

1.4. OBJEKTO IŠORINIS MODELIS

Objektų modeliai gali būti **išoriniai** ir **vidiniai**. Objekto O_i **išorinis modelis** $M_i^{(e)}$ aprašo objekto sąveiką su aplinka N_{O_i} ir leidžia, žinant objekto į eigą $\bar{x}_i$ ir jo būseną $\bar{z}_i$, rasti to objekto iš eigą $\bar{y}_i$ ir jo naują būseną, nenagrinėjant ir neaprašant objekto vidinės sudėties ir struktūros. Kai išorinis objekto aprašymas pateikiamas matematine kalba, tai išorinis modelis vadinamas **išoriniu matematiniu modeliu**. Išoriniai matematiniai modeliai gali būti sudarinėjami ne tik pavieniams objektams, bet ir iš jų sudarytoms sistemoms. Šios mokymosi priemonės 1.12. skyriuje bus pademonstruota, kaip sudėtingos sistemos vidinis matematinis modelis gali būti panaudotas jos išorinio matematinio modelio vaidmenyje. Apie sistemų vidinius modelius bei jų sudarymą bus kalbama 1.10. skyriuje.

Kad sudarytume objekto O_i **išorinį matematinį modelį** $M_i^{(e)}$, reikia:

1) **matematiškai aprašyti objekto kalendorių T**: nurodyti jo ribas (to pakanka tolydaus kalendoriaus atveju); jo ypatingus taškus – kalendoriaus taktų ribas (to pakanka diskretaus kalendoriaus atveju); mišraus kalendoriaus atveju turi būti nurodytos ir tolydumo atkarpų ribos, ir ypatingieji taškai;

2) **matematiškai aprašyti objekto į eigą (jos vektorių $\bar{x}$) ir į eigos erdvę X**: nurodyti tos erdvės koordinačių skaičių n ir kiekvienos koordinatės x_k kitimo diapazoną X_k (jo ribas, kai koordinatė x_k kinta tolydžiai, arba ypatingus taškus, kai x_k – diskrečiai kintantis dydis), taip pat tą konkretų realaus įėjimo proceso N_i parametą, kurį toji koordinatė x_k atitinka;

3) **matematiškai aprašyti objekto iš eigą (jos vektorių $\bar{y}$) ir iš eigos erdvę Y**: nurodyti tos erdvės koordinačių skaičių m ir kiekvienos koordinatės y_ℓ kitimo diapazoną Y_ℓ , taip pat tą konkretų realaus išėjimo proceso P_i parametą, kurį ta koordinatė y_ℓ atitinka;

4) **matematiškai aprašyti objekto būseną (jos vektorių $\bar{z}$) ir būsenų erdvę Z**: nurodyti tos erdvės koordinačių skaičių r (atsižvelgiant, kai reikia, ir į objekto priešistorę) bei kiekvienos koordinatės z_p kitimo diapazoną, taip pat tą konkretų realaus proceso H_i , vykstančio objekte O_i , parametą, kuris atitinka koordinatę z_p ;

5) **matematiškai aprašyti objekto perėjimą iš senos būsenos $\bar{z}(t)$ į naują būseną $\bar{z}(t + \Delta t)$** : sudaryti **perėjimų funkciją**, pavyzdžiui, $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{\Psi}(\bar{z}(t), \bar{x}(t))$

arba, naudojantis Lebegeo integralu, $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{z}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \bar{\psi}(\bar{z}(t), \bar{x}(t)) dt$, leidžiančią nustatyti naują objekto būseną $\bar{z}(t + \Delta t)$, žinant objekto į eigą $\bar{x}(t)$ ir tą pilnąją jo būseną $\bar{z}(t)$, kurioje objektas buvo į eigos $\bar{x}(t)$ gavimo momentu t^* ;

6) **matematiškai aprašyti objekto iš eigos $\bar{y}(t)$ priklausomybę nuo į eigos $\bar{x}(t)$ ir objekto būsenos $\bar{z}(t)$** : sudaryti objekto **išėjimų funkciją** $\bar{y} = \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{z})$.

* Tačiau tokia perėjimo funkcijos forma, tinka tik **stacionariems** objektams, kurių būsenos kitimo priklausomybė nuo objekto į eigos ir nuo pačios to objekto būsenos nesikeičia laikui bėgant. Norėdami, kad ši forma tiktų ir **nestacionariems** objektams, laiką t , kaip jau buvo minėta 1.3. skyriuje, galima laikyti dar viena vektoriaus $\bar{z}$ koordinate. Tuomet šia forma galima išreikšti ir perėjimo bei išėjimo funkcijų (pačių funkcijų, o ne tik jų reikšmių) keitimąsi laikui bėgant. Pačios funkcijos tampa sudėtingesnės, bet bendroji perėjimo ir išėjimo funkcijų forma išlieka. Tik būsenų vektorius $\bar{z}$ pasipildo dar viena koordinate.

Aprašant įeigos, išeigos ir būsenų erdves tais atvejais, kai potencialios erdvės $\hat{X}=X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \times \dots \times X_n$, $\hat{Y}=Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_\ell \times \dots \times Y_m$ ir $\hat{Z}=Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_p \times \dots \times Z_r$ nesutampa su atitinkamomis realiomis erdvėmis X , Y ir Z , reikia nurodyti ne tik pavienių koordinačių x_k , y_ℓ ir z_p kitimo diapazonus X_k , Y_ℓ ir Z_p , bet ir pačias realias erdves X , Y ir Z , t. y. nurodyti realias tų erdvių ribas, arba aprašyti galimų įėjimo, išėjimo ir fazinių trajektorijų aibes $\{(X_{N_i})_T\}$, $\{(Y_P)_T\}$, $\{(Z_H)_T\}$.

Jei tose erdvėse yra kokie nors ypatingi taškai (pavyzdžiui, atitinkamų parametrų nominalinės ar kritinės reikšmės), tai reikia nurodyti ir tuos taškus arba tas ribas, kuriose gali kisti tų taškų koordinačių reikšmės (pvz.: nominalinė įtampa $U_{nom.}=220V \pm 10\%$, nominalinis dažnis $v=50Hz \pm 5\%$, medžiagos perėjimo iš kietos į skystąją ar dujų fazę temperatūros ir pan.).

Aprašant objekto perėjimus iš vienos būsenos į kitą, **perėjimų funkcijos, kai laikas t ir koordinatė z_p kinta diskrečiai, gali būti matematiškai išreikštos skirtuminėmis lygtimis** $z_p((k+1)T)=\Psi_p(\bar{x}(kT), \bar{z}(kT))$ (kartais $z_p((k+1)T)=\Psi_p(\bar{x}(k+1)T, \bar{z}(kT))$). Čia T – duotoji vieno takto trukmė, kurios metu objekte niekas nesikeičia, o k – takto numeris. Gana dažnai laiko matavimo vienetas pasirenkamas taip, kad jis būtų lygus vieno takto trukmei T . Tuomet skirtuminėse lygtyse vietoj „ T “ gali būti rašomas „1“, o lygtyse su vėlinimu vietoj vėlinimo (delsos) konstantos „ τ “ gali būti užrašoma to vėlinimo trukmė: „1“, „2“, „3“, ..., „ k “ ir pan. taktų.

Kai laikas t ir koordinatės z_p reikšmė kinta tolydžiai, tai skaliarinės perėjimų funkcijos, įeinančios į vektorinės perėjimo funkcijos sudėtį, gali būti išreiškiamos diferencialinėmis lygtimis $\frac{dz_p(t)}{dt} = f_p(\bar{x}(t), \bar{z}(t))$.

Kaip buvo minėta, naudojantis Lebegeo integralu, **galima sudaryti ir bendrąją skaliarinę perėjimo funkcijos formą** $z_p(t+\Delta t)=z_p(t)+\int_t^{t+\Delta t} f_p(\bar{x}(T), \bar{z}(T))dT$, **tinkančią ir tolydžiam, ir diskrečiam, ir mišriam kalendoriams.**

Taikydami matematinius metodus įvairių problemų sprendimui ir sudarinėdami probleminių situacijų bei tose situacijose dalyvaujančių objektų matematinius modelius, neretai susiduriame su situacijomis, kuriose nagrinėjamų problemų sprendimui būna aktualios ne visos aukščiau išvardintos išorinio matematinio modelio sudedamosios dalys. Pasitaiko ir objektų, neturinčių įėjimų ir išėjimų, o taip pat tokių objektų, kurių būsenos per nagrinėjamąjį laikotarpį praktiškai nepakinta ir todėl gali būti laikomos trivialiomis.

Tokiais atvejais nėra būtina sudarinėti **pilnus matematinius modelius** ir galima apsiriboti vieno ar kito tipo **daliniais modeliais**, turinčiais tik kai kurias „standartinio“ **išorinio matematinio modelio** dalis.

Pavyzdžiui, **baigtinių automatų teorijoje** nagrinėjami ne tik taip vadinamieji **$X \rightarrow Y$ modeliai**, bet ir **X bei Y modeliai**, kurių pirmieji sudaromi ir taikomi tada, kada nagrinėjamos problemos sprendimui nėra aktualūs ar reikšmingi automato poveikiai į aplinką, o antrieji, – kai galima nekreipti dėmesio į aplinkos poveikį automatu dėl to, kad tie poveikiai yra nereikšmingi ir mums šiuo atveju nėra svarbūs, o štai paties automato poveikis aplinkai mums yra svarbus ir todėl turi būti nagrinėjamas.

Gali būti sudarinėjami bei nagrinėjami ir tokie automatų modeliai, kurie automatų teorijoje vadinami **Z automatais**. Tokie modeliai kuriami, kai automatų sąveikavimas su jų aplinka mums nėra aktualus ir mus domina tik tai, kaip keičiasi automato būsena ir kaip ji įtakoja problemos sprendimą.

Dalinių matematinių modelių sudarymas ir nagrinėjimas yra paprastesnis už pilnųjų išorinių modelių sudarymą ir nagrinėjimą.

Pavyzdžiui, sudarant X automato išorinį matematinį modelį, neaprašinėjami jo išėjimai ir nesudarinėjama jo išėjimų funkcija. Pakanka jo įėjimų ir jo būsenos bei jų erdvių aprašymo ir perėjimų funkcijos sudarymo.

Sudarant Y automato išorinį matematinį modelį, tenka sudarinėti jo išėjimų ar perėjimų funkcijas, tačiau tos funkcijos būna paprastesnės, nes jų argumentai – tik automato būsenos vektoriaus

koordinatų reikšmės.

Sudarant Z automato išorinį matematinį modelį, apsiribojama tik jo kalendoriaus taktų T nustatymu ir automato būsenų erdvės Z aprašymu bei jo perėjimo funkcijos $\bar{z}((k + t)T) = \bar{\psi}(\bar{z}(kT))$ (arba $\bar{z}(T) = \bar{\psi}(\bar{z}(0))$) sudarymu.

Dalinių išorinių matematinio modelio sudarymas būdingas ne tik automatų teorijai, bet ir toms matematinėms teorijoms, kurios nagrinėja objektus, turinčius tolydų bei mišrų kalendorius,

Pavyzdžiui, teorinėje mechanikoje nagrinėjamas tipinis modelis, pavadintas **dinamine sistema**. Tai baigtinio laisvės laipsnių skaičiaus mechaninė sistema, judanti pagal klasikinės mechanikos dėsnius. Tokia sistema gali būti materialiuoju taškų ar kietųjų kūnų sistema, kurią bei kurios komponentės veikia baigtinis skaičius mechaninių jėgų, galinčių turėti įvairias kryptis, įvairius dydžius bei įvairius sukimo momentus. Kai tą sistemą veikiančios jėgos priklauso nuo pačios sistemos bei jos dalių padėties ir nuo tos sistemos bei jos dalių greičių, tai tas jėgas galima išreikšti kaip pačios sistemos būsenos koordinatų funkcijas ir tokią dinaminę sistemą laikyti Z sistema.

Konkretus tokios dinaminės sistemos pavyzdys – Saulės sistema, kurią sudaro pati Saulė ir aplink ją skriejančios planetos su savo palydovais, judančiais kosminėje erdvėje veikiant visuotinės tarpusavio traukos jėgoms, tiesiogiai proporcingoms tų sistemą sudarančių kūnų masėms ir atvirkščiai proporcingoms atstumų tarp tų kūnų masės centrų kvadratams. Tokios sistemos būseną $\bar{z}$ nusakoma jos komponentių masių centrų išdėstymu trimatėje Euklido erdvėje (tų centrų koordinatėmis) ir tų centrų judėjimo greičiais. Dinaminės sistemos komponentių padėtis ir judėjimo greičiai kiekvienu momentu priklauso nuo tų kūnų tarpusavio sąveikavimo jėgų ir kiekvienu momentu gali keistis, keičiantis sąveikaujančių judančių kūnų padėčiai ir dėl to keičiantis sąveikavimo jėgoms. Visos dinaminės sistemos poveikiai į savo išorinę aplinką bei tos aplinkos poveikiai į dinaminę sistemą klasikinėje dinaminio sistemų teorijoje iš viso nenagrinėjami, todėl **dinaminės sistemos matematinis modelis suvedamas į Z modelį, kuriame būsenos $\bar{z}$ koordinatėmis laikomos materialiuoju kūnų masių centrų koordinatės ir jų judėjimų greičių projekcijos į laisvai pasirenkamas koordinatų ašis.**

Todėl šios dinaminės sistemos matematinį modelį sudaro tik jos perėjimo funkcija $\frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{f}(\bar{z})$,

susidedanti iš $6n$ skaliarinių funkcijų $\frac{dz_p}{dt} = f_p(\bar{z})$, kur $p=1, 2, \dots, 6n$, o n – materialiuoju kūnų ar taškų, kurie sudaro dinaminę sistemą, skaičius.

Detaliau apie dinamines sistemas ir jų matematinius modelius bus kalbama šio skyriaus 1.4.9. skyrelyje, o čia aš apsiribosiu tik pastaba, kad **sistemų matematiniai modeliai gali turėti ne tik šio (1.4.) skyriaus pradžioje aprašytą „standartinę“ formą, bet ir kitokią, t. y. tokią, kaip dalinių automatų ar mechaninių dinaminio sistemų.**

Be taip vadinamų **sisteminių modelių**, kurių aibę sudaro objektų išoriniai ir sistemų vidiniai modeliai, egzistuoja ir **optimizaciniai modeliai**, susidedantys iš **tikslo funkcijų**, išreiškiančių optimalumo rodiklių priklausomybę nuo valdomųjų kintamųjų, ir **apribojimų**, apibrėžiančių valdomųjų kintamųjų leistino kitimo sritis.

Apie optimizacinius modelius, jų sudėtį, jų analizę ir taikymą bus kalbama šios mokymosi priemonės 1.15. skyriuje. Optimizaciniai modeliai sudaromi ir taikomi sudarant **normatyvinius modelius (projektus)**, apie kuriuos bus kalbama šio skyriaus 1.4.13. skyrelyje, o apie patį projektavimą – antrojoje šios mokymosi priemonės dalyje.

Išorinis matematinis objekto modelis leidžia matematiškai nagrinėti išorinį objekto funkcionavimą ir matematiniu būdu gauti tą funkcionavimą vaizduojančias trajektorijas (fazinę, išėjimų, funkcionavimo) ir jų portretus.

Kai mums reikalingos ne visos galimos, o tik **konkrečios objekto išorinės trajektorijos, tai reikia, kad papildomai būtų užduota:**

a) **pradinė objekto būsena $\bar{z}_0$** , atitinkanti **pradinį objekto funkcionavimo kalendoriaus T momentą t_0** (žinoma, ji reikalinga tik tada, kai objekto būsenų erdvė yra neišsigimusi, t. y. turi daugiau negu vieną tašką, nes kai objekto būsena triviali, tai jos ir žinoti nėra būtina);

b) konkreti **įėjimų trajektorija $\bar{x}(t)$** ar bent jos pradinė atkarpa $(X_N]_{t_0}^{t_k}$, kitaip tariant, vektorinė funkcija $\bar{x}(t)$, leidžianti nustatyti objekto įeigą $\bar{x}$ kiekvienam laiko momentui $t \in T$, arba diskretaus kalendoriaus T taškai $t_0, t_1, t_2, \dots$ ir įėjimų vektoriaus

$\vec{x}$ reikšmės (t. y. visų to vektoriaus koordinačių reikšmės) tuose taškuose: $\vec{x}(t_0)$, $\vec{x}(t_1)$, ...

Svarbu pažymėti, jog išėjimų ir perėjimų funkcijos $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$ bendruoju atveju yra **vektoriniai operatoriai** (todėl čia ir žymimi didžiosiomis raidėmis), transformuojantys įėjimų ir būsenų vektorių $\vec{x}(t)$ ir $\vec{z}(t)$ koordinačių reikšmes į išėjimų ir naujų būsenų vektorius $\vec{y}(t)$ ir $\vec{z}(t + \Delta t)$ (ar būsenų išvestinių $\frac{d\vec{z}(t)}{dt}$) koordinačių reikšmes.

Daliniais atvejais tie operatoriai gali tapti **paprastomis vektorinėmis funkcijomis** $\vec{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\vec{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p, \dots, \psi_r)$, $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p, \dots, f_r)$, o kartais – ir **skaliarinėmis funkcijomis** $y(t) = \varphi(x(t), z(t))$, $z(t + \Delta t) = \psi(x(t), z(t))$, $\frac{dz(t)}{dt} = f(x(t), z(t))$,

$$z(t + \Delta t) = z_p(t) + \int_t^{t+\Delta t} f_p(x(T), z(T)) dT.$$

Taip, pavyzdžiui, atsitinka, kai erdvės X , Y , Z yra vienmatės. Tačiau jei objekto išėjimai ir būsenos priklauso ne tik nuo momentinių įėjimų ir būsenų reikšmių, bet, pavyzdžiui, ir nuo jų kitimo greičių bei pagreičių, tai operatoriai $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$ bus jau ne paprastos vektorinės funkcijos, bet **diferencialiniai vektoriniai (kartais – skaliariniai) operatoriai**. Tokių operatorių klasei priklauso, pavyzdžiui, mums iš matematikos kurso žinomi „standartiniai“ operatoriai: Hamiltono operatorius $\vec{\nabla}$ („nabla“), $\vec{\text{rot}}$, $\vec{\text{grad}}$, div , Laplaso operatorius $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ ir t. t.

Aprašant sudėtingas sistemas, tenka sudarinėti ir žymiai sudėtingesnius diferencialinius (tame tarpe ne tik paprastus vektorinius, bet ir **tenzorinius**) operatorius. Jei objekto išėjimai ar naujos būsenos priklauso ne tik nuo dabartinių įėjimų ir būsenų, bet ir nuo to, kaip tos būsenos buvo pasiektos, t. y. nuo įėjimų bei būsenų, buvusių praėjusiu laiku, tai operatoriai $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$ tampa **integraliniais operatoriais**, o kartais ir mišriais – **integro-diferencialiniais operatoriais**. Baigtinių automatų su priešistore atveju tenka **formaliai išplėsti abstrakčią objekto „būsenos dabar“ sąvoką ir tą būseną vaizduojantį vektorių $\vec{z}(t)$, įtraukiant į to vektoriaus koordinačių sąrašą ne tik koordinates, vaizduojančias objekto tam tikrų vidinių charakteristikų reikšmes dabartiniu momentu, bet ir praėjusiais momentais, t. y. paverčiant būsenos vektorių $\vec{z}(t)$ vektoriumi, vaizduojančiu pilnąją (apibendrintąją) objekto būseną**. Tokių pavyzdžių skaitytojas galės rasti šios mokymosi priemonės antroje dalyje, o vieną pavyzdėlį – ir šio skyriaus 1.4.10. skyrelyje. Nagrinėjant tolydžias **vėluojančios argumento** perėjimo ir išėjimo funkcijas, tenka **išplėsti pradinį sąlygų sąvoką** ir įsivesti taip vadinamąją **pradinę funkciją**. Tokio atvejo pavyzdys pateiktas 1.4.11. skyrelyje.

Būsenos sąvoka, kaip jau buvo minėta 1.3. skyriuje, gali būti taip išplėsta ir apibendrinta, kad ji galėtų būti taikoma ir modeliuojant **nestacionarius objektus**, kurių išėjimo ir perėjimo funkcijos (t. y. pačios funkcijos $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$, o ne tik išėjimai $\vec{y}$ ir būsenos $\vec{z}$ bei jų išvestinės $\frac{d\vec{z}}{dt}$) keičiasi laikui bėgant, nes laiką t galima formaliai įtraukti į vektorių $\vec{z}$ kaip **papildomą to vektoriaus koordinatę** (pavyzdžiui, vietoj funkcijos $\vec{y}(t) = \vec{\Phi}(\vec{x}(t), \vec{z}(t), t)$, kurios forma yra „nestandartinė“, vartoti iš jos gaunamą funkciją $\vec{y}(t) = \vec{\Phi}^*(\vec{x}(t), \vec{z}^*(t))$, kuri, susitarus, jog $\vec{z}^*(t) = (\vec{z}(t), t)$, tampa „standartine“ išėjimo funkcija $\vec{\Phi}^*$).

Imitaciniuose objektų modeliuose išėjimo ir perėjimo funkcijų operatoriai $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$ gali tapti gana **sudėtingais operatoriais, aprašančiais objekto išėjimų ir naujų būsenų apskaičiavimo algoritmus**. Kitaip tariant, **operatoriai $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$ tampa kompiuterinėmis programomis**, kuriose informacija apie pradinę objekto būseną $\vec{z}(0)$ ir įėjimo vektoriaus $\vec{x}(t)$ koordinačių reikšmes keičia formalius tų programų parametrus į faktiškąsias vektorių $\vec{z}(0)$ ir $\vec{x}(t)$ koordinačių reikšmes, o po to tos programos apskaičiuoja vektorių $\vec{y}(t)$ ir $\vec{z}(t + \Delta t)$ koordinačių reikšmes, t. y. apskaičiuoja išėjimo ir fazinės trajektorijų taškų koordinačių reikšmes.

Apibendrinant tai, kas buvo pasakyta apie išėjimo ir perėjimo funkcijas, galima padaryti išvadą, kad **pačiu bendruoju atveju operatorius $\vec{\Phi}$, $\vec{\Psi}$, $\vec{F}$ galima laikyti algoritmais (kompiuterinių programų moduliais), leidžiančiais apskaičiuoti**

išėjimų ir fazines trajektorijas, žinant objekto pradinę būseną ir įėjimo trajektoriją (ar jos pradinę atkarpą bei pradinę funkciją).

Tie algoritmai gali būti ir gana paprasti, t. y. turėti paprastų vektorinių ar diferencialinių ir integralinių funkcijų $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{z})$, $\vec{z}(t + \Delta t) = \vec{\psi}(\vec{x}(t), \vec{z}(t))$, $\frac{d\vec{z}(t)}{dt} =$

$= \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{z}(t))$ bei $z(t + \Delta t) = z_p(t) + \int_t^{t+\Delta t} f_p(\vec{x}(T), \vec{z}(T)) dT$ formą, analiziškai išreiškiančią

išėjimų ir naujų būsenų ar jų išvestinių priklausomybę nuo senų būsenų ir įėjimų, ir gana sudėtingi, t. y. gali būti sudaryti iš daugelio paprastų operatorių, sujungtų įvairiais ryšiais (taip pat ir grįžtamaisiais, ne tik determinuotais, bet ir stochastiniais) į sekas, ciklus ir kitus junginius, sudarančius **sudėtingus tinklus – operatorių blokines schemas**, vaizduojančias objekto išėjimų ir naujų būsenų apskaičiavimo procesus, naudojantis informacija apie sistemos įėjimus ir dabar esančias bei anksčiau buvusias objekto būsenas.

Su tokiomis išėjimų ir perėjimų funkcijomis – kompiuterinėmis programomis – konkrečiai susidursime vėliau, kurdami sistemų **imitacinius modelius** (žiūr. 1.13. ir 1.14. skyrius, o taip pat antrąją šios mokymosi priemonės dalį).

Tačiau dauguma objektų, turinčių sudėtingus perėjimo ir išėjimo operatorius, yra sistemos, kurias galima dekomponuoti (skaidyti) į posistemius bei į jų elementus – paprastesnius objektus, turinčius paprastas perėjimo ir išėjimo funkcijas. Modeliuojant tokias sistemas, gana dažnai net nesistengiama iškart gauti jų išorinius matematinius modelius, bandant sudaryti tų sudėtingų sistemų perėjimų ir išėjimų funkcijas – sudėtingus operatorius, o sudaromi tik tų sistemų elementų išoriniai matematiniai modeliai, iš kurių po to konstruojamas visos sistemos **vidinis matematinis modelis**. Kaip tai daroma, aprašyta ir parodyta šios mokymosi priemonės 1.10. skyriuje.

Iš sistemos vidinio matematinio modelio, kaip bus parodyta 1.12. skyriuje, kartais pavyksta išvesti jos išorinį matematinį modelį, analiziškai išreiškiant naujų būsenų ir išėjimų priklausomybes nuo senųjų būsenų ir įėjimų, t. y. sudarant visos sistemos perėjimų ir išėjimų funkcijų (operatorių) analizes išraiškas. Tačiau gana dažnai to padaryti nepavyksta. Pavyzdžiui, jei išėjimų ir naujų būsenų priklausomybės nuo senųjų būsenų ir įėjimų yra stochastinės, ar jei sistemos viduje veikia grįžtamieji ryšiai bei vyksta emerđženciniai reiškiniai, tai aprašyti tas priklausomybes vienareikšmėmis analizinėmis funkcijomis yra neįmanoma ir galima tik modeliuoti (imituoti, generuoti) stochastinius išėjimų ir perėjimų formavimo procesus, t. y. modeliuoti sistemos vidinio modelio funkcionavimą, kaip tai aprašyta šios mokymosi priemonės 1.11., 1.13. ir 1.14. skyriuose. Tačiau ir tuomet **sistemos vidinį modelį gana dažnai galima vartoti jos išorinio modelio vaidmenyje**, apskaičiuojant sistemos išėjimų ir naujų būsenų reikšmes – sistemoje vykstančių vidinių procesų modeliavimo rezultatus. Kaip tai daroma, bus parodyta 1.12., 1.13. ir 1.14. skyriuose.

Taigi sudėtingų perėjimo bei išėjimo operatorių konstravimo ir sudėtingų išorinių matematinių modelių kūrimo gana dažnai (išskyrus atvejus, kada sistemoje dominuoja netiesiniai rekursiniai ryšiai ir iš sistemos **morfologinio modelio** vienareikšmiai neišplaukia jos **funkcinis modelis***) galima išvengti ir pakanka mokėti sudarinėti paprastų objektų paprastus išorinius matematinius modelius ir po to iš jų konstruoti sudėtingų sistemų vidinius matematinius modelius, jungiant išorinius matematinius modelius į sistemos struktūrą įvairiais, taip pat ir grįžtamaisiais, ryšiais.

Todėl mes šiame skyriuje ir apsiribosime tik tokių paprastų išorinių matematinių modelių, kurių perėjimo ir išėjimo operatoriai yra paprastos funkcijos, pavyzdžiais. Šiame skyriuje sudarysime išorinius matematinius modelius tokių paprastų objektų kaip dvejetainis vienaskiltis sumatorius, turintis tris įėjimus, nuoseklaus veikimo dvejetainis sumatorius, diferencijavimo grandelė, paprasta hidrodinaminė sistema su idealiu skysčiu, medžiagų sandėlis įmonėje, baigtiniai determinuoti automatai, klasikinė ir neklasikinė dinaminės sistemos, elektromagnetinių virpesių kontūras, Tiūringo mašina ir kiti panašūs objektai.

Pavyzdžiui, naudodamiesi elementariomis fizikos žiniomis, sudarysime diferencijavimo grandelės išorinį matematinį modelį, o po to, naudodamiesi tuo

* Apie morfologinį ir funkcinį modelius šiame skyriuje bus kalbama šiek tiek vėliau.

modelių, apskaičiuosime grandelės išorines išėjimo ir fazinę trajektorijas, atitinkančias duotąją pradinę būseną ir duotąją įėjimo trajektoriją. Panašius išorinių trajektorijų (jų atkarpų) apskaičiavimus padarysime ir naudodamiesi hidrodinaminės sistemos bei Tiūringo mašinos išoriniais matematiniais modeliais. Kai kurių kitų objektų trajektorijas apskaičiuosime ir analizuosime specialiai trajektorijų nagrinėjimui skirtame 1.11. skyriuje. Ten bus apskaičiuojamos ir analizuojamos ne tik išorinės, bet ir sistemų vidinės trajektorijos, o taip pat bus nagrinėjami trajektorijų apskaičiavimui skirti specialūs metodai (**perdavimo funkcijų, perėjimo charakteristikų** ir pan.).

Sudėtingesni išoriniai matematiniai modeliai (tame tarpe ir **netiesiniai** bei **kokybiniai**, kurie ypatingai domina sistemotyrą, nes ir pats **emerdžencijos reiškiny yra netiesinis ir kokybinis**) bus sudaromi ir nagrinėjami antroje šios mokymosi priemonės dalyje. Ten bus nagrinėjami ir tokie netiesiniai reiškiniai kaip **atraktoriai, bifurkacijos, solitonai** ir pan. Kai kurie **nekiekybiniai modeliai** bus nagrinėjami jau pirmojoje šios mokymosi priemonės dalyje (žiūr. 1.16. skyrių).

Nemažai įdomių matematinių modelių, aprašančių įvairius objektus ir procesus, skaitytojas gali rasti specialiai studentams skirtoje knygoje [31], kurioje surinkti įvairių autorių straipsniai, nagrinėjantys labai įvairias sritis bei sistemas: techniką, fiziką, chemiją, biologiją, mediciną, transportą, didelę ir sudėtingą gamybinę įmonę bei jos valdymo sistemą, mokymosi įstaigos valdymą, karines strategijas, srautus tinkluose, urbanistinę sistemą, katastrofų teoriją. Šioje knygoje stengiamasi parodyti, kaip reikia kurti įvairių objektų bei procesų matematinius modelius, kad juos būtų galima pritaikyti praktikoje bei įvairiuose moksluose. Šią knygą rekomenduočiau visiems studentams–matematikams, norintiems išmokyti taikyti matematiką praktikoje. Įdomių paprastų matematinių modelių skaitytojas gali rasti ir knygoje [32], kurią naudinga studijuoti kartu su knyga [45].

Tais atvejais, kai aprašomas objektas yra toks sudėtingas, kad jo aprašymą nepavyksta išsprauti į formalizuotą matematinio modelio formą, apsiribojama kita **informacinių plačiąja prasme** modelių forma – informaciniais nematematiniais (žodiniais) modeliais, kitaip dar vadinamais **verbaliniais**. Vieno tokio modelio pavyzdys pateikiamas ir šiame skyriuje. Tai normatyvinis informacinis pareigybės modelis – ekonomistės – deklaratės pareigybinis pasas (žiūr. 1.4.13.2. skyrelį).

Norėtusi ypač pabrėžti informacinių modelių (ir tame tarpe – matematinių modelių) svarbą praktinėje žmonių veikloje, įvairiuose moksluose ir, bendrai, tikrovės pažinimo procesuose. Juk neturėdami objektų ir procesų modelių, mes negalėtume nei tikslingai naudotis sudėtingais objektais ir procesais, nei bandyti nukreipti vykstančių įvykių eigą mums pageidautina linkme. Sudėtinguose objektuose ir procesuose mes tiesiog susipainiotume.

Kartu reiktų pažymėti ir tuos gana rimtus sunkumus, kuriuos tenka įveikti bandant sudaryti pakankamai gerus ir naudingus objektų informacinius bei matematinius modelius, bei apžvelgti kai kuriuos tų sunkumų įveikimo kelius ir modelių rūšis bei lygius, modelių vietą ir vaidmenį gyvenime ir moksle.

Sisteminio požiūriu kiekvienas mūsų nustatytas dėsnius, kiekvienas mokslas yra tam tikras tikrovės modelis, vaizduojantis (modeliuojantis) tą tikrovę tam tikru aspektu ir leidžiantis analizuoti ir prognozuoti vykstančius ir įvyksiančius įvykius bei procesus su tam tikru tikslumu bei tikimybe tam tikrame laiko ir erdvės diapazone.

Kokio nors objekto aprašymas ar mūsų sąmonėje susidarantis jo įvaizdis – tai irgi to objekto modelis (percepcinis, koncepcinis, verbalinis, informacinis siaurąja prasme, matematinis), atspindintis to objekto mums šiuo metu svarbių savybių grupę ir mums svarbius santykius, egzistuojančius to objekto viduje bei jo sąveikavime su išore ir nusakančius su tam tikru tikslumu ir tikimybe objekto reakciją į aplinkos poveikius.

Mąstydami apie kokį nors objektą, apgalvodami jo panaudojimo galimybes, mes visada operuojame ne pačiu objektu, o jo **koncepciniu modeliu** – objekto sąvoka,

susidarančia mūsų sąmonėje, apdorojant informaciją, ateinančią į mūsų nervų sistemą per mūsų jutimo organus*.

Gana dažnai tas mintis, kurios sudaro objekto koncepcinį modelį, mums tenka išreikšti žodžiais ar raštu ir tokiu būdu kurti objekto **verbalinį modelį**. Kai kurių objektų koncepciniai modeliai sudaro mūsų sąmonėje ne stebint realius objektus, o nagrinėjant kitų žmonių sukurtus verbalinius modelius. Tuomet informaciją, reikalingą objekto koncepcinio modelio sudarymui, gauname jau ne iš **pirmosios**, o iš **antrosios signalinės sistemos**: vietoj tiesioginių pojūčių – **pirminių signalų** – sąmonė vartoja **antrinius signalus** – žodžius ir sakinius – pirminių signalų sutartinius žymenis (ženklus). Pats koncepcinis modelis, kai tam objektui, kurį privalo tas modelis vaizduoti, suteikiamas vardas, tampa to vardo – antrinio signalo – prasminiu turiniu, sąvokos, kuria žymi tas vardas reikšme ir prasme.

Neretai, ypač kai objektas yra sudėtingesnis, jo koncepcinį modelį susidaryti pavyksta neiškart. Kai, tiriant tą objektą, tenka matuoti bei kitaip vertinti jo savybes ir egzistuojančius objekte bei jo sąveikavime su aplinka santykius, būna tikslinga objekto stebėjimų ir jų metu įvykdytų matavimų rezultatus, vadinamus **duomenimis**, sistematizuoti, suvedant į lenteles, ir tokiu būdu kurti objekto **informacinį modelį siaurąja prasme**, kuris yra analogiškas verbaliniam, tačiau detalesnis, dažnai – objektyvesnis, platesnis ir sudėtingesnis, dėl to sunkiai beišreiškiamas įprastoje verbalinėje formoje. Tokie informaciniai modeliai ypač dažnai sudaromi tais atvejais, kai objekto stebėjime ir jo modelio sudaryme dalyvauja keletas stebėtojų, o patį informacinį modelį vartoja kiti žmonės. Tokio tipo modelių pavyzdžiu gali būti valstybinės statistinės tarnybos surenkamų statistinių duomenų lentelės apie tokius sudėtingus objektus kaip ūkio šakos, švietimas, demografinė ar socialinė situacija šalyje ir pan.

Kartais pavyksta objekte ir jo sąveikavime su aplinka egzistuojančius santykius, tame tarpe ir santykius tarp objekto savybių bei jų įverčių, išreikšti matematine kalba. Tuomet mes gauname objekto **matematinį modelį** – tokią nagrinėjamo objekto aprašymo formą, su kuria gali gana efektyviai operuoti ne tik mūsų sąmonė, bet ir kompiuteriai. Viena paprasčiausių objekto matematinio modelio rūšių kaip tik ir yra determinuoto objekto išorinis matematinis modelis, kurį mes dabar šiame skyriuje ir nagrinėjame. Tačiau matematiniai modeliai gali būti ne tik determinuoti, bet ir stochastiniai, ir net neapibrėžtiniai. Tokius modelius mes nagrinėsime 1.14. ir 1.16. šios mokymosi priemonės skyriuose.

Kelias nuo objekto stebėjimų iki jo matematinio modelio sudarymo, einantis per informacijos rinkimą ir jos loginį bei statistinį apdorojimą, hipotezių kėlimą ir jų tikrinimą, koncepcinių, verbalinių ir informacinių siaurąja prasme modelių sudarymą, per iteracinį modelių tikslinimo procesą, nėra lengvas ir neretai būna gana ilgas ir vingiuotas.

Gana dažnai tenka ilgai ir įvairiai operuoti su pačiu objektu, atlikti eilę natūrinių eksperimentų (pasyviųjų ir aktyviųjų), kol pavyksta surinkti pakankamai daug reikalingos informacijos, pastebėti ir išsiaiškinti pakankamai daug egzistuojančių priklausomybių bei dėsningumų, kad galų gale, būtų gautas pakankamai adekvatus ir praktiškai naudingas objekto matematinis modelis.

Kelias nuo objekto ar proceso stebėjimų iki jų matematinio modelio sudarymo ne visada eina čia ką tik pažymėta “standartine” grandine. Neretai informaciniai modeliai sudaromi anksčiau negu pavyksta suformuoti pakankamai adekvačius koncepcinius modelius, o **ekonometriniai matematiniai modeliai** gali būti gauti iš

* Kaip jau buvo minėta 1.1. skyriuje, konkrečios sąvokos formuojasi apibendrinant konkrečių esybių **percepcinius modelius**. Abstrakčios sąvokos formuojasi mūsų sąmonėje apdorojant bei apibendrinant **abstrahavimo operacijas**, apie kurią bus kalbama 1.5. skyriuje, rezultatus.

statistinių informacinių modelių net neturint patenkinamo koncepcinio modelio. Tik **kauzaliųjų** (nuo žodžio „causa“ reiškiančio „priežastį“) matematinių modelių sudarymui būtinai reikalinga turėti pakankamai kokybišką koncepcinį modelį, atspindintį priežastinius ryšius, veikiančius nagrinėjamame objekte.

Patys gi informaciniai modeliai (interpretuojant informacinio modelio sąvoką plačiąja prasme) gali turėti ne tik lentelinę, verbalinę bei matematinę **analizinę** ar **algoritmą**, bet ir **grafinę formą**. Grafiniai modeliai savo ruožtu gali būti ne tik **statiniai** (fotografijos, piešiniai, brėžiniai, schemas), bet ir **dinaminiai** (pavyzdžiui, filmai, vaizduojantys nagrinėjamąjį procesą natūraliu, pagreitinu, ar sulėtintu tempu, natūraliame, padidintame ar sumažintame mastelyje). Naudojantis **multimedia** priemonėmis, galima kurti **kompleksinius informacinius modelius**, kuriuose gali būti sujungtos įvairios viena kitą papildančios vaizdavimo priemonės: ir skaičių lentelės, ir įvairios diagramos, ir įvairūs (ne tik plokšti, bet ir erdviniai) grafikai, ir matematinės formulės, ir įvairūs (tame tarpe ir judantys) vaizdai („animacija“), ir įvairūs garsai, tame tarpe modelio vartotojo dėmesį atkreipiantys bei suteikiantys atitinkamą „toną“ garsiniai ir šviesos „efektai“, ir t. t.

Šiuolaikinė kompiuterinė technika ir jos programinė įranga (pavyzdžiui, paketai MAPLE, MATHCAD ir pan.) leidžia **operuoti su matematiniais modeliais ne tik skaitmeninėje, bet ir simbolinėje formoje**, o taip pat **operuoti su grafikais**, vaizduojančiais procesus, bei su sudėtingų sistemų schemomis ir brėžiniais. Visa tai žymiai palengvina **kompiuterinę informacinių (tame tarpe – ir matematinių) modelių analizę**, praplečia jos galimybes.

Sudarant objektų bei procesų matematinius modelius, egzistuojančių dėsningumų suradimas ir jų matematinis išreiškimas reikalauja ne tik gero matematikos bei tos srities, kuriai priklauso modeliuojamas objektas ar procesas, žinojimo, bet ir nemažai išradingumo.

Išvedant formules, naudinga pasitelkti ne tik specialias žinias, pastabumą ir euristiką, bet ir formalų algebros aparatą, kuris kartais leidžia beveik automatiškai „pagauti“ ne visada lengvai pastebimus dėsningumus, nenagrinėjant ar beveik nenagrinėjant sudėtingų priežastinių ryšių.

Pavyzdžiui, norėdami išvesti formulę, išreiškiančią lėktuvo keliamosios jėgos F priklausomybę nuo lėktuvo greičio v , sparnų ploto S bei oro tankio ρ , mes gana pagrįstai galime priimti hipotezę, jog F turėtų būti proporcinga sandaugai $v^\alpha S^\beta \rho^\gamma$, kur α , β , γ – kol kas nenustatyti laipsnių rodikliai.

Atsižvelgdami į dydžių F , v , S ir ρ dimensijas, gauname lygybę $\frac{\text{cm} \cdot \text{g}}{\text{s}^2} = \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)^\alpha \cdot (\text{cm}^2)^\beta \cdot \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)^\gamma$, iš

kurių išplaukia lygtys: $\alpha + 2\beta - 3\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = 1$. Jas išsprendę, gauname formulę $F = C\rho Sv^2$, kur C – proporcingumo koeficientas, priklausantis nuo lėktuvo formos ir nustatomas fiziniiais bandymais aerodinaminiam vamzdyje.

Toks formulės gavimo būdas yra žymiai paprastesnis negu klasikinis jos išvedimas, besiremiantis energijos tvermės ir dujų dinamikos dėsniais.

Taikant čia ką tik demonstruotą **neapibrėžtųjų koeficientų metodą**, neretai pavyksta gauti formules, aprašančias gana sudėtingus procesus, ir tokiu būdu, pasitelkiant algebros aparatą, „išgaudyti“ nelengvai „pagaunamus“ dėsningumus. Jei skaitytoją sudomino šis metodas ir jis norėtų susipažinti su jo taikymo pavyzdžiais, tai šių eilučių autorius gali parekomenduoti jam savo straipsnelį [33] rinkinyje „Lietuvos matematikų draugijos XXXVIII konferencijos darbai“. Vilnius „Technika“ 1997, 155–162 p.

Sudarinėjant sudėtingų sistemų ir procesų išorinius matematinius modelius, neretai būna efektyvus **hipotezių kėlimo ir jų tikrinimo metodas**, sintezuojantis **indukcijos, intuicijos, euristikos** bei **dedukcijos** taikymą. Tokio metodo taikymo pavyzdys pateiktas šios mokymosi priemonės 1.13. skyriuje. Hipotezių tikrinimui gali būti naudojami ir eksperimentai su matematiniais modeliais.

Nagrinėjant objektų funkcionavimą ir tikrinant hipotezes gali būti naudojami ne tik informaciniai (plačiaja prasme*), bet ir **fiziniai modeliai**. Nagrinėjamo objekto ar proceso fiziniu modeliu gali būti tos pačios prigimties padidintas ar sumažintas objektas bei procesas, o taip pat izomorfiškas (žiūr. 1.8. skyrių) kitos prigimties objektas ar procesas.

Pavyzdžiui, kaip jau buvo minėta, mechaninius bei termodinaminius procesus galima modeliuoti elektrodinaminiais procesais (ir atvirkščiai). Šį modeliavimo principą naudoja **elektrinės ir elektroninės analoginės modeliavimo mašinos**, o taip pat **hibridinės (integralinės) skaičiavimo mašinos**. Elektroninės analoginės mašinos gali modeliuoti procesus **ne tik fizinio, bet ir matematinio modeliavimo pagrindu**, nes tose mašinose egzistuoja (arba modeliavimo metu gali būti sukurti) **specialūs blokai, modeliuojantys matematinės operacijas**: integravimą, diferencijavimą, sumavimą, daugybą, įvairias netiesines transformacijas. **Elektroninės skaitmeninės skaičiavimo mašinos (kompiuteriai)** gali modeliuoti įvairius procesus, realizuodamos tų procesų matematinius modelius – **algoritmus**, žinoma, jei pavyksta tuos algoritmus sudaryti ir išreikšti formalizuota kompiuteriui suprantama kalba – **algoritmine kalba**.

Apie automatizuotas matematinio modeliavimo ir eksperimentavimo su matematiniais modeliais sistemas bus kalbama vėlesniuose šios mokymosi priemonės skyriuose ir – ypatingai – antrojoje jos dalyje, kur bus nagrinėjamos įvairios matematinio modeliavimo sistemos. Su kai kuriomis iš jų (pavyzdžiui, su POWERSIM, GPSS) susidursime ir šioje mokymosi priemonėje.

Neretai pradinė pažintis su sudėtingu procesu ar objektu iššaukia sunkiai suprantamos netvarkos ar net visiškai nesuprantamo ir nepaaiškinamo chaoso išpūdį. Tik atkaklūs, tikslingai organizuoti ir pakankamai kruopštūs ir detalūs tyrimai leidžia palaipsniui pastebėti tam tikrą tvarką, struktūrą, dėsningumus, organizuotumą, priežastines priklausomybes, o tai ir priveda, galų gale, prie proceso ar objekto pakankamo suvokimo ir jo koncepcinio bei matematinio modelio sudarymo. Net ir pats chaosas, kaip rodo šiuolaikinės **chaoso teorijos**, tam tikrais atvejais gali atsirasti dėsningai ir vesti prie dėsningumais pasižyminčių struktūrų susidarymo.

Tačiau kartu su (pradžioje dar gana miglotu) tam tikros tvarkos, tam tikrų priklausomybių suvokimu atsiranda ir suvokimas (pradžioje taip pat gana miglotas), jog **reikia nustatyti ne tik dėsningumus, bet ir įvertinti chaotiškumo bei tikslumo laipsnį, įvertinti organizuotumo ir dezorganizacijos lygių santykį**.

Šį poreikį patenkinti pavyksta taip pat ne iškart. Tik gerai suvokus objekte ar procese veikiančius „mechanizmus“, nustačius egzistuojančias priklausomybes bei kitus dėsningumus, pavyksta giliau ir pilniau suprasti, kaip egzistuojantys chaotiškumas ir neapibrėžtumas bei mūsų žinių apie objektą nepilnumas atsilieps sudaryto matematinio modelio tikslumui, jo taikymo srities platumui.

Visa tai leidžia realiai įvertinti sudaryto matematinio modelio taikymo sritį ir sąlygas, nedaryti abejotinų išvadų, o taip pat tikslingiau pasirinkti tolesnių objekto tyrimų ir jo modelio tobulinimo kryptis ir būdus, suvokiant, kad paprastos determinuotos

* **Informaciniais modeliais plačiaja** prasme vadinsime kokio nors objekto ar proceso modelį, kuris pats ir jo sudėtinės dalys yra informacija, pateikta bet kurioje formoje: simbolinėje, grafinėje, verbalinėje (rašytinėje, garsinėje). Matematiniai modeliai irgi priklauso informacinių modelių plačiaja prasme klasei. Informaciniai modeliai skiriasi nuo fizinių modelių tuo, kad fiziniai modeliai modeliuoja modeliujamo objekto bei proceso savybes fiziškai, ir todėl objektas ir jo fizinis modelis yra kuria nors prasme fiziškai panašūs, o informaciniai modeliai modeliuoja objektus ir procesus simboliškai, ir todėl gali būti fiziškai visiškai nepanašūs į modeliujamus objektus ir procesus. Egzistuoja ir tokie modeliai, kurie turi bei gali turėti ir fizinių, ir informacinių modelių bruožų. Tokių modelių pavyzdžiais gali būti portretai, skulptūros, hieroglifai. Gali būti, kad hieroglifai buvo ta jungiančiąja grandimi, per kurią vyko **perėjimas nuo fizinių modelių prie modelių, sudarytų iš simbolių, – informacinių modelių siaurąja prasme** ir matematinių modelių.

perėjimų ir išėjimų funkcijos, panaudotos sudarant objekto determinuotą ir palyginti paprastą išorinį matematinį modelį, aprašytą šiame mokymosi priemonės skyriuje, dažnai yra tik gana artutinis objekte egzistuojančių priklausomybių aprašymas, dar nepakankamai atskleidžiantis objekto viduje veikiančius „mechanizmus“.

Toks suvokimas stimuliuoja tolesnius objekto tyrimus ir jo modelio (o kartais – ir paties objekto) iteracinį tobulinimą tokiomis kryptimis:

1) objekto vidinės sudėties ir struktūros nagrinėjimas, vedantis prie objekto kaip sistemos supratimo ir jo vidinio modelio sudarymo; jam skiriami 1.5., 1.6., 1.7., 1.8., 1.9., 1.10. ir 1.12. šios mokymosi priemonės skyriai;

2) tolesnis objekto išorinio funkcionavimo ir jo viduje vykstančių procesų nagrinėjimas ir modeliavimas, pasitelkiant natūrinius ir matematinius eksperimentus; jam skiriami 1.11. ir 1.13. skyriai, o taip pat šios mokymosi priemonės antrosios dalies skyriai, aprašantys imitacinio modeliavimo ir matematinio eksperimentavimo bei jų automatizavimo sistemas Foresterio dinaminių sistemų (FDS) funkcionavimui skirtą DYNAMO, POWERSIM, BAS, AIMS, GPSS ir kt.;

3) objekte vykstančių bei objektą veikiančių stochastinių ir kitų nepilnai apibrėžtų procesų statistinis nagrinėjimas ir modeliavimas, nagrinėjant ir aprašant ne tik kiekybinius, bet ir kokybinius (tame tarpe ir loginius) negriežtai apibrėžtus santykius, pasitelkiant ekspertus sudėtingų bei specifinių procesų, objektų, jų savybių ir santykių vertinimui, kuriant ir naudojant ekspertines kompiuterizuotas „kolektyvinio proto“ sistemas; jam skiriami 1.14. ir 1.16. skyriai, taip pat šios mokymosi priemonės antrosios dalies skyriai, aprašantys sudėtingas ir labai sudėtingas sistemas.

Kadangi objektai tiriami ne tik smalsumo dėlei, bet ir praktiniais tikslais, pavyzdžiui, norint juos patobulinti, projektuojant ir kuriant naujas sistemas, tobulinant jau veikiančias, tai, tiriant objektus, nagrinėjama ir tai, kuria kryptimi reikėtų keisti objekte egzistuojančius santykius, objekto sąveikavimą su aplinka, objekte vykstančius procesus ir objekto savybes, kad gautume mums labiau pageidautinus rezultatus. Sistemų tobulinimo (optimizavimo) bei jų stabilumo ir jautrumo analizės klausimams skirtas 1.15. skyrius, o sisteminio projektavimo bei to projektavimo automatizavimo metodams ir priemonėms – daugiau negu trečdalis šios mokymosi priemonės antrosios dalies skyrių.

Kai kurie autoriai (žiūr., pavyzdžiui [34]), kalbėdami apie sistemų modelius, išskiria tris jų rūšis: funkcinis, morfologinis ir „informacinius“ modelius.

Funkciniais modeliais jie vadina tokius modelius, kurie aprašo sistemos paskirtį bei jos vykdomas funkcijas, o taip pat sistemos funkcionavimą, pasireiškiantį kaip sistemos išėjimų gavimas iš jos įėjimų bei sistemos būsenos kitimas. Tokių funkcinio modelių sudaryme dominuojanti vaidmenį vaidina **teleologinė metodologija**, o **terminalinė metodologija** šiuo atveju tik patarnauja pirmajai, ją papildydama.

Morfologiniais modeliais vadinami modeliai, aprašantys sistemos vidinę sandarą, t. y. sistemos vidinę struktūrą bei sistemos dalių sąveikavimą.

Vaizdžiai tariant, morfologiniai modeliai aprašo sistemos „anatomiją“, o funkciniai – jos „fiziologiją“.

Funkcinio modelio sąvoka gana artima šioje mokymosi priemonėje vartojamai išorinio modelio sąvokai, nors ir skiriasi nuo jos ne tik jau minėtu savo „teleologiškumo“ akcentavimu, bet ir tuo, kad yra šiek tiek siauresnė savo apimtimi, nes neapima tų išorinių modelių, kuriuos knygos [34] autoriai priskiria prie „informacinių“. Morfologinio modelio sąvoką galima laikyti sutampančia su šioje mokymosi priemonėje vartojamo vidinio modelio sąvoka.

Funkcinis ir morfologinis modeliai vienas kitą papildo, nes ne visuomet vienas modelis gali pilnai pakeisti kitą. Pavyzdžiui, turėdami funkcinį modelį, mes ne visuomet galime vienareikšmiškai nustatyti sistemos sandarą ir gauti morfologinį modelį, nes vieną ir tą pačią funkciją galima aprašyti ekvivalenčiomis, bet skirtingą struktūrą turinčiomis formulėmis, o žinodami morfologinį modelį, mes ne visuomet galime iš jo „išvesti“ sistemos funkcijas bei suprasti, kaip sistema funkcionuoja.

Tais atvejais, kai nepavyksta išsiaiškinti sistemos morfologijos ar/ir nustatyti sistemos funkcijų bei jos funkcionavimo mechanizmų, knygos [34] autoriai siūlo tenkintis taip vadinamą „informacinių“

modelių sudarymu, kurie gaunami „juodosios dėžės“ metodu, nagrinėjant sistemos įėjimų ir išėjimų srautus ir bandant surasti tuos srautus rišančius dėsningumus. Šiuo metodu mes jau naudojomes 1.3. skyriuje, nagrinėdami determinuotų baigtinių automatų funkcionavimą.

Kadangi sistemos gana dažnai veikiamos didelio skaičiaus nepriklausomų bei mažai priklausomų poveikių, tai, taikant „juodosios dėžės“ metodą, dažniausiai pavyksta nustatyti išėjimų priklausomybę nuo įėjimų bei sistemos būsenų tik statistiškai t. y. gauti tokį sistemos modelį, kurį ekonominių sistemų tyrinėtojai pavadino **ekonometrinium**, nors šį metodą galima ir naudinga taikyti ne tik ekonometrijoje. Ekonometriniai modeliai sudaromi, naudojantis matematinės statistikos (koreliacinės, regresinės ir dispersinės analizės) metodais, ir nors ne visada galima garantuoti, kad jie atskleidžia ir vaizduoja sistemoje veikiančius tikruosius priežastinius ryšius, tačiau jie suteikia gana daug naudingos informacijos apie sistemą ir konkretizuoja hipotetinius analizinius modelius, pavyzdžiui, **matematinės ekonomikos modelius**, pakeisdami tų modelių dar neapibrėžtus koeficientus bei rodiklius konkrečiais skaičiais, surastais taikant matematinės statistikos metodus. Su ekonometriniais bei matematinės ekonomikos modeliais ir matematinės statistikos metodų taikymais matematiniam įvairių procesų modeliavime skaitytojas galės susipažinti 1.14. šios mokymosi priemonės skyriuje.

Kadangi, nagrinėjant sudėtingas sistemas, beveik neįmanoma sukurti pakankamai pilnus ir tikslius funkcinius bei morfologinius modelius, tai „informaciniai“ modeliai gali svariai papildyti pastaruosius, kompensuodami kai kuriuos jų trūkumus.

Pripažindami šitaip apibrėžtų funkcinių, morfologinių ir „informacinių“ modelių sąvokų naudingumą norint geriau suvokti modelių įvairovę bei atskirų modelių specifika, mes šioje mokymosi priemonėje vis dėlto nesinaudosime šiomis sąvokomis kaip pagrindinėmis, o naudosimės jau minėtomis išorinio ir vidinio modelio sąvokomis.

Taip darysime, visų pirma, todėl, kad pats sisteminių modelių dalinimas į funkcinius, morfologinius ir „informacinius“ yra logiškai šiek tiek ydingas, nes pažeidžia **klasifikavimo pagrindo (požymio) vienumo taisyklę** ir todėl, nežinant, koku būdu buvo gautas taip vadinamas „informacinis“ modelis, ne visada lengva atskirti jį, pavyzdžiui, nuo funkcinio modelio. Be to „juodosios dėžės“ metodą kartais galima taikyti ne tik visai sistemai, bet ir kai kurioms jos dalims, t. y. naudoti „informacinio“ modelio sudarymo technologiją morfologinio modelio sudarymui. Na, ir pats pavadinimas „informacinis“ modelis šiuo atveju nėra pakankamai vykęs, nes nei funkcinių, nei morfologinių modelių neįmanoma sudaryti, nesinaudojant informacija, o ir patys visi tie modeliai, naudojantis mūsų jau seniau priimtu modelių skirstymu į fizinius ir informacinius, pagrįstai gal būti priskirti prie informacinių modelių plačiąja prasme.

Yra ir antroji priežastis, kodėl buvo pasirinktas modelių skirstymas į išorinius ir vidinius: išorinių ir vidinių modelių sąvokos, būdamos gana artimos funkcinio ir morfologinio modelių sąvokoms, padengia jas ir tuo pačiu metu taip pat padengia ir tuos modelius, kuriuos knygos [34] autoriai vadino „informaciniais“, kadangi pastaruosius visuomet galima skirstyti į išorinius ir vidinius priklausomai nuo to, apie kokius procesus – išorinius ar vidinius – buvo renkama informacija „informacinio“ modelio sudarymui, kokios statistinės priklausomybės buvo nagrinėjamos. Žinoma „informaciniai“ modeliai šiuo atžvilgiu kartais gali būti ir mišrūs – dalinai išoriniai, dalinai – vidiniai. Tačiau juk, kaip jau buvo minėta, ir vidinį modelį kartais tenka naudoti ir vidinio, ir išorinio modelio vaidmenyje.

Po šios teorinės apžvalgos pereisime prie objektų išorinių matematinių modelių sudarymo pavyzdžių. Tai padės mums ne tik geriau suvokti objekto išorinio matematinio modelio esmę, bet ir išmokti tokius modelius sudarinėti bei juos taikyti.

1.4.1. Dvejetainis vienaskiltis sumatorius (DVS) (žiūr. 6 pav.) ir jo išorinis matematinis modelis

1. DVS kalendorius – diskretus ir gali būti kaip sinchroninis, taip ir asinchroninis.

2. DVS įėjimų erdvė X – trimatė ir kiekviena iš koordinačių x_1 , x_2 , ir x_3 turi diskrečius kitimo diapazonus, kurių kiekvienas susideda iš dviejų taškų, atitinkančių dvejetainius skaitmenis 0 ir 1. Tokiu būdu erdvė X susideda iš 8 taškų, kurių koordinačių reikšmės (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0),

(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1) yra nurodytos 1-osios lentelės eilutėse. DVS reali įėjimų erdvė X sutampa su potencialia įėjimų erdve $\hat{X}$.

3. DVS išėjimų erdvė Y – dvimatė, diskreti, susidedanti iš 4 taškų, kuriems atitinka išėjimo koordinatų y_2 ir y_1 reikšmės (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Erdvė Y sutampa su $\hat{Y}$.

4. DVS išėja vienareikšmiškai priklauso nuo jo įėjigos, todėl nėra prasmės nagrinėti klausimo apie DVS būsenų erdvę. Galima sakyti, kad **kombinacinė loginė sistema**, pavaizduota 6, 8 ir 9 pav. bei aprašyta 1-oje lentelėje, visą laiką yra vienoje ir toje pačioje nekintančioje būsenoje, t. y. kad jos būsenų erdvė yra „išsigimusi“ ir susideda tik iš vieno taško.

5. Kadangi DVS būseną nekinta, tai nėra prasmės kalbėti ir apie perėjimų funkciją. Galima sakyti, kad šiuo atveju perėjimų funkcija „išsigimusi“ į trivialią lygybę $z(1)=z(2)=\dots=z(t)=z^*=const.$, t. y. $z(t+\Delta t)=z(t)=const$.

6. DVS išėjimų funkcijos mūsų jau buvo gautos disjunktyvinėje normalinėje formoje (žiūr. 1.3. skyrių):

$$y_1 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3,$$

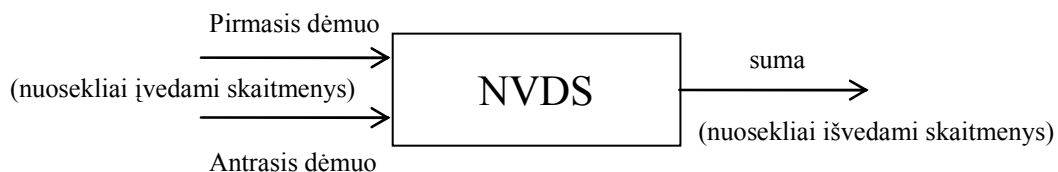
$$y_2 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Naudojantis jomis ir buvo sudarytos **kombinacinės loginės schemas**, realizuojančios šias funkcijas (žiūr. 8 ir 9 pav.). Jos vaizduoja vidinę DVS struktūrą ir yra sudedamosios DVS **vidinio modelio dalys**. Iš vienaskilčių DVS sudaromas **lygiagretaus veikimo n-skiltis dvejetainis sumatorius**. Jo vidinė struktūra vienaskilčių DVS lygyje pavaizduota 7 pav.

Prie vienaskilčio DVS schemas ir jos minimizavimo mes dar grįšime šios mokymosi priemonės 1.16.1.4.12. skyrelyje, nagrinėdami Bulio algebros funkcijų absoliutaus minimizavimo metodą, o apie lygiagretaus veikimo n-skilčio dvejetainio sumatoriaus **vidinį modelį** bus rašoma 1.10.4. skyrelyje.

1.4.2. Nuoseklaus veikimo dvejetainis sumatorius ir jo išorinis matematinis modelis

Lygiagretaus veikimo n-skiltį dvejetainį sumatorių, kai mums nėra būtinas labai didelis skaičiavimų greitis, o labai svarbu turėti kuo mažesnius įrenginio gabaritų bei svorį, galima pakeisti nuoseklaus veikimo dvejetainiu sumatoriumi (NVDS), turinčiu diskretų kalendorių, du įėjimus ir vieną išėjimą (žiūr. 19 pav.).



19 pav.

Šis sumatorius vadinamas dvejetainiu todėl, kad operuoja su skaičiais, išreikštais (užrašytais) dvejetainėje sistemoje, o „nuoseklaus veikimo“ todėl, kad **dvejetainiai dėmenys į jį įvedami ir jų suma yra išvedama nuosekliai: ženklas po ženklo, kiekviename takte įvedant tik po vieną kiekvieno dėmens dvejetainį ženklą**, pradedant nuo dvejetainių skaičių vienetukų skilties, juos sudedant tarpusavy bei su tuo, kas yra tuo metu sumatoriaus atmintyje, ir gauto rezultato „vienetuko“ reikšmę (ji gali būti 1 ir 0) išvedant kaip eilinį sumos y skaitmenį, o „dešimtuko“ (t. y. „dvejetuko“) reikšmę, kuri taip pat gali būti „0“ arba „1“, „išsimenant“ iki kito takto kaip NVDS būseną z .

NVDS skiriasi nuo 1.4.1. skyrelyje ką tik išnagrinėto DVS tuo, kad jis turi kintančią būseną z , galinčią turėti dvi reikšmes: 0 ir 1. Ši būseną – tai tam tikros schemas, vadinamos **trigeriu**, būseną. Ši būseną z momentu $t+1$ nuoseklaus veikimo sumatoriuje (NVDS) atlieka

14. lentelė

$z(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$y(t)$	$z(t+1)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

tą patį vaidmenį kaip ir išėjimas y_2 anksčiau nagrinėtajame DVS₃. Tai aiškiai matyti, palyginus NVDS visų galimų įėjimų, išėjimų ir perėjimų lentelę (žiūr. 14. lentelę) su 1-ja lentele, aprašančią DVS₃ visus galimus įėjimus ir išėjimus.

Iš tos lentelės gauname NVDS išėjimo funkciją:
 $y(t) = \bar{z}(t)\bar{x}_1(t)x_2(t) \vee \bar{z}(t)x_1(t)\bar{x}_2(t) \vee z(t)\bar{x}_1(t)\bar{x}_2(t) \vee z(t)x_1(t)x_2(t)$,
o taip pat ir perėjimo funkciją: $z(t+1) = \bar{z}(t)x_1(t)x_2(t) \vee z(t)\bar{x}_1(t)x_2(t) \vee \vee z(t)x_1(t)\bar{x}_2(t) \vee z(t)x_1(t)x_2(t) = x_1(t)x_2(t) \vee z(t)x_2(t) \vee z(t)x_1(t)$.

Pavyzdžiui, įvedę į NVDS dėmenis – dvejetainius skaičius $x_1=10011$ ir $x_2=01011$, reiškiančius 19 ir 11 dešimtainėje sistemoje,

gauname sumą $y=11110$, reiškiančią 30 dešimtainėje sistemoje.

Pirmajame NVDS veikimo takte, kai sumatoriaus būseną prieš prasidedant dviejų skaičių sudėties operacijai, dar buvo pradinė, t. y. $z(t_1)=z(0)=0$, $x_1(t_1)=1$ ir $x_2(t_1)=1$, gauname, jog $y(t_1)=0$, o $z(t_1+1)=z(t_2)=1$.

Antrajame takte, turėdami $z(t_2)=0$, $x_1(t_2)=1$ ir $x_2(t_2)=1$, gauname $y(t_2)=1$, o $z(t_2+1)=z(t_3)=1$.

Trečiajame takte, turėdami $z(t_3)=1$, $x_1(t_3)=0$ ir $x_2(t_3)=0$, gauname $y(t_3)=1$ ir $z(t_3+1)=z(t_4)=0$.

Ketvirtajame takte, turėdami $z(t_4)=0$, $x_1(t_4)=0$ ir $x_2(t_4)=1$, gauname $y(t_4)=1$ ir $z(t_4+1)=z(t_5)=0$.

Penktajame takte, turėdami $z(t_5)=0$, $x_1(t_5)=1$ ir $x_2(t_5)=0$, gauname $y(t_5)=1$ ir $z(t_5+1)=z(t_6)=0$.

Vienas po kito gaunami sumos skaitmenys $y(t_1)$, $y(t_2)$, $y(t_3)$, $y(t_4)$, $y(t_5)$ sudaro dvejetainių skaičių $y(t_5)y(t_4)y(t_3)y(t_2)y(t_1)=11110$ – dviejų dvejetainių dėmenų 10011 ir 01011 sumą.

Lygindami NVDS veikimą su LVDS, pavaizduoto 7 pav. ir aprašyto 1.3. skyriuje, veikimu bei schema, galime pastebėti, kad LVDS veikia greičiau, beveik iškart sudėdamas visus dviejų n -ženklų dvejetainių skaičių skaitmenis, kai tokių skaičių sudėjimui NVDS prireiktų n taktų. Tačiau NVDS galima gauti iš vieno DVS, sujungus jį su trigeriu, o n -skilčio LVDS pagaminimui reikia n dvejetainių vienaskilčių sumatorių. Todėl kompiuteriuose, kuriuose yra svarbu turėti kuo didesnę operacijų atlikimo greitį, tikslinga naudoti LVDS, o kalkuliatoriuose, kuriems yra svarbu jų gabaritai ir kaina – NVDS.

NVDS vidinio modelio sudarymą ir jo funkcionavimą nagrinėsime 1.10. ir 1.11. skyriuose (žiūr. 1.10.9. užduotį ir 1.11.3. skyrelį).

1.4.3. Diferencijavimo grandelė (žiūr. 17 pav.) ir jos išorinis matematinis modelis

1. Objekto kalendorius T – tolydus. Jį sudaro bet kuri laiko atkarpa, atitinkanti mūsų stebėjimų ir eksperimentų su grandele trukmę arba grandelės veikimo kokiam nors prietaise trukmę.

2. Įėjimų erdvė X – vienmatė, t. y. turi tik vieną koordinatę x , atitinkančią kokį nors esminį elektrinio signalo $x(t)$, parametą, pavyzdžiui, jo įtampą $u_{\text{įej.}}(t)$. Koordinatės x kitimo diapazonas X – atkarpa $[0, U_M]$, kur U_M – maksimali įtampa, kurią galima sudaryti tarp grandelės įėjimo kontaktų, nerizikuojant, kad kondensatorius C bus pramuštas ir rezistorius R bus sudegintas. Tos įtampos dydį galime rasti užrašytą ant kondensatoriaus korpuso (arba jo techniniame pase), o taip pat apskaičiuoti, žinant rezistoriaus varžą R ir jo galingumą N , pasirenkant mažiausią iš leistinų kondensatoriui ir varžai įtampos dydžių.

3. Išėjimų erdvė Y – taip pat vienmatė, ir jos koordinatė y gali būti išėjimo įtampa $u_{\text{išej.}}(t)$. Koordinatės y kitimo diapazonas teoriškai gali būti toks pat, kaip ir koordinatės x , ir priklauso nuo santykio tarp varžos R ir tos varžos, kurią grandelė „apkrauna“, t. y. nuo to objekto, kurio įėjimas sutampa su grandelės išėjimu, įėjimo varžos. Jei pažymėtume tą varžą R_e , tai koordinatės y kitimo

diapazonas būtų atkarpa $\left[0, U_M \frac{R_c}{R + R_c}\right]$.

4. Diferencijavimo grandelės veikimą galima aprašyti pirmos eilės diferencialine lygtimi, todėl grandelės būsenų erdvė Z – vienmatė. Koordinatės z reikšmė gali būti, pavyzdžiui, kondensatoriaus

įtampa u_c arba kondensatoriuje sukauptas krūvis $q=Cu_c$, o taip pat srovės stipris $i = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt}$

grandelėje. Jei pasirinktume $z=u_c$, tai būsenos koordinatės z kitimo diapazonas, kuris ir sudarys šiuo atveju visą būsenų erdvę Z , bus atkarpa $[0, U_M]$, t. y. priklausys nuo įėjimo x maksimalaus dydžio.

5. Jei, kaip jau buvo minėta, diferencijavimo grandelės būsenos koordinatė z pasirinktume įtampą u_c , tai perėjimų funkcija, aprašanti būsenos kitimo procesą, galėtų būti išreikšta diferencialine lygtimi $\frac{dz}{dt} = \frac{x-z}{RC}$, gaunama iš lygybių:

1) $z=u_c = \frac{q}{C}$, 2) $y=u_R=iR$, 3) $i = \frac{dq}{dt}$ ir 4) $x=u_{\text{įej.}}=u_c+u_R$, išplaukiančių iš: 1) kondensatoriaus

elektrinės talpos $C = \frac{q}{u}$ apibrėžimo, 2) Omo dėsnio $i = \frac{U}{R}$, 3) grandžių lygiagretaus jungimo savybės,

pasireiškiančios lygiagrečiai sujungtų grandžių elektrinės įtampos u vienodumu, dėl ko $y=u_R$, 4) elektros

srovės stiprio i apibrėžimo $i = \frac{dq}{dt}$, 5) Kirchhofo nustatyto elektros grandinių antrojo dėsnio, teigiančio,

jog nuosekliai jungiant grandines, jų įtampos susideda, dėl ko $u_{\text{įej.}}=u_c+u_R$.

Gauname: $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{u_R(t)}{R} = \frac{y(t)}{RC} = \frac{x(t)-z(t)}{RC}$.

Iš šios diferencialinės lygties galima gauti grandelės būsenos z kitimo dėsnį – fazinės trajektorijos lygtį. Pavyzdžiui, jei $x(t)=a=\text{const.}$ ir $z(0)=0$, tai gausime, kad $\frac{dz}{dt} = \frac{a-z}{RC}$, iš kur

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{dz}{z-a} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}, \quad \text{t. y. kad } z(t) = a \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Tai reiškia, kad nagrinėjamo atveju įtampa u_c eksponentiškai augs nuo $z(0)=0$ iki $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = a$, t. y. vyks kondensatoriaus pakrovimo procesas.

Bendruoju atveju, išsprendę tiesinę diferencialinę lygtį $\frac{dz(t)}{dt} + \frac{z(t)}{RC} = \frac{x(t)}{RC}$, gausime, kad $z(t) = z(0)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t x(t)e^{\frac{t}{RC}} dt$. Rekomenduočiau skaitytojui išsivesti šią formulę, t. y. išspręsti

tiesinę diferencialinę lygtį (žiūr. 1.4.5. užduotį). Jei išsiveddami šią formulę susidursite su sunkumais, tai perskaitykite šios mokymosi priemonės 1.11.1.1. skyrelį.

6. Išėjimų funkcija gaunama iš lygybės $x=u_{\text{įėj}}=u_c+u_R$, iš kur išplaukia $y(t)=x(t)-z(t)$.

Žinodami grandelės įėigą $x(t)$ ir jos būseną $z(t)$, mes galime kiekvienam momentui t apskaičiuoti grandelės išėigą $y(t)$.

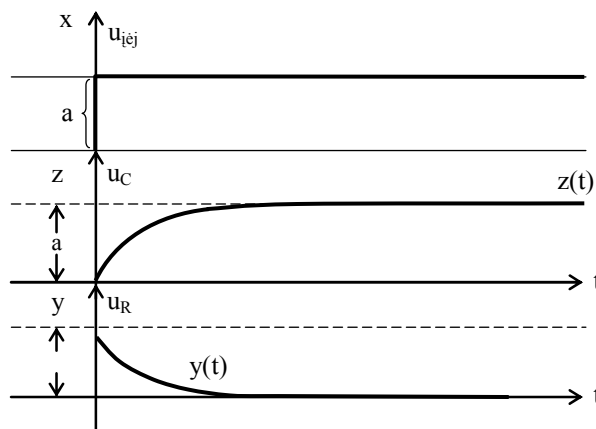
Pavyzdžiui, jei $x(t)=a$ ir $z(0)=0$, tai $y(t) = a - a \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = a e^{-\frac{t}{RC}}$. Tai rodo, kad grandelės

išėjimo įtampa eksponencialiai mažės nuo $y(0)=a$ iki $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a e^{-\frac{t}{RC}} = 0$.

Bendruoju atveju grandelės išėigos priklausomybė nuo įėigos $x(t)$, pradinės būsenos $z(0)$ ir laiko t bus tokia: $y(t) = x(t) - z(t) = x(t) - z(0)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t x(t)e^{\frac{t}{RC}} dt$.

Nesunku suprasti, kodėl 17 pav. pavaizduota schema turi diferencijavimo grandelės pavadinimą. Įstatę į diferencialinę lygtį $\frac{dz}{dt} = \frac{z(t)-x(t)}{RC}$ vietoj $z(t)$ iš išėjimo funkcijos išplaukiančią išraišką $z(t)=x(t)-y(t)$, gauname, jog $y(t) = \frac{d}{dt} (x(t)-y(t))$, t. y., jog išėiga $y(t)$ yra lygi skirtumo $x(t)-y(t)$ tarp įėigos ir išėigos išvestinei $\frac{d}{dt} (x(t)-y(t))$.

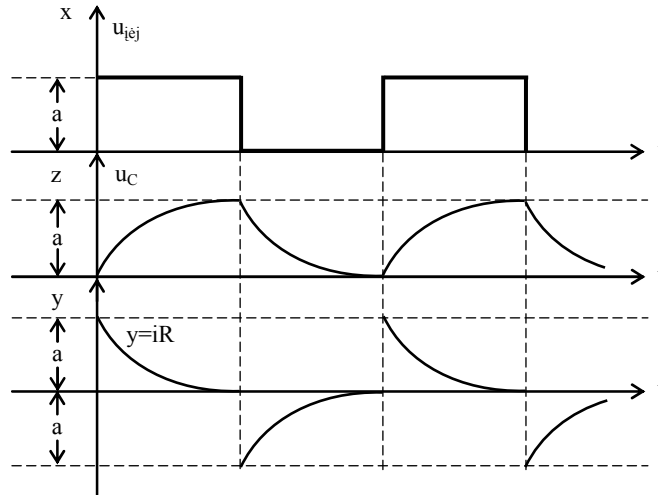
Pavyzdžiui, jei $x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -0 \\ a = \text{const}, & t \geq +0 \end{cases}$ ir $z(0)=0$, tai gauname tokius $x(t)$, $z(t)$ ir $y(t)$ kitimo grafikus, kaip parodyta 20 pav.



20 pav.

Kintant įėjai $x(t)$ „šuliukais“, gausime būsenos $z(t)$ ir išeigos $y(t)$ kitimo grafikus, pavaizduotus 21 pav. ir atitinkančius kondensatoriaus pasikrovimo ir išsikrovimo procesus bei ryšium su tuo atsirandančios elektros srovės stiprio ir elektrinės įtampos $u_R=iR=y(t)$ kitimą.

Taigi, kintant įėjimui $x(t)$ „šuliukais“, išėjime $y(t)=Ri(t)$ gauname teigiamus ir neigiamus „impulsus“. Tai apytikriai atitinka įeigos proceso fizinių „diferencijavimą“, o tiksliau – įeigos, veikiamos neigiamojo grįžtamojo ryšio, diferencijavimą, aprašomą formule jog $y(t)=\frac{d}{dt}(x(t)-y(t))$.



21 pav.

Prie diferencijavimo grandelės ir jos funkcionavimo nagrinėjimo mes šioje mokymosi priemonėje grįšime dar ne vieną kartą (žiūr. 1.10.5., 1.11.1.1., 1.11.8., 1.11.11., 1.11.12. skyrelius).

1.4.4. Paprastos hidrodinaminės sistemos išorinis matematinis modelis

18 pav. pavaizduotas indas su vandeniu, ištekančiu pro indo dugne padarytą angą. Norėdami sudaryti vykstančio proceso matematinį modelį, priimsime, kad šio proceso išeiga y yra ištekančio vandens greitis v , o jo įeiga x – dangčio, turinčio masę m_1 , spaudimo į vandens paviršių jėga $F=m_1g$, proceso būseną – vandens stulpo aukštis h inde, kintantis nuo $h(0)=H_0$ iki $h(T)=0$.

1. Proceso kalendorius – tolydi atkarpa $[0, T]$, kur T yra vandens pilno išteklėjimo iš indo momentas, priklausantis nuo pradinės būsenos H_0 ir įeigos $x=m_1g$.

2. Proceso įeigos erdvė X – vienmatė ir jos koordinatė $x=m_1g$ – pastovus dydis.*

3. Proceso išeigos erdvė Y – taip pat vienmatė ir jos koordinatė y kinta tolydžiai atkarpoje $[v^{(max)}, v^{(min)}]$.

4. Būsenų erdvė Z – taip pat vienmatė ir jos koordinatė tolydžiai kinta atkarpoje $[H_0, 0]$.

5. Perėjimo ir išėjimo funkcijas gausime, pasinaudoję energijos tvermės ir vandens nesuspaudžiamumo (jo tūrio tvermės) dėsniais.

Tarkim, kad kažkuriuo momentu t vandens stulpo aukštis inde yra $h(t)=h$. Paimsime tokį mažą laiko tarpą Δt , kad jo metu ištekančio vandens greitis v nesuspėtų reikšmingai pasikeisti, ir rasime vidutinį vandens išteklėjimo greitį intervale $[t, t+\Delta t]$, kurį pažymėsime $\bar{v} = \bar{v}(t, t + \Delta t)$. Tuomet iš vandens tūrio tvermės dėsnio (nagrinėjamosiomis sąlygomis viso vandens tūris vandens išteklėjimo metu praktiškai nekinta ir kiek vandens išteka iš indo, ant tiek jo sumažėja pačiame inde) gausime lygybę

* Galima įrodyti, jog ir tuo atveju, kai įėjimas x nėra pastovus dydis, o yra laiko funkcija $x(t)$,

hidrodinaminės sistemos matematinis modelis formaliai išlieka toks pat, t. y. $y(t) = \sqrt{2gz(t) + \frac{2}{\rho s} x(t)}$;

$\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{s} \sqrt{2gz(t) + \frac{2}{\rho s} x(t)}$. Tačiau tokiu atveju rasti bendrąjį diferencialinės lygties sprendinį ir

gauti fazinę trajektoriją $z(t)$ analiziniu būdu jau nebepavyksta. Tenka naudotis artutiniais skaičiavimo matematikos metodais.

$(-S \cdot \Delta h) = \sigma^* \cdot \bar{v} \cdot \Delta t$, čia $\sigma^* \cdot \bar{v} \cdot \Delta t$ – ištekejusio per laiką Δt vandens tūris, σ^* – ištekančios čiurkšlės skerspjūvio plotas, kuris gali būti šiek tiek mažesnis už σ ir yra lygus $\sigma \cdot \varepsilon$, o ε – konstanta, vadinama čiurkšlės suspaudimo koeficientu (žiūr. šios mokymosi priemonės 1.13.3. skyrelį), Δh – vandens stulpo aukščio „prieauglis“ ($\Delta h < 0$). Iš šios lygybės išplaukia vandens stulpo aukščio kitimo greičio formulė $\frac{dh}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sigma^* \cdot \bar{v}}{S} \right) = -\frac{\sigma^* \cdot v(t)}{S}$, kurioje $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(t, t + \Delta t)$ – momentinis vandens ištekejimo greitis taške t (t. y. momentu t).

Iš energijos tvermės dėsnio, atsižvelgdami į prielaidą, jog trinties nėra ir kad vandens stulpo inde pradinė kinetinė energija lygi 0, gausime energijos tvermės lygtį $(-m_1 g \cdot \Delta h) + W_1^{(p)} - W_2^{(p)} = W^{(k)}$, kurioje $(-m_1 g \cdot \Delta h) = m_1 g |\Delta h|$ – tai darbas A , nuveiktas dangčio potencialinės energijos sumažėjimo sąskaita, dangčiui nusileidžiant nuo aukščio h iki aukščio $h + \Delta h = h - |\Delta h|$, $W_1^{(p)} = \frac{\rho g S h^2}{2}$ – potencialinė vandens masės $\rho S h$ energija momentu t , $W_2^{(p)} = \frac{\rho g S (h + \Delta h)^2}{2} = \frac{\rho g S (h - |\Delta h|)^2}{2}$ – potencialinė vandens masės $\rho S (h + \Delta h)$ energija momentu $t + \Delta t$, $W^{(k)} = \frac{\rho \sigma^* \bar{v} \Delta t v^2}{2} = \frac{\rho S |\Delta h| v^2}{2}$ – ištekejusio per laikotarpį Δt vandens, turinčio tankį ρ ir masę $\rho \sigma^* \bar{v} \Delta t = \rho S |\Delta h|$, kinetinė energija.

Supaprastinę energijos tvermės lygties abi puses iš $|\Delta h| \neq 0$ ir pereidami prie ribos $\Delta h \rightarrow 0$, gausime formulę $m_1 g + \rho g S h = \frac{1}{2} \rho S v^2$ momentui t . Iš tos formulės išplaukia, jog ištekančio vandens greitis $v(t)$ momentu t , kai vandens lygis inde yra $h(t)$, yra lygus $v(t) = \sqrt{2gh(t) + \frac{2gm_1}{\rho S}}$.

Tai reiškia, kad $y(t) = \sqrt{2gz(t) + \frac{2}{\rho S} x}$ yra **išėjimo funkcija** ir $\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t) + \frac{2}{\rho S} x}$ –

perėjimo funkcijos diferencialinė išraiška.

Jei dangčio nebūtų, tai $m_1 = 0$, iš kur $x = m_1 \cdot g = 0$. Tuomet gautume tokias išėjimo ir perėjimo funkcijas: $y(t) = \sqrt{2gz(t)}$ ir $\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t)}$.

Išsprendę diferencialinę lygtį $\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t)}$, t. y. lygtį $\frac{dz}{\sqrt{z(t)}} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2g} dt$, rastume,

$$\text{kad } z(t) = \frac{g}{2} \left(\frac{\sigma^*}{S} \right)^2 t^2 - \frac{\sigma^* t}{S} \sqrt{2gz(0)} + z(0) = \left[z^{\frac{1}{2}}(0) - \frac{\sigma^* t}{2S} \sqrt{2g} \right]^2, \text{ kur } z(0) = H_0.$$

Kadangi viso vandens ištekejimo iš indo momentu $t = T$ būseną $z(t)$ taps $z(T) = 0$, tai $T = \frac{S}{\sigma^*} \sqrt{\frac{2z(0)}{g}} = \frac{S}{\sigma^*} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$. Todėl nagrinėjamo objekto kalendorius šiuo atveju (kai $m_1 = 0$) bus tolydžiai kintančio laiko atkarpa $\left[0, \frac{S}{\sigma^*} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \right]$.

Galima konkretizuoti ir išėjimo erdvę Y . Kadangi tuo atveju, kai $m_1 = 0$, gauname, jog $v_{\max} = \sqrt{2gH_0}$, tai erdvė Y yra atkarpa $[\sqrt{2gH_0}, 0]$, kurioje koordinatė y kinta tolygiai pagal dėsnį:

$$\begin{aligned} v(t) = \sqrt{2gz(t)} &= \sqrt{2g \cdot \left[H_0 - \frac{\sigma^* t}{S} \sqrt{2gH_0} + \frac{g}{2} \left(\frac{\sigma^*}{S} t \right)^2 \right]} = \sqrt{2g \cdot \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sigma^* t}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \right)^2} = \\ &= \sqrt{2g} \cdot \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sigma^* t}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \right) = \sqrt{2gH_0} - \frac{\sigma^* g}{S} t. \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad ištekančio vandens greitis tolydžiai ir tiesiškai mažėja nuo $v_{\max} = \sqrt{2gH_0}$ iki 0

su pastoviu pagreičiu, kurio absoliuti reikšmė lygi $\frac{\sigma^* g}{S} = \text{const}$.

Dabar panagrinėsime atvejį, kai vandens paviršių slegia dangtis, turintis pastovią masę m_1 .

Kai dangčio masė $m_1 > 0$, tai $x = m_1 g = F = \text{const} > 0$. Tuomet, sprendami diferencialinę lygtį

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gz(t) + \frac{2x}{\rho S}}, \text{ gautume fazinę trajektoriją } z(t) = z(0) - \frac{\sigma^* t}{S} \sqrt{2gz(0) + \frac{2x}{\rho S}} + \frac{g(\sigma^*)^2}{2S^2} t^2 = \\ &= H_0 - \frac{\sigma^* t}{S} \sqrt{2gH_0 + \frac{2m_1 g}{\rho S}} + \frac{g(\sigma^*)^2}{2S^2} t^2, \text{ t. y. parabolės lygtį (žiūr. šios mokymosi priemonės 1.11.1.2.} \\ &\text{skyrelį ir jo iliustracijas).} \end{aligned}$$

Iš išėjimo funkcijos $y(t) = \sqrt{2gz(t) + \frac{2x}{\rho S}}$ gautume išėjimo trajektorijos lygtį.

$$y(t) = \sqrt{2gz(0) + \frac{2x}{\rho S} - 2 \frac{g\sigma^* t}{S} \sqrt{2gz(0) + \frac{2x}{\rho S}} + \frac{g^2(\sigma^*)^2}{S^2} t^2} = \sqrt{2gz(0) + \frac{2x}{\rho S} - \frac{g\sigma^*}{S} t}, \text{ t. y. tiesės lygtį.}$$

Vandens išteklėjimo laiką $t_1 = T$ gautume, sprendami lygtį $z(T) = 0$, iš kurios išplaukia, jog $t_1 = T =$

$$= \left[\frac{S}{g\sigma^*} \sqrt{2gz(0) + \frac{2x}{\rho S}} - \sqrt{\frac{2x}{\rho S}} \right].$$

Vandens išteklėjimo greitis $y(T)$ momentu $t_1 = T$ jau nebūtų lygus 0, kaip atveju, kai $m_1 = 0$, nes

$$y(T) = \sqrt{\frac{2x}{\rho S}} > 0.$$

Maksimalus vandens išteklėjimo greitis $y(0) = \sqrt{2gH_0 + \frac{2x}{\rho S}}$ būtų proceso pradžioje, kai $t = 0$.

Objekto fazinė trajektorija $z(t)$ – parabolė, kurios viršūnė taške $t_3 = \frac{S}{g\sigma^*} \sqrt{2gH_0 + \frac{2x}{\rho S}},$

$$\begin{aligned} z(t_3) &= -\frac{m_1}{\rho S}. \text{ Ši parabolė kerta laiko ašį } z=0 \text{ dviejuose taškuose: } t_1 = T = \frac{S}{g\sigma^*} \left[\sqrt{2gH_0 + \frac{2m_1 g}{\rho S}} - \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{2m_1 g}{\rho S}} \right] \text{ ir } t_2 = \frac{S}{g\sigma^*} \left[\sqrt{2gH_0 + \frac{2m_1 g}{\rho S}} + \sqrt{\frac{2m_1 g}{\rho S}} \right]. \text{ Fiziškai realizuojama bus tik ta tos parabolės} \end{aligned}$$

atkarpa, kuri prasideda nuo taško $t=0, z(0)=H_0$ ir baigiasi tašku $t=t_1=T = \frac{S}{g\sigma^*} \left[\sqrt{2gH_0 + \frac{2m_1 g}{\rho S}} - \sqrt{\frac{2m_1 g}{\rho S}} \right], z(T)=0$. Šioje atkarpoje vandens lygio aukštis $h(t)=z(t)$ tolydžiai mažės vis mažėjančiu

$$\text{greičiu } \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\sigma^*}{S} \sqrt{2gH_0 + \frac{2m_1 g}{\rho S}} + g \frac{(\sigma^*)^2}{S^2} t \text{ su pastoviu pagreičiu } \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = g \frac{(\sigma^*)^2}{S^2}, \text{ o vandens}$$

išteklėjimo greitis $v(t)=y(t)$ mažės tolydžiai su pastoviu pagreičiu $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{g\sigma^*}{S}$ nuo maksimalaus

$$\text{dydžio } v^{(\max)} = v(0) = \sqrt{2gH_0 + \frac{2m_1 g}{\rho S}} \text{ iki minimalaus } v^{(\min)} = \sqrt{\frac{2m_1 g}{\rho S}}, \text{ kuris bus pasiektas momentu}$$

$t=t_1=T$, kai vandens stulpo aukštis taps $z(t)=z(t_1)=0$.

Hidrodinaminės sistemos fazinės ir išėjimo trajektorijų gavimas bei tų trajektorijų grafikai bus nagrinėjami 1.11.1.2. skyrelyje, o toje sistemoje vykstančio proceso nagrinėjimui skiriama net kelios dešimtys puslapių 1.13.3. skyrelyje.

1.4.5. Medžiagų sandėlis įmonėje (žiūr. užduotį 1.3.8.) ir jo išorinis matematinis modelis

1. Sandėlio kalendorius – diskretus, susidedantis iš mėnesio parų, numeruojamų eilės tvarka: 1, 2, 3, ..., t-1, t, t+1, ..., T_k, kur T_k – paskutinės k-jo mėnesio darbo dienos numeris.

2. Įėjimo vektoriaus struktūra – hierarchinė:

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3),$$

$$\vec{x}_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,i}, \dots, x_{1,n}),$$

$$\vec{x}_2 = (x_{2,1,1}, x_{2,1,2}, \dots, x_{2,1,j}, \dots, x_{2,1,m}, x_{2,2,1}, \dots, x_{2,i,j}, \dots, x_{2,n,m}),$$

$$\vec{x}_3 = (x_{3,k,1,1}, x_{3,k,1,2}, \dots, x_{3,k,1,j}, \dots, x_{3,k,1,m}, \dots, x_{3,k,i,j}, \dots, x_{3,k,n,m}).$$

Čia (kaip jau buvo minėta užduotyje 1.3.8.): i – medžiagos kodas, n – įvairių medžiagų rūšių skaičius, j – cecho numeris, t – paros numeris, x_{1,i}(t) – medžiagos i, pristatytos į sandėlį per parą t, kiekis, x_{2,i,j}(t) – medžiagos i, užprašytos cecho j parai t, kiekis, x_{3,k,i,j}(t) – medžiagos i limitas cechui j mėnesiui k.

Vektorius $\vec{x}_1$ atitinka medžiaginę sandėlio įeigą ir turi n koordinačių, vektoriai $\vec{x}_2$ ir $\vec{x}_3$ atitinka informacinę sandėlio įeigą ir turi po n×m koordinačių. Tokiu būdu sandėlio įėjimų erdvė turi n+2n×m=n(2m+1) koordinačių. Kiekvienos koordinatės kitimo ribos (nuo 0 iki maksimalios atitinkamos koordinatės reikšmės) yra gaunamos atsižvelgiant į medžiagų pristatymo, transportavimo ir panaudojimo normas. Kadangi didelis įmonės cechų skaičius m gali siekti kelias dešimtis, o įmonėje naudojamų medžiagų rūšių bei markių skaičius gali būti matuojamas šimtais ir net tūkstančiais, tai sandėlio įėjimų erdvė – daugiamatė ir gana sudėtinga. Todėl neatsitiktinai didelėse įmonėse gali būti ne po vieną medžiagų sandėlį, o po keletą, kiekvienas iš kurių skirtas tam tikrų medžiagų ar tam tikrų cechų grupei. Tai žymiai supaprastina sandėlių darbą.

3. Sandėlio išeigą galima aprašyti vektoriumi $\vec{y}(t) = (y_{1,1}(t), y_{1,2}(t), \dots, y_{i,j}(t), \dots, y_{n,m}(t))$, kur y_{i,j}(t) – medžiagos i, išduotos iš sandėlio cechui j per parą t, kiekis. Todėl mūsų nagrinėjimo sandėlio išėjimų erdvė turi n×m koordinačių.

4. Sandėlio būsenos vektoriaus $\vec{z}$ struktūra taip pat sudėtinga ir hierarchinė:

$$\vec{z} = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3),$$

$$\vec{z}_1(t) = (z_{1,1}(t), z_{1,2}(t), \dots, z_{1,i}(t), \dots, z_{1,n}(t)),$$

$$\vec{z}_2(t) = (z_{2,1,1}(t), z_{2,1,2}(t), \dots, z_{2,1,j}(t), \dots, z_{2,1,m}(t), z_{2,2,1}(t), \dots, z_{2,2,j}(t), \dots, z_{2,2,m}(t),$$

$$z_{2,3,1}(t), \dots, z_{2,i,j}(t), \dots, z_{2,n,m}(t)),$$

$$\vec{z}_3(t) = (z_{3,k,1,1}(t), z_{3,k,1,2}(t), \dots, z_{3,k,1,j}(t), \dots, z_{3,k,1,m}(t), z_{3,k,2,1}(t), z_{3,k,2,2}(t), \dots, z_{3,k,2,j}(t), \dots,$$

$$z_{3,k,2,m}(t), z_{3,k,3,1}(t), z_{3,k,3,2}(t), \dots, z_{3,k,3,j}(t), \dots, z_{3,k,3,m}(t), \dots, z_{3,k,i,j}(t), \dots, z_{3,k,n,m}(t)).$$

Čia z_{1,i}(t) – medžiagos i kiekis (likutis) sandėlyje paros t-1 pabaigoje arba paros t pradžioje, z_{2,i,j}(t) – medžiagos i, išduotos cechui j nuo mėnesio pradžios iki paros (t-1) pabaigos (t. y. iki paros t pradžios), kiekis, z_{3,k,i,j}(t) – medžiagos i išdavimo cechui j limitas mėnesiui k. Vektorius $\vec{z}_1$ atitinka medžiaginę sandėlio būseną, o vektoriai $\vec{z}_2$ ir $\vec{z}_3$ – sukaupią sandėlyje (užfiksuotą „sandėlio atmintyje“, pavyzdžiui, specialiame žurnale) informaciