzistuoja neutralusis elementas e , tai jis yra vienintelis neutralusis elementas aibėje A operacijos „ $*$ “ atžvilgiu.

Įrodinėdami šią teoremą, tarkime, jog algebrinėje struktūroje $(a, *)$, turinčioje neutralųjį elementą e , egzistuoja dar ir kitas neutralusis elementas $e' \in A$. Tuomet kiekvienam $a \in A$ bus teisinga formulė $a*e'=e'*a=a$, iš kurios, priėmę, jog $a=e$, gausime formulę $e*e'=e'*e=e$. Kadangi e – algebrinės struktūros $(A, *)$ neutralusis elementas operacijos „ $*$ “ atžvilgiu, tai kiekvienam $a*e=e*a=a$. Priėmę, jog $a=e'$, gauname formulę $e'*e=e*e'=e'$. Iš formulių $e*e'=e'*e=e$ ir $e'*e=e*e'=e'$ išplaukia, jog $e=e'$, t. y., kad tas „kitas“ neutralusis elementas e' būtinai turi sutapti su neutraliuoju elementu e .

Uždaros asociatyvios algebrinės struktūros, turinčios neutralųjį elementą e , vadinamos monoidais. Kai algebrinė struktūra $(A, *)$ yra monoidas, kartais ją žymime $(A, *, e)$, t. y. nurodoma ne tik aibė A , operacija „ $*$ “, bet ir neutralusis elementas e .

Monoido pavyzdys – jau minėtoji algebrinė struktūra $(\mathbb{R}, +)$, nes ši algebrinė struktūra yra uždara ir asociatyvi realiųjų skaičių sudėties operacijos „ $+$ “ atžvilgiu ir turi neutralųjį elementą $e=0$. Todėl šią algebrinę struktūrą galima žymėti ir žymeniu $(\mathbb{R}, +, 0)$. Kitas monoido pavyzdys – algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}, \bullet)$, kur $\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė, operacija „ $\bullet$ “ – skaičių daugybos operacija. Ši struktūra yra uždara ir asociatyvi skaičių daugybos operacijos „ $\bullet$ “ atžvilgiu ir turi neutralųjį elementą $e=1$. Šią algebrinę struktūrą galima žymėti žymeniu $(\mathbb{Z}, \bullet, 1)$.

Pusgrupės, nesančios monoidu, pavyzdys – algebrinė struktūra $(k\mathbb{Z}, \bullet)$, kur „ $\bullet$ “ – skaičių daugybos operacija, o $k\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių, kartotinių sveikajam skaičiui $k > 1$ aibė, sudaryta iš elementų $k \cdot m$, kur $m \in \mathbb{Z}$. Ši algebrinė struktūra yra uždara daugybos atžvilgiu, nes bet kurių aibės $k\mathbb{Z}$ elementų sandauga yra skaičius, kartotinis skaičiui k , t. y. aibės $k\mathbb{Z}$ elementas. Taigi, struktūra $(k\mathbb{Z}, \bullet)$ yra grupoidas. Šis grupoidas yra asociatyvus, nes skaičių daugybos operacija yra asociatyvi. Todėl struktūra $(k\mathbb{Z}, \bullet)$ yra pusgrupė. Tačiau ši pusgrupė neturi neutralaus elemento, nes realiųjų skaičių daugybos neutralusis elementas $e=1$ nepriklauso $k\mathbb{Z}$, o kito neutralaus elemento algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}, \bullet)$ (tame tarpe ir algebrinė struktūra $(k\mathbb{Z}, \bullet)$), kaip jau buvo įrodyta, negali turėti. Todėl pusgrupė $(k\mathbb{Z}, \bullet)$ nėra monoidas.

Nėra monoidas ir jau minėtoji struktūra $(\mathbb{Q}, *)$, kurioje operacija „ $*$ “ – kėlimo laipsniu operacija. Visų pirma, ši struktūra negali būti monoidu jau todėl, kad ji nėra ne tik pusgrupė, bet nėra net grupoidas. Antra, ši struktūra neturi neutralaus elemento: nors $a * 1 = a^1 = a$, tačiau $1 * a = 1^a = 1 \neq a$, kai $a \neq 1$.

Todėl ir struktūra $(\mathbb{Z}^+, *)$ (kurioje operacija „ $*$ “ yra kėlimo laipsniu operacija), nors ir priklauso grupoidų klasei, taip pat nėra monoidas, nes ji, visų pirma, nėra pusgrupė, ir, antra, turi tik **dešinįjį neutralųjį elementą** ir neturi kairiojo.

Kai kuriose algebrinėse struktūrose $(A, *)$, turinčiose neutralųjį elementą $e \in A$, kiekvienam elementui $a \in A$ galima rasti jam **atvirkštinį (arba simetrinį) operacijos „ $*$ “ atžvilgiu elementą b** , priklausantį tai pačiai aibei A ir tenkinantį sąlygą $a * b = b * a = e$.

Elemento a atvirkštinį elementą priimta žymėti a^{-1} . Todėl $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Atvirkštinių elementų egzistavimo struktūroje $(A, *)$ pavyzdžiai: 1) jau minėtoje adicinėje grupėje $(\mathbb{R}, +)$, esančioje monoidu, nes ji yra pusgrupė, turinti neutralųjį elementą $e=0$, kiekvienam realiam skaičiui $a \in \mathbb{R}$ egzistuoja jam atvirkštinis skaičius $a^{-1} = -a$, gaunamas iš skaičiaus a , pakeičiant jo ženklą į priešingą; 2) algebrinėje struktūroje $(\mathbb{R}^+, \bullet)$, kurioje $\mathbb{R}^+$ yra teigiamų realiųjų skaičių aibė, o operacija „ $\bullet$ “ – skaičių daugybos operacija, kiekvienam elementui $a \in \mathbb{R}^+$ egzistuoja atvirkštinis elementas $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$, tenkinantis sąlygą $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Monoidas $(A, *)$, kuriame kiekvienam $a \in A$ egzistuoja atvirkštinis elementas $a^{-1} \in A$, vadinamas grupe.

Grupių pavyzdžiai: 1) $(\mathbb{R}, +)$ yra grupė, priklausanti **aditinių grupių klasei**; 2) $(\mathbb{R}^+, \bullet)$ yra grupė priklausanti **multiplikacinių grupių klasei**; 3) struktūra $(A, \circ)$, kurioje A – ketvirtosios eilės **keitinių**

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$ ir t. t. aibė, o operacija „ $\circ$ “ – keitinių „daugybos“ (kompozicijos) operacija, yra grupė, nes: a) bet kurių dviejų ketvirtosios eilės keitinių „sandauga“ yra ketvirtosios eilės keitinys (pavyzdžiui, ketvirtosios eilės keitinių $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$ ir $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ „sandauga“ yra ketvirtosios eilės keitinys $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{matrix}$); b) keitinių „sandaugos“ operacija yra asociatyvi, kadangi

$((a \rightarrow b) \circ (b \rightarrow c)) \circ (c \rightarrow d) = (a \rightarrow b) \circ ((b \rightarrow c) \circ (c \rightarrow d)) = (a \rightarrow b) \circ (b \rightarrow d) = a \rightarrow d$, t. y. $((a \rightarrow b) \circ (b \rightarrow c)) \circ (c \rightarrow d) = (a \rightarrow b) \circ ((b \rightarrow c) \circ (c \rightarrow d))$; c) ši algebrinė struktūra turi neutralųjį elementą –

keitinį $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$, pervedantį kiekvieną ketvirtos eilės keitinį į patį save; d) kiekvienas keitinys turi atvirkštinį keitinį, kuris gaunamas sukeitus **kėlinius** (keitinio eilutes) vietomis.

Pavyzdžiui, keitinio $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$ atvirkštinis keitinys yra $\begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$, arba (sukeitus vietomis stulpelius, kas keitinio nekeičia) keitinys $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$. Nesunku įsitikinti, jog keitinių $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$ ir

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$ „sandauga“ yra keitinys $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$ – nagrinėjamos visų ketvirtosios eilės keitinių grupės, žymimos žymeniu S_4 , neutralusis elementas.

1.9.1.4. skyrelyje aprašytas **kvadratų elementų perstatymo procedūras, gaunant „magiškuosius kvadratus“ irgi galima laikyti keitiniais**, kurie n – matės kvadratinės matricos elementus, sudarančius aibę $A \subseteq \mathbb{N}$, pakeičia tos pačios aibės elementais, t. y. bijektyviai atspindi aibę A į

pačią save. Pavyzdžiui, 9-sios eilės keitinys

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	9	2	3	5	7	8	1	6

transformuoja kvadratą

1	2	3
4	5	6
7	8	9

į „magiškąją“ trečios eilės kvadratą

4	9	2
3	5	7
8	1	6

. Taigi, kvadratų pertvarkymai – jų

elementų keitiniai ir tų keitinių kompozicijos, kurių taikymo metu gaunami ir „magiškieji kvadratai“, taip pat sudaro algebrinę grupę.

Nesunku įrodyti, jog **standieji judesiai** plokštumoje (**atspindžiai**, **posūčiai**, **postūmiai** ir **slenkamieji atspindžiai**), prijungus prie jų aibės dar ir „**tapatųjį judesį**“ kaip standžiųjų judesių aibės neutralųjį elementą, judesių kompozicijos atžvilgiu taip pat **sudaro algebrinę grupę** $(A, \circ)$, kurioje A – jau minėtoji standžiųjų judesių aibė plokštumoje, papildyta „**tapatiniu judesiu**“, o operacija „ $\circ$ “ – judesių kompozicijos operacija.

Trimatėje erdvėje **standžiųjų judesių algebrinės grupės** $(A, \circ)$ aibę A sudaro jau septyni pagrindiniai standieji judesiai (keturi ką tik minėtieji, dar **sukamasis atspindys** ir **sraigtinis perkėlimas**, apie kuriuos buvo kalbama 1.9.1.4. skyrelyje, aprašant kristalų simetrijos elementus) ir „**tapatus judesys**“.

Nagrinėjant standžiųjų judesių simetriją ir naudojantis **grupių teorija**, buvo įrodyta, kad **galimi tik 7 juostų ir tik 17 apmušalų raštų simetrijos tipai, o taip pat tik 32 kristalų išorinės simetrijos klasės (taškinės grupės) ir tik 230 kristalų vidinės simetrijos tipų (erdvinių grupių)**, apie ką jau buvo rašyta 1.9.1.4. skyrelyje.

Tačiau algebrinės grupės sudaro tik dalį monoidų, nes ne visada aibėje A egzistuoja visų jos elementų atvirkštiniai elementai operacijos „ $*$ “ atžvilgiu.

Pavyzdžiui, monoidas $(\mathbb{R}^+, +)$ nėra grupė, nes nė vienas teigiamų realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}^+$ elementas neturi toje aibėje sau atvirkštinio elemento sudėties operacijos „ $+$ “ atžvilgiu.

Nėra grupė ir monoidas $(\mathbb{Z}, \bullet)$, nes sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ tik skaičiai $+1$ ir -1 turi toje aibėje sau atvirkštinius elementus skaičių daugybos operacijos atžvilgiu.

Taip pat ir monoidas $(\mathbb{R}, \bullet)$ nėra grupė, nes skaičius 0 , būdamas aibės $\mathbb{R}$ elementas, neturi daugybos operacijos „ $\bullet$ “ atžvilgiu atvirkštinio elemento, priklausančio aibei $\mathbb{R}$. Tačiau, jei eliminuotume iš aibės $\mathbb{R}$ skaičių 0 ir sudarytume aibę $\mathbb{R}-0$, tai algebrinė struktūra $(\mathbb{R}-0, \bullet)$ būtų grupė.

Kai kurios algebrinės struktūros $(a, *)$ gali turėti **komutatyvumo** savybę: operacijos „ $*$ “ su aibės elementais a ir b rezultatas $a*b$ gali nepriklausyti nuo operandų tvarkos, t. y. visi grupės elementai a ir b gali tenkinti lygybę $a*b=b*a$.

Algebrinės grupės, turinčios komutatyvumo savybių, buvo pavadintos **komutatyviosiomis grupėmis**. Dažnai tokios grupės vadinamos **Abelio grupėmis**, t. y. norvegų matematiko N. Abelio (N. H. Abel), parodžiusio komutatyviųjų grupių svarbą algebrinių lygčių teorijai ir įrodžiusio, jog **aukštesnio negu 4 laipsnio algebrinės lygtys bendroju atveju radikalais neišsprendžiamos**, vardu. Norėčiau atkreipti studentų, kurių amžius irgi dar labai jaunas, dėmesį į tai, kad nors N. Abelis pragyveno tik nepilnus 27 metus (nuo 1802-jų iki 1829-jų), jis suspėjo nuveikti gana daug. Jis ne tik įrodė jau minėtąją fundamentaliąją teoremą, dabar vadinamą **Abelio teorema**, bei apibrėžė kai kuriuos radikalais išsprendžiamų lygčių tipus, bet ir ištyrė algebrinių funkcijų integralus, neišreiškiamus elementariosiomis funkcijomis, dabar vadinamus **Abelio integralais**, yra vienas elipsinių funkcijų teorijos kūrėjų, savo darbais apie binominę eilutę paskatinęs begalinių konverguojančių eilučių teorijos raidą. Dar jaunesnis, būdamas už politinę veiklą iš aukštosios mokyklos pašalintu studentu, žuvo dvikovoje vienas bendrosios algebrinių lygčių ir grupių teorijos pradininkų E. Galua (E. Gallois 1811–1832). Tačiau jis irgi suspėjo įamžinti savo vardą matematikoje (**Galua teorija**, **Galua grupės**, algebrinių funkcijų integralų teorema, algebrinių lygčių išsprendžiamumo radikalais kriterijus). Taigi „kol jaunas, o broli, sėk pasėlio grūdą ir dirvos neapleiski...“

Abelio grupių pavyzdžiai: 1) jau minėtoji adicinė grupė $(\mathbb{R}, +)$; 2) multiplikacinė grupė $(\mathbb{R}^+, \bullet)$, kurioje $\mathbb{R}^+$ yra realiųjų teigiamų skaičių aibė; 3) jau minėtoji grupė $(\mathbb{R}-0, \cdot)$, kurioje $\mathbb{R}-0$ yra realiųjų skaičių aibė be 0 ; 4) tiesinių polinomų $ax+b$ (kur $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ yra kokie tai pastovūs koeficientai, o x – kintamasis, kurio galimos reikšmės priklauso $\mathbb{R}$) adicinė grupė $(\mathbb{R}x+\mathbb{R}, +)$, kurioje $\mathbb{R}x$ yra sandaugų ax aibė, o $\mathbb{R}x+\mathbb{R}$ – tiesinių polinomų $ax+b$ su realiais koeficientais aibė.

Abelio grupės sudaro tik tam tikrą visų grupių dalį (nors ir gana svarbią). Visos kitos grupės yra nekomutatyvios.

Grupės, nesančios Abelio grupe, pavyzdžiu gali būti neseniai minėtoji ketvirtosios eilės keitinių grupė S_4 ir bendrai, n -osios eilės keitinių grupė $(K_n, \circ)$, sutrumpintai žymima S_n , kurioje $n \in \mathbb{N}$, K_n – visų

n-sios eilės keitinių aibė, o operacija „ $\circ$ “ – keitinių kompozicijos („daugybės“) operacija. Keitinių kompozicijos nekomutatyvumo įrodymui pakanka vieno konkretaus pavyzdžio:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \circ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \neq \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \circ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Keitinių kompozicijos asociatyvumas ir jos nekomutatyvumas išplaukia iš elementarių keitinių, vadinamų transpozicijomis, asociatyvumo ir nekomutatyvumo. **Transpozicijomis (perkėlimais)** vadinami tokie keitiniai, kuriuose antrasis keitinio kėlinys gaunamas sukeičiant vietomis tik vieną porą pirmojo kėlinio elementų.

Elementų i ir j transpozicija žymima (i, j) . Pavyzdžiui, transpozicija $(1, 4)$ kėlinį $1\ 2\ 3\ 4$ keičia į kėlinį $4\ 2\ 3\ 1$ ir sudaro keitinį $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}$. **Kiekvieną keitinį galima gauti kaip transpozicijų**

kompoziciją („sandaugą“). Pavyzdžiui, keitinys $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}$ yra dviejų transpozicijų $(1, 2)$ ir $(1, 3)$ „sandauga“:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \circ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

Pagal transpozicijų skaičių kėliniai ir keitiniai skirstomi į lyginius, t. y. turinčius lyginį skaičių transpozicijų, ir nelyginius, t. y. turinčius nelyginį transpozicijų skaičių. Pavyzdžiui, keitinys $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}$ yra **lyginis keitinys**, nes kėlinys $2\ 3\ 1\ 4$, lyginant su kėliniu $1\ 2\ 3\ 4$ turi dvi transpozicijas:

1) skaičius „2“ stovi anksčiau už mažesni skaičių „1“ ir 2) skaičius „3“ stovi anksčiau už mažesni skaičių „1“. Keitinys $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}$, o taip pat keitinys $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$ yra **nelyginiai keitiniai**. Kadangi,

kaip nesunku įrodyti, transpozicijų kompozicija yra asociatyvi, bet nekomutatyvi operacija, tai iš to išplaukia ir bet kokių keitinių kompozicijos asociatyvumas ir nekomutatyvumas.

Kadangi **transpozicija yra keitinys**, tai algebrinė struktūra $(T_n, \circ)$, kurioje $n \in \mathbb{N}$, T_n – yra n -osios eilės visų transpozicijų (tame tarpe ir tipo (i, i) transpozicijų) aibė, o operacija „ $\circ$ “ – transpozicijų kompozicijos operacija, yra algebrinė grupė, nesanti Abelio grupe.

Neseniai minėtos standžiųjų judesių plokštumoje ir erdvėje kompozicijos grupės taip pat nėra Abelio grupės, nes, kaip jau buvo parodyta 1.9.1.4. skyrelyje (žiūr. 98 pav.), **judešių kompozicija nėra komutatyvi**.

Algebrinių struktūrų asociatyvumo ir komutatyvumo savybės yra nepriklausomos viena nuo kitos.

Pavyzdžiui, algebrinė struktūra $(\mathbb{Z}, *)$, kurioje bet kurių aibės $\mathbb{Z}$ elementų m ir n operacija „ $*$ “ apibrėžiama lygybe $n*m = -n-m$, yra komutatyvi, bet nėra asociatyvi. Komutatyvumas išplaukia iš lygybės: $m*n = -m-n$, $n*m = -n-m$, $-n-m = -m-n$, $m*n = n*m$ visoms $m \in \mathbb{Z}$ ir $n \in \mathbb{Z}$ reikšmėms. Asociatyvumo nebuvimo įrodymui pakanka vieno pavyzdžio: $(1*2)*3 = -(1*2)-3 = -(-1-2)-3 = 1+2-3=0$, $1*(2*3) = -1-(2*3) = -1-(-2-3) = -1+2+3=4$, $0 \neq 4$, $(1*2)*3 \neq 1*(2*3)$.

O štai šiek tiek anksčiau nagrinėtoji algebrinė struktūra $(M_n(\mathbb{R}), \bullet)$, kur $M_n(\mathbb{R})$ – racionaliųjų kvadratinų n -sios eilės matricų aibė, o operacija „ $\bullet$ “ – matricų daugybos operacija, yra asociatyvi, bet nekomutatyvi, nes matricų daugybos operacija yra asociatyvi, bet nekomutatyvi.

Taigi, **gali egzistuoti asociatyvios, bet nekomutatyvios algebrinės struktūros, o taip pat neasociatyvūs, bet komutatyvūs grupoidai, na ir, žinoma, algebrinės struktūros, turinčios ir asociatyvumo ir komutatyvumo savybę.**

Pastarųjų pavyzdys – Abelio grupės, o įdomų nekomutatyvaus monoido pavyzdį gausime, panagrinėję klasikinės matematinės logikos vieno argumento funkcijų ($Y_0 = f_0(X) = 0$, $Y_1 = f_1(X) = \bar{X}$, $Y_2 = f_2(X) = X$ ir $Y_3 = f_3(X) = 1$) superpozicijas $f_i(f_j(X))$, kur argumentas X gali turėti tik dvi logines reikšmes: 0, reiškiantį teiginio X neteisingumą, ir 1, reiškiantį teiginio X teisingumą. Tik dvi logines reikšmes gali turėti ir loginė funkcija Y , todėl klasikinėje matematinėje teiginių algebroje gali būti tik aukščiau išvardintos keturios vieno argumento loginės funkcijos: f_0 , f_1 , f_2 , f_3 . Nesunku apskaičiuoti šių funkcijų superpozicijos rezultatus. Pavyzdžiui, $f_1(f_2(X)) = f_1(X)$, $f_2(f_1(X)) = f_2(\bar{X}) = \bar{\bar{X}} = f_1(X)$, $f_2(f_0(X)) = f_2(0) = 0 = f_0(X)$, $f_1(f_0(X)) = f_1(0) = \bar{0} = 1 = f_3(X)$ ir t. t. Visų galimų superpozicijų $f_i(f_j)$ rezultatai parodyti 44-joje lentelėje.

44. lentelė

$f_i \setminus f_j$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_0	f_0	f_0
f_1	f_3	f_2	f_1	f_0
f_2	f_0	f_1	f_2	f_3
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3

Iš tos lentelės matyti, jog algebrinė struktūra $(A, \circ)$, kurioje A – loginių funkcijų aibė $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$, o operacija „ $\circ$ “ – tų funkcijų superpozicijos operacija, yra uždara operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu, nes superpozicijos $f_i(f_j)$ rezultatas – visada kokia nors viena iš aibės A sudarančių keturių loginių funkcijų. Naudojantis 44-ja lentele, nesunku įrodyti struktūros $(A, \circ)$ asociatyvumą. Pavyzdžiui, $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ f_3 = f_0$ ir $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = f_1 \circ f_3 = f_0$, iš kur išplaukia, jog $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$, o $(f_2 \circ f_1) \circ f_2 = f_1 \circ f_2 = f_1$ ir $f_2 \circ (f_1 \circ f_2) = f_2 \circ f_1 = f_1$, iš kur išplaukia $(f_2 \circ f_1) \circ f_2 = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)$ ir t. t. ir t. t. Nagrinėjamoji struktūra turi neutralųjį elementą – funkciją f_2 , nes, kaip matyti iš 44-sios lentelės, $f_2(f_i) = f_i$ ir $f_i(f_2) = f_i$. Tačiau ši algebrinė struktūra nėra grupė, o yra tik monoidas, nes šioje struktūroje funkcijos f_i nors ir turi atvirkštines logine prasme funkcijas (funkcijos f_1 ir f_2 yra atvirkštinės logine prasme viena kitai kaip ir funkcijos f_0 ir f_3) ir tokių atvirkštinių funkcijų gavimą realizuoja funkcija f_1 (pavyzdžiui, $f_1(f_0) = f_3$, $f_1(f_1) = f_2$, $f_1(f_2) = f_1$, $f_1(f_3) = f_0$), tačiau ne visos jos turi atvirkštines funkcijas f_i^{-1} , kurios tenkintų sąlygą $f_i^{-1}(f_i) = f_i(f_i^{-1}) = e = f_2$. Tokias atvirkštines funkcijas f_i^{-1} turi tik funkcijos f_1, f_2 . Jos yra atvirkštinės pačios sau: $f_1(f_1) = f_2$ ir $f_2(f_2) = f_2$, t. y. $(f_1)^{-1} = f_1$ ir $(f_2)^{-1} = f_2$. Funkcijos f_0 ir f_3 tokių funkcijų f_i ir f_j , kad $f_0(f_i) = f_i(f_0) = f_2$ ir $f_3(f_i) = f_i(f_3) = f_2$ neturi, nes $f_0(f_i) = f_0$ ir $f_3(f_i) = f_3$. Taigi, funkcijos f_0 ir f_3 neturi atvirkštinių funkcijų f_3^{-1}, f_0^{-1} . Iš 44-sios lentelės taip pat matyti, kad nagrinėjamas monoidas nėra komutatyvus, nes $f_0(f_3) \neq f_3(f_0)$, $f_1(f_0) \neq f_0(f_1)$, $f_1(f_3) \neq f_3(f_1)$.

Įvairias algebrines operacijas galima vykdyti ne tik su skaičiais, algebriniais dydžiais, vektoriais, matricomis, keitiniais, judesiais, funkcijomis, bet ir su įvairiais ženklais bei jų junginiais, tame tarpe ir su simboliais, vadinamais „raidėmis“, ir jų junginiais, vadinamais „žodžiais“.

Pažymėsime žymeniu Abc baigtinę tokių simbolių aibę, kurią pavadinsime **abėcėle**. Abėcėlės elementų $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ baigtines sekas vadinsime „žodžiais“, o abėcėlės elementų („raidžių“) skaičių „žodžiuose“ – „žodžio“ ilgiu. Vadinsime „žodžiu“ („tuščiu žodžiu“) ir tuščią „žodžių“ seką, neturinčią nė vienos „raidės“. Tą „tuščią žodį“ žymėsime simboliu „1“. Tokio „žodžio“ ilgį laikysime lygų 0. „Žodžius“, kurių ilgiai didesni už 0, žymėsime žymenimis $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m$. „Žodžius“ $w_i = a_{i1}a_{i2} \dots a_{ir}$ ir $w_j = a_{j1}a_{j2} \dots a_{jk}$ laikysime lygiais tada ir tik tada, kai jų ilgiai yra vienodi, t. y. $r=k$, ir kai yra vienodos atitinkamos tų „žodžių“ raidės: $a_{i1}=a_{j1}, a_{i2}=a_{j2}, \dots, a_{ir}=a_{jr}$.

Pažymėsime visų baigtinio ilgio „žodžių“, sudarytų iš baigtinės aibės Abc „raidžių“, aibę žymeniu Abc^* ir įvesime „žodžių sandaugos“ operaciją „ $\cdot$ “ – trumpesnių žodžių jungimo į ilgesnius žodžius operaciją. Šią operaciją apibrėšime formulėmis: $w_1 \cdot w_2 = w_1 w_2$, $w \cdot 1 = 1 \cdot w = w$, kur $w_1 \in Abc^*$, $w_2 \in Abc^*$, $w \in Abc^*$. Aišku, kad naujas „žodis“ $w_1 w_2$ turės baigtinį ilgį ir bus sudarytas iš abėcėlės Abc raidžių ir todėl priklausys Abc^* . O tai reiškia, jog algebrinė struktūra $(Abc^*, \cdot, 1)$ bus uždara „žodžių daugybos“ operacijos „ $\cdot$ “ atžvilgiu. Kadangi $(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 w_2 \cdot w_3 = w_1 w_2 w_3$ ir $w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) = w_1 \cdot w_2 w_3 = w_1 w_2 w_3$, tai $(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3)$, iš kur išplaukia, jog algebrinė struktūra $(Abc^*, \cdot, 1)$ yra pusgrupė. Ši pusgrupė turi neutralųjį elementą – „tuščią žodį“, nes iš „žodžių daugybos“ operacijos apibrėžimo (o taip pat iš to, ką mes pavadiname „žodžiu“ ir „tuščiu žodžiu“) išplaukia, jog $1 \cdot w = w \cdot 1 = w$. Taigi, struktūra $(Abc^*, \cdot, 1)$ yra monoidas, tačiau ji nėra grupė. Tas monoidas nėra komutatyvus, ir tai išplaukia iš „žodžių“ lygybės apibrėžimo: jei „žodžiai“ w_1 ir w_2 nėra lygūs, tai $w_1 \cdot w_2 \neq w_2 \cdot w_1$, nes tuomet nėra lygūs tų operacijų rezultatai – „žodžiai“ $w_1 w_2$ ir $w_2 w_1$.

Algebrines operacijas galima vykdyti ir su pačiomis algebrinėmis struktūromis. Pavyzdžiui, galime įvesti algebrinių struktūrų tiesioginės sandaugos operaciją.

Algebrinių struktūrų $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ tiesiogine sandauga $(A, *) \times (B, \circ)$ vadinsime tokią algebrinę struktūrą $(A \times B, \cdot)$, kurioje aibė $A \times B$ yra aibių A ir B dekartinė sandauga, o operacija „ $\cdot$ “ yra algebrinė operacija tarp aibės $A \times B$ elementų – porų (a_i, b_j) ir (a_k, b_r) , sudarytų iš aibės A elementų a_i ir a_k , o taip pat iš aibės B elementų b_j ir b_r ; ta operacija „ $\cdot$ “ visiems $a_i \in A, a_k \in A, b_j \in B, b_r \in B, (a_i, b_j) \in A \times B, (a_k, b_r) \in A \times B$ apibrėžiama formule $(a_i, b_j) \cdot (a_k, b_r) = (a_i * a_k, b_j \circ b_r)$.

Pavyzdžiui, jei grupė $(\mathbb{R}_x, +)$ vaizduoja vienmačių vektorių Ox , turinčių pradžią koordinatinių sistemos pradžioje O ir gulinčių absisių ašyje, sudėties algebrinę struktūrą ir grupė $(\mathbb{R}_y, +)$ vaizduoja vienmačių vektorių Oy , turinčių pradžią koordinatinių sistemos pradžioje O ir gulinčių ordinačių ašyje, sudėties algebrinę struktūrą, tai algebrinė struktūra $(\mathbb{R}_x, +) \times (\mathbb{R}_y, +) = (\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y, +)$ vaizduoja dvimačių vektorių, turinčių pradžią koordinatinių sistemos pradžioje O ir gulinčių plokštumoje xOy , sudėties algebrinę struktūrą. Operacija „ $+$ “ struktūroje $(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y, +)$ apibrėžiama taip: visiems $x_i \in \mathbb{R}_x, x_j \in \mathbb{R}_x, y_i \in \mathbb{R}_y, y_j \in \mathbb{R}_y, (x_i, y_i) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y, (x_j, y_j) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ yra teisinga lygybė $(x_i, y_i) + (x_j, y_j) = (x_i + x_j, y_i + y_j)$.

Tiesioginė algebrinių struktūrų $(\mathbb{R}, +)$ sandauga $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ žymima $(\mathbb{R}^2, +)$.

Nesunku įrodyti **teoremą**: jei $(A, *)$ yra grupė, turinti neutralųjį elementą e_A , ir jei $(B, \circ)$ yra grupė, turinti neutralųjį elementą e_B , tai ir tų grupių tiesioginė sandauga $(A, *) \times (B, \circ) = (A \times B, \cdot)$ yra taip pat grupė, o jos neutralusis elementas yra (e_A, e_B) . Įrodysime tai.

Algebrinės struktūros $(A \times B, \cdot)$ uždarymas bei asociatyvumas išplaukia iš struktūrų $(A, *)$, $(B, \circ)$ uždarymo bei asociatyvumo ir iš algebrinių struktūrų tiesioginės sandaugos apibrėžimo.

Įrodysime, jog algebrinė struktūra turi neutralųjį elementą ir jis yra lygus (e_A, e_B) .

Kadangi $e_A \in A$ ir $e_B \in B$, tai $(e_A, e_B) \in A \times B$. Iš algebrinių struktūrų tiesioginės sandaugos apibrėžimo išplaukia, jog $(e_A, e_B) \cdot (a, b) = (e_A * a, e_B \circ b)$ ir $(a, b) \cdot (e_A, e_B) = (a * e_A, b \circ e_B)$.

Kadangi e_A yra struktūros $(A, *)$ neutralusis elementas, o e_B – struktūros $(B, \circ)$ neutralusis elementas, tai $e_A * a = a$, $a * e_A = a$, $e_B \circ b = b$ ir $b \circ e_B = b$.

Todėl $(e_A, e_B) \cdot (a, b) = (a, b)$ ir $(a, b) \cdot (e_A, e_B) = (a, b)$, t. y. (e_A, e_B) yra algebrinės struktūros $(A \times B, \cdot)$ neutralusis elementas.

Lengvai įrodomas ir teiginys, kad kiekvienas aibės $A \times B$ elementas (a, b) aibėje $A \times B$ būtinai turi atvirkštinį elementą $(a, b)^{-1}$ operacijos „ $\cdot$ “ atžvilgiu ir, kad tas atvirkštinis elementas yra (a^{-1}, b^{-1}) , kur a^{-1} yra aibės A elemento a atvirkštinis elementas operacijos „ $*$ “ atžvilgiu, o b^{-1} yra aibės B elemento b atvirkštinis elementas operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu.

Tas įrodymas išplaukia iš lygybių:

$$1) (a^{-1}, b^{-1}) \cdot (a, b) = (a^{-1} * a, b^{-1} \circ b) = (e_A, e_B),$$

$$2) (a, b) \cdot (a^{-1}, b^{-1}) = (a * a^{-1}, b \circ b^{-1}) = (e_A, e_B).$$

Taigi, jei $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ – grupės, tai ir $(A, *) \times (B, \circ)$ irgi yra grupė, turinti neutralųjį elementą – dvimatį vektorių, sudarytą iš e_A ir e_B .

Panašiai įrodoma, kad, jei $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ yra monoidas (ar pusgrupė), tai ir $(A, *) \times (B, \circ)$ taip pat yra monoidas (ar pusgrupė).

Iš teoremos apie algebrinių struktūrų tiesioginę sandaugą išplaukia, jog algebrinė struktūra $(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y, +)$ yra grupė, kurios neutralusis elementas yra „nulinis vektorius“ $(0, 0)$ ir kurioje kiekvienas plokštumos vektorius (a, b) turi atvirkštinį vektorių – $(a, b) = (-a, -b)$. Kitaip tariant, plokštumos vektorių aibė, vektorių sudėties operacijos atžvilgiu sudaro grupę su neutraliu elementu – „nulinio vektoriumi“ $(0, 0)$.

Analogiškai galima įrodyti, kad plokštumos vektorių aibė vektorių skaliarinės daugybos operacijos atžvilgiu sudaro monoidą su neutraliu elementu – vienetiniu vektorium $(1, 1)$.

Algebrinių struktūrų tiesioginės sandaugos operaciją galima apibendrinti.

Tarkime, jog turime $n \in \mathbb{N}$ algebrinių struktūrų $(A_i, *_i)$, kur $i=1, 2, 3, \dots, n$; A_i – aibės, „ $*$ “ – algebrinės operacijos, apibrėžtos ir uždaros tose aibėse.

Tuomet šių **algebrinių struktūrų apibendrinta tiesioginė sandauga** $(A_1, *_1) \times (A_2, *_2) \times \dots \times (A_{n-1}, *_{n-1}) \times (A_n, *_n)$ vadinsime **algebrinę struktūrą** $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n, \cdot)$, kurioje aibė $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n$ yra visų aibių A_i dekartinė sandauga, o operacija „ $\cdot$ “ apibrėžiama lygybe $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2, \dots, a_{n-1} *_{n-1} b_{n-1}, a_n *_n b_n)$, galiojančia visiems elementams $a_i \in A_i$, $b_i \in A_i$, $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n$, $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n$, visoms operacijoms „ $*$ “, visiems indeksams $i=1, 2, 3, \dots, n$ ir visiems $n \in \mathbb{N}$.

Analogiškai, kaip buvo įrodyta teorema **binarinės algebrinių struktūrų daugybos** atveju, galime įrodyti analogišką teoremą **apibendrintos (n – arinės) algebrinių struktūrų daugybos** atveju.

Iš tos teoremos, pavyzdžiui, išplaukia, kad trimatės erdvės vektorių aibė jų sudėties operacijos atžvilgiu sudaro algebrinę grupę, o vektorių skaliarinės sandaugos atžvilgiu – monoidą.

Įvedę i-jo laipsnio monomų rx^i , kur $r \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, aibės žymenį $\mathbb{R}x^i$, gauname, jog $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}x, +) \times (\mathbb{R}x^2, +) \times \dots \times (\mathbb{R}x^{n-1}, +) \times (\mathbb{R}x^n, +) = (\mathbb{R} + \mathbb{R}x + \mathbb{R}x^2 + \dots + \mathbb{R}x^{n-1} + \mathbb{R}x^n)$ yra polinomų, kurių laipsnis neviršija $n \in \mathbb{N}$, grupė. Šios grupės neutralusis elementas – skaičius 0. Nesunku įrodyti, jog ši grupė (kaip ir ką tik minėtoji vektorių sudėties grupė) yra Abelio grupė. Komutatyvus yra ir vektorių skaliarinės sandaugos monoidas.

Nesunku įrodyti, kad **bet kurioje grupėje** $(A, *)$ lygtys $a*x=b$ ir $y*a=b$, kur $a \in A$ ir $b \in A$, yra **visada vienareikšmiškai išsprendžiamos**, t. y. visada egzistuoja tokie elementai $c \in A$ ir $d \in A$, kad $a*c=b$ ir $d*a=b$. Įrodysime tai.

Kadangi grupėje $(A, *)$ egzistuoja elementui a atvirkštinis elementas a^{-1} , tai galima priimti, jog $x=c=a^{-1}*b$ ir $y=d=b*a^{-1}$ ir įsitikinti, jog šios x ir y reikšmės tenkina lygtis $a*x=b$ ir $y*a=b$, nes $a*x=a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$, t. y. $b=b$, ir $y*a=(b*a^{-1})*a=b*(a^{-1}*a)=b*e=b$, t. y. vėl gi $b=b$.

Kai grupė $(A, *, e)$ – Abelio grupė, tai abiejų lygčių $a*x=b$ ir $y*a=b$ sprendiniai a ir d yra vienodi.

Taigi, grupės $(A, *)$ atvirkštinio elemento aibėje A egzistavimas kiekvienam tos aibės elementui sąlygoja lygčių $a*x=b$ ir $y*a=b$ išsprendžiamumą kiekvienam $a \in A$ ir $b \in A$. Pasirodo, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei monoidė $(A, *, e)$ visada išsprendžiamos tos lygtys, tai kiekvienam aibės A elementui egzistuoja atvirkštinis elementas ir todėl tas monoidas tuomet yra dar ir grupė. Įrodysime šį teiginį.

Jei monoido $(A, *, e)$ aibėje A yra išsprendžiama lygtis $a*x=b$ visiems $a \in A$ ir visiems $b \in A$, tai turi būti išsprendžiama ir lygtis $a*x=e$, t. y. turi egzistuoti toks elementas $c \in A$, kad $a*c=e$.

Kad įrodytume, jog c ir yra elemento a atvirkštinis elementas a^{-1} , belieka įrodyti lygybę $c*a=e$. Šios lygybės įrodymui pasinaudosime tuo, kad aibėje A turėtų būti išsprendžiama ir lygtis $c*x=e$, t. y. turi egzistuoti toks elementas $d \in A$, kad $c*d=e$. Tuomet $c*a=(c*a)*e=(c*a)*(c*d)=c*(a*c)*d=c*e*d=(c*e)*d=c*d=e$.

Gavome, jog $a*c=c*a=e$, t. y., kad $c=a^{-1}$, t. y. kiekvienas aibės A elementas a turi toje aibėje sau atvirkštinį elementą. O tai reiškia, jog monoidas $(A, *, e)$ yra grupė.

Sujungę abi teoremas, kurių viena teigia, jog iš to, kad monoidas $(A, *, e)$ yra grupė, išplaukia lygčių $a*x=b$, $y*a=b$ išsprendžiamumas aibėje A , o kita, kad iš šių lygčių išsprendžiamumo monoido $(A, *, e)$ aibėje A išplaukia, kad tas monoidas yra grupė, gauname dar vieną **būtiną ir pakankamą monoido $(A, *, e)$ buvimo grupė požymį**: kad monoidas $(A, *, e)$ būtų grupė, būtina ir pakanka, kad to monoido aibėje A visiems $a \in A$ ir $b \in A$ visada būtų išsprendžiamos lygtys $a*x=b$ ir $y*a=b$.

Galima įrodyti ir teoremą, kad grupėje $(A, *, e)$ galioja taip vadinamoji **prastinimo taisyklė**, išreiškiama formulėmis:

$$a*b=a*c \Rightarrow b=c,$$

$$b*a=c*a \Rightarrow b=c.$$

Iš tikrųjų iš $a*b=a*c$ išplaukia $a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c)$, iš kur gauname lygybes $(a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c$, $e*b=e*c$, $b=c$. Analogiškai, iš $b*a=c*a$ gauname lygybes $(b*a)*a^{-1}=(c*a)*a^{-1}$, $b*(a*a^{-1})=c*(a*a^{-1})$, $b*c=c*e$, $b=c$.

Prastinimo taisyklė grupėms galioja visada, o monoidams ji gali galioti, bet gali ir negalioti.

Pavyzdžiui, jau nagrinėtam monoidui $(abc^*, \cdot, 1)$ prastinimo taisyklė galioja, nes ji išplaukia iš „žodžių“ lygybės sąlygos ir „žodžių sandaugos“ („žodžių“ jungimo) operacijos apibrėžimo.

O štai kitame jau nagrinėtame monoidė – multiplikaciniame matricų $M_n(\mathbb{R})$ monoidė $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ prastinimo taisyklė negalioja. Šio teiginio įrodymui pakanka vieno pavyzdžio: nors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ką būtume galęję gauti, „suprastinę“ matricų sandaugą iš matricos } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi, šiam monoidui prastinimo taisyklė negalioja.

Įvesime pogrupio (pomonoidžio) sąvoką.

Tarkime, jog $(A, *)$ yra monoidas (grupė), aibė B yra aibės A netuščias poaibis. Jeigu $(B, *)$ taip pat yra monoidas (grupė), tai algebrinė struktūra $(B, *)$ vadinama monoido (grupės) $(A, *)$ **pomonoidžiu (pogrupiu)**.

Pavyzdžiui, grupė $(\mathbb{Z}, +)$ yra grupės $(\mathbb{R}, +)$ pogrupis, o monoidas $(\mathbb{Q}, \cdot)$ yra monoido $(\mathbb{R}, \cdot)$ pomonoidis.

Įrodysime, jog grupės $(A, *)$ ir jos pogrupio $(B, *)$ neutralieji elementai sutampa.

Tarkime, kad grupės $(A, *)$ neutralusis elementas yra e_A , o pogrupio $(B, *)$ – e_B . Kadangi $e_B \in B$, o $B \subseteq A$, tai $e_B \in A$. Todėl grupėje $(A, *)$ galioja lygybė $e_A * e_B = e_B$. Aibėje B galioja lygybė $e_B * e_B = e_B$. Ji galioja ir aibėje A , nes $B \subseteq A$. Iš lygybių $e_A * e_B = e_B$ ir $e_B * e_B = e_B$ išplaukia $e_A * e_B = e_B * e_B$. Panaudoję prastinimo taisyklę, gauname $e_A = e_B$, ką ir reikėjo įrodyti.

Kadangi ne visiems monoidams gali būti taikoma prastinimo taisyklė, tai **ne visada monoido ir jo pomonoidžio neutralieji elementai sutampa**.

Šio teiginio įrodymui pakanka vieno konkretaus pavyzdžio.

Tarkime, jog monoido $(A, *)$ aibė A sudaro du elementai 0 ir 1 , o operacija „ $*$ “ reiškia maksimalaus elemento radimo operaciją: $a*b=\max(a, b)$ visiems $a \in A$ ir $b \in A$.

Tuomet $0*0=0$, $0*1=1$, $1*0=1$, $1*1=1$. Iš šių lygybių išplaukia, jog monoido $(A, *)$ neutralusis elementas operacijos „ $*$ “ atžvilgiu yra 0 , t. y. $e_A=0$.

Sudarysime to monoido $(A, *)$ pomonoidą $(B, *)$, kuriame aibė B yra aibės A poaibis, turintis tik vieną elementą $b=1$. Aibėje B operacijos „ $*$ “ taikymo rezultatas gali būti tik vienas: $1*1=1$. Iš šios lygybės išplaukia, jog $e_B=1$. Kadangi $1 \neq 0$, tai $e_B \neq e_A$, ką ir reikėjo parodyti.

Grupėje $(A, *)$ gali egzistuoti tokie elementai a , kurie tenkina lygybę $\underbrace{a*a*\dots*a}_{n\text{-operandų}}=e$.

Pavyzdžiui, trijų trečios eilės keitinių aibė $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ keitinių kompozicijos („daugybės“) „ $\circ$ “ atžvilgiu yra uždara asociatyvi struktūra, turinti operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu neutralųjį elementą $e_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, o kiekvienas tos aibės elementas – atvirkštinį elementą, priklausantį aibei A : keitinys $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ turi atvirkštinį elementą – keitinį $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, keitinys $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ – keitinį $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, keitinys $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ yra atvirkštinis pats sau.

Taigi, algebrinė struktūra $(A, \circ)$ yra grupė. Nesunku įsitikinti, kad keitinio $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in A$

kompozicija $\underbrace{a \circ a \circ a}_{3\text{ operandai}} = e_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Iš tikrųjų:

$$a \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, a \circ a \circ a = (a \circ a) \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e_A.$$

Aišku, kad sudarę kompoziciją iš $3k$ operandų – keitinių $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, kur $k \in \mathbb{N}$, gausime, jog jos rezultatas taip pat bus lygus e_A .

Jei $\underbrace{a*a*\dots*a}_{n\text{-operandų}}=e_A$, tai visuomet galima rasti tokį mažiausią skaičių $n_0 \in \mathbb{N}$, kad $\underbrace{a*a*\dots*a}_{n_0\text{ operandų}}=e_A$.

Tas mažiausias skaičius n_0 bus arba n , arba $n_0 = \frac{n}{k}$, kai $n=kn_0$, kur $k \in \mathbb{N}$.

Skaičius n_0 vadinamas **elemento $a \in A$ eilė grupėje $(A, *)$ ir žymimas žymeniu $\text{ord}_A a$** .

Analogiškai apibrėžiama ir **elemento $a \in A$ eilė monoide $(A, *)$** . Ji taip pat žymima $\text{ord}_A a$.

Ką tik nagrinėtoje keitinių grupėje $(A, *)$, kurioje aibė A sudaro 3 trečiosios eilės keitiniai,

keitinio $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ eilė $\text{ord}_A a = 3$.

Analogiškai randame, kad keitinio $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eilė $\text{ord}_A b$ taip pat lygi 3, o keitinio

$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ eilė $\text{ord}_A c = 1$.

Egzistuoja ir tokios grupės bei monoidai ir tokie jų elementai a , kad neegzistuoja joks baigtinis natūralusis skaičius n_0 , kad gautume lygybę $\underbrace{a*a*\dots*a}_{n_0\text{ operandų}}=e_A$.

Tuomet sakoma, kad elemento a eilė algebrinėje struktūroje (grupinėje ar monoide) yra begalinė, t. y. $\text{ord}_A a = \infty$.

Grupės $(A, *)$ kokio nors elemento $a \in A$ „sandaugą“ $\underbrace{a*a*\dots*a}_{n_0\text{ operandų}}$ vadinsime elemento a k -

tuoju laipsniu ir žymėsime $\underbrace{a*a*\dots*a}_k = a^k$.

Kai „dauginami“ atvirkštiniai elementai $\underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1}}_k$, tai tokia sandauga žymima a^{-k} . Tai

reiškia, jog elementų laipsniai grupėje gali būti ir neigiami.

Nesunku įsitikinti, jog **grupės (monoido) elementų laipsniams galioja skaičių algebroje žinomos operacijų su laipsniais taisyklės**: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^{-1})^n = a^{-n}$, $(a^n)^m = a^{nm}$, $a \cdot a^{-1} = a^0 = e_A$. Tos taisyklės išplaukia iš grupės (monoido) asociatyvumo ir elemento laipsnio apibrėžimo.

Dabar elemento a eilės grupėje (monoido) $(A, *)$ sąvoką $\text{ord}_A a$ galima apibrėžti, naudojantis elemento laipsnio algebrinėje struktūroje sąvoka: **elemento a eilė grupėje yra laipsnio, kuriuo reikia pakelti elementą a , kad gautume e_A , rodiklio minimali teigiama reikšmė n_0 , t. y. $\text{ord}_A a = n_0$, kur $n_0 > 0$ ir $n_0 = \min n$, tenkinančio lygybę $a^n = e_A$.**

Dabar jau galima įvesti grupės $(A, *)$ **ciklinio pogrupio** sąvoką.

Kai grupėje $(A, *)$ yra elementas $a \in A$, kurio $\text{ord}_A a = n < \infty$, tai tos grupės pogrupį $(\{a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, a^n\}, *)$ vadina **baigtiniu cikliniu elemento a generuojamu pogrupiu**. Šis pogrupis žymimas $\langle a \rangle$, o elementas a vadinamas **generuojančiu grupės $(A, *)$ elementu (arba elementu, generuojančiu grupės $(A, *)$ pogrupį $(\{a^1, a^2, \dots, a^n\}, *)$)**.

Egzistuoja daug grupių, kurios turi daugiau negu vieną baigtinį ciklinį pogrupį ir daugiau negu vieną generuojantį elementą.

Tačiau egzistuoja ir tokios grupės $(A, *)$ ir tokie jų elementai $a \in A$, kurių $\text{ord}_A a = \infty$. Tuomet tokios grupės $(A, *)$ pogrupį $(\{a^1, a^2, a^3, \dots, a^{-1}, a^{-2}, \dots, e_A, a^1, a^2, \dots\}, *)$ vadina **grupės $(A, *)$ elemento a generuojamu begaliniu pogrupiu $\langle a \rangle$** .

Cikliniai pogrupiai (baigtiniai ir begaliniai), kai juos analizuojame atskirai nuo tų grupių, kurių pogrupiais jie yra, vadinami ciklinėmis grupėmis.

Ciklinių grupių pavyzdžiai:

$$1) \text{ grupės } \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3' & 1 & 3 & 2' & 2 & 1 & 3' & 2 & 3 & 1' & 3 & 1 & 2' & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \circ \right\}, \circ \right) \text{ baigtinis}$$

$$\text{ciklinis pogrupis } \left(\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^1, \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^2, \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^3 \right\}, \circ \right) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1' & 3 & 1 & 2' & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \circ \right\}, \circ \right),$$

$$\text{generuojamas elemento } a - \text{keitinio } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ sutrumpintai žymimas } \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ yra baigtinė ciklinė}$$

grupė;

2) sveikųjų skaičių adicinė grupė $(\mathbb{Z}, +)$ yra begalinė ciklinė grupė, generuojama elemento a – skaičiaus 1, todėl ją galima žymėti $\langle 1 \rangle$, t. y. $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle$; kadangi ją gali generuoti ir šio elemento – skaičiaus 1 – atvirkštinis operacijos $+$ atžvilgiu elementas – skaičius (-1) , tai ciklinę grupę $(\mathbb{Z}, +)$ galima žymėti ir $\langle -1 \rangle$.

Grupės $(A, *)$ aibę A galima suskaidyti į sluoksnius kokio nors tos grupės pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu. **Grupės sluoksnių sąvokos** apibrėžimui mums prireiks aibės A **poaibių „sandaugos“** apibrėžimo.

Tarkime, jog $(A, *)$ yra grupė, o B ir C netušti tos aibės poaibiai B ir C . Tų **poaibių „sandaugą“ $B * C$ sudarys visi tie ir tik tie aibės A elementai, kurie yra lygūs bet kurių elementų $b \in B$ ir $c \in C$ „sandaugai“ $b * c$. Kadangi $B \subseteq A$ ir $C \subseteq A$, tai $b \in A$ ir $c \in A$. Kadangi $(A, *)$ yra grupė, tai aibė A yra uždara operacijos „ $*$ “ atžvilgiu. Todėl $b * c \in A$, o tai reiškia, jog $B * C \subseteq A$, t. y. aibė $B * C = \{b * c / b \in B \subseteq A, c \in C \subseteq A\}$ yra aibės A poaibis.**

Formaliai tas poaibis apibrėžiamas taip: $B * C = \{a \in A / a = b * c, b \in B \subseteq A, c \in C \subseteq A\}$.

Pavyzdžiui, jei $A = \mathbb{N}$, $B = \{3; 5\}$, $C = \{4, 8\}$, o algebrinė operacija „ $*$ “ yra aritmetinės daugybos operacija, tai aibę $B * C$ sudarys aibės A elementai 12, 20, 24 ir 40, t. y. $B * C = \{12; 20; 24; 40\}$.

Apibendrinsime sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėžtą ekvivalentumo sąryšį natūralaus skaičiaus n modulio atžvilgiu (sąryšį $\equiv (\text{mod } n)$), įvesdami **grupės $(A, *)$ elementų ekvivalentumo sąryšį tos grupės pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu**.

Tarkime, jog $(B, *)$ yra grupės $(A, *)$ pogrupis. Bet koks $a_i \in A$ sudaro aibės A poaibį. Todėl $a_i * B$ yra aibės A poaibis, sudarytas iš visų elemento a_i „sandaugų“ $a_i * b_j$ su kiekvienu $b_j \in B$. Tuomet grupės $(A, *)$ elementų ekvivalentumo sąryšį jos pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu, žymimą žymeniu „ $\sim$ “, galima apibrėžti kaip binarinį sąryšį tarp tokių aibės A elementų a_i ir a_j , kurie tenkina lygybę $a_i * B = a_j * B$. Apibrėždami binarinį sąryšį „ $\sim$ “ aibėje A kaip tos aibės poaibį, kurį sudaro jos elementai, surišti tuo sąryšiu, gauname tokį **sąryšio „ $\sim$ “ formalų apibrėžimą: „ $\sim = \{(a_i, a_j) / a_i * B = a_j * B, a_i \in A, a_j \in A, B \subseteq A\}$ “.**

Pailiustruosiu grupės $(A, *)$ elementų ekvivalentumo sąryšį tos grupės pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu, pasinaudodamas mūsų jau nagrinėta trečiojo laipsnio keitinių grupe $S_3 = (A, \circ)$, kurioje aibė A

sudaro šeši trečiojo laipsnio keitiniai – tos aibės elementai $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, o algebrinę operaciją „ $\circ$ “ – tų keitinių kompozicijos („sandaugos“) operacija.

Apskaičiuosime visas galimas tų keitinių binarines kompozicijas. Jų rezultatai pateikti 45-joje lentelėje.

45. lentelė

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c
e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

Kaip matyti iš 45-osios lentelės, keitinių aibė S_3 yra uždara operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu, turi neutralųjį elementą, kuriuo yra keitinis $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, ir kiekvienas tos aibės elementas turi atvirkštinį elementą: $a^{-1}=a$, $b^{-1}=b$, $c^{-1}=c$, $d^{-1}=e$, $e^{-1}=d$, $f^{-1}=f$.

Kaip jau buvo parodyta anksčiau, keitinių kompozicijos operacija yra asociatyvi operacija, tačiau ji nėra komutatyvi. Taigi, S_3 yra nekomutatyvi grupė.

Nesunku pastebėti, jog elementai a, d ir e taip pat sudaro grupę operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu, nes jų aibė yra uždara tos operacijos atžvilgiu ($a \circ a = a$, $a \circ d = d$, $a \circ e = e$, $d \circ a = d$, $d \circ d = e$, $d \circ e = a$, $e \circ a = e$, $e \circ d = a$, $e \circ e = d$), turi neutralųjį elementą a ir kiekvienas elementas turi toje aibėje savo atvirkštinį elementą. Todėl galime teigti, jog **algebrinė struktūra $(B, \circ)$, kurioje $B = \{a, d, e\}$, yra grupės $(A, \circ) = (\{a, b, c, d, e, f\}, \circ)$ pogrupis.**

Apskaičiuosime „sandaugas“ $a_i \circ B$. Pasinaudodami 45-ąja lentele, gauname:

- 1) $a \circ \{a, d, e\} = \{a, d, e\}$,
- 2) $b \circ \{a, d, e\} = \{b, c, f\}$,
- 3) $c \circ \{a, d, e\} = \{c, f, b\} = \{b, c, f\}$,
- 4) $d \circ \{a, d, e\} = \{d, e, a\} = \{a, d, e\}$,
- 5) $e \circ \{a, d, e\} = \{e, a, d\} = \{a, d, e\}$,
- 6) $f \circ \{a, d, e\} = \{f, b, c\} = \{b, c, f\}$.

Iš tų rezultatų išplaukia, jog pogrupio $(B, *) = (\{a, d, e\}, \circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ atžvilgiu grupės $(A, *) = (\{a, b, c, d, f\}, \circ)$ elementai d ir e yra ekvivalentūs elementui a,

t. y. $a' \sim d' \sim e$, o elementai c ir f yra ekvivalentūs elementui b, t. y. $b' \sim c' \sim f$. Elementai a, d ir e sudaro grupę operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu – grupės $(A, *)$ pogrupį $(B, *)$, o tarpusavyje ekvivalentūs to pogrupio atžvilgiu grupės A elementai c, d ir f grupės nesudaro, nors jų atvirkštiniai elementai ir priklauso jų pačių aibei. Struktūra $(\{b, c, f\}, \circ)$ nėra grupė vien jau todėl, kad ji nėra monoidas, nes neturi savo sudėtyje neutralaus elemento. Ši struktūra nėra net grupoidas, nes aibė $\{b, c, f\}$ nėra uždara operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu (pavyzdžiui, $b \circ c = d$, $b \circ b = a$, $b \circ f = e$, $c \circ c = a$, $c \circ b = e$, $c \circ f = d$, $f \circ f = a$, $f \circ b = d$, $f \circ c = e$, t. y. nė viena aibės $\{b, c, f\}$ binarinė kombinacija nepriklauso tai aibei).

Idomu, kad aibės A elementų ir aibės $\{b, c, f\}$ „sandaugos“ ($a \circ \{b, c, f\} = \{b, c, f\}$, $b \circ \{b, c, f\} = \{a, d, e\}$, $c \circ \{b, c, f\} = \{e, a, d\} = \{a, d, e\}$, $d \circ \{b, c, f\} = \{f, b, c\} = \{b, c, f\}$, $e \circ \{b, c, f\} = \{c, f, b\} = \{b, c, f\}$, $f \circ \{b, c, f\} = \{d, e, a\} = \{a, d, e\}$) yra tokios, kad aibės $\{b, c, f\}$ atžvilgiu tie patys elementai a, d ir e yra ekvivalentūs, kaip yra ekvivalentūs ir elementai b, c ir f. Taigi, nors struktūra $(\{b, c, d\}, \circ)$ ir nėra grupė, aibės A skaidinys į ekvivalentumo klases jos atžvilgiu sutampa su aibės A skaidiniu į ekvivalentumo klases grupės $(B, *) = (\{a, d, e\}, \circ)$ atžvilgiu.

Dabar jau galima apibrėžti grupės $(A, *)$ kairiųjų sluoksnių jos pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu ir grupės $(A, *)$ skaidinio į kairiuosius sluoksnius pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu sąvokas.

Grupės $(A, *)$ kairiaisiais sluoksniais jos pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu vadinami aibės A poaibiai, esantys ekvivalentumo klasėmis sąryšio $\sim$ atžvilgiu, t. y. poaibiai sudaryti iš tokių aibės A elementų, kurie yra binariniam sąryšyje $\sim$ vienas su kitu.

Pavyzdžiui, ką tik minėtoji keitinių grupė $S_3 = (\{a, b, c, d, e, f\}, \circ)$ savo pogrupio $(\{a, d, e\}, \circ)$ atžvilgiu turi du sluoksnius – poaibius $\{a, d, e\}$ ir $\{b, c, f\}$.

Grupės $(A, *)$ aibės A dekompozicija į sluoksnius tos grupės pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu vadinama **grupės $(A, *)$ skaidiniu į kairiuosius sluoksnius** pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu.

Pavyzdžiui, ką tik minėtieji du kairieji grupės S_3 sluoksniai sudaro tos grupės skaidinį į kairiuosius sluoksnius: $\{a, b, c, d, e, f\} = \{a, d, e\} \cup \{b, c, f\}$.

Kad grupės $(A, *)$ aibės A dekompozicija į kairiuosius sluoksnius pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu tikrai yra skaidinys, išplaukia iš to, jog: 1) aibės A sluoksniai A_i yra aibės A poaibiai, nes sudaryti iš aibės A elementų; 2) tie poaibiai nėra tušti, nes turi mažiausiai po vieną elementą, kadangi $a_i \sim a_i$; 3) sluoksnių A_i ir A_j sankirtos $A_i \cap A_j$ yra tuščios, jei $i \neq j$, nes, jei A_j turėtų nors vieną elementą, priklausantį A_i , tai visa A_j turėtų priklausyti A_i , t. y. būtų ne du skirtingi sluoksniai, o vienas; 4) iš ekvivalentumo sąryšio $\sim$ ir kairiųjų sluoksnių apibrėžimo išplaukia, jog visų sluoksnių sąjunga $\bigcup_i A_i = A$, t. y. pilnai padengia visą aibę A .

Analogiškai apibrėžiama grupės $(A, *)$ **dešiniųjų sluoksnių ir ekvivalentumo „ $\sim$ “ sąvokos:**

1) $\sim = \{(a_i, a_j) / B * a_i = B * a_j, a_i \in A, a_j \in A, B \subseteq A\}$, arba $\forall a_i \in A \forall a_j \in A [(B * a_i = B * a_j) \rightarrow (a_i \sim a_j)]$,

2) grupės $(A, *)$ aibės A poaibiai, esantys ekvivalentumo klasėmis ekvivalentumo sąryšio $\sim$ atžvilgiu, vadinami **aibės A dešiniaisiais sluoksniais grupės $(A, *)$ pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu.**

Pavyzdžiui, keitinių grupės $S_3 = (\{a, b, c, d, e, f\}, \circ)$ dešiniaisiais sluoksniais jos pogrupio $(B, *) = (\{a, d, e\}, \circ)$ atžvilgiu bus aibės a poaibiai $\{a, d, e\}$ ir $\{b, c, f\}$, nes $\{a, d, e\} \circ a = \{a, d, e\}$, $\{a, d, e\} \circ b = \{b, f, c\} = \{b, c, f\}$, $\{a, d, e\} \circ c = \{c, b, f\} = \{b, c, f\}$, $\{a, d, e\} \circ d = \{d, e, a\} = \{a, d, e\}$, $\{a, d, e\} \circ e = \{e, a, d\} = \{a, d, e\}$, $\{a, d, e\} \circ f = \{f, c, b\} = \{b, c, f\}$.

Šiuo atveju grupės S_3 skaidinys į kairiuosius sluoksnius pogrupio $(B, *) = (\{a, d, e\}, \circ)$ atžvilgiu sutapo su tos grupės skaidiniu į dešiniuosius sluoksnius to paties pogrupio atžvilgiu, nors pati grupė $(A, *) = (\{a, b, c, d, e, f\}, \circ)$ nėra komutatyvi, o komutatyvus tik pogrupis $(B, *) = (\{a, d, e\}, \circ)$. Akivaizdu, kad jei $(A, *)$ – Abelio grupė, tai jos skaidiniai į kairiuosius ir dešiniuosius sluoksnius jos pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu, kuris tuomet taip pat bus komutatyvus, sutaps ir $a_i \sim a_j \leftrightarrow a_j \sim a_i$. Tuomet vietoj „ $\sim$ “ bei „ $\sim'$ “ galime rašyti tiesiog „ $\sim$ “.

Atvejo, kai grupės $(A, *)$ skaidinys į kairiuosius sluoksnius nesutampa su skaidiniu į dešiniuosius sluoksnius, pavyzdžiu gali būti tos pačios keitinių grupės S_3 skaidinys į sluoksnius pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu, kuriame poaibį B sudaro keitinys a su bet kuriuo iš keitinių b, c ar f .

Algebrinės struktūros $(\{a, b\}, \circ)$, $(\{a, c\}, \circ)$ ir $(\{a, f\}, \circ)$ yra grupės, nes aibės $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, f\}$ yra uždaros operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu, kuri, kaip jau buvo įrodyta, yra asociatyvi, visos trys aibės turi neutralųjį elementą – keitinį $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ir kiekvienas tų aibių elementas turi sau atvirkštinį toje

pačioje aibėje.

Rasime grupės $(\{a, b, c, d, e, f\}, \circ)$ skaidinį į sluoksnius jos pogrupio $(\{a, c\}, \circ)$ atžvilgiu:

$$\begin{aligned} a \circ \{a, c\} &= \{a, c\}, & \{a, c\} \circ a &= \{a, c\}, \\ b \circ \{a, c\} &= \{b, d\}, & \{a, c\} \circ b &= \{b, e\}, \\ c \circ \{a, c\} &= \{c, a\} = \{a, c\}, & \{a, c\} \circ c &= \{c, a\} = \{a, c\}, \\ d \circ \{a, c\} &= \{d, b\} = \{b, d\}, & \{a, c\} \circ d &= \{d, f\}, \\ e \circ \{a, c\} &= \{e, f\}, & \{a, c\} \circ e &= \{e, b\} = \{b, e\}, \\ f \circ \{a, c\} &= \{f, e\} = \{e, f\}, & \{a, c\} \circ f &= \{f, d\} = \{d, f\}. \end{aligned}$$

Grupės S_3 skaidinys į kairiuosius sluoksnius pogrupio $(\{a, c\}, \circ)$ atžvilgiu yra $\{a, c\} \cup \{b, d\} \cup \{e, f\}$, o tos pačios grupės S_3 skaidinys į dešiniuosius sluoksnius to paties pogrupio atžvilgiu yra $\{a, c\} \cup \{b, e\} \cup \{d, f\}$. Kaip matome, abu skaidiniai nėra pilnai tapatūs, nes $b \sim d$, $e \sim f$, $b \sim e$, $d \sim f$, t. y. „ $\sim \neq \sim'$ “.

Tuo tarpu grupės $(\mathbb{Z}_8, +)$, kurioje $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$, o operacija „ $+$ “ – aritmetinės sudėties operacija, turinti ir asociatyvumo, ir komutatyvumo savybę, skaidiniai į kairiuosius ir dešiniuosius sluoksnius, pavyzdžiui, pogrupio $(\{\overline{0}, \overline{4}\}, +)$ atžvilgiu bus būtinai vienodi.

Tikrai:

$$\begin{aligned} \overline{0} * B &= \overline{0} + \{\overline{0}, \overline{4}\} = \{\overline{0} + \overline{0}, \overline{0} + \overline{4}\} = \{\overline{0}, \overline{4}\}, \\ \overline{1} * B &= \overline{1} + \{\overline{0}, \overline{4}\} = \{\overline{1} + \overline{0}, \overline{1} + \overline{4}\} = \{\overline{1}, \overline{5}\}, \\ \overline{2} * B &= \overline{2} + \{\overline{0}, \overline{4}\} = \{\overline{2} + \overline{0}, \overline{2} + \overline{4}\} = \{\overline{2}, \overline{6}\}, \\ \overline{3} * B &= \overline{3} + \{\overline{0}, \overline{4}\} = \{\overline{3} + \overline{0}, \overline{3} + \overline{4}\} = \{\overline{3}, \overline{7}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{4} * B &= \bar{4} + \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{4} + \bar{0}, \bar{4} + \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}, \\
\bar{5} * B &= \bar{5} + \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{5} + \bar{0}, \bar{5} + \bar{4}\} = \{\bar{5}, \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\
\bar{6} * B &= \bar{6} + \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{6} + \bar{0}, \bar{6} + \bar{4}\} = \{\bar{6}, \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{6}\}, \\
\bar{7} * B &= \bar{7} + \{\bar{0}, \bar{4}\} = \{\bar{7} + \bar{0}, \bar{7} + \bar{4}\} = \{\bar{7}, \bar{3}\} = \{\bar{3}, \bar{7}\}, \\
B * \bar{0} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{0} = \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{4} + \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}, \\
B * \bar{1} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{1} = \{\bar{0} + \bar{1}, \bar{4} + \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\
B * \bar{2} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{2} = \{\bar{0} + \bar{2}, \bar{4} + \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{6}\}, \\
B * \bar{3} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{3} = \{\bar{0} + \bar{3}, \bar{4} + \bar{3}\} = \{\bar{3}, \bar{7}\}, \\
B * \bar{4} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{4} = \{\bar{0} + \bar{4}, \bar{4} + \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{4}\}, \\
B * \bar{5} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{5} = \{\bar{0} + \bar{5}, \bar{4} + \bar{5}\} = \{\bar{5}, \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\
B * \bar{6} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{6} = \{\bar{0} + \bar{6}, \bar{4} + \bar{6}\} = \{\bar{6}, \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{6}\}, \\
B * \bar{7} &= \{\bar{0}, \bar{4}\} + \bar{7} = \{\bar{0} + \bar{7}, \bar{4} + \bar{7}\} = \{\bar{7}, \bar{3}\} = \{\bar{3}, \bar{7}\}.
\end{aligned}$$

Iš šių lygybių išplaukia:

$\bar{0} \sim \bar{4}$, $\bar{1} \sim \bar{5}$, $\bar{2} \sim \bar{6}$, $\bar{3} \sim \bar{7}$ ir $\bar{0} \sim \bar{4}$, $\bar{1} \sim \bar{5}$, $\bar{2} \sim \bar{6}$, $\bar{3} \sim \bar{7}$. Taigi, aibės $Z_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ skaidinys grupės $(Z_8, +)$ pogrupo $(\{\bar{0}, \bar{4}\}, +)$ atžvilgiu į kairiuosius ir dešiniuosius sluoksnius yra vienas ir tas pats:

$$Z_8 = \{\bar{0}, \bar{4}\} \cup \{\bar{1}, \bar{5}\} \cup \{\bar{2}, \bar{6}\} \cup \{\bar{3}, \bar{7}\}.$$

Grupės $(A, *)$ skaidinio į ekvivalentumo klases jos pogrupo $(B, *)$ atžvilgiu klasių A_i skaičius vadinamas grupės $(A, *)$ pogrupo $(B, *)$ indeksu. Šis indeksas žymimas $/A:B/$.

Kadangi, kaip jau buvo anksčiau minėta ir įrodyta, grupėse galioja prastinio taisyklės

$$\begin{aligned}
[(a*b_i) &= (a*b_j)] \Leftrightarrow (b_i=b_j), \\
[(c_i*a) &= (c_j*a)] \Leftrightarrow (c_i=c_j),
\end{aligned}$$

tai, jas pritaikę lygybėms $a_i*B = a_j*B$ ir $B*a_i = B*a_j$, gauname, jog baigtinės grupės $(A, *)$ skaidinio į sluoksnius jos pogrupo $(B, *)$ atžvilgiu visi sluoksniai turi tą patį elementų skaičių, t. y. turi tą pačią galią, lygią poaibio B galiai $/B/$.

Iš šio fakto išplaukia **Lagranžo (J. L. Lagrange) teorema baigtinėms grupėms $(A, *)$ ir jų pogrupsams $(B, *)$: $/A/=B/ \cdot /A:B/$** . Tai ir paaiškina, kodėl grupės $(A, *)$ pogrupo $(B, *)$ indeksas žymimas $/A:B/$.

Grupės $(A, *)$ pogrupsis $(B, *)$ vadinamas normaliuoju, kai jis visiems $a \in A$ tenkina lygybę $a*B = B*a$. Akivaizdu, kad bet koks Abelio grupės $(A, *)$ pogrupsis $(B, *)$ yra normalusis. **Grupės $(A, *)$ sluoksnių normaliojo jos pogrupo $(B, *)$ atžvilgiu aibė vadinama aibės A faktoraibe ekvivalentumo sąryšio $\sim$ pogrupo $(B, *)$ atžvilgiu ir žymima A/B .** Iš šio apibrėžimo išplaukia, jog $A/B \cdot /B/ = /A:B/$.

Kai $(B, *)$ yra normalusis grupės $(A, *)$ pogrupsis, tai nesunku įrodyti, jog bet kokie aibės A elementai a_i, a_j, a_k, a_r tenkina sąlygą: $\forall a_i \in A \quad \forall a_j \in A \quad \forall a_k \in A \quad \forall a_r \in A \quad [(a_i*B = a_j*B) \wedge (a_k*B = a_r*B) \Rightarrow (a_i*a_k*B = a_j*a_r*B)]$.

Iš šios implikacijos išplaukia implikacija

$$\forall a_i \in A \quad \forall a_j \in A \quad \forall a_k \in A \quad \forall a_r \in A \quad [(a_i \sim a_j) \wedge (a_k \sim a_r) \Rightarrow (a_i*a_k \sim a_j*a_r)].$$

Abiejų šių implikacijų įrodymą palieku skaitytojui. Grupės $(A, *)$, išskaidytos į sluoksnius kokio nors jos normaliojo pogrupo $(B, *)$ atžvilgiu, faktoraibėje A/B galima įvesti algebrinę operaciją „ $\otimes$ “, tarp skaidinio sluoksnių a_i*B ir a_k*B , kurios rezultatas apibrėžiamas šia lygybe:

$$(a_i*B) \overset{\text{def}}{\otimes} (a_k*B) = (a_i*a_k)*B.$$

Akivaizdu, kad ši operacija yra tarp sluoksnių ir jos rezultatas priklauso nuo sluoksnių – faktoraibės A/B elementų, nes ši lygybė niekuo nepasikeis, jei elementą a_i pakeisime elementu $a_j \sim a_i$, t. y. priklausančiu tam pačiam sluoksniui, o elementą a_k – elementu $a_r \sim a_k$.

Galima įrodyti, jog tuo atveju, kai $(A, *)$ yra grupė, o $(B, *)$ – jos normalusis pogrupsis, tai algebrinė struktūra $(A/B, \otimes)$ taip pat yra grupė.

Visų pirma įrodysiu, jog algebrinė struktūra $(\frac{A}{B}, \otimes)$ yra uždara, t. y., jog operacijos „ $\otimes$ “, rezultatas su aibės $\frac{A}{B}$ elementais (grupės $(A, *)$ sluoksniais) priklauso aibei $\frac{A}{B}$, nes yra koks nors aibės A skaidinio pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu sluoksniš.

Kadangi $(A, *)$ yra grupė ir $a_i \in A$, $a_j \in A$, tai ir $a_i * a_j$ yra aibės A elementas. Bet koks aibės A elementas patenka į kokį nors grupės $(A, *)$ sluoksnį pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu, todėl ir elementas $a_i * a_j$ atstovauja kokį nors aibės skaidinio į sluoksnius sluoksnį, t. y. $(a_i * a_j) * B \in \frac{A}{B}$, o tai reiškia, jog $(\frac{A}{B}, \otimes)$ yra grupoidas.

Kadangi $(A, *)$ yra grupė, tai operacija „ $*$ “ yra asociatyvi, todėl, kaip išplaukia iš operacijos „ $\otimes$ “, apibrėžimo, turi būti asociatyvi ir operacija „ $\otimes$ “. Tai išplaukia iš lygybių:

- 1) $((a_i * B) \otimes (a_j * B)) \otimes (a_k * B) = ((a_i * a_j) * B) \otimes (a_k * B) = (((a_i * a_j) * a_k) * B) = ((a_i * a_j * a_k) * B)$;
- 2) $(a_i * B) \otimes ((a_j * B) \otimes (a_k * B)) = (a_i * B) \otimes ((a_j * a_k) * B) = ((a_i * (a_j * a_k)) * B) = ((a_i * a_j * a_k) * B)$.

Taigi, gavome, jog $((a_i * B) \otimes (a_j * B)) \otimes (a_k * B) = (a_i * B) \otimes ((a_j * B) \otimes (a_k * B))$, o tai reiškia, jog $(\frac{A}{B}, \otimes)$ yra pusgrupis.

Kadangi $(A, *)$ yra grupė, tai ji turi neutralųjį elementą e_A . Sudarysime algebrinės struktūros $(\frac{A}{B}, \otimes)$ elementą $e_A * B$ ir įrodysime, jog jis yra algebrinės struktūros $(\frac{A}{B}, \otimes)$ neutralusis elementas. Iš tikrųjų: 1) $(e_A * B) \otimes (a * B) = ((e_A * a) * B) = (a * B)$; 2) $(a * B) \otimes (e_A * B) = ((a * e_A) * B) = (a * B)$. Taigi, pusgrupis $(\frac{A}{B}, \otimes)$ yra monoidas.

Kadangi $(A, *)$ yra grupė, tai kiekvienas jos elementas a turi atvirkštinį elementą a^{-1} . Įrodysime, kad kiekvienas struktūros $(\frac{A}{B}, \otimes)$ elementas $(a * B)$ turi atvirkštinį elementą $(a * B)^{-1}$ ir tas atvirkštinis elementas yra $a^{-1} * B$, t. y. kad $(a * B)^{-1} = (a^{-1} * B)$. Iš tikrųjų:

- 1) $(a^{-1} * B) \otimes (a * B) = ((a^{-1} * a) * B) = (e_A * B)$;
- 2) $(a * B) \otimes (a^{-1} * B) = ((a * a^{-1}) * B) = (e_A * B)$.

Taigi monoidas $(\frac{A}{B}, \otimes)$ yra grupė, ką ir reikėjo įrodyti.

Grupė $(\frac{A}{B}, \otimes)$ vadinama grupės $(A, *)$ faktorgrupe pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu.

Faktorgrupės sąvoką ir jos gavimo procedūrą pailiustruosiu tokiu paprastu pavyzdžiu.

Tarkime, jog $(A, *) = (\mathbb{Z}, +)$. Kadangi algebrinė sveikųjų skaičių sudėties operacija yra komutatyvi, tai ši grupė – Abelio grupė. Todėl jos pogrupiai yra normalieji pogrupiai. Priimsime, jog vienas iš jų, būtent grupė $(n\mathbb{Z}, +)$, kur $n \geq 2$ yra koks nors pastovus natūralus skaičius, yra poaibis $(B, *)$, kurio atžvilgiu grupę $(\mathbb{Z}, +)$ skaidysime į sluoksnius.

Tarkime, jog $n=2$. Tuomet $(B, *) = (2\mathbb{Z}, +)$, t. y., aibę B sudaro sveikųjų lyginių skaičių aibė $\{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}$, kurioje $k=0, 1, 2, 3, ...$

Pogrupis $(2\mathbb{Z}, +)$ suskaidys aibę $\mathbb{Z}$ į du ekvivalentumo sluoksnius: lyginių ir nelyginių skaičių aibes, nes kai skaičius a yra lyginis, tai $a * B = a + \{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\} = \{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}$ lyginių sveikųjų skaičių aibė, o kai skaičius a – nelyginis, tai $a * B = a + \{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\} = \{..., (-2k-1), ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ..., (2k+1), ...\}$ nelyginių skaičių aibė. Taigi visi lyginiai sveikieji skaičiai $a \in \mathbb{Z}$ bus ekvivalentūs pogrupio $(2\mathbb{Z}, +)$ atžvilgiu ir pateks į vieną grupės $(\mathbb{Z}, +)$ sluoksnį, o visi nelyginiai sveikieji skaičiai $a \in \mathbb{Z}$, taip pat būdami ekvivalentūs pogrupio $(B, *)$ atžvilgiu, pateks į kitą grupės $(\mathbb{Z}, +)$ sluoksnį.

Tie sluoksniai sutaps su aibės $\mathbb{Z}$ ekvivalentumo klasėmis ekvivalentumo sąryšio $\equiv (\text{mod } 2)$ atžvilgiu $K_2(0) = \bar{0}$ ir $K_2(1) = \bar{1}$, t. y. sudarys faktoraibę $\frac{A}{B} = \mathbb{Z}_2$. Tai reiškia, jog šiuo atveju faktoraibė $\frac{A}{B}$ yra faktoraibė $\mathbb{Z}_2$.

Operacija „ $\otimes$ “, su faktoraibės $\frac{A}{B}$ elementais $(a * B)$, t. y. su aibės $\mathbb{Z}_2$ elementais $\bar{0}$ ir $\bar{1}$ gali būti ir ta pati sudėties operacija, nes ji tenkina operacijos „ $\otimes$ “, apibrėžimo reikalavimus: $(a_i * B) \otimes (a_j * B) = (a_i * a_j) * B$, kurie šiuo atveju atrodo taip: $(a_i + 2\mathbb{Z}) + (a_j + 2\mathbb{Z}) = (a_i + a_j) + 2\mathbb{Z}$. Iš tikrųjų, jei operaciją „ $\otimes$ “, pakeisime operacija „ $+$ “, tai gausime tapatybę:

$$(a_i + \{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}) + (a_j + \{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}) \equiv (a_i + a_j) + \{..., -2k, ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}.$$

Taigi, operacija „+“ tenkina operacijai „ $\otimes$ “, jos apibrėžime nurodytus reikalavimus ir todėl grupės $(\mathbb{Z}, +)$ faktorgrupė pogrupio $(2\mathbb{Z}, +)$ atžvilgiu gali būti grupė $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Analogiškai galima parodyti, jog grupės $(\mathbb{Z}, +)$ faktorgrupė pogrupio $(n\mathbb{Z}, +)$ atžvilgiu gali būti grupė $(\mathbb{Z}_n, +)$, kurioje $\mathbb{Z}_n = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1} \}$.

Grupių (o tuo pačiu ir struktūrų) teorijoje labai svarbus vaidmuo skiriamas funkcijoms, kurios, būdamos apibrėžtos vienoje grupėje (vienoje struktūroje), savo reikšmes įgyja kitoje grupėje (kitoje struktūroje) ir atspindi bendrąsias tų grupių (struktūrų) savybes bei sąryšius tarp tų grupių (struktūrų) elementų. Tokiomis funkcijomis yra **grupių homomorfizmas ir izomorfizmas**. Šių funkcijų svarbą sistemų teorijoje patvirtina, kad ir toks faktas, jog **sistemų struktūrų homomorfizmo ir izomorfizmo sąvokoms šioje mokymo priemonėje jau buvo išskirtas visas 1.8. skyrius. Jame mes homomorfizmo ir izomorfizmo sąvokas nagrinėjome struktūrų panašumo atžvilgiu. Dabar į tas sąvokas pažvelgsime iš algebrinių struktūrų teorijos pusės.**

1.8.3. skyrelyje **struktūrų homomorfizmu** buvo pavadinta atitiktis tarp dviejų struktūrų S_1 ir S_2 (žiūr. 47 pav.), pasireiškianti tuo, kad vienos struktūros elementų aibę A , turinčią ne mažiau elementų negu antros struktūros elementų aibę B , pavyksta suskaidyti į B netuščių, nesikertančių ir aibę A pilnai padengiančių poaibių $A_i \subset A$, atitinkančių aibės B elementus b_i ir ryšius (santykius) tarp jų taip, kad ryšiai tarp bet kurių $b_i \in B$ ir $b_j \in B$ abipusiai vienareikšmiškai atitiktų tuos aibės B elementus atitinkančių poaibių $A_i \subset A$ ir $A_j \subset A$ tarpusavio ryšius (santykius), susidedančius iš ryšių (santykių) tarp elementų $a_{ik} \in A_i$ ir $a_{jm} \in A_j$, tų elementų numeriams k ir m poaibiuose A_i ir A_j prabėgant visas galimas reikšmes.

Šią atitiktį tarp aibės A skaidinio A_i ir aibės B elementų b_i , nekeičiančią ryšių (santykių) tarp bet kurių to skaidinio poaibių $A_i \subset A$ ir $A_j \subset A$ struktūros, o tik transformuojančią į ryšių (santykių) tarp atitinkamų elementų $b_i \in B$ ir $b_j \in B$ struktūrą, galima laikyti aibės A projekcija į aibę B , t. y. **struktūrų homomorfizmą galima laikyti funkcija $f_A: A \rightarrow B$, pervedančia aibės A elementus a į jų vaizdus – aibės B elementus $f(a)=b$ taip, kad santykiai (ryšiai) tarp poaibių A_i , kuriems priklauso atitinkami aibės A elementai a_{ik} , tampa santykiais (ryšiais) tarp tų poaibių A_i (o kartu ir aibės A elementu a_{ik}) vaizdų – aibės B elementų.**

Trumpai tariant, **struktūrų homomorfizmas yra tokia funkcija $f_H: A \rightarrow B$, kuri suskaido struktūros S_1 elementų a_i ir ryšių r_{ij} tarp jų aibės į netuščius nesikertančius poaibius ir pveda tuos poaibius į jų vaizdus struktūroje S_2 , t. y. į struktūros S_2 elementus b_k ir ryšius r_{km} tarp jų.** Taigi, transformuojant struktūrą S_1 į jai homomorfišką struktūrą S_2 , pavyzdžiui, sudarant kokios nors vietovės planą (žemėlapi), reikia struktūrą S_1 dekomponuoti (suskaidyti) į atitinkamus posistemius ir tuos posistemius bei ryšius tarp jų (pavyzdžiui, atstumus) pakeisti jų vaizdais struktūroje S_2 . **Homomorfizmą vaizduojanti funkcija $f_H: A \rightarrow B$ tą struktūros S_1 skaidymą į posistemius S_{ij} vykdo, suteikdama visiems posistemio S_{ij} elementams vieną ir tą patį vaizdą b_j ir visiems posistemio S_{ij} elementų ryšiams su posistemio S_{ik} elementais taip pat vieną ir tą patį vaizdą – ryšį tarp sistemos S_2 elementų aibės B elementų b_i ir b_k , t. y. laikydama visus posistemio S_{ij} elementus priklausančiais vienai ekvivalentumo klasei, sutapatindama tuos elementus su ta klase ir pakeisdama visą klasę jos vaizdu sistemoje S_2 . Pagrindiniai sunkumai, kurie gali atsirasti konstruojant struktūrų homomorfizmo funkciją f_H , t. y. pervedant struktūrą S_1 į jos homomorfišką modelį S_2 , kaip tik ir yra struktūros S_1 tinkamos dekompozicijos į ekvivalentumo klases radimas, t. y. aibės A tinkamos faktoraiybės sudarymas.**

Kai funkcija $f_H: A \rightarrow B$ yra bijekcija, t. y. kai aibės A poaibiai A_i sutampa su aibės A elementais a_i ir kiekvienas aibės A elementas projektuojasi į vieną ir tik vieną aibės B elementą b_i , o taip pat kiekvienas tarpelementinis ryšys struktūroje S_1 projektuojasi į vieną ir tik vieną tarpelementinį ryšį struktūroje S_2 , tai struktūrų homomorfizmas tampa **struktūrų izomorfizmu**. Tuomet funkcijai $f_H: A \rightarrow B$ egzistuoja atvirkštinė funkcija $f_H^{-1}: B \rightarrow A$, o tai reiškia, jog ir struktūra S_2 tuomet vienareikšmiškai ir ekvivalentniai projektuojasi į struktūrą S_1 . Sudarant funkciją, vaizduojančią struktūrų izomorfizmą, atkrinta struktūrų dekompozicijos į ekvivalentumo klases reikiamybė, nes šiuo atveju ekvivalentumo klasės sutampa su pačiais elementais a_{ij} ir b_{ij} , ir todėl belieka tik sudaryti tarpstruktūrines „ekvivalentumo klases“, imant į kiekvieną klasę po vieną elementą iš struktūros S_1 ir po vieną – iš struktūros S_2 taip, kad jie būtų ekvivalentūs savo vaidmenimis (savo ryšiais) struktūrose S_1 ir S_2 .

Analogiškai, kaip 1.8. skyriuje buvo suformuotos sistemų struktūrų homomorfizmo ir izomorfizmo sąvokos, algebrinių struktūrų teorijoje galima suformuoti algebrinių struktūrų homomorfizmo ir izomorfizmo sąvokas.

Apibrėšime **grupių homomorfizmą**. Tarkime, jog turime dvi grupes $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ tokias, kurioms galima sudaryti funkciją $f_H: A \rightarrow B$, pervedančią aibės A elementus a į jų vaizdus aibėje B $f_H(a)=b$ taip, kad aibės A elementų santykiai operacijos „ $*$ “ atžvilgiu vienareikšmiškai pereina į jų vaizdų $f_H(a)$ santykius operacijos „ $\circ$ “ atžvilgiu, t. y. kai kiekviena lygybė $a_i * a_j = a_k$, egzistuojanti grupėje

$(A, *)$, pereina į lygybę $f_H(a_i) \circ f_H(a_j) = f_H(a_k)$ grupėje $(B, \circ)$. Tuomet sakoma, kad tos dvi grupės yra homomorfiškos.

Grupių $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ homomorfizmas algebrinių struktūrų teorijoje formaliai apibrėžiamas kaip funkcija $f_H: A \rightarrow B$, tenkinanti sąlygą $\forall a_i \in A \forall a_j \in A [f_H(a_i * a_j) = (f_H(a_i) \circ f_H(a_j))]$.

Kai funkcija $f_H: A \rightarrow B$ yra bijekcija, tai grupių homomorfizmas tampa **grupių izomorfizmu**.

Pailiustruosiu dviejų grupių homomorfizmą konkrečiu pavyzdžiu, kai pirmosios grupės $(A, *)$ aibė A yra kvadratinų n – sios eilės realių matricų M^* , kurių determinantai $\det M^* \neq 0$, aibė $\{M^*\}$, tos grupės operacija „ $*$ “ – tų matricų daugybos operacija „ $*$ “, antrosios grupės $(B, \circ)$ aibė B yra minėtųjų matricų M^* determinantų reikšmių aibė $D^* \in \mathbb{R}^*$, t. y. realiųjų skaičių, nelygių 0, aibė, o operacija „ $\circ$ “ – realiųjų skaičių daugybos operacija „ $\cdot$ “.

Pradžioje įrodysiu, jog pirmoji algebrinė struktūra $(\{M^*\}, \cdot)$ yra grupė.

1. Iš matricų algebros žinome, jog dauginami dvi kvadratinės n -sios eilės matricas, sudarytas iš realių skaičių, rezultate gauname kvadratinę n -sios eilės matricą, sudarytą iš realiųjų skaičių ir turinčią determinantą, lygų dauginamųjų matricų determinantų sandaugai. Todėl dauginami reguliarios matricas, kurių determinantai nelygūs 0, gauname matricą, kurios determinantas taip pat nelygus 0. Taigi, algebrinė struktūra $(\{M\}, \cdot)$ yra grupoidas.

2. Kadangi matricų daugybos operacija yra asociatyvi, tai grupoidas $(\{M^*\}, \cdot)$ yra pusgrupė.

3. Pusgrupė $(\{M^*\}, \cdot)$ turi neutralųjį elementą – vienetinę matricą I , kurios pagrindinės įstrižainės elementai lygūs 1, o visi kiti elementai – nuliai. Taigi, pusgrupė $(\{M\}, \cdot)$ yra monoidas.

4. Kiekviena kvadratinė matrica M^* , kurios $\det M^* \neq 0$, turi atvirkštinę matricą M^{*-1} matricų daugybos atžvilgiu. Ši matrica M^{*-1} gaunama, pakeitus matricos M^* elementus a_{ij} jų transponuotais adjunktais, padalintais iš $\det M^*$, t. y. $(a_{ij})^{-1} = \frac{A_{ji}}{\det M^*}$.

Taigi, monoidas $(\{M\}, \cdot)$ yra grupė.

Ši grupė yra svarbi matricų algebroje. **Ji vadinama pilnąja tiesine multiplikacine n -sios eilės realiųjų reguliariųjų kvadratinių matricų grupe ir turi specialų žymenį $GL_n(\mathbb{R})$, arba $GL(n, \mathbb{R})$.**

Antroji algebrinė struktūra $(D^*, \cdot)$, kurioje $D^* = \{\det M^*\} = \mathbb{R}^*$ – realiųjų skaičių, nelygių 0, aibė, o operacija „ $\cdot$ “ – realiųjų skaičių daugybos operacija, taip pat yra grupė. Šio teiginio įrodymas toks paprastas, jog jį palieku skaitytojui.

Įrodysiu dabar, kad funkcija f , apskaičiuojanti matricos M determinantą (t. y. apskaičiuojanti matricos M elementų a_{ij} visų galimų $n!$ sandaugų, imant į sandaugas po vieną ir tik vieną elementą iš kiekvienos eilutės i ir kiekvieno stulpelio j , algebrinę sumą, kurios narių ženklai nustatomi, atsižvelgiant į tai, lyginį ar nelyginį „netvarkų“ skaičių sudaro matricos elementų, patekusių į sandaugą, indeksai) ir tokiu būdu vienareikšmiškai projektuojanti aibės $\{M^*\}$ elementus M^* į aibės $D^* = \{\det M\} = \mathbb{R}^*$ elementus, yra grupių $(\{M^*\}, \cdot)$ ir $(\{\det M^*\}, \cdot)$ homomorfizmo funkcija $f_H: \{M^*\} \rightarrow \{\det M^*\}$, tenkinanti sąlygą $\forall_{M_i \in \{M\}} \forall_{M_j \in \{M\}} [f_H(M_i \cdot M_j) = f_H(M_i) \cdot f_H(M_j)]$.

Šią sąlygą funkcija $f_H(M^*) = \det M^*$ tenkina, nes kaip žinome iš matricų algebros, kvadratinių matricų sandaugos determinantas yra lygus tų matricų determinantų sandaugai: $\forall_{M_i \in \{M\}} \forall_{M_j \in \{M\}} [\det (M_i \cdot M_j) = \det M_i \cdot \det M_j]$.

Taigi $f_H(M^*) = \det M^*$ yra grupių $(\{M^*\}, \cdot)$ ir $(\{\det M^*\}, \cdot)$ homomorfizmo funkcija $f_H: \{M^*\} \rightarrow \{\det M^*\}$.

Šis homomorfizmas nėra izomorfizmas, nes kiekvienai $\det M^*$ reikšmei $\mathbb{R}^*$ egzistuoja be galo daug skirtingų matricų $M^* \in \{M^*\}$, turinčių tą pačią $\det M^*$ reikšmę. Taigi, funkcija $f_H(M^*)$ nėra injekcija ir todėl negali būti bijekcija, o todėl homomorfizmas $f_H: \{M^*\} \rightarrow \{\det M^*\}$ nėra izomorfizmas.

Grupių izomorfizmo pavyzdžiu galėtų būti grupių $(\{\vec{V}\}, +)$ ir $(\mathbb{K}, +)$ izomorfizmas, kuriame aibė $\{\vec{V}\}$ yra dvimačių vektorių $\vec{V}$ plokštumoje, turinčių pradžią koordinatinių pradžios taške, aibė, operacija „ $+$ “ – vektorių sudėties operacija, aibė $\mathbb{K}$ – kompleksinių skaičių $x+iy$ (čia $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$ – menamas vienetas) aibė, operacija „ $+$ “ – kompleksinių skaičių sudėties operacija, apibrėžiama lygybe $\forall_{x_k \in \mathbb{R}} \forall_{y_k \in \mathbb{R}} \forall_{x_m \in \mathbb{R}} \forall_{y_m \in \mathbb{R}} [(x_k + iy_k) + (x_m + iy_m) = (x_k + x_m) + i(y_k + y_m)]$.

Įrodymą, kad $(\{\vec{V}\}, +)$ ir $(\mathbb{K}, +)$ yra grupės ir kad funkcijos $f_1: \{\vec{V}\} \rightarrow \mathbb{K}, f_2 = f_1^{-1}: \mathbb{K} \rightarrow \{\vec{V}\}$ aprašo izomorfizmą, taip pat palieku skaitytojui, nes visi tie įrodymai yra analogiški kitiems tik pademonstruotiems įrodymams.

Ne visos grupės gali būti homomorfiškos (o tuo labiau – izomorfiškos). Šio teiginio įrodymui pakanka vieno pavyzdžio. Tarkime, jog $\{M\}$ yra n -osios eilės realiųjų (tačiau ne būtinai – reguliariųjų)

kvadratinų matricų M aibė, o operacija „+“ yra matricų sudėties operacija. Nesunku įrodyti, kad algebrinė struktūra $(\{M\}, +)$ yra Abelio grupė su neutraliu elementu – nuline matrica. Šioje grupėje kiekviena matrica turi atvirkštinę matricą matricų sudėties operacijos „+“ atžvilgiu – matricą, gaunamą pakeitus matricoje M visų elementų ženklus į priešingus. Kiekviena matrica $M \in \{M\}$ turi determinantą $\det M$, apskaičiuojamą pagal jau minėtąją elementų sandaugos sumavimo taisyklę, todėl egzistuoja funkcija $f: \{M\} \rightarrow \{\det M\}$, t. y. $f: \{M\} \rightarrow \mathbb{R}$, nes šiuo atveju $\{\det M\} = \mathbb{R}$, tačiau ši funkcija nėra grupių $(\{M\}, +)$ ir $(\{\det M\}, +)$ homomorfizmas, nes funkcija $f(M) = \det M$ tik kai kurioms matricoms $M_i \in \{M\}$ ir $M_j \in \{M\}$ tenkina sąlygą $f(M_i + M_j) = f(M_i) + f(M_j)$, o dažniausiai jos netenkina.

$$\text{Pavyzdžiui, } f\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = 72 - 56 = 16,$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 12 = -2, \quad f\left(\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 24 - 15 = 9, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ f\left(\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 + 9 = 7.$$

Kadangi $16 \neq 7$, tai šiuo atveju $\det(M_i + M_j) \neq \det M_i + \det M_j$.

Išnagrinėti pavyzdžiai rodo, jog **funkcija $f(M) = \det M$ išlaiko aibėje $\{M\}$ santykius tarp jos elementų – matricų M – matricų daugybos atžvilgiu, pervesdama juos į tų matricų determinantų daugybą, tačiau neišlaiko santykių tarp matricų matricų sudėties atžvilgiu.**

Kai grupės $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ yra homomorfinės, tai aibėje A galima išskirti tokį poaibį, vadinamą **homomorfizmo branduoliu ir žymimą $\text{Ker } f_H$** , kurio elementų vaizdai sutampa su grupės $(B, \circ)$ neutraliuoju elementu e_B . Homomorfizmo $f_H: (A, *) \rightarrow (B, \circ)$ branduolys $\text{Ker } F_H$ formaliai apibrėžiamas formule **$\text{Ker } f_H = \{a \in A / f_H(a) = e_B\}$** .

Kadangi funkcija f_H ne būtinai turi būti injekcija, tai homomorfizmo branduolys savo sudėtyje gali turėti daugiau negu vieną aibės A elementą. Jų tarpe būtinai bus grupės $(A, *)$ neutralusis elementas e_A . Tai nesunku įrodyti:

- 1) kadangi f_H yra grupių $(A, *)$ ir $(B, \circ)$ homomorfizmas, tai $f_H(e_A * a) = f_H(e_A) \circ f_H(a)$, bet $f_H(e_A * a) = f_H(a)$, todėl $f_H(e_A) \circ f_H(a) = f_H(a)$;
- 2) analogiškai gauname, jog $f_H(a) \circ f_H(e_A) = f_H(a)$;
- 3) iš (1) ir (2) išplaukia, jog $f_H(e_A)$ yra grupės $(\{f_H(a)\}, \circ)$ neutralusis elementas;
- 4) aibė $\{f_H(a)\}$ yra aibės B poaibis B_{f_H} , o grupė $(\{f_H(a)\}, \circ)$ grupės $(B, \circ)$ pogrupis;
- 5) grupės $(B, \circ)$ neutralusis elementas e_B būtinai bus ir jos pogrupio $(\{f_H(a)\}, \circ)$ neutraliuoju elementu;
- 6) kadangi grupė $(\{f_H(a)\}, \circ)$ gali turėti tik vieną neutralųjį elementą, tai $f_H(e_A) = e_B$;
- 7) iš (6) ir iš $\text{Ker } f_H$ apibrėžimo išplaukia, jog $e_A \in \text{Ker } f_H$, ką ir reikėjo įrodyti.

Iš to, kad $e_A \in \text{Ker } f_H$, kur $f_H: (A, *) \rightarrow (B, \circ)$, išplaukia, jog algebrinė struktūra $(\text{Ker } f_H, *)$ yra grupės $(A, *)$ pogrupis.

Įrodysime tai.

Tarsime, jog $a_i \in \text{Ker } f_H$ ir $a_j \in \text{Ker } f_H$ ir įrodysime, jog ir $(a_i * a_j) \in \text{Ker } f$.

1. Kadangi a_i ir a_j būdami aibės $\text{Ker } f_H$ elementais, yra ir grupės $(A, *)$, izomorfiškos grupei $(B, \circ)$, elementai, tai $f_H(a_i * a_j) = f_H(a_i) \circ f_H(a_j) = e_B \circ e_B = e_B$. Taigi, aibė $\text{Ker } f_H$ uždara operacijos „*“ atžvilgiu.

2. Kadangi $(A, *)$ – grupė, tai operacija „*“ yra asociatyvi.

3. Mes jau ką tik esame įrodę, jog $e_A \in \text{Ker } f_H$, o tai reiškia, jog algebrinė struktūra $(\text{Ker } f_H, *)$ turi neutralųjį elementą, kuris yra ir grupės $(A, *)$ neutralusis elementas.

4. Kadangi $(A, *)$ yra grupė, tai kiekvienas aibės $\text{Ker } f_H$ elementas a , būdamas kartu ir aibės A elementu, turi atvirkštinį elementą a^{-1} , priklausantį aibei A . Įrodysime, jog tas a^{-1} priklauso aibei $\text{Ker } f_H$:

$$a) \quad f_H(a * a^{-1}) = f_H(a) \circ f_H(a^{-1}) = e_B \circ f_H(a^{-1}) = f_H(a^{-1});$$

$$b) \quad f_H(a * a^{-1}) = f_H(e_A) = e_B;$$

c) iš (a) ir (b) išplaukia, jog $f_H(a^{-1}) = e_B$, o tai reiškia, kad tuo atveju, kai $a \in \text{Ker } f_H$, tai ir

$a^{-1} \in \text{Ker } f_H$. Taigi, $(\text{Ker } f_H, *)$ yra grupės $(A, *)$ pogrupis. Nesunku įrodyti, kad $(\text{Ker } f_H, *)$ yra normalus grupės $(A, *)$ pogrupis. Tą įrodymą palieku skaitytojui kaip savarankišką pratimą, taip pat kaip ir įrodymą, kad grupės $(A, *)$ skaidinys į sluoksnius pogrupio $(\text{Ker } f_H, *)$ atžvilgiu taip pat yra homomorfizmas $\bar{f}: A / \text{Ker } f_H \rightarrow (B, \circ)$.

Kadangi grupių izomorfizmas yra bijekcija, tai grupių izomorfizmo branduolį sudaro tik vienas elementas ir tas elementas yra e_A . Kai funkcija $f_1: (A, *) \rightarrow (B, \circ)$ yra izomorfizmas, tai $f_1(e_A) = e_B$ ir $f_1^{-1}(e_B) = e_A$, kur $f_1^{-1}: (B, \circ) \rightarrow (A, *)$ – izomorfizmo funkcija, atvirkštinė funkcijai f_1 . Taigi, $\text{Ker } f_1 = \{e_A\}$ ir $\text{Ker } f_1^{-1} = \{e_B\}$, o $(\{e_A\}, *)$ yra normalus grupės $(A, *)$ pogrupis ir $(\{e_B\}, \circ)$ – normalus grupės $(B, \circ)$ pogrupis.

Aibių A ir B skaidiniai šių pogrupių atžvilgiu sutaps su aibėmis A ir B , ir izomorfizmas $\bar{f}$ sutaps su izomorfizmu f_1 .

Homomorfizmo branduolio $\text{Ker } f_H$ radimo procedūrą pailiustruosiu konkrečiu pavyzdžiu: rasime mūsų jau nagrinėto homomorfizmo $f_H: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, t. y. homomorfizmo $f_H: (\{M^*\}, \cdot) \rightarrow (\{\det M^*\}, \cdot)$ branduolį $\text{Ker } f_H$.

Kadangi grupės $(B, \circ) = (\{\det M^*\}, \cdot)$ neutralusis elementas e_B šiuo atveju yra skaičius 1, tai šio homomorfizmo branduolį sudaro visų tų realiųjų reguliariųjų n – sios eilės kvadratinų matricų M^* aibė, kurių determinantai yra lygūs 1. Šių matricų aibė, kaip jau buvo įrodyta bendroju atveju, matricų daugybos operacijos atžvilgiu sudaro grupę – aibės $(\{M^*\}, \cdot)$ normalųjį pogrupį, vadinamą specialiąja multiplikacine realiųjų reguliariųjų n -sios eilės kvadratinų matricų grupe ir žymimą $SL_n(\mathbb{R})$, arba $SL(n, \mathbb{R})$.

Siūlyčiau skaitytojui nustatyti, kaip atrodo grupės $GL_n(\mathbb{R})$ skaidinys į sluoksnius jos normalaus pogrupio $SL_n(\mathbb{R})$ atžvilgiu, ir įrodyti, kad tarp to skaidinio ir grupės $(\{\det M^*\}, \cdot) = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ taip pat egzistuoja homomorfizmas.

Kitas homomorfizmo branduolio pavyzdys, tai homomorfizmo $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ branduolys, kurį sudaro ciklinė grupė $\langle n \rangle$ – ciklinis sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ pogrupis, generuojamas didesniu už 1 natūraliuoju skaičiumi n . Palieku skaitytojui pačiam įrodyti, kad tarp sveikųjų skaičių adicinės grupės $(\mathbb{Z}, +)$ ir likinių klasių modulių n adicinės grupės $(\mathbb{Z}_n, +)$ egzistuoja homomorfizmas ir, suradus to homomorfizmo branduolį, įsitikinti, jog $\text{Ker } f_H = \{mn \in \mathbb{Z} / m \in \mathbb{Z}\} = \langle n \rangle$.

Tuo ir baigsiu algebrinių struktūrų su viena algebrine operacija apžvalgą.

Analogiškai, kaip buvo įvestos ir apibrėžtos **tokių algebrinių struktūrų su viena operacija kaip grupoidas, pusgrupė, monoidas, grupė, Abelio grupė, grupės pogrupis, faktorgrupė sąvokos, galima įvesti algebrinių struktūrų su dviem algebrinėmis operacijomis, tokių kaip žiedai, integralumo sritys, laukai, kūnai, požiedžiai, pokūniai, idealai ir t. t. sąvokas, nagrinėti žiedų homomorfizmą ir izomorfizmą, kūnų plėtinius, baigtinių kūnų ir polinomų virš šių kūnų teoriją ir t. t.** Tačiau viso to čia jau nebeįsime, nes tai – speciali abstrakčiosios algebros sritis, daugiau orientuota į pačios algebros problemas negu į sistemos mokslui aktualią **struktūrų teoriją**. Manau, kad to, kas šiame skyrelyje išdėstyta jau pakanka, kad būtų pasiekti šio skyrelio tikslai:

1) supažindinti sistemos mokslą studijuojantį šios mokymo priemonės skaitytoją su rimtam matematinės sistemos pagrindų įsisavinimui bei tam skirtos matematinės literatūros skaitymui reikalingais **algebrinių struktūrų teorijos terminais ir sąvokomis bei tos teorijos pradmenimis**;

2) parodyti, **kaip struktūros gali būti aprašomos, nagrinėjamos ir klasifikuojamos abstrakčios algebros priemonėmis**, kaip tas priemonės **galima būtų panaudoti, kuriant matematinę sistemų struktūrų teoriją**;

3) **pagilinti ir praplėsti sistemų struktūrų teorijai labai svarbių homomorfizmo ir izomorfizmo sąvokų suvokimą**.

Tikiuosi, kad skaitytojas sugebės sujungti tai, ką perskaitė šiame skyrelyje, su tuo, ką jis jau išstudijavo 1.5., 1.6., 1.7. ir 1.8. skyriuose, ir įsitikins, jog **sistemų struktūras ir operacijas su jomis galima aprašyti matematine kalba**. Tai jam padės, toliau studijuojant šį (1.9.) skyrių, o taip pat 1.16. skyrių.

1.9.1.6. Kitos tipinės struktūros

Panašiai, kaip 1.9.1.4. skyrelyje buvo nagrinėjamos tipinės kristalų struktūros bei jų simetriškumas ir kristalinės gardelės periodiškumas trimatėje erdvėje, galima nagrinėti ir tipines struktūras, jų simetriškumą ir periodiškumą erdvėse, turinčiose kitą matavimų skaičių.

Dvimatėje erdvėje (plokštumoje ar kokiame kitame dvimačiame paviršiuje), pavyzdžiui, galima nagrinėti įvairių **rašų** (audinių, apmušalų, juostų, dekoracijų ir t. t.) **tipines struktūras**, jų simetrijos elementus.

Įvesime **standžiųjų judesių plokštumoje** sąvoką, vadindami standžiuoju judesiu plokštumoje bet kokią plokščio **objekto, esančio toje plokštumoje, perkėlimą į kitą plokštumos vietą, jį**

pastumiant, pasukant, apverčiant, tačiau nedeformuojant jo struktūros, t. y. nekeičiant atstumų tarp jo taškų ir kampų tarp tuos taškus jungiančių tiesių.

1.9.2.1. skyrelyje bus parodyta, kad bet koki plokščio objekto **standųjį perkėlimą plokštumoje** galima įvykdyti, turint tris pagrindinius standžiuosius judesius: 1) **veidrodinį atspindį** kokios nors atspindžio ašies atžvilgiu, simetriškai perkeltantį plokščią objektą į kitą tos ašies pusę ir tuo pačiu apverčiantį jį kita puse; 2) **lygiagretų postūmį** kokia nors kryptimi plokštumoje, kurio metu visi plokščio objekto taškai pasistumia ta pačia kryptimi ir vienodu atstumu, ir 3) plokščio objekto **posūkį plokštumoje** aplink kokį nors tos plokštumos tašką, pasirinktą kaip posūkio centrą. **Komponuodami tuos judesius, mes galime gauti bet koki plokščio objekto perkėlimą plokštumoje.** Todėl šie trys standieji judesiai sudaro **pilną pagrindinių standžių judesių sistemą plokštumoje.**

Tačiau **šie trys pagrindiniai judesiai dar nesudaro grupės savo kompozicijos atžvilgiu**, nes šių trijų judesių aibė dar nėra uždara tų judesių kompozicijos atžvilgiu.

Pavyzdžiui, atspindžio ir nenulinio postūmio kompozicija duoda tokį plokščio objekto perkėlimą plokštumoje, kuris negali būti įvykdytas nė vienu iš šių trijų judesių, panaudotu atskirai. Kitaip tariant, **šios trijų judesių kompozicijos rezultatas ne visada priklauso tų judesių aibei.**

Norėdami, kad pagrindinių standžių judesių plokštumoje aibė taptų uždara tų judesių kompozicijos atžvilgiu, tą aibę turime papildyti, įvesdami dar du pagrindinius standžiuosius judesius plokštumoje: 1) **slenkamąjį atspindį**, susidedantį iš jau minėtųjų postūmio ir atspindžio judesių, sukomponuotų taip, kad atspindžio ašis būtų lygiagreti postūmio kryptčiai, 2) taip vadinamą **„tapatųjį judesį“**, sutampantį su dviejų atspindžių tos pačios atspindžio ašies atžvilgiu kompozicijos rezultatu ir reiškiantį objekto sugrąžinimą į tą pačią vietą ir padėtį, kitaip tariant, lyg ir jokio to objekto judesio nebuvimą.

„Tapatųjį judesį“ galima gauti taip pat ir pasukus objektą $360^\circ \cdot k$ kampų, kur $k \in \mathbb{Z}$, todėl sudarant pagrindinių standžių judesių plokštumoje grupę, pakanka turėti posūkį ne didesniu negu 360° kampų.

Nesunku įsitikinti, jog čia išvardinti **penki pagrindiniai standieji judesiai plokštumoje sudaro algebrinę judesių kompozicijos atžvilgiu**: 1) šių penkių judesių aibė yra uždara jų kompozicijos atžvilgiu; 2) judesių kompozicija yra asociatyvi operacija; 3) ši judesių aibė savo sudėtyje turi neutralų elementą – „tapatųjį judesį“; 4) kiekvienas iš šių penkių judesių turi atvirkštinį judesį judesių kompozicijos atžvilgiu, priklausančią šių penkių judesių aibei: atspindžio atvirkštinis judesys – tas pats atspindys (tik į priešingą pusę); „tapataus judesio“ atvirkštinis judesys – „tapatus judesys“; posūkio atvirkštinis judesys – posūkis kampu, papildančiu posūkio kampą iki 360° , jei posūkiai vykdomi tik viena kryptimi, arba posūkis tuo pačiu kampu tik priešinga kryptimi, jei posūkiai gali būti vykdomi ir laikrodžio rodyklės kryptimi, ir priešinga; postūmio atvirkštinis judesys – postūmis tuo pačiu atstumu tik priešinga kryptimi, slenkamojo atspindžio atvirkštinis judesys – slenkamasis atspindys tuo pačiu atstumu tik priešinga kryptimi.

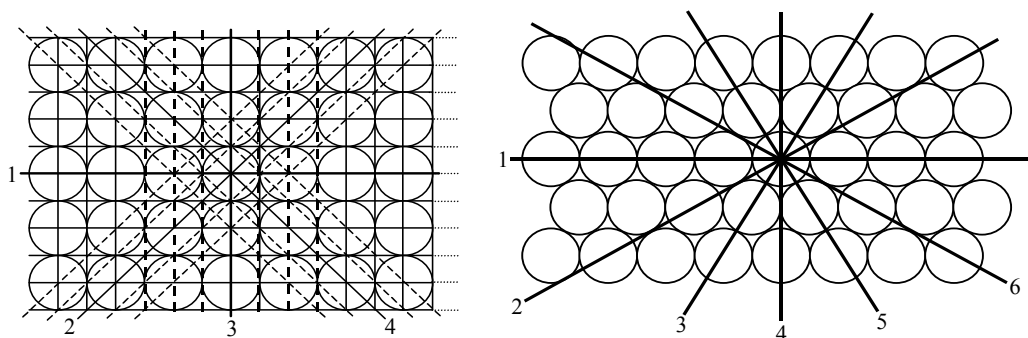
Plokštieji objektai – ir baigtiniai (pavyzdžiui, įvairios geometrinės figūros), ir begaliniai (pavyzdžiui, audinių bei apmušalų raštai) – gali būti **simetriški to ar kito pagrindinio standaus judesio atžvilgiu, t. y., gali, atlikus tą judesį, sutapti patys su savimi.**

Kai kokio nors objekto vaizdas, gautas, įvykdžius jo atspindį, sutampa su pirmavaizdžiu, tai sakoma, jog objektas yra **simetriškas atspindžio atžvilgiu**, ir tuomet atspindžio ašis vadinama objekto **simetrijos ašimi.**

Baigtiniai objektai gali neturėti nė vienos simetrijos ašies (pavyzdžiui, trikampis, kurio visos trys kraštinės yra skirtingos), gali turėti vieną ir tik vieną simetrijos ašį (pavyzdžiui, lygiašonis, bet ne lygiakraštis, trikampis), dvi ir tik dvi simetrijos ašis (pavyzdžiui, rombas, nesantis kvadratu), tris ir tik tris simetrijos ašis (pavyzdžiui, lygiakraštis trikampis), keturias ir tik keturias simetrijos ašis (pavyzdžiui, kvadratas), penkias ir tik penkias simetrijos ašis (pavyzdžiui, taisyklingas penkiakampis), n ir tik n simetrijos ašių (pavyzdžiui, taisyklingas n -kampis, kai $n \in \mathbb{Z}$ ir $n \geq 3$), be galo daug simetrijos ašių (pavyzdžiui, apskritimas).

Begaliniai plokštieji objektai, pavyzdžiui, audinių bei apmušalų raštai (priklausomai nuo tų raštų elementų simetriškumo ir jų išdėstymo plokštumoje simetriškumo) gali neturėti nė vienos simetrijos ašies, gali turėti vieną ir tik vieną simetrijos ašių kryptį (t. y. be galo daug lygiagrečių periodiškai išsidėsčiusių simetrijos ašių), dvi ir tik dvi simetrijos ašių kryptis, tris ir tik tris simetrijos ašių kryptis, keturias ir tik keturias simetrijos ašių kryptis, šešias ir tik šešias simetrijos ašių kryptis ir **negali turėti penkių, septynių ir t. t. simetrijos ašių kryptių.**

Pavyzdžiui, nors apskritimas gali turėti be galo daug simetrijos ašių, einančių per jo centrą įvairiomis kryptimis, tačiau iš apskritimų sudarytas raštas, kaip rodo 103 pav. gali turėti tik keturias arba šešias skirtingas simetrijos ašių kryptis.



103 pav.

Pirmajame paveikslėlyje, kuriame kiekvienas apskritimas liečiasi su keturiais kaimyniniais, egzistuoja keturios skirtingos lygiagrečių simetrijos ašių kryptys, o antrame, kuriame kiekvienas apskritimas liečiasi su šešiais kaimyniniais, egzistuoja šešios skirtingos lygiagrečių simetrijos ašių kryptys. Išdėstyti apskritimus į begalinį periodiškai besikartojantį raštą taip, kad atsirastų, pavyzdžiui, penkios simetrijos ašių kryptys, neįmanoma, kaip neįmanoma vienodomis taisyklingo penkiakampio formos plytelėmis padengti plokštumą „be plyšių“. O tuo tarpu padengti plokštumą „be plyšių“ taisyklingsiais trikampiais, kvadratais bei taisyklingsiais šešiakampiais galima. Tai nesunku įrodyti ne tik praktiškai, bet ir teoriškai.

Mes žinome, jog taisyklingo n -kampio kampas lygus $\alpha_n = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. Kad tokiais n -kampiais būtų galima padengti plokštumą „be plyšių“, būtina, kad santykis $k = \frac{360^\circ}{\alpha_n}$ būtų sveikas skaičius. Iš šios sąlygos gauname, jog $k = \frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$ turi būti sveikas skaičius.

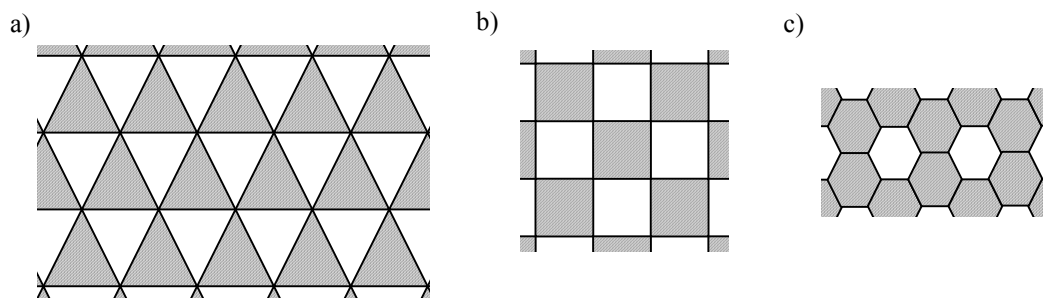
Kai $n=3$, tai $k=2+4=6$, ir mes gauname mozaiką, pavaizduotą 104 „a“ pav.

Kai $n=4$, tai $k=2+2=4$, ir mes gauname mozaiką, pavaizduotą 104 „b“ pav.

Kai $n=5$, tai $k=2+\frac{4}{3}=3\frac{1}{3}$, ir tai reiškia, jog plokštumos padengti taisyklingsiais penkiakampiais neįmanoma.

Kai $n=6$, tai $k=2+1=3$, ir mes gauname mozaiką, pavaizduotą 104 „c“ pav.

Kai $n \geq 7$, tai skaičius $\frac{4}{n-2}$ visada bus mažesnis už vienetą trupmena ir todėl niekada nebegalės būti sveiku skaičiumi.



104 pav.

Į mozaikas, pavaizduotas 104 pav., taip pat galima žiūrėti, kaip į **begalinius raštus plokštumoje** ir nagrinėti jų simetrijos elementus.

Palieku skaitytojui pagalvoti, kodėl gamta (t. y. bitės) pasirinko savo koriams 104 „c“ pav. struktūrą, o ne kokią nors kitą, o taip pat kodėl organinėje chemijoje taip dažnai sutinkamos struktūros, sudarytos iš šešianarių „žiedų“ C_6 .

Tikiuosi, jog skaitytojas dabar sugebės paaiškinti, **kodėl, nagrinėdami kristalų bei kristalinių gardelių struktūras 1.9.1.4. skyrelyje, mes nebuvome sutikę penkiakampių ar septyniakampių prizmių pavidalo kristalinės gardelės narvelių, kodėl neegzistuoja kristalai turintys penktos, septintos ir t. t. eilės simetrijos ašis.**

Būtų naudinga, jei skaitytojas pabandytų įrodyti jau minėtąją teoremą apie tai, kad **trimatėje erdvėje gali egzistuoti tik penkių tipų taisyklingieji daugiasieniai**, ar bent jau suprasti, kodėl taip yra. Tai išplaukia iš formulės $V+F=E+2$ ir sąlygos $k \cdot \alpha_n < 360^\circ$, kur $k \in \mathbb{Z}^+$.

O mes dabar pereisime nuo atspindžio simetrijos prie **posūkio simetrijos plokštumoje**.

Plokščias objektas laikomas **simetrišku posūkio atžvilgiu**, jei egzistuoja toks posūkio centras, kad tą objektą pasukę apie tą posūkio centrą kampų, mažesniu už 360° , gausime to objekto vaizdą, sutampantį su pirmavaizdžiu. Tada tą posūkio centrą vadina **posūkio simetrijos centru**, o tą kampą – **posūkio simetrijos kampu**.

Yra gana daug objektų, neturinčių posūkio simetrijos. Tas pats trikampis su skirtingo ilgio kraštinėmis neturi ne tik atspindžio, bet ir posūkio simetrijos. O tuo tarpu taisyklingasis trikampis turi ne tik tris atspindžio simetrijos ašis, bet ir posūkio simetrijos centrą, sutampantį su to trikampio centru, ir posūkio simetrijos kampus, lygius 120° ir 240° . Paprastai, posūkio simetrijos kampais, kai kampų yra keletas, nurodomi mažiausieji kartotiniai. Taisyklingojo n -kampio posūkio simetrijos kampas lygus

$\frac{360^\circ}{n}$: taisyklingojo trikampio – 120° , kvadrato – 90° , taisyklingojo šešiakampio 60° ir t. t. Pasukę

taisyklingąjį daugiakampį aplink jo centrą kampu $k \cdot \frac{360^\circ}{n}$, kur $k \in \mathbb{Z}$ ir $|k| < n$, taisyklingąjį daugiakampį

sutapatinsime su pačiu savimi. Jis sutaps pats su savimi ir kai $|k| \geq n$, tačiau tokių k reikšmių mes jau nebeagrinėsime, nes kai $|k| = n$, tai bet koks objektas (tame tarpe ir neturintis jokios simetrijos), pasuktas aplink bet kokią posūkio centrą, sutaps pats su savimi.

Objektas, būdamas simetriškas atspindžio atžvilgiu, ne būtinai bus simetriškas posūkio atžvilgiu. Pavyzdžiui, lygiašonė trapecija, turėdama atspindžio simetrijos ašį, nėra simetriška posūkio atžvilgiu.

Iš kitos pusės, egzistuoja objektai, neturintys atspindžio simetrijos ašių, tačiau turintys posūkio simetrijos centrą ir posūkio simetrijos kampą. Pavyzdžiui, penkiasparnis ventiliatorius neturi simetrijos ašių, nes ventiliatoriaus sparnai nėra simetriški (nors ir visi vienodi), kadangi pasukti į sukimosi pusę. Tačiau toks ventiliatorius turi simetrijos centrą, sutampantį su ventiliatoriaus ašies centru, ir keturis

posūkio simetrijos kampus, kurių mažiausias yra lygus $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

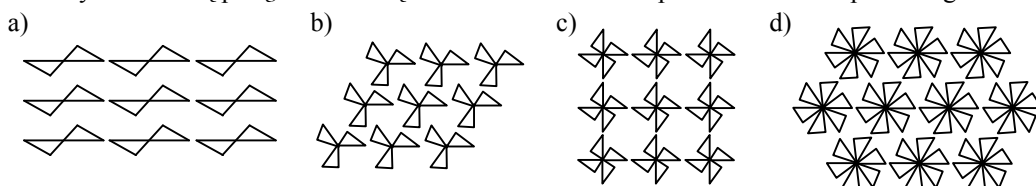
Taigi, **simetriškumas posūkio atžvilgiu ne visada sutampa su simetriškumu atspindžio atžvilgiu**, todėl simetrijos ašis ir posūkio simetrijos elementus – simetrijos centrą ir posūkio simetrijos kampą – reikia laikyti **skirtingais objekto simetrijos elementais**.

Raštams plokštumoje taip pat gali būti būdinga posūkio simetrija, nors egzistuoja raštai ir neturintys posūkio simetrijos.

Su raštų posūkio kampais susidaro panaši situacija kaip ir su raštų atspindžio simetrijos ašių kryptimis: nors atskiros raštų detalės gali turėti įvairius posūkio simetrijos kampus (arba iš viso jų neturėti), patys **begaliniai raštai plokštumoje arba neturi posūkio simetrijos, arba, jei turi, tai posūkio simetrijos kampai gali būti tik 60° , 90° , 120° ir 180°** . Tuo gana greitai galima įsitikinti, nagrinėjant įvairias raštų struktūras ir bandant jas sukoti įvairiais kampais, siekiant sutapatinti raštą patį su savimi. Kadangi sukant raštą aplink kokią nors centrą, kartu sukasi ir rašto fragmentai, tai, norint, kad raštas turėtų posūkio simetriją, reikia kad ją turėtų ir pačios rašto detalės ir jų išdėstymas.

Dvigubą, trigubą, keturgubą ir šešiagubą posūkio simetriją turinčių raštų pavyzdžiai pateikti 105 pav. Rekomenduoju skaitytojui tuo įsitikinti ir pateikti daugiau pavyzdžių.

Juostos, kurios gali būti begalinės tik viena (jų ilgio) kryptimi ir turi ribotą plotį, **arba nėra simetrinės posūkio atžvilgiu, arba gali turėti tik vieną posūkio simetrijos kampą, lygų 180°** . Tuo irgi nesunku įsitikinti, nagrinėjant juostų raštus. Nesunku ir teoriškai įrodyti, kad juostos negali turėti kitokių posūkio simetrijos kampų: juk po simetriško posūkio juosta turi sutapti su pačia savimi, o tai galima padaryti tik apsukus juostą 180° kampu. Net ir taip padarius, ne kiekviena juosta sutaps pati su savimi: ji turi būti arba simetriška vertikalios (statmenos juostos kryptčiai) atspindžio ašies atžvilgiu, arba sudaryta iš detalių porų, kurios būtų simetriškos viena kitai posūkio 180° kampu atžvilgiu.



105 pav.

Postūmio simetrijos, t. y. tokio reiškinių, kad pastūmus objektą nenuliniu atstumu kokia nors kryptimi objektas sutaptų pats su savimi, **joks baigtinis objektas turėti negali**. Tačiau begaliniai objektai bei vienuodų objektų begalinės sekos tokią savybę turėti gali. **Postūmio simetrija yra surišta su periodiškumu, ir visos periodiškai besikartojančios sekos būtinai yra simetriškos postūmio atžvilgiu**. Taigi, **postūmio erdvėje ir laike simetrija sujungia periodiškumo ir simetriškumo sąvokas begaliniuose procesuose ir begaliniuose objektuose**. Kadangi bet kokie apmušalų ir juostų raštai yra periodiški, tai, įsivaizduojant apmušalus ir juostas esant begaliniais objektais, gauname, kad jų raštai visada turi postūmio simetriją: juostos – viena kryptimi, o apmušalų raštai gali turėti postūmio simetriją daugiau negu viena kryptimi.

Slenkamojo atspindžio simetriją taip pat gali turėti tik begaliniai objektai, tame tarpe ir juostų bei apmušalų raštai. Tačiau gali būti ir tokie raštai, kurie neturi slenkamojo atspindžio simetrijos, o tie raštai, kurie turi slenkamojo atspindžio simetriją, t. y. kurie, pastūmus ir veidrodžiškai atspindėjus postūmio krypties kaip atspindžio ašies atžvilgiu, sutampa patys su savimi, **gali ją turėti tik arba vienos, arba dviejų, arba trijų, arba keturių, arba šešių krypčių**. Tai mūsų, jau pripratusių prie atspindžio simetrijos ašių ir posūkio simetrijos kampų raštuose rinkinių, jau nebeturėtų stebinti, nes juk ir pats slenkamasis atspindys susideda iš postūmio ir atspindžio. Reikia tik pažymėti, kad **ne visada plokščio objekto atspindžio simetrijos ašys sutampa su slenkamojo atspindžio ašimis ir todėl ne visada atspindžio simetrijos ašių krypčių skaičius sutampa su slenkamojo atspindžio krypčių skaičiumi**.

Suprantama, kad juostos gali turėti tik vieną slenkamojo atspindžio simetrijos kryptį, o dauguma juostų slenkamojo atspindžio simetrijos iš viso neturi.

Žinodami galimus raštų simetrijos elementų pagrindinių standžiųjų judesių plokštumoje atžvilgiu skaičius, kurie, kaip matėme, yra baigtiniai, mes galime visas galimas raštų struktūras klasifikuoti į baigtinį raštų tipų skaičių. Kadangi ne visos simetrijos elementų kombinacijos yra galimos, tai raštų tipų skaičius yra mažesnis negu tų kombinacijų skaičius. Dar senovės egiptiečiai žinojo ir naudojo statinių (pavyzdžiui, šventyklų) sienoms puošti 17 skirtingų raštų struktūrų (raštų tipų). Keičiant tose struktūrose raštų elementus, galima sukurti be galo daug pačių įvairiausių raštų, kuo naudojosi ir naudojasi žmonija iki šiol.

Įdomu, kad tik XX amžiuje (1924 m.) buvo griežtai įrodyta, jog apmušalų raštų gali būti kaip tik tie 17 tipų. Tai padarė vengrų matematikas Dž. Poja (G. Polya). Taip pat buvo nustatyta, jog juostų raštų struktūra gali priklausyti tik 7 tipams.

Rekomenduočiau skaitytojui būtinai perskaityti įdomiai ir labai populiariai parašytos knygos „Kelionės į šiuolaikinę matematiką“ [109] vienuoliktąjį skyrių „Judesio simetrija“, kuriame ne tik aprašyta standžiųjų judesių plokštumoje grupė bei plokščiųjų figūrų (tame tarpe ir begaliniai besikartojančių dekoratyvinių raštų) simetrijos elementai tų judesių atžvilgiu, bet ir pateiktos lentelės su jau minėtųjų 7 tipų juostų ir 17 tipų apmušalų raštų struktūrų simetriškumo charakteristikomis ir pavyzdžiais. Tai bus ne tik įdomu, bet ir naudinga, nes, susipažinus su periodinių struktūrų plokštumoje ekvivalentumo klasėmis tų struktūrų simetriškumo atžvilgiu, taps žymiai suprantamesnė ir kristalų simetrijos teorija trimatėje erdvėje. Juk **į simetriją trimatėje erdvėje galima žiūrėti kaip į simetrijos dvimatėje erdvėje plėtinį**, kuris gaunamas, papildžius standžiųjų judesių grupę plokštumoje ir objektų simetrijos elementų tų judesių atžvilgiu sąrašą dar dviem jau minėtaisiais standžiais judesiais ir trimatinių objektų elementais jų atžvilgiu. Išsiaiškinus, kodėl plokštumoje (kur viskas daug paprasčiau negu trimatėje erdvėje) begalinė struktūra negali turėti penkių, septynių ar daugiau atspindžio simetrijos ašių, tampa lengviau suprantama tai, kodėl kristalų simetrijoje pasitaiko tik pirmosios, antrosios, trečiosios, ketvirtosios ir šeštosios eilės simetrijos ašys ir nepasitaiko jokių kitų.

Pabandžius suskirstyti juostų ir apmušalų raštų struktūras į ekvivalentumo klases jų simetriškumo atžvilgiu ir supratęs, kaip tai daroma, tampa geriau suprantama to didelio ir sudėtingo darbo, kurį atliko J. Fiodorovas ir S. Šönflysas, išskirdami begalinės kristalinės gardelės struktūroje 230 erdvinių grupių, esmė ir apimtis.

Visa tai leis pastebėti kai kuriuos bendrus dėsningumus, būdingus struktūroms, aprašytoms 1.9.1.1.–1.9.1.6. skyreliuose, ir padaryti svarbią sistemų struktūrų teorijai ir visai sistemotyrai išvadą: **struktūrų simetrijos dėsniai yra ne tik kristalografijos, fizikos, chemijos ar meno dėsniai, o bendrasisteminiai dėsniai, konkrečiai pasireiškiantys kristaluose, fizikinių bei chemijos mokslo objektų struktūrose ir mene**.

Šių ir kitų bendrastruktūrinių dėsnių, nepriklausančių nuo sistemų prigimtės ir tos „materijos“, iš kurių tos struktūros yra sudarytos, egzistavimas kaip tik ir duoda tą mokslinį

pagrindą, kuriuo remiantis tampa prasminga sistemų struktūrų teorijos ir jos algebrinio aparato kūrimo idėja, tipinių struktūrų klasifikavimo idėja, o taip pat nurodo vieną iš krypčių, kuria einant, būtų galima spręsti sistemų struktūrų tipinių klasių išskyrimo problemą. Dėl šito pagrindo ir šitos idėjos kaip tik ir buvo reikalinga ir verta peržiūrėti nemažai konkrečių faktų ir pasiekimų įvairiuose moksluose, kam ir skiriami 1.9.1.1.–1.9.1.6. skyreliai.

Žinoma, sistemų struktūrų klasifikavimo sistemos sukūrimas pareikalaus žymiai daugiau pastangų ir matematinių sugebėjimų, negu to savo laiku pareikalavo iš J. Fiodorovo ir S. Šönflyso kristalinės gardelės erdviųjų grupių išskyrimas ar iš Dž. Poja įrodymas, kad audinių raštų struktūra gali turėti tik 17 jau minėtųjų tipų, tačiau tai nereiškia, kad dėl problemos sudėtingumo jos neverta net bandyti spręsti.

Todėl šiandien, kol dar nesukaupta pakankamai informacijos, kad minėtąją problemą jau būtų galima pradėti spręsti bendruoju atveju, **sistemų struktūrų tyrimas atskirose srityse, bendrųjų dėsningumų paieška ir svarbiausiųjų bei dažniausiai pasitaikančių struktūrų tipinių klasių išskyrimas ir nagrinėjimas, ruošiant placdarmą bendrosios problemos sprendimui, nėra beprasmiškas laiko eikvojimas, bet labai reikalinga bendrosios teorijos kūrimui ir labai naudinga praktikai veikla.** Jos naudingumą neužilgo pajus ir šių eilučių skaitytojas, kai antroje šios mokymo priemonės dalyje bus nagrinėjamos sudėtingų sistemų modeliavimo ir projektavimo automatizuotų sistemų kūrimo ir taikymo problemos.

Su minėta knyga [109] naudinga susipažinti dar ir todėl, kad jos dvyliktajame skyriuje „Mastelio simetrija ir fraktalai“ **simetrijos sąvoką bandoma taikyti dar plačiau, negu mes tai darėme iki šiol.** Tame skyriuje nagrinėjama **panašumo simetrijos sąvoka**, apie kurią jau buvo užsiminta 1.9.1.4. skyrelyje, ir įvedama mums kol kas dar nauja **mastelio simetrijos sąvoka**, apimanti **begalinį pilno ar dalinio panašumo kartojimąsi** objektų ir procesų sekose.

Panašumo simetrija vadinsime objektų bei jų struktūrų panašumo santykį, kuomet vieno objekto struktūroje randame pilną ar dalinį panašumą (izomorfizmą ar homomorfizmą) kito objekto struktūrai.

Panašumas gali būti paprastas ir idealiai tikslus bei pilnas kaip iš mokyklos laikų žinomas trikampių panašumas, tačiau jis gali būti išreikštas ir be galo ilgomis pilno ar dalinio (tame tarpe ir ne visiškai tikslaus) panašumo grandinėmis.

Dar iš prieškarinio laikų prisimenu mano vaikišką vaizduotę išjudinusį ir visam laikui atmintįje įstrigusį įdomų piešinėlį ant tabako pakelio: skrenda erelis ir savo naguose neša tabako pakelį, vaizduojantį skrendantį erelį, nešantį savo naguose tabako pakelį su skrendančio erelio, nešančio tabako pakelį, ir t. t. atvaizdu.

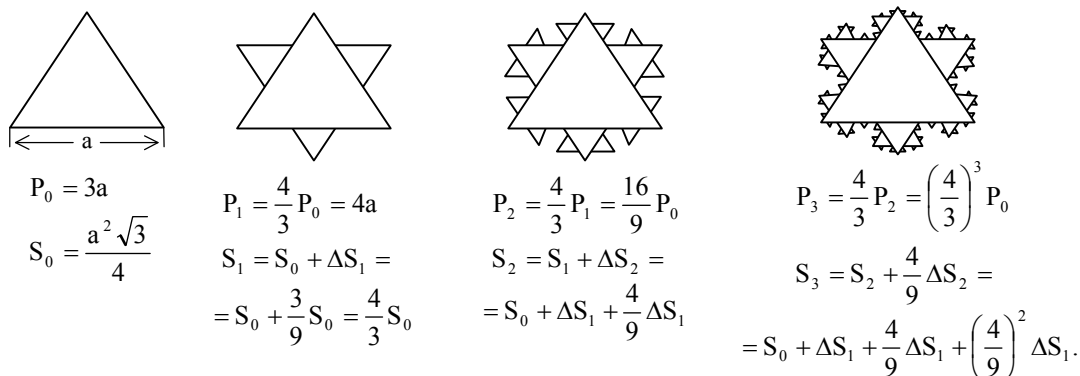
Su panašia situacija susiduria ir dailininkas, piešdamas save stovintį prie molberto su prisegtu popieriaus lapu, ant kurio jis piešia patį save, stovintį prie molberto ir piešiantį save, ir t. t.

Tokias ir panašias situacijas labai mėgo vaizduoti savo piešiniuose olandų dailininkas M. Ešeris (M.C. Escher), išreikšdamas galias filosofines ir net matematines idėjas. Galima tik stebėtis ir grožėtis, kaip išradingai, meniškai ir giliai filosofiskai šis dailininkas pasinaudojo begaliniais mažėjančių baltųjų ir juodųjų figūrėlių **panašumo ir papildomumo simetrija** savo garsiajame paveiksle „Angelai ir velniai“, vaizduojančiame amžinąją Gėrio ir Blogio sąveiką, šviesiųjų ir tamsiųjų jėgų pusiausvyrą.

Čia paminėtuose trijuose pavyzdžiuose mastelio simetrija pasireiškia per pilną objektų, besiskiriančių tik savo vaizdų masteliu, panašumą. Tačiau **mastelio simetrijos sąvoką** galima apibendrinti, pritaikant ją ir tokiems atvejams, kada pilnas objektų bei jų vaizdų panašumas tampa ne taip jau būtinas ir kada svarbiausias vaidmuo tenka **objektų bei jų vaizdų genezės algoritmo bendrumui.** Tas bendrumas būdingas ne tik gyvųjų gamtai, per genetinį kodą perduodančiai iš kartos į kartą paveldimus požymius (kurie yra panašūs, tačiau ne būtinai tapatūs), bet ir bet kuriems **rekursiniams procesams.**

Šios minties ir idėjos, vedančios prie **fraktalų sąvokos ir teorijos**, iliustravimui pasinaudosiu minėtoje knygoje [109] pateiktais gana paprastais, bet tuo pačiu metu ir gana įdomiais pavyzdžiais: „Koch snaigė“ ir „Sierpinskio nėrinis“.

„Koch snaigė“, kurios rekursinę konstrukciją pasiūlė švedų matematikė Helena Koch (H. von Koch), gaunama iš taisyklingojo trikampio, dalinant kiekvieną jo kraštinę į tris lygias dalis ir prie tokiu būdu gautos vidurinės dalies kiekvienoje kraštinėje pridedant po lygiakraštį trikampį, turintį kraštinę, lygią tai vidurinei daliai, po to vėl dalinant kiekvieną gautos laužtinės, vadinamos „Koch kreive“, grandį į tris lygias dalis ir pridedant prie vidurinių dalių po lygiakraštį trikampį, ir t. t. be galo (žiūr. 106 pav.).



106 pav.

Su kiekvienu „Koch snaigės“ konstravimo algoritmo žingsniu gaunamos uždaro lauztinės kiekvienos grandies ilgis trumpėja 3 kartus, o tų grandžių skaičius padidėja 4 kartus, nes vietoje kiekvienos buvusios grandies atsiranda keturios tris kartus trumpesnės grandys. Todėl su kiekvienu algoritmo žingsniu „Koch snaigės“ perimetras P_n , vadinamas **Koch kreivės ilgiu**, padidėja $\frac{4}{3}$ karto:

$P_0 = 3a$; $P_1 = \frac{4}{3} P_0 = 4a$; $P_2 = \frac{4}{3} P_1 = \frac{16}{9} a$; $P_3 = \frac{4}{3} P_2 = \frac{64}{9} a$ ir t. t. $P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n P_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3a$. Kai $n \rightarrow \infty$, tai Koch kreivės ilgis artėja prie ∞ .

„Koch snaigės“ plotas S_n , didėjant n , taip pat didėja. Pirmajame algoritmo žingsnyje prie pradinio trikampio ploto $S_0 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ prisideda trijų naujų trikampių plotas ΔS_1 . Kiekvienas trikampėlis turėdamas kraštines, tris kartus trumpesnes už pradinio trikampio kraštinę, turi $3^2 = 9$ kartus mažesnę plotą, todėl $\Delta S_1 = 3 \cdot \frac{S_0}{9} = \frac{S_0}{3}$. Toliau kiekviename algoritmo žingsnyje prisidedančių trikampių skaičius didės (kartu su „Koch žvaigždės“ kraštinių skaičiumi) keturgubai, o kiekvienas tokio prisidedančio trikampio plotas, jo kraštinei trumpėjant tris kartus, mažės $3^2 = 9$ kartus. Todėl $\Delta S_2 = \frac{4}{9} \Delta S_1$, $\Delta S_3 = \frac{4}{9} \Delta S_2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Delta S_1$, $\Delta S_4 = \frac{4}{9} \Delta S_3 = \left(\frac{4}{9}\right)^3 \Delta S_1$ ir t. t. Tai reiškia, jog „Koch snaigės“

plotas, didėjant n , artės prie ribos $S = S_0 + \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \dots + \Delta S_n + \dots = S_0 + \Delta S_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Delta S_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \Delta S_1 + \dots = S_0 + \Delta S_1 \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots\right) = S_0 + \frac{S_0}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} = S_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5}\right) = 1,6 S_0$.

Gavome įdomų rezultatą: riboto ploto figūra gali turėti be galo ilgą perimetrą. Dar daugiau: atstumas tarp dviejų Koch kreivės taškų, kaip arti vienas kito tie taškai bebūtų, kai $n \rightarrow \infty$, taip pat tampa be galo dideliu dydžiu.

Tačiau gautas rezultatas nėra jau toks nerealistiškas, kaip mums, įpratusiems turėti reikalą ne su realiais objektais, o su idealiomis geometrinėmis figūromis, galėtų pradžioje pasirodyti. Pabandykime išmatuoti kokio nors ežero kranto linijos ilgį, naudodamiesi įvairaus mastelio žemėlapiais, o po to realiu objektu – pačiu ežeru. Matysime, jog pereidami prie vis didesnių to ežero vaizdų, gauname vis ilgesnę kranto liniją, ir kad jos ilgis vis didės ir didės, kuo kruopščiau mes, apsiginklavę, pavyzdžiui, mikroskopu, matuosime mažiausius tos kranto linijos vingelius. Taigi, **natūralių figūrų perimetrai turi savybes, artimesnes „Koch snaigės“ perimetro savybėms negu kokios nors idealios geometrinės figūros perimetro savybės**. Matuodami kokios nors kalnuotos vietovės paviršiaus plotą vis tiksliau, mes gausime vis didesnius dydžius ir, jei materija nebūtų diskreti, visi realūs perimetrai ir realūs plotai būtų begaliniai dydžiai. Pasirodo, jog „Koch snaigė“ – **ne tik mokslininko fantazijos tvarinys, bet ir tikrovės objektų modelis**, mums tik pradžioje pasirodęs esąs keistokas dėl savo neįprastumo.

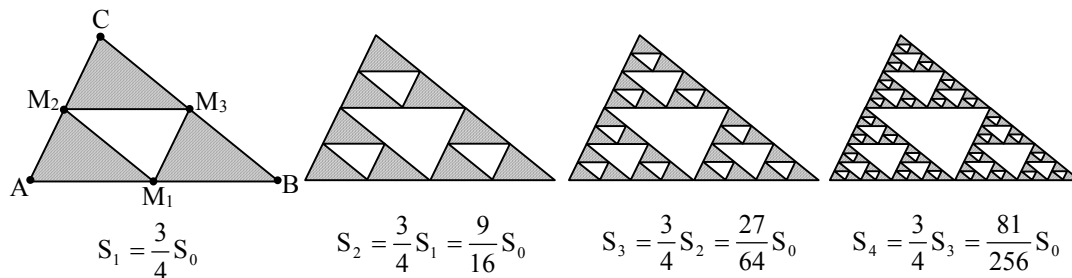
Dar labiau stebėtiną savybę turi lenkų matematiko Vaclavo Sierpinskio (W. Sierpinski) pasiūlyta rekursinė konstrukcija, dabar vadinama „Sierpinskio nėrinium“.

„Sierpinskio nėrinio“ sudarymo algoritmas yra toks:

1) imame bet koki trikampį, randame jo kraštinių vidurio taškus; sujungę juos gauname vidinį trikampį, panašų į pradinį, tačiau turintį keturis kartus mažesnę plotą; išmetame (iškerpame) tą trikampį iš pradinio trikampio ir gauname pirmąjį „Sierpinskio nėrinio“ modelį, sudarytą iš trijų likusių neišmestų trikampėlių, turinčių keturis kartus mažesnius plotus negu pradinis trikampis;

2) šio algoritmo pirmojo žingsnio procedūrą taikome kiekvienam iš likusių trikampėlių, palikdami pradinio trikampio kontūre devynis neišmestus trikampėlius, kurių kiekvieno plotas yra 16 kartų mažesnis už pradinio trikampio plotą;

3) šią procedūrą pritaikome likusiems neišmestiems devyniems trikampėliams, išmesdami iš jų vidurio dar mažesnius trikampėlius ir palikdami „nėrinyje“ 27 trikampėlius, kurių kiekvieno plotas bus 64 kartus mažesnis už pradinio trikampio plotą (žiūr. 107 pav.).



107 pav.

Taip kaskart išmetinėdami vis didesnio skaičiaus (kiekvieną kartą didėjančio tris kartus) vis mažėjančių trikampių vis mažėjančias (kiekvieną kartą keturis kartus) „šerdis“, mes mažiname likusių trikampėlių bendrąjį plotą.

„Sierpinskio nėrinio“ plotas, didėjant algoritmo žingsnių skaičiui n , artėja prie 0, nes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S_0 = 0.$$

Nesunku įrodyti, kad „Sierpinskio nėrinio“ „perimetras“, didėjant n , didėja, artėdamas prie begalybės.

Taigi, „Sierpinskio nėrinys“ – tokia rekursinė plokščia konstrukcija, kuri turi nulinį plotą ir be galo didelį perimetrą. Ši konstrukcija dar keistesnė negu „Koch snaigė“.

Neigudusį skaitytoją dar labiau nustebins ta aplinkybė, kad „Sierpinskio nėrinį“ galima gauti ir naudojant rekursinėje procedūroje atsitiktinį procesą – taip vadinamąjį „chaoso žaidimą“.

Organizuosime rekursinę procedūrą taip:

1) kadangi mėtysime kauliuką, kuris turi 6 sienas su skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, tai pradinio trikampio viršūnėms priskirsime po porą skaičių, pavyzdžiui, viršūnei A – skaičius 1 ir 2, viršūnei B – skaičius 3 ir 4, viršūnei C – 5 ir 6;

2) priklausomai nuo to, kokį iškritusį skaičių parodys kauliukas, tą trikampio viršūnę ir rinksimės; aišku, kad tikimybės pasirinkti tą ar kitą viršūnę, jei kauliukas simetriškas ir mėtymas tikrai atsitiktinis, bus vienodos;

3) pirmąjį tašką trikampyje ABC, kuris pradžioje bus tuščias (baltas) plotas, pažymėsime toje viršūnėje, kurią nurodys kauliukas.

4) antrąjį tašką pasirinksim atkarpos, jungiančios pirmąjį tašką ir antrajame žingsnyje iškritusią trikampio ABC viršūnę, viduryje;

5) trečiąjį tašką pasirinksim atkarpos, jungiančios antrąjį tašką, ir ką tik iškritusią trikampio viršūnę, viduryje ir t. t.

Bendra rekursinė $n+1$ -jo taško gavimo taisyklė: sujungiame n -jį tašką su $n+1$ -jame žingsnyje atsitiktinai pasirinktąja trikampio viršūne ir imame tos atkarpos vidurio tašką.

Pradžioje gausime chaotiškai išsimėčiusių trikampio ABC plote taškų aibę. Tačiau, kuo toliau, tuo labiau pradės ryškėti iš atžymimų taškų susidarantys „Sierpinskio nėrinio“ kontūrai. Knygoje [109] pavaizduota, kaip atrodo šios procedūros rezultatai po 50, 500 ir 5000 kauliuko metimų, iš kurių matyti, kaip artėjama prie „Sierpinskio nėrinio“. Šį procesą galima imituoti kompiuteriu.

Palieku skaitytojo pamąstymui šio reiškinio paaiškinimą, t. y. paaiškinimą, kodėl, esant tam tikroms sąlygoms (šiuo atveju, vykdant atitinkamą rekursinę procedūrą), **net atsitiktiniai rekursiniai procesai „gimdo“ tam tikras struktūras. Šis reiškinys ir jo paaiškinimas taip pat gana svarbūs sistemotyrai, sistemų evoliucijos procesų suvokimui, nes iliustruoja „tam tikros tvarkos iš chaoso gimimą“, kai egzistuoja tam tikri santykiai tarp sąveikaujančių esybių.**

Pradinius trikampius, iš kurių buvo gauta „Koch snaigė“ ir „Sierpinskio nėrinys“, t. y. geometrinės konstrukcijos, turinčios begalinę mastelio simetriją, galima pavadinti tų konstrukcijų

„sėklomis“, o rekursinį keitimo procesą, kurį taikydami gaudavome vis sudėtingesnius objektus, – tų konstrukcijų „**uginimo procesu**“.

Pasirinkdami sudėtingesnes „sėklas“ ir sudėtingesnes „**uginimo taisykles**“, galime gauti dar sudėtingesnes konstrukcijas, turinčias dar įdomesnių ir keistesnių savybių.

Įvesdami į „**uginimo procesą**“ **atsitiktinumo elementus**, mes galime gauti konstrukcijas, kuriose **begalinė mastelio simetrija pasireiškia ne absoliučiai tiksliai, o apytiksliai**, kai **besikartojantys mastelio simetrijos elementai pasikartoja ne visiškai tiksliai ir niekada pilnai savęs nebepakartoja**, dėl ko „**uginamo objekto**“ **detalių įvairovė, kartodama rekursinio proceso dėsningumus, begaliniai didėja**.

JAV matematikas B. Mandelbrotas (B. Mandelbrot) pasirinkdamas auginamų objektų „sėklomis“ įvairius kompleksinius skaičius, vaizduojančius plokštumos taškus, ir taikydamas jiems įvairias **rekursines keitimo taisykles**, naudodamasis kompiuteriu generavo iš plokštumoje įvairiai išsidėsčiusių taškų susidedančias sudėtingas geometrines konstrukcijas, turinčias **begalinės apytikslės mastelio simetrijos savybes**. Jis tas konstrukcijas pavadino **fraktalais** (nuo lotyniško žodžio „fractus“, reiškiančio „sudužęs“, „suskilęs“). Tokias konstrukcijas dabar dažnai vadina ir **Mandelbroto aibėmis**, priskirdami jas prie „sudėtingiausių žmonėms žinomų matematinių objektų“.

Negalėdamas čia pateikti stebinančių savo įvairovę ir grožiu spalvotų piešinių, vaizduojančių Mandelbroto aibes, aš nebepradėsiu pasakoti apie naują ir labai įdomų **fraktalų geometrijos** mokslą, o parekomenduosiu skaitytojui būtinai susipažinti su jau ne kartą minėtoje knygoje [109] pateiktomis spalvotomis įklijomis ir po to, susidomėjus jomis, pasiskaityti toje knygoje ir apie pačias Mandelbroto aibes – kompleksinių skaičių rekursinės keitimo procedūros metodu generuojamas geometrines konstrukcijas, turinčias begalinės apytikslės mastelio simetrijos savybes ir **sugebančias imituoti gamtos objektų struktūrą bei formas**.

Mandelbroto aibės – tai visiškai nauji geometriniai objektai, kurie principaliai skiriasi nuo objektų, kuriuos iki Mandelbroto aibių generavimo nagrinėjo geometrijos mokslas.

Skirtumą tarp tų struktūrų, kurias nagrinėja klasikinė (elementarioji) geometrija, ir tų struktūrų, kurias mes stebime gamtoje, gana taikliai apibūdina paties B. Mandelbroto žodžiai, paimti iš jo knygos „Gamtos fraktalų geometrija“:

„Kodėl (elementarioji) geometrija dažnai vadinama šalta ir sausa? Viena iš priežasčių – tai negalėjimas atvaizduoti debesų, kalnų, krantų ar medžio formų. Debesys – ne rutuliai, kalnai – ne kūgiai, krantai – ne apskritimai, ir nei medžių žievė glodi, nei žaibas tiesėmis sklinda.

... daugybė gamtos formų yra tokios netaisyklingos ir padrikos, kad palyginti su elementariąja geometrija gamta demonstruoja ne tik aukštesnį, bet ir visiškai kitokį sudėtingumo laipsnį“.

Nuo savęs pridėsiu, jog dabar fraktalų geometrijos pradininko B. Mandelbroto (beje, jo tėvai gyveno Vilniuje) ir kitų naujosios kompiuterinės grafikos atstovų dėka **šiulaikinė matematika jau sugeba imituoti gamtai būdingas struktūras**, kuo skaitytojas pats galės įsitikinti, pasižiūrėjęs į knygoje [109] pateiktas spalvotas įklijas.

Todėl, **nagrinėdami tipines sistemų struktūras, mes negalime neatkreipti dėmesio į struktūras, nagrinėjamas fraktalų geometrijoje.**

Svarbu pažymėti ir tai, kad **mastelio simetrija permeta tiltą tarp „šaltosios“ idealios simetrijos, būdingos klasikiniam mokslui ir menui, klasikiniam tvarkos ir grožio supratimui, iš vienos pusės, ir tarp tos neišsėmiamos struktūrų ir formų įvairovės, kuri būdinga gamtai ir fraktalų geometrijai.**

Pripažindami ką tik cituotą B. Mandelbroto minčių teisingumą ir suprasdami matematikos mokslo plėtojimo būtinybę fraktalų geometrijos srityje, kurioje grožis kyla iš niekada pilnai nesutampančių begalinių pasikartojimų įvairovės, mes neturime teisės nevertinti ir klasikinio mokslo apie simetriją, kaip idealios tvarkos sinonimą, palikimo. Juk negalima nepripažinti ir žymaus vokiečių matematiko H. Veilio (H. Weyl) minčių teisingumo:

„... Simetrija, kad ir kaip plačiai ar siaurai ją suprantame – įrankis, kuriuo žmonės per amžius mėgino suvokti ir kurti tvarką, grožį, tobulybę... Simetrija – svarbi tema, reikšminga menui ir gamtai. Matematika gyva jos syvais, ir būtų sunku surasti objektą, kuris geriau atskleistų, kaip veikia matematinis intelektas“.

Tuo galėčiau ir baigti **simetrijos sąvokos analizę** ir kitų **tipinių struktūrų apžvalgą**, pažymėdamas, kad 1.9.1.1.–1.9.1.6. skyreliuose buvo aprašytos tik kai kurios svarbesnės tipinių struktūrų grupės.

Šiek tiek pasižvalgę aplink, mes **rastume dar daug vertų sistemotyrininko dėmesio tipinių struktūrų**. Tai ir įvairių šokių (ypatingai masinių liaudies šokių) metu sudaromos besikeičiančios figūros (pasirodo, ir jas gana patogu nagrinėti, pasitelkus matematiką), ir muzikos sąskambių dėsningumai, atsispindintys įvairių muzikos kūrinių struktūrose, ir muzikos garsų bei spalvotų šviesos blyksnių deriniai, tapę tokie populiarūs diskotekose, ir įvairių epochų įvairios architektūrinės formos, ir

toninės bei metrinės eilėdaros pėdų struktūra (jambas, chorėjas, daktilis, amfibrachis, anapestas ir t. t.), ir įvairių tipų mazgai (egzistuoja net specialus ir gana sudėtingas mokslas apie mazgų topologiją), ir t. t., ir t. t., nekalbant jau apie struktūrų įvairovę gyvojoje gamtoje, kurioje **gyvosios materijos savybės pasireiškia, pirmojoje eilėje, kaip struktūrinės savybės.***

Nežiūrint į milžinišką gyvojoje gamtoje egzistuojančių struktūrų įvairovę, kurios pilnai neįstengia aprėpti net labai sudėtingos dar nuo Karlo Linėjaus laikų vystomos ir tobulinamos gyvosios gamtos karalysčių (gyvūnų, augalų, grybų, protistų, bakterijų), jų tipų, skyrių, klasių, būrių, eilių, šeimų, genčių ir rūšių klasifikavimo sistemos (apie jas, kaip antrojo tipo sistemų pavyzdžius, bus dar kalbama 1.10. skyriuje), o taip pat nežiūrint į didelę atsitiktinumo reikšmę gyvojoje gamtoje vykstančiuose procesuose, vis dėl to ir toje milžiniškoje įvairovėje **galima pastebėti gana nemažai įdomių faktų, bylojančių apie virš visos tos įvairovės egzistuojančius bendrasisteminius dėsningumus.**

Štai vienas iš tokių faktų. Pasirodo, jog tokios matematinės konstrukcijos, kaip mūsų jau nekartą minėti Fibonačio skaičiai F_n (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ir t. t.), kurių santykis $\frac{F_{n+1}}{F_n}$,

jų numeriui n begaliniai didėjant, artėja prie „auksinio pjūvio“ santykio $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, gana

dažnai sutinkami ir gyvojoje gamtoje. Pavyzdžiui, ramunės žiedai gana dažnai turi 8, 13, 21, 34, 55 arba 89 žiedlapius, kankorėžių spiralės turi po 8 arba 13 eilių, ananasų žvynai eina spiralėmis po 8, 13 arba 21, saulėgrąžų sėklos išsidėsto spiralėmis po 55 ir 89 sėklides ir pan. Kuo būtų galima paaiškinti tokius reiškinius: atsitiktiniais sutapimais ar kokių tai bendrų dėsningumų egzistavimu?

Kadangi panašių faktų **filotaksijos mokslas**, užsiimantis augalų dalių išsidėstymo ir pasiskirstymo nagrinėjimu (kitais tariant, **tipinėmis, augalų sandarai būdingomis, struktūromis**), žino ir daugiau, tai laikyti visus tokius reiškinius tik atsitiktiniais įdomiais sutapimais būtų visiškai nepagrįsta.

Gilesni šių reiškinių tyrimai parodė, kad jie yra organizmo augimo proceso, priskiriamo taip vadinamo gnomoninio augimo tipui, pasekmė.

Gnomoniniu augimu vadinamas rekursinis (vėl rekursinis!) procesas, kurio metu prie jau esančio organizmo prisijungia tokia nauja organizmo struktūros sudedamoji dalis, kad organizmo forma išlieka panaši į senąją, t. y. išlaikoma mastelio simetrija. Ta pridedamoji struktūros dalis dar nuo Aristotelio laikų vadinama **gnomonu**, iš kur ir kilo tokio tipo augimo pavadinimas.

Gnomoninio augimo procesą galima pailustruoti tokiu pavyzdžiu. Tarkime, jog augimas prasideda nuo mažyčio lygiašonio trikampio (augimo „sėklos“) ABC, kurio viršūninis kampas yra lygus 36° (žiūr. 108 „a“ pav.). Pratęsime to trikampio pagrindą AC iki taško D taip, kad $CD=BC$, ir sujungsime taškus B ir D atkarpa BD. Gausime naują lygiašonį trikampį ADB, panašų į pradinį (žiūr. 108 „b“

pav.). Įrodysime tai. Kadangi $\angle BCD = 180^\circ - \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$, tai lygiašonio trikampio BCD

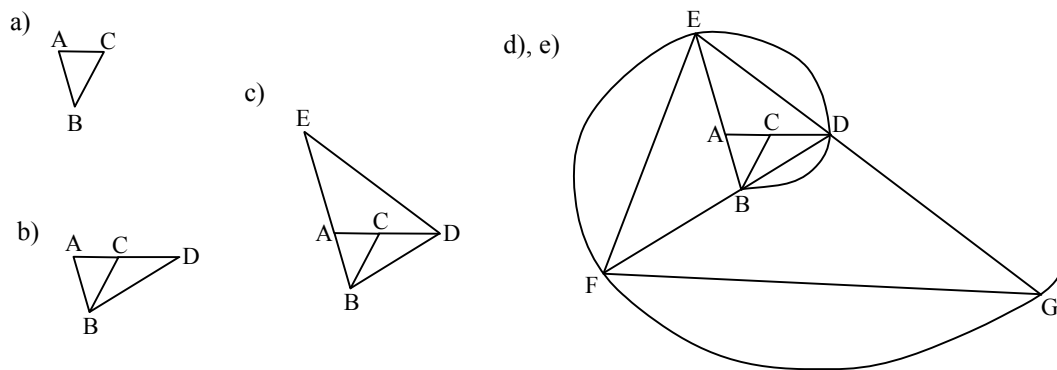
šoniniai kampai yra lygūs $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Todėl $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$. Šis kampas

lygus $\angle BAC = 72^\circ$, todėl $\triangle ADB$ yra lygiašonis, kurio šoniniai kampai yra lygūs 72° , o viršūninis – 36° . Taigi, naujasis trikampis ADB yra panašus į pradinį trikampį ABC ir lygiašonis trikampis BCD, kurį pridėję prie pradinio trikampio ABC, gavome jam panašų trikampį ADB, yra pradinio trikampio gnomonas.

Dabar pratęsime naujojo trikampio ADB pagrindo kraštinę BA, sudarydami to trikampio gnomoną taip, kad to gnomono šoninė kraštinė būtų trikampio ADB „sudurtinė“ kraštinė AD. Kitą to gnomono šoninę kraštinę AE gausime, atidėję trikampio ADB pagrindo BA pratęsime (tęsinyje) atkarpą $AE=AD$. Gausime naują gnomoną – lygiašonį trikampį DAE su šoniniais kampais, lygiais 36° , ir gnomoninio augimo rezultata – naujos kartos lygiašonį trikampį BED su viršūniniu kampu BED, lygiu 36° (žiūr. 108 „c“ pav.). Tas trikampis panašus į „sėklą“ – trikampį ABC. Viena iš „sėklos“ viršūnių (viršūnė C) jau atsidūrė išaugusio „organizmo“ (trikampio BED) viduje.

Pratęsę trikampio BED pagrindo DB kraštinę taip, kad to trikampio „sudurtinė“ kraštinė BE atsidurtų naujo trikampio viduje, ir atidėję tame pratesime atkarpą $BF=BE$, gauname naują gnomoną (trikampį EBF) ir gnomoninio augimo rezultata – naujos kartos trikampį DFE (žiūr. 108 „d“ pav.), panašų į „sėklą“. Dabar jau ir antroji „sėklos“ viršūnė (viršūnė A) atsidūrė išaugusio „organizmo“ viduje.

* žiūr. 1.14.13. skyrelį, kuriame nagrinėjama gyvybės sąvoka ir gyvybės atsiradimo klausimai bei aprašoma dar viena **tipinė struktūra – gyvos ląstelės struktūra.**



108 pav.

Pratęsę trikampio DFE pagrindą ED taip, kad to trikampio „sudurtinė“ kraštinė DF vėl atsidurtų naujo trikampio viduje, ir atidėję $DG=DF$ (žiūr. 108 „e“ pav.), vėl gauname naują gnomoną (trikampį FDG) ir naujos kartos trikampį EGF – gnomoninio augimo rezultatą, panašų į „sėklą“. Dabar jau paskutinė „sėklos“ viršūnė (viršūnė B) atsidūrė išaugusio „organizmo“ viduje.

Šį rekursinį „organizmo“ gnomoninio augimo procesą galima tęsti ir toliau, pratęsiant trikampio EGF pagrindą FE taip, kad to trikampio „sudurtinė“ kraštinė EG atsidurtų naujo trikampio viduje, ir t. t. gaminant vis naujus gnomonus ir gaunant vis naujus ir vis didesnius trikampius, panašius į pradinę „sėklą“.

Panagrinėję gnomoninio augimo rezultatą – trikampių ABC, ADB, BED, DFE, EGF ir t. t. seką, pastebėsime dar vieną įdomų dėsningumą, būdingą gnomoniniam augimui: pasirodo, jog tų trikampių smailiosios viršūnės B, D, E, F, G ir t. t. išsidėsčiusios plokštumoje ne bet kaip, o taip, kad priklauso **logaritminei spiralei**, kurios lygtis polinėse koordinatėse yra $\rho = ae^{k\varphi}$, kur φ – polinė koordinatė, vaizduojanti radiuso vektoriaus posūkio kampą (kartu ir laiką t , kurio metu vyksta augimas), o ρ – to radiuso vektoriaus ilgis. Dydis a yra konstanta, lygi pradinei radiuso vektoriaus reikšmei (pradinės „sėklos“ dydžiui), o dydis k – konstanta, charakterizuojanti gnomoninio augimo greitį, nes $\frac{d\rho}{d\varphi} = ake^{k\varphi} = k\rho$. Rekomenduočiau skaitytojui pačiam išvesti formulę $\rho = ae^{k\varphi}$.

Logaritminei spiralei $\rho = ae^{k\varphi}$, kurią galima laikyti **procesu, vadinamo gnomoniniu augimu, matematiniu modeliu $\rho = ae^{kt}$** , būdinga dar viena įdomi savybė: kiekviename taške, priklausančiame logaritminei spiralei, jos liestinės kampas α su radiusu yra pastovus, nes to kampo tangentas yra atvirkščiai proporcingas augimo greičio konstantos k reikšmei, t. y. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{k}$ (arba $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$). Šia logaritminės spiralės savybe naudojamosi ir technikoje: frezavimo staklėse, spiralinėse ir krumpliaratinėse pavarose.

Gnomoninis augimas turi ir kitą (dar įdomesnę ir evoliucijos procesui dar svarbesnę) savybę: **į tokį augimą gali konverguoti ir augimas, kuris pradžioje buvo ne gnomoninis**.

Įdėmesnis skaitytojas jau galėjo pastebėti, kad gnomoninio augimo, pavaizduoto 108 pav., imitavimui to augimo „sėkla“ buvo pasirinkta ne bet koks trikampis, o trikampis, esantis taisyklingo dešimtkampio centriniu trikampiu, turinčiu labai įdomią ir svarbią savybę: jo šoninės kraštinės ir pagrindo ilgių santykis yra lygus „auksinio pjūvio“ santykiui $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pažymėkime trikampio ABC (žiūr. 108 „a“ pav.) pagrindo AC ilgį raide a , o jo šoninės kraštinės ilgį raide b . Iš trikampių ABC ir ADB (žiūr. 108 „b“ pav.) panašumo išplaukia $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, iš

kur gauname $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$, arba $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} + 1$. Pažymėję ieškomą santykį $\frac{b}{a}$ raide x , gauname lygtį

$x = \frac{1}{x} + 1$, kurią išsprendę, randame, jog teigiamoji jos šaknis yra $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Šis santykis vadinamas „auksinio pjūvio“ santykiu todėl, kad jis būdingas tokiam kokios nors atkarpos padalinimui („pjūviui“) į dvi dalis taip, kad tos atkarpos didesniosios dalies santykis su mažesniąja būtų lygus visos atkarpos ilgio santykiui su didesniąja jos dalimi, t. y., kad didesnioji padalintos atkarpos dalis būtų lygi geometriniam vidurkiui tarp visos atkarpos ir

mažesniosios dalies. Nagrinėdami trikampį ABD (žiūr. 108 „b“ pav.), matome, kad taškas C dalina to trikampio kraštinę AD „auksinio pjūvio“ santykiu.

„Aukšinio pjūvio“ santykis buvo žinomas ne tik Antikos laikais, bet ir senovės Egipte, ir buvo pavadintas „auksiniu“ todėl, kad stačiakampių, kurių kraštinių santykis yra lygus „auksinio pjūvio“ santykiui, proporcijos yra malonesnės daugumos žmonių akiai negu kokios nors kitos proporcijos. Todėl „auksinio pjūvio“ proporcijos buvo gana plačiai naudojamos senovės architektūroje bei mene ir tebevartojamos iki šių dienų. Pavyzdžiui, daugelis maisto produktų dėžučių turi matmenis, artimus „auksiniam pjūviui“, nes manoma, kad pirkėjas tokių matmenų dėžutes pasirenka dažniau, negu kitas. Tokia nuomonė turi pagrindą: dar 1876 m. garsusis vokiečių psichologas G. Fechneris savo bandymais patvirtino, kad proporcijos, artimos „auksinio pjūvio“ santykiui, daugumai žmonių yra tikrai malonesnės, negu kokios nors kitos.

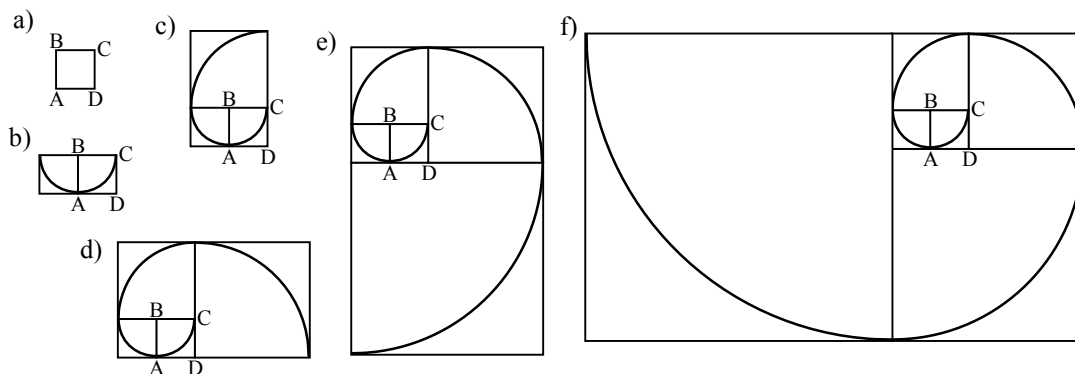
Šių eilučių skaitytojas vėliau, besimokydamas optimizavimo uždavinių artutinių sprendinių paieškos metodų, sužinos, kad **„auksinio pjūvio“ metodo taikymas leidžia greičiau rasti artutinių sprendinių negu kiti metodai** (pavyzdžiui, negu **atkarpos dalinimo pusiau metodas**, kuris remiasi **aritmetinio vidurkio radimu**, kai **„auksinio pjūvio“ metodas – geometrinio vidurkio radimu**).

Taigi, imituodami gnomoninį augimą (žiūr. 108 pav.), mes jau pačioje pradžioje buvome pasirinkę gana tobulą „sėklą“, tenkinančią „auksinio pjūvio“ proporcijas. O kas gi būtų nutikę, jei būtume pradėję nuo mažiau tobulos „sėklos“ ir būtume taikę rekursinę „auginimo“ procedūrą, artimą gnomoninio augimo procesui?

Tarkime, jog pradinė „sėkla“ – mažytis kvadratis ABCD (žiūr. 109 „a“ pav.). Prie to kvadratis pridėsime tokį pat kvadratį iš kairės pusės ir gausime stačiakampį, kurio ilgesnės kraštinės santykis su trumpesniąja lygus 2. Pirmojo kvadratis dešiniąją viršūnę C sujungsime apskritimo lanku su kairiąja žemutine viršūne A, o po to tą viršūnę tokiu pat lanku – su naujojo kvadratis kairiąja viršutine viršūne (žiūr. 109 „b“ pav.). Prie gautojo stačiakampio viršaus prijungsime kvadratą, turintį kraštinę, lygią pirmojo stačiakampio ilgesniajai kraštinei (pirmųjų kvadratų kraštinių sumai) ir pratęsime apskritimo lanką tik jau didesniu spinduliu, lygiu didesniojo kvadratis kraštinei. Gausime stačiakampį (žiūr. 109 „c“ pav.), kurio ilgesniosios kraštinės santykis su trumpesniąja bus lygus $\frac{3}{2} = 1,5$.

Prijungę iš dešinės pusės naują kvadratą, kurio kraštinė lygi stačiakampio ilgesniajai kraštinei, gausime naują stačiakampį, kuriame ilgesniosios ir trumpesniosios kraštinių santykis bus jau $\frac{5}{3} \approx 1,67$ (žiūr. 109 „d“ pav.). Tęsdami šią procedūrą toliau, gausime (žiūr. 109 „e“ pav.) naują stačiakampį, kurio kraštinių santykis bus $\frac{8}{5} = 1,6$. Sekančiame žingsnyje (žiūr. 109 „f“ pav.) gausime stačiakampį, kurio

kraštinių santykis bus lygus $\frac{13}{8} = 1,625$. Pakartoję šią procedūrą dar kartą, gausime stačiakampį, kuriame kraštinių santykis bus lygus $\frac{21}{13} \approx 1,615$, po to – stačiakampį su kraštinių santykiu, lygiu $\frac{34}{21} \approx 1,619$, po to – stačiakampį su kraštinių santykiu $\frac{55}{34} \approx 1,6176$, po to – stačiakampį su kraštinių santykiu $\frac{89}{55} \approx 1,6182$ ir t. t.



109 pav.

Palyginę tuos santykius ir jų kitimo procesą, pastebime du dalykus: 1) **santykių dydžiai, svyruodami konverguoja, artėdami prie vieno pastovaus dydžio**; 2) **santykių skaitikliai ir vardikliai – mums jau pažįstami Fibonačio skaičiai**.

Tai, kad gavome Fibonačio skaičius, yra visai natūralu, nes kvadratų kraštinių ilgių kaip tik ir sudaro Fibonačio skaičių seką: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ir t. t. Juk naujo kvadrato kraštinės ilgis sudaromas, sudedant prieš tai buvusio ir dar prieš tai buvusio kvadratų kraštinių ilgius, kas atitinka Fibonačio skaičių F_n apskaičiavimo formulę, kai $n \geq 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Skaitytojas, manau, jau nujaučia, kad ta riba, prie kurios artėja stačiakampių kraštinių ilgių santykis, atitinkantis Fibonačio skaičių santykį $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$, yra „auksinio pjūvio“ santykis. Tuo įsitikinti visai nesunku.

Pažymėkime $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = x$. Tuomet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{x}$ ir iš lygybės $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$, kai $n \rightarrow \infty$, gausime lygybę $x = 1 + \frac{1}{x}$, t. y. vėl tą pačią kvadratinę lygtį $x^2 - x - 1 = 0$.

Suradę šios lygties teigiamą sprendinį, gauname $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, t. y. „auksinio pjūvio“ santykį.

Nesunku taip pat įsitikinti, jog iš apskritimo lankų sudarytoji spiralė (žiūr. 109 pav.), didėjant žingsnių skaičiui, **artėja prie logaritminės spiralės**.

Jei „sėkla“ pačioje augimo proceso pradžioje būtų buvusi „tobula“, pavyzdžiui, **„auksinis“ stačiakampis**, kurio kraštinių ilgių santykis jau pačioje pradžioje būtų buvęs lygus „auksinio pjūvio“ santykiui $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, tai, kaip nesunku įsitikinti, augimo procesas jau nuo pat pradžios būtų buvęs idealus gnomoninis procesas, o prie „auksinių“ stačiakampių pridedami kvadratai būtų buvę tiksliais tų stačiakampių gnomonais.

Įsitikinsime tuo. Tarkime, jog „sėkla“ – „auksinis“ stačiakampis, kurio mažesniosios kraštinės ilgis lygus 1, o didesnioji yra $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ kart ilgesnė. Prijungsime prie šio stačiakampio kvadratą, kurio kraštinės ilgis lygus stačiakampio ilgesniosios kraštinės ilgiui. Gausime stačiakampį, kurio mažesnioji kraštinė bus lygi $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, o ilgesnioji $1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Rasime tų kraštinių ilgių santykį: $\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{3\sqrt{5} - 3 + 5 - \sqrt{5}}{5 - 1} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Gavome, jog naujasis stačiakampis taip pat yra „auksinis“, ir procesas iš pat pradžių yra gnomoninis.

Galima įrodyti ir atvirkštinį teiginį: kvadratas gali būti tik „auksinio“ stačiakampio gnomonu.

Apibendrinami šių matematinių eksperimentų rezultatus, gauname, jog tuo metu, **kai „sėkla“ yra „tobula“ („auksinis“ stačiakampis, „auksinis“ trikampis), tai „organizmo“ augimo procesas yra iškart gnomoninis, ir „organizmo“ „augimą“ aprašo logaritminė spiralė $\rho = ae^{kt}$** .

Kai pradinė „sėkla“ nėra „tobula“, pavyzdžiui, kai stačiakapiai auginami iš kvadrato, pridedant vis didėjančią kvadratą, tai „organizmo“ auginimo rekursinis procesas pradžioje žymiai skiriasi nuo idealaus gnomoninio proceso, tačiau, didėjant algoritmo žingsnių skaičiui, artėja prie jo. To artėjimo procese atsirandančių kvadratų kraštinių ilgių sudaro Fibonačio skaičių seką, todėl nenuostabu, kad realius augimo procesus taip pat gali charakterizuoti tie skaičiai, ką ir pastebėjo filotaksijos mokslas.

Gnomoninis augimas būdingas medžio kamieno rėvių, avino ragų, nariuotojo nautilo kriauklės, kankorėžių ir ananasų žvynų, saulėgrąžų sėklų spiralių, ramunės žiedynų ir t. t. augimui ir skiriasi, pavyzdžiui, nuo žmogaus kūno augimo tuo, kad **organizme, augančiame gnomoniškai, visuomet galima matyti ne tik to organizmo dabartį, bet ir praeitį, organizmo augimo praėjusių pakopų rezultatus**, ko augančio vaiko organizmo struktūroje mes nerasime.

Apie gnomonus, gnomoninį augimą, „auksinį pjūvį“, Fibonačio skaičius, populiacijų kitimą, Ferhiulsto (P. H. Verhulst) lygtį, logistinę kreivę ir eilę kitų įdomių dalykų skaitytojas gali šiek tiek plačiau pasiskaityti jau minėtoje knygoje [109], su kuria būtų verta susipažinti net tada, kai joje nebūtų nieko daugiau, o tik fraktalų aprašymas.

1.8.6.1. skyrelyje jau buvo kalbėta apie „**ekologines nišas**“ ir ten buvo paminėta, kad **vienų gyvūnų evoliucija nuėjo organizmo apsaugojimui skirtu išorinio kiauto auginimo keliu, kitų –**

vidinio stuburo ir išvystytos nervų sistemos kūrimo keliu. Nagrinėdami gnomoninį ir negnomoninį organizmų augimą vėl susiduriame su skirtingomis „ekologinėmis nišomis“. Palieku skaitytojui pamąstymams (juk kiekvienam naudinga palaipsniui ugdyti sisteminio mąstymo įgūdžius, ir tai yra vienas pagrindinių šio sistematikos kurso tikslų), kuris iš organizmo augimo būdų yra progresyvesnis ir kodėl. Ieškant moksliskai pagrįsto atsakymo į šį klausimą, tektų panagrinėti gyvųjų organizmų **paveldimų savybių iš kartos į kartą perdavimo „mechanizmus“**, o taip pat palyginti kompiuterių programinės įrangos (pavyzdžiui, operacinių sistemų) galimus organizavimo variantus ir atsakyti į klausimą, kada kokia operacinė sistema (OS) yra tinkamiausia. Manau, kad po tokių pamąstymų skaitytojas ras atsakymą ne tik į klausimą, kuris organizmų augimo būdas yra „progresyvesnis“, bet ir į klausimą, **kodėl vis dėlto egzistuoja įvairūs organizmų augimo būdai**, o taip pat, kodėl kartu su stuburiniais egzistuoja, pavyzdžiui, ir vėžliai, kodėl pirmieji galutinai neištūmė antrųjų, kodėl gyvūnai iki šiol nesudėdė augalų **ir kodėl iš viso egzistuoja „ekologinės nišos“**.

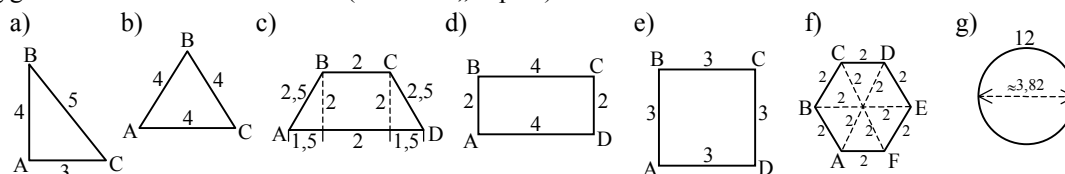
Tikiuosi, kad sugebantis dar giliau ir dar sistematiškiau mąstyti skaitytojas supras ir tai, kokią ryšį visi čia iškelti klausimai turi su šio – 1.9.1.6-jo – skyrelio tema, t. y. su tipinių struktūrų apžvalga. Juk galima iškelti sau ir toki klausimą: **kodėl pasaulyje tiek daug įvairių struktūrų, kodėl gamta (ar jos Kūrėjas) nepasirinko savo sukurtoms sistemoms „paties geriausio“ struktūros varianto ir pagal tokį „tipinį projektą“ nesukūrė viso pasaulio?**

O kad gamta (ar jos Kūrėjas) „mėgsta“ ir „sugeba“ pasirinkti racionaliausius variantus ir kad pasaulyje vykstantys evoliucijos procesai nieko kita ir nedaro, o tik ieško tokių variantų ir juos po to panaudoja, truputį pasidairę ir pamastę, įrodymų rasime apščiau.

Paminėsiu čia tik vieną, atsakydamas į šiame skyrelyje iškeltą klausimą, kodėl bitės, gamindamos korius, pasirinko struktūrą, pavaizduotą 104 „c“ pav.

Ieškodami atsakymo į šį klausimą, įvykdykime keletą eksperimentų, kurie kartu bus mums reikalingi ir vėliau (1.13. skyriuje) kaip **matematinio eksperimentavimo idėjos** iliustracija.

Paimkime lanksčios vielos gabalėlį, kurio ilgis $\ell = 12$ vienetų. Sudarykime iš jo stačiakampį trikampį, kurio statmenys lygūs 3 ir 4 vienetams, o įžambinė – 5 vienetams. Tokio trikampio plotas S lygus 6 kvadratiniais vienetams (žiūr. 110 „a“ pav.).



110 pav.

Po to iš tos pačios vielos sulankstykite lygiakraštį trikampį (žiūr. 110 „b“ pav.). Jo kraštinė $a_3 = 4$ vienetai, o plotas $S = \frac{a_3^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \approx 6,92$ kvadratinio vieneto. Kaip matome, esant tam pačiam perimetrui $p = \ell = 12$ vienetų, plotas S padidėjo.

Iš tos pačios vielos galime sudaryti ir lygiašoną trapeciją (žiūr. 110 „c“ pav.). Jos perimetras $p = \ell = 12$ vienetų, o plotas $S = \frac{2+5}{2} \cdot 2 = 7$ kvadratiniai vienetai, taigi, vėl šiek tiek didesnis negu trikampio plotas.

Pagaminę iš tos vielos stačiakampį (žiūr. 110 „d“ pav.), turintį 2 ir 4 vienetų ilgio kraštinę, gausime, jog stačiakampio plotas $S = 8$ kvadratiniai vienetai.

Iš tos pačios vielos galima pagaminti ir kvadratą (žiūr. 110 „e“ pav.). Jo plotas vėl gi truputį didesnis: $S = a_4^2 = 3^2 = 9$ kvadratiniai vienetai.

Jei iš tos vielos pagamintume taisyklingą šešiakampį (žiūr. 110 „f“ pav.), turintį kraštinę $a_6 = 2$ vienetai, tai gautume, jog jo plotas $S = 6 \cdot \frac{a_6^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \approx 10,39$ kvadratinų vienetų, t. y. didesnis už visų iki šiol buvusių figūrų plotą.

Padarę iš tos vielos apskritimą, kurio ilgis $\ell = 2\pi \cdot r = 12$ vienetų, gautume, jog to apskritimo ribojamo skritulio (žiūr. 110 „g“ pav.) plotas $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4\pi} = \frac{36}{\pi} \approx 11,46$ kvadratinų vienetų, t. y. didesnis už plotą bet kurios kitos figūros, turinčios tą patį perimetrą $\ell = 12$ vienetų.

Iš šių eksperimentų, juos apibendrinami, galime padaryti kai kurias išvadas – hipotezes, kurias po to galime įrodyti kaip teoremas:

1) tarp daugiakampių, turinčių n kraštinių ir vienodus perimetrus n , didžiausią plotą turi tas n -kampis, kuris yra taisyklingas;

2) tarp taisyklingųjų daugiakampių, turinčių vienodą perimetrą, didesnę plotą turi tas taisyklingas daugiakampis, kuris turi daugiau kraštinių;

3) tarp taisyklingųjų daugiakampių, turinčių vienodą plotą, trumpesnę perimetrą turi tas taisyklingasis daugiakampis, kuris turi daugiau kraštinių;

4) iš visų plokščiųjų figūrų, turinčių duotąjį perimetrą p , didžiausią plotą S „aptveria“ apskritimas ir, atvirkščiai, duotajam plotui S „aptverti“ reiks trumpiausios „tvoros“, kai ta „tvora“ – apskritimo formos.

Šių išvadų teisingumo įrodymai yra elementarūs ir jiems pakanka vidurinės mokyklos moksleivio žinių, todėl šių teiginių, suformuluotų hipotezių pavidalu, teisingumo įrodymą palieku skaitytojui.

Tarkime dabar, kad mes norime suskirstyti plokštumą į taisyklingus vienodus daugiakampus, turinčius tam tikrą, iš anksto nustatytą visiems vienodą plotą S taip, kad pertvaroms tarp tų daugiakampių išeitų kuo mažiau medžiagos, t. y. kad bendras visų pertvarų ilgis būtų mažiausias.

Akivaizdu, kad tai bus pasiekta tada, kada kiekvienas taisyklingasis daugiakampis, ribojantis duotąjį plotelį S , turės trumpiausią perimetrą, t. y. didžiausią galimą kraštinių skaičių n .

Kadangi, kaip jau matėme šio skyrelio pradžioje, plokštumą taisyklingais n -kampiais galima padengti tik tada, kai $n=3, 4$ ar 6 , tai gauname, jog **pertvarų ilgis bus trumpiausias, kai taisyklingieji daugiakampiai turės po 6 kampus.**

Taigi, išeina, kad **bitės, ruošdamos korio paviršiuje tam tikro tūrio vienodas saugyklas, pasirinko racionaliausią struktūrą vaško ir darbo ekonomijos atžvilgiu.** Tai kaip tik ir patvirtina teiginį, kad **gamta (ar Dievas) „mėgsta“ ir „sugeba“ rinktis racionaliausius sprendinius.** Ir tokių pavyzdžių – daugybė.

Todėl kyla klausimas, **kodėl gamtoje taisyklingų struktūrų, būdingų klasikinei geometrijai, kristalams ir pan. vis dėl to pasitaiko mažiau negu netaisyklingų, kodėl Mandelbroto fraktalų geometrijai būdingos struktūros atrodo natūralesnės, negu struktūros, sudarytos iš taisyklingų daugiasienių, rutulių ir kitų „tobulų“ konstrukcijų?**

Šį klausimą galima reformuluoti į du klausimus, artimesnius šio skyrelio tematikai:

1. **Kodėl gamtoje, nežiūrint į apribojimus, kurie atsiranda, laikantis reikalavimų, išplaukiančių iš gamtos reiškiniams ir objektams būdingo simetriškumo ir racionalumo, egzistuoja tokia milžiniška išorinių formų ir vidinių struktūrų įvairovė?**

2. **Kokias struktūras, ryšium su tuo, o taip pat ir su tuo, kas buvo pasakyta apie Mandelbroto fraktalus, derėtų laikyti tipinėmis natūraliai gamtai?**

Atsakymų į šiuos klausimus paiešką kol kas palieku skaitytojo savarankiškam pamąstymui. Tokie pamąstymai būtini, norint išsiugdyti teisingai atspindinčią tikrovę sistemine pasaulėžiūra ir sisteminio mąstymo įgūdžius, kurių esmę, man atrodo, gana vaizdžiai (ir tuo pat metu gana giliai) išreiškia šis anglų poeto ir dailininko V. Bleiko (W. Blake) posmelis:

*„... Smiltelėje išvyst pasaulį,
Matyti dangų gėlėje,
Laikyt ant delno begalybę,
Semt amžinybę dienoje...“*

Noriu atkreipti skaitytojo dėmesį, kad šis posmelis, taip pat pasiskolintas iš knygos [109], kurią dar kartą rekomenduoju bent jau pavartyti, nes pavartę, tikiuosi, ryšitės ir paskaityti, o pradėję skaityti, įsitikins, perskaitys ir visą šią įdomią ir labai (kartais, atrodo, net per daug) populiariai parašytą knygą.

Skyrelio pabaigoje naudinga apmąstyti išstudijuotą tekstą ir nustatyti ką naujo ir svarbaus šiame skyrelyje sužinojome.

Pirma. Žymiai papildėme išnagrinėtų tipinių struktūrų aibę, prijungdami prie jau žinomų tipinių struktūrų **fraktalines struktūras**, kurios, turėdamos, atrodo, keistokas savybes, iš tikrųjų yra žymiai artimesnės natūralioms gamtinėms struktūroms negu struktūros, kurias nagrinėja tradicinė matematika.

Antra. Praplėtėme ir pagilino me simetrijos sąvokos, kuriai nemažai dėmesio skyrėme jau 1.9.1.4. skyrelyje, nagrinėdami kristalines struktūras ir periodinius procesus, supratimą, papildydami standžiųjų judesių simetriją mažiau griežta, tačiau artimesne natūraliajai gamtai **mastelio simetriją**.

Trečia. Pagilino me ir **standžiųjų judesių simetrijos** bei simetrijos, nagrinėtos kristalografijoje, suvokimą, susipažinę su įvairių raštų (juostų, apmušalų, audinių, dekoratyvinių dirbinių ar pan.) simetriją.

Ketvirta. Susipažinome su tokiais **rekursiniais procesais** kaip Koch snaigės ar Sierpinskio nėrinio gavimas, su Fibonačio skaičių seka, kurios gretimų narių santykis konverguoja į aukšnio pjūvio santykį, su **gnomoniniu augimu** ir jo dėsniniais.

Šis skyrelis leidžia **pernesti tiltuką tarp abstrakčių struktūrų, nagrinėjamų matematikoje, ir tarp natūralių gamtinių struktūrų.** Šis faktas aktualus ne tik kuriant struktūrų algebrą, bet ir sprendžiant visos sistemos tyros **fundamentalizavimo uždavinius, formuojant holistinę pasaulėžiūrą.**

1.9.1.7. Dar kartą apie tipines struktūras, jų klasifikavimą, vaizdavimą ir žymėjimų sistemas

Baigdamas 1.9. skyriaus, skirto struktūrų algebrai, pirmąją dalį (1.9.1 poskyrį) ir prieš pradėdamas antrąją to skyriaus dalį – 1.9.2. poskyrį, kuriame bus nagrinėjamos kai kurios tipinės operacijos su struktūromis, norėčiau, šiek tiek apibendrinamas gana gausią ir įvairią 1.9.1. poskyryje pateiktą informaciją, dar kartą priminti skaitytojui to poskyrio paskirtį ir svarbiausius jo tikslus.

1.9.1. poskyrio paskirtis – **apžvelgti kai kurias tipines struktūras, priklausančias įvairioms mokslo ir gyvenimo sritims, ir tose srityse taikomas tų struktūrų klasifikavimo, vaizdavimo bei žymėjimo sistemas,** kad, pasinaudojus tų apžvalgų rezultatais kaip **tam tikra empirine baze,** būtų galima geriau įsivaizduoti, kaip turėtų būti kuriama **formalizuota sistemų struktūrų aprašymo kalba – pirmoji sudėtinė struktūrų algebros dalis** ir 1.5. skyriuje pradėtos nagrinėti **ternarinės TSF kalbos papildymas.**

Siekiant šių tikslų buvo trumpai apžvelgtos kai kurios tipinės struktūros bei jų klasifikavimo, žymėjimo ir vaizdavimo sistemos **grafų teorijoje** (1.9.1.1. skyrelis), **atominėje fizikoje** (1.9.1.2. skyrelis), **chemijoje** (1.9.1.3. skyrelis), **kristalografijoje bei bangų fizikoje** (1.9.1.4. skyrelis), **algebrinės struktūros, raštų, fraktalų ir kitos struktūros, mastelio simetrija, ir gnomoninis augimas** (1.9.1.6. skyrelis).

Specialūs kiekvieno čia nurodyto skyrelio tikslai buvo nurodyti pačiuose skyreliuose, todėl jų čia nebeminėsiu. Apibendrinamas noriu tik pažymėti, jog 1.9.1. poskyris, kaip ir dauguma šios mokymo priemonės skyrių, yra **daugiaplaninis:** pirmajame plane siekiama **įvesti skaitytoją į besikuriančią struktūrų algebrą reikalingos formalizuotos struktūrų vaizdavimo kalbos konstravimo problematiką;** antrajame plane siekiama, ugdant skaitytojo sisteminį mąstymą, plėsti ir gilinti jo mokslinę pasaulėžiūrą, **sistematuoti ir papildyti studentų fundamentines žinias iki lygio, reikalingo ir naudingo sistemotyryninkui ir dženeralistui, t. y. formuoti būsimojo sistemotyryninko ir dženeralisto sisteminės mokslinės pasaulėžiūros pagrindą.**

Siekiant **pirmojo plano** tikslų:

1) norėjosi parodyti **kokia didžiulė ir marga yra tipinių struktūrų, nagrinėjamų įvairiose mokslo srityse, įvairovė bei kokios skirtingos ir specifinės yra dabar egzistuojančios tų struktūrų klasifikavimo ir vaizdavimo sistemos;**

2) norėjosi atkreipti skaitytojo dėmesį į sudėtingumą ir naudingumą to uždavinio, kurį sau kelia sistemos tyros mokslas, siekdamas **sukurti universalią bendrasisteminę tipinių struktūrų klasifikavimo sistemą – antrojo tipo sistemą – ir jų žymėjimų bei vaizdavimo sistemą;**

3) norėjosi, kad skaitytojas suvoktų, kad minėtoji tipinių struktūrų žymėjimo ir modeliavimo sistema, siekdama būti **pakankamai universalia teoriškai ir naudinga praktiškai,** neišvengiamai turės atspindėti savo struktūroje realiai egzistuojančios (bet mūsų dar aiškiai neišivaizduojamos, tačiau jau nujaučiamos) **tipinių struktūrų antrojo tipo sistemos daugėšloniškumą;**

4) norėjosi 1.9.1.1.÷ 1.9.1.6. skyrelių pavyzdžiais pademonstruoti, kaip galėtų būti **kaupiama empirinė bazė**, reikalinga tipinių struktūrų klasifikavimo ir modeliavimo sistemos teoriniam konstravimui.

Siekiant **antrojo plano** tikslų norėjosi parodyti skaitytojams, kad **skirtingi tradiciniai mokslai sudaro logiškai susietas vienvisos mokslinės sistemos sudėtinės dalis**, papildančias bei pagrindžiančias viena kitą, kurios **gali būti nagrinėjamos ne tik „substratiškai“**, t. y. ne tik „pirmojo matavimo“ – nagrinėjamų objektų ir jų savybių specifikos – plotmėje, **bet ir „struktūriškai“**, t. y. „antrojo matavimo“ – tose dalyse egzistuojančių bendrasisteminių santykių ir tipinių struktūrų – plotmėje.

Todėl **1.9.1 poskyrį galime ir turime laikyti ne tik 1.5 skyriaus, bet ir 1.6. skyriaus tęsiniu.**

1.9.2. Struktūrų algebros operacijos

Struktūrų algebros operacijomis vadinsime **matematinės operacijas**, esančias realių ar virtualių procesų, kurie vyksta ar galėtų vykti struktūrose ar su struktūromis, **matematiniais modeliais**.

Kad struktūrų algebros operacijas būtų patogiau nagrinėti ir aprašinėti, pabandydysime jų aibę šiek tiek struktūrizuoti, išskirdami **struktūrų algebros operacijų klases**.

Pagal struktūrų algebros operacijų **operandų tipą** tų operacijų aibėje sąlyginai galima išskirti dvi klases, kurias mes sąlyginai pavadinsime „elementinių“ ir „struktūrinių“ operacijų klasėmis.

Elementinių operacijų klasei priskirsime **operacijas su struktūrų elementais bei santykiiais (ryšiais) tarp jų**, o taip pat įvairių charakteristikų, apibendrinančių struktūros savybes, apskaičiavimo operacijas.

Elementinių operacijų pavyzdžiai: struktūros elemento ar ryšio eliminavimo struktūroje operacijos, naujo elemento ar ryšio įvedimo į struktūrą operacijos, elemento ar ryšio perkėlimą struktūroje į kitą vietą, elementų bei jų ryšio perstatymo (sukeitimo vietomis) operacijos, elementų bei jų ryšių sujungimo struktūroje operacijos, struktūros „rišlumo“ apskaičiavimo, trumpiausio maršruto, jungiančio du struktūros elementus radimo bei jo „ilgio“ apskaičiavimo, trumpiausio pilno ciklo struktūroje bei jo „ilgio“ apskaičiavimo operacijos ir pan.

Struktūrinių operacijų klasei priskiriamos **operacijos, apibrėžtos pačių struktūrų aibėje**, t. y. operacijos, kurių operandais ir kurių rezultatais yra struktūros.

Struktūrinių operacijų pavyzdžiai: struktūrų jungimo į sudėtingesnę struktūrą, struktūrų matricinės ir dekartinės daugybos, struktūrų superpozicijos, struktūrų dekompozicijos, struktūrų papildymo, struktūrų matricinės bei dekartinės konjunkcijos bei disjunkcijos operacijos ir pan.

Reikia pažymėti, jog šis struktūrų algebros operacijų skirstymas į elementinių ir struktūrinių operacijų klases yra **sąlyginis** (kas jau buvo pažymėta žodeliu „sąlyginai“, įvedant šių klasių sąvokas), nes esama atvejų, kada vieną ir tą pačią struktūrų algebros operaciją galima priskirti tiek elementinių, tiek struktūrinių operacijų klasei.

Pavyzdžiui, pagal struktūrinių operacijų klasės apibrėžimą struktūrų jungimo į sudėtingesnę struktūrą operaciją natūralu priskirti struktūrinių operacijų klasei. Tačiau, atsižvelgdami į tai, jog elemento ir sistemos sąvokos yra reliatyvios (žiūr. 1.6.1. skyrelį), galime tos operacijos operandais pasirinkti „paprasčiausias struktūras“ – sudėtingos sistemos struktūros elementus, ir tokiu būdu šią operaciją priskirti elementinių operacijų klasei. Su šia priskyrimo tai ar kitai klasei dilema mes būtinai

susidursime, nagrinėdami elementų jungimo bei jungimosi į sistemas procesus ir jų matematinius modelius – struktūrų sudarymo iš elementų operacijas.

Kitas pavyzdys – sudėtingos sistemos struktūros dekompozicijos į jos posistemų struktūras operacija. Ją taip pat galima priskirti struktūrinių operacijų klasei, nes ir tos operacijos operandas ir jos rezultatas yra struktūros. Tačiau tą patį rezultatą gautume ir naudodamiesi elementinių operacijų klasės operacijomis, nutraukdami sudėtingoje rišioje struktūroje kai kuriuos tarpelementinius ryšius ir tokiu būdu suskaidydami sudėtingos sistemos struktūrą į tarpusavyje nesurištų mažesnių rišių struktūrų – tos sudėtingos sistemos posistemų struktūrų – aibę. Tęsdami šią procedūrą, galėtume dekomponuoti sudėtingą sistemą į tokius jos „posistemius“, kurie būtų sistemos elementais.

Taigi, struktūrų algebros elementinių ir struktūrinių operacijų klases negalime laikyti tarpusavyje visiškai nesikertančiomis aibėmis, o tokį struktūrų algebros operacijų susiskirstymą į klases – tikru tos **aibės skaidiniu** (žiūr. 1.9.1.5.). Tačiau vis dėlto šis susiskirstymas šiek tiek struktūrizuoja be galo gausią struktūrų algebros operacijų aibę ir palengvina jos apžvalgą. Todėl mes juo naudosisimės, grupuodami struktūrų algebros operacijas ir sąlyginai priskirdami jas tai ar kitai klasei.

Antruoju struktūrų algebros operacijų aibės struktūrizavimo požymiu galėtų būti **operandų skaičius**.

Egzistuoja algebrinės operacijos (kaip, pavyzdžiui, Bulio algebroje loginio neigimo operacija, aibių algebroje – aibės A papildymo iki aibės C arba jos papildymo iki universumo operacija), kurios turi tik vieną operandą. Tokias operacijas vadina **monarinėmis**. Monarinių operacijų esama ir struktūrų algebroje. Monarinių elementinių operacijų pavyzdžiai: elemento ar ryšio įvedimo bei eliminavimo operacijos, elemento perkėlimo į kitą vietą operacija ir pan. Monarinių struktūrinių operacijų pavyzdžiai: struktūros papildymo (jos matricos elementų loginio neigimo) operacija, struktūros dekompozicijos operacija ir pan.

Tačiau didžioji dalis struktūrų algebros operacijų yra **binarinės**, t. y. turi du operandus. Binarinių operacijų pavyzdžiai: struktūrų „sudėties“ ir „atimties“ operacijos, struktūrų dekartinės daugybos, dekartinės konjunkcijos ir dekartinės kompozicijos operacijos, dviejų elementų sujungimo į vieną operaciją, dviejų elementų ar jų ryšių sukeitimo vietomis operacijos ir pan.

Kai kurios binarinės operacijos yra **asociatyvios**, t. y. tenkina lygybę $(S_1 * S_2) * S_3 = S_1 * (S_2 * S_3)$, kur S_1, S_2, S_3 – struktūros, su kuriomis operuojama (jų elementai, ryšiai, struktūrų charakteristikos), „*“ – algebrinės operacijos ženklas. Pavyzdžiui, struktūrų jungimo operacija „ $\cup$ “, jų sankirtos operacija „ $\cap$ “, struktūrų konjunkcijos operacija „ $\wedge$ “, struktūrų dekartinės daugybos operacija „ $\boxtimes$ “ ir t. t. yra asociatyvios operacijos. Asociatyvioms operacijoms vietoj vaizdavimo jų kaip binarinių operacijų kompozicija $(S_1 * S_2) * S_3$ arba $S_1 * (S_2 * S_3)$ galima naudoti užrašą be skliaustelių $S_1 * S_2 * S_3$, o taip pat galima įvesti **n-arinės operacijos** sąvoką bei žymėjimą $\underset{i=1}{\overset{n}{*}} S_i$, reiškiantį $S_1 * S_2 * S_3 * \dots * S_i * \dots * S_n$.

Kai kurios binarinių struktūrų algebros operacijos gali būti **komutatyvios**, t. y. jų rezultatas gali nepriklausyti nuo operandų tvarkos: $S_1 * S_2 = S_2 * S_1$. Tuomet, jei ši binarinė operacija yra dar ir asociatyvi (kas nebūtina, žiūr. 1.9.1.5.), tai ir atitinkama n-arinė operacija yra komutatyvi, t. y., keičiant joje operandų užimamas vietas, operacijos rezultatas nesikeičia. Nagrinėdami struktūrų algebros operacijas, sutiksime gana daug komutatyvių ir nekomutatyvių binarinių ir n-arinių struktūrų algebros operacijų pavyzdžių.

Pagal reikalavimus, kuriuos turi tenkinti tų operacijų operandai, struktūrų algebros operacijas galima suskirstyti į **bendrašias** ir **specialiąsias**. Pirmųjų operacijų operandais gali būti bet kokios struktūros (bet kokie grafai bei orgrafai, multigrafai, pseudografai, bet kokios matricos), jų elementai ir ryšiai tarp jų. Specialiųjų operacijų operandai turi tenkinti tam tikrus reikalavimus, būdingus toms operacijoms. Nagrinėdami struktūrų algebros operacijas, sekančiuose skyreliuose sutiksime ir bendrųjų ir specialiųjų operacijų pavyzdžių, o taip pat įsitikinsime, jog ir šis struktūrų algebros operacijų skirstymas į klases yra sąlyginis: modifikavus kai kurių sąvokų apibrėžimus ir tokiu būdu išplėtus jų apimtį, pavyksta kai kurias specialiąsias operacijas apibendrinti, paverčiant jas bendrosiomis, o kai kuriais atvejais, pasirodo, besą tikslingu, įsivesti papildomus apribojimus ir nagrinėti specialius bendrųjų operacijų vykdymo atvejus.

Struktūrų algebros operacijas galima skirstyti į **logines** ir **kiekybines (aritmetines)**.

Loginių operacijų operandai ir rezultatai – tai struktūrų matematiniai modeliai loginėje stratoje, vaizduojantys tik ryšių tarp elementų buvimo ar nebuvimo faktą ir neteikiantys jokios kitokios informacijos apie tuos ryšius. Matricinė tokių modelių išraiška – matricos, sudarytos iš vienetukų ir nulių. Vykdam struktūrų algebros logines operacijas, su tais vienetukais ir nuliais vykdomos atitinkamos loginės operacijos (disjunkcija, konjunkcija, neigimas) ir rezultate gaunama loginė matrica, sudaryta vėl iš vienetukų ir nulių.

Aritmetinės struktūrų algebros operacijos operuoja su skaitmeninėmis matricomis, kurių elementai – sveiki ar trupmeniniai skaičiai, charakterizuojantys ryšius tarp atitinkamų elementų (ryšių intensyvumą, tikimybę, kainą, veikimo laiką, elementų bei posistemių kiekį kitų sistemų sudėtyje ir t. t.). Vykdam aritmetines struktūrų algebros operacijas, vykdomi aritmetiniai veiksmai (sudėtis, atimtis, daugyba) su minėtomis kiekybinėmis ryšių charakteristikomis ir gaunamos naujos skaitmeninės matricos – operacijų rezultatų matematiniai modeliai. Kiekybinėmis ryšių charakteristikomis gali būti ne tik skaičiai, bet ir matematiniai reiškiniai – termai, išreiškiami matematinėmis formulėmis, kurios įrašomos į matricų langelius. Tuomet, atliekant operacijas su struktūromis, atitinkamai veiksmai atliekami ne su skaičiais, o su formulėmis ir rezultatais taip pat gali būti ne tik skaičių, bet ir formulių matrica ar kokia nors sudėtinga formulė.

Kadangi loginės matricos gali būti interpretuotos kaip skaitmeninės ir su jomis gali būti vykdomos ne tik loginės, bet ir aritmetinės operacijos, o su skaitmeninėmis matricomis be specialių papildomų susitarimų loginės operacijos ne visuomet yra galimos (t. y. apibrėžtos), tai iš čia išplaukia, kad loginės operacijos (jei nėra specialių papildomų susitarimų) priklauso specialiųjų operacijų klasei (tačiau specialiais papildomais susitarimais kai kuriais atvejais gali būti išplėtos iki bendrųjų), o aritmetinės operacijos gali priklausyti kaip bendrųjų, taip ir specialiųjų struktūrų algebros operacijų klasėms.

Struktūrų algebroje yra ir tokių operacijų, kurios nepriklauso nei loginių, nei aritmetinių veiksmų su struktūras vaizduojančių matricų elementais aibėms. Tokios operacijos pavyzdys – elementų perstatymo (transpozicijos) operacija. Jos rezultatas – struktūra, izomorfinė operandui, ir skiriasi nuo jo tik tuo, kad kai kurie, o galbūt ir visi elementai pasikeitė vietomis. Ši operacija galima ir su loginėmis, ir su aritmetinėmis matricomis, tačiau jos metu jokios aritmetinės ir loginės operacijos su matricos elementais nevykdomos. Tai – **keitinių algebros** operacija.

Galima laikyti, kad jokios operacijos su struktūras vaizduojančių matricų elementais nevykdomos ir tuomet, kai sistema, nekeičiant jos struktūros, perkeliama iš

vienos vietos į kitą. Tokias **struktūrų perkėlimo operacijas** galima būtų net nepriskirti prie struktūrų algebros operacijų aibės, nes jos nieko sistemų struktūrose nekeičia, bet mes vis dėlto panagrinėsime ir tokias operacijas, nes su jomis tenka susidurti nagrinėjant įvairias gana sudėtingas operacijas su struktūromis. Pavyzdžiui, nagrinėjant paveldimų savybių daugialąsčiuose organizmuose perdavimą iš motininiių ląstelių dukterinėms, tenka nagrinėti ne tik informacinių ribonukleino rūgščių (iRNR) (kurių molekulėse ribonukleotidai išsidėstę taip, kad atitinka dezoksiribonukleotidų išsidėstymą paveldimą informaciją saugojančiose dezoksiribonukleino rūgšties (DNR) molekulėse) sąveikavimą su ribosomomis, perduodant paveldimą informaciją, ne tik ribosominių RNR (rRNR) funkcionavimą, sintetinant iš aminorūgščių baltymus ta tvarka, kuri buvo užkoduota DNR molekulėse, bet ir transportinių RNR (tRNR), gabenančių aminorūgštis prie ribosomų, veiklą. Taigi, norint suprasti **paveldimos informacijos perdavimo sistemą** daugialąsčiuose organizmuose, tenka visus tris procesus – **replikaciją, transkripciją ir transliaciją – nagrinėti kartu.**

Be to, kaip matėme nagrinėdami **erdvinės izomerijos reiškinių** 1.9.1.3. skyrelyje, **keičiant elemento padėtį kitų elementų atžvilgiu gali keistis sistemos savybės.** Reiškia, keičiasi ir sistemos struktūra.

Norint išsiaiškinti struktūrų simetrijos elementų bei galimų plokščiųjų ir erdviniių struktūrų grupes, tenka nagrinėti ir **standžiuosius judesius**, atrodo, lyg ir nekeičiančius sistemų struktūras. Galimos ir įvairios **struktūrų deformacijos** operacijos, kurias būtina priskirti prie operacijų su struktūromis..

Struktūrų algebros operacijas pagal gaunamų rezultatų charakterį galima suskirstyti į **paprastąsias** ir **generuojančias**. Jei vykdant operaciją, struktūrose neatsiranda naujų elementų, o gali keistis tik ryšiai tarp jau egzistuojančių elementų, tai tokią operaciją vadinsime paprasta. Generuojančiose operacijose atsiranda naujų elementų, netgi gali atsitikti taip, kad išnyks visi generuojančios operacijos operandų senieji elementai ir vietoj jų operacijos rezultate atsiras visiškai nauji elementai. Generuojančių operacijų pavyzdžiai: struktūrų dekartinės daugybos, dekartinės kompozicijos, dekartinės konjunkcijos, dekartinės disjunkcijos, dekartinės sudėties, grafų karūnos sudarymo operacijos. Su šiomis operacijomis susidursime šiek tiek vėliau.

Struktūrų algebros operacijų aibėje galima ir tikslinga išskirti taip pat tiesinių ir netiesinių operacijų poaibius.

Tiesinėms struktūrų algebros operacijoms galioja struktūrų elementų ir jų tarpusavio ryšių kiekių **tvermės dėsnis**: operacijos rezultatai turi tiek pat elementų ir ryšių, kiek jų turėjo visi operacijoje dalyvavę operandai paimti kartu.

Tiesinės operacijos pavyzdys – struktūrų sąsajos operacija (žiūr. 1.9.2.21.1 skyrelį). Struktūrų perkėlimo operacijos, nagrinėjamos 1.9.2.1 skyrelyje – taip pat tiesinės operacijos.

Tiesinės operacijos, kaip jau buvo minėta, charakterizuoja **nulinė emerđencija**.

Netiesinių opracijų metu atsiranda naujų tarpelementinių ryšių ir gali atsirasti net naujų elementų. Todėl tas operacijas charakterizuoja didesnis ar mažesnis **emerđencijos pasireiškimas**.

Netiesinių operacijų pavyzdžiai: anksčiau minėtosios generuojančios operacijos, taip pat dauguma struktūrų jungimo operacijų (žiūr. pavyzdžiui, 1.9.2.21.2, 1.9.2.21.3, 1.9.2.21.4) ir t. t.

Sistemotyros mokslui aktualesnės yra netiesinės operacijos, tačiau jų aparatas dar nėra pakankamai išvystytas, kai tuo tarpu tiesinėms operacijoms egzistuoja pakankamai gerai išvystytas matematinis aparatas ir atitinkama programinė įranga, leidžianti kompiuterizuoti tokių operacijų atlikimą.

Tai ir yra pagrindinė priežastis, dėl kurios tiesinės operacijos išskiriamos į atskirą poaibį.

Pereisime prie konkretaus struktūrų algebros kai kurių operacijų aprašymo. Pradėsime nuo struktūrų perkėlimo operacijų, kurių metu, keičiasi tik struktūrų padėtis erdvėje, bet nesikeičia pačios struktūros, išlikdamos izomorfiškomis pačioms sau. Po to išnagrinėsime kai kurias elementines operacijas ir pereisime prie operacijų su struktūromis. Išnagrinėję paprastųjų loginių ir kiekybinių operacijų pavyzdžius, struktūrų algebros operacijų aprašymą baigsime generuojančių operacijų pavyzdžiais.

Aprašysime ir kai kurių **operacijų taikymo galimybes**.

1.9.2.1. Struktūros perkėlimo operacijos

Pradžioje nagrinėsime **plokščiųjų struktūrų perkėlimo plokštumoje operacijas**, kurias vykdant struktūra išlieka izomorfiška (t. y. atstumai tarp struktūros elementų išlieka tie patys ir nesikeičia kampai tarp tiesių, jungiančių struktūros elementus).

Judesiai, kuriais naudojantis keičiama sistemos padėtis erdvėje, nekeičiant jos struktūros, kaip jau minėjome 1.9.1. poskyryje, vadinami **standžiais judesiais**.

Kad plokščias objektas būtų perkeltas į bet kurią plokštumos vietą, jo nedeformuojant ir nekeičiant ryšių orientacijos jame, t. y. jo neapverčiant plokštumoje kita puse, pakanka dviejų standžiųjų judesių: objekto **posūkio** plokštumoje aplink plokštumos tašką, kurį vadinsime **posūkio centru**, ir kokiu nors **kampu** objekto **lygiagretaus postūmio** plokštumoje kuria nors **kryptimi** kokiu nors **atstumu**.

Irodysime tai.

Tarkime, jog mums reikia trikampį $A_1B_1C_1$, gulintį plokštumoje, perkelti į kitą plokštumos vietą taip, kad jis sutaptų su jam lygiu ir ta pačia kryptimi orientuotu trikampiu $A_2B_2C_2$ (žiūr. 111 pav.).

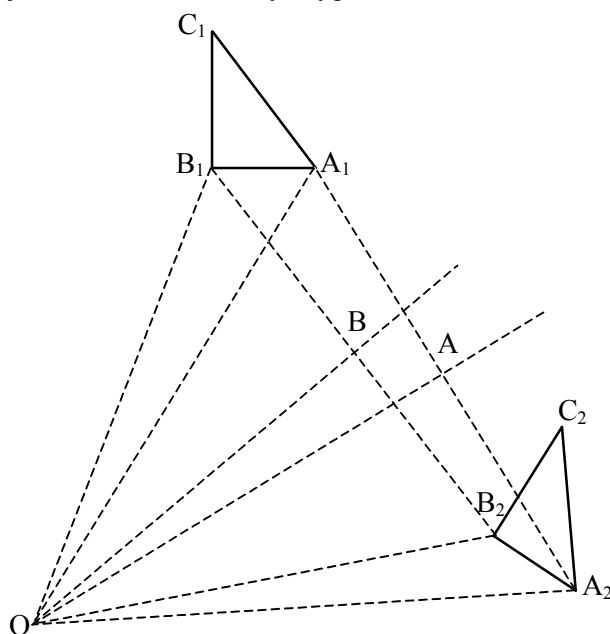
Sujungiame tų trikampių atitinkamas viršūnes, pavyzdžiui, A_1 ir A_2 , B_1 ir B_2 , atkarpomis A_1A_2 , B_1B_2 , ir randame tų atkarpų vidurio taškus, kuriuos pažymime A ir B .

Per tašką A pravedame tiesę, statmeną atkarpai A_1A_2 , o per tašką B – tiesę, statmeną atkarpai B_1B_2 .

Pradžioje išnagrinėsime atvejį, pavaizduotą 111 pav., kai tie statmenys nėra lygiagretūs. Tuomet jie būtinai susikirs kuriame nors plokštumos taške. Pažymėsime tą tašką raide O ir įrodysime, kad tas taškas yra posūkio centras, aplink kurį sukančią trikampį $A_1B_1C_1$, jį galima sutapatinti su trikampiu $A_2B_2C_2$, t. y. trikampį $A_1B_1C_1$ perkelti į padėtį $A_2B_2C_2$.

Sujungsime taškus A_1 , A_2 , B_1 , B_2 su tašku O . Kadangi $A_1A=AA_2$ ir $OA \perp A_1A_2$, tai $OA_1=OA_2$. Analogiškai gauname, jog $OB_1=OB_2$.

Kadangi $B_1A_1=B_2A_2$, nes tai to paties trikampio ta pati kraštinė, tik esanti kitoje padėtyje, tai $\triangle B_1OA_1=\triangle B_2OA_2$, nes jų atitinkamos kraštinės yra lygios. Todėl $\angle B_1OA_1=\angle B_2OA_2=\alpha$.



111 pav.

Pažymėsiu posūkio kampą, pervedantį tašką B_1 į padėtį B_2 , raide φ , t. y. $\angle B_1OB_2 = \varphi$.

$\varphi = \angle B_1OB_2 = \angle B_1OA_1 + \angle A_1OB_2 = \alpha + \angle A_1OB_2$, iš kur gauname, jog $\angle A_1OB_2 = \varphi - \alpha$.

$\angle A_1OA_2 = \angle A_1OB_2 + \angle B_2OA_2 = \varphi - \alpha + \alpha = \varphi$, t. y. gavome, jog trikampio viršūnė A_1 , patekdama į padėtį A_2 , pasisuko tuo pačiu kampu. Taigi atkarpa A_1B_1 buvo pasukta kampu φ ir sutapo su atkarpa A_2B_2 , nes, sutapus dviem tiesių taškams, sutampa ir abi tiesės.

Sutapus atkarpoms A_1B_1 ir A_2B_2 , sutaps ir tiesių B_1C_1 ir B_2C_2 kryptys, nes $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$ kaip to paties trikampio tie patys kampai.

Analogiškai gauname, jog sutaps ir tiesių A_1C_1 ir A_2C_2 kryptys, o todėl sutaps ir tiesių A_1C_1 ir A_1C_1 susikirtimo taškas C_1 su tiesių B_2C_2 ir A_2C_2 susidūrimo tašku C_2 .

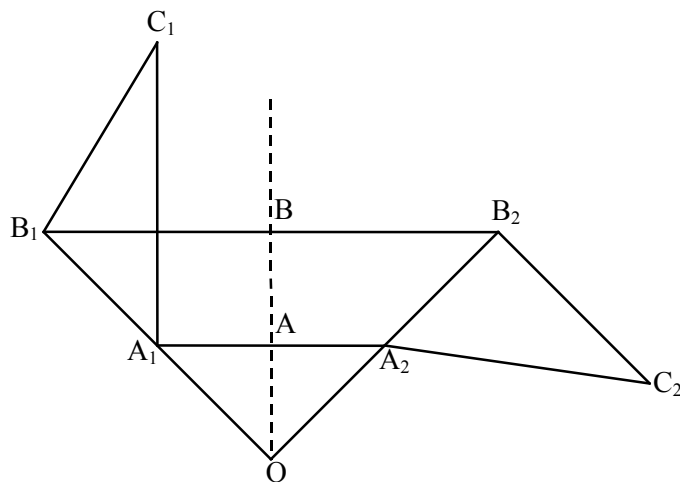
Tai ir rodo, jog pasukus trikampį $A_1B_1C_1$ aplink tašką O , esantį statmenų, pravestų per atkarpų A_1A_2 ir B_1B_2 vidurio taškus A ir B , susikirtimo tašką, jį galima sutapatinti su trikampiu $A_2B_2C_2$.

Galėjome aplink tašką O sukti ne tik trikampį, bet ir kokią nors sudėtingesnę figūrą. Rezultatą būtume gavę tą patį. Užtenka dviejų atkarpų A_1A_2 ir B_1B_2 , kad rastume posūkio centrą O ir posūkio kampą φ .

Tarkime dabar, kad statmenys, pravesti per atkarpų A_1A_2 ir B_1B_2 vidurio taškus A ir B , yra lygiagretūs.

Tuomet ir atkarpos A_1A_2 , B_1B_2 turi būti lygiagrečios. Kadangi $A_1B_1 = A_2B_2$, tai keturkampis $A_1B_1B_2A_2$ gali būti tik arba lygiašone trapecija, arba lygiagretainiu.

Išnagrinėsime pradžioje lygiašonės trapecijos atvejį (žiūr. 112 pav.)



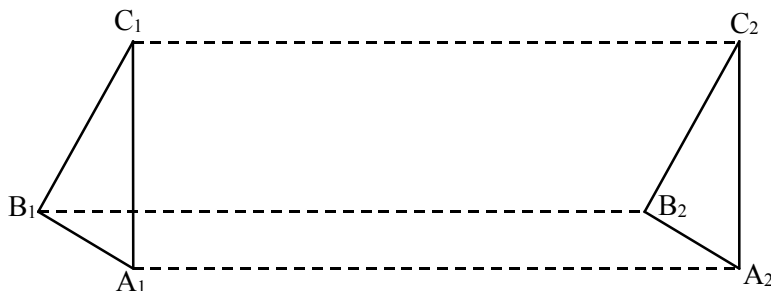
112 pav.

Pravedę tieses per atkarpas B_1A_1 ir B_2A_2 šiuo atveju būtinai gausime jų susikirtimo tašką O , kuris ir bus posūkio centras, o kampas A_1OA_2 – posūkio kampas φ . Tai įrodyti dar paprasčiau negu 111 pav., todėl tą įrodymą palieku skaitytojui.

Taigi, ir šiuo atveju trikampio perkėlimui plokštumoje pakanka posūkio.

Tarkime dabar, kad keturkampis $A_1B_1B_2A_2$ yra lygiagretainis (žiūr. 113 pav.)

Šiuo atveju neegzistuoja toks taškas O , kuris, būdamas baigtiniame nuotolyje nuo trikampių $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$, galėtų būti posūkio, sutapatinančio trikampį $A_1B_1C_1$ su trikampiu $A_2B_2C_2$, centru. Iš to išplaukia, jog **vien tik posūkių, perkeliant plokščius objektus, jų nedeformuojant, iš vienos vietos į kitą plokštumos vietą, nepakanka**. Reikalingas dar vienas standusis plokščias judesys – **lygiagretus postūmis**, kuris charakterizuojamas **postūmio kryptimi** ir **postūmio dydžiu**. Pastūmę trikampį $A_1B_1C_1$ taip, kad jo viršūnės $A_1B_1C_1$ judėtų lygiagrečiomis tiesėmis A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , praeidamos vienodus atstumus $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, jį sutapatinsime su trikampiu $A_2B_2C_2$.



113 pav.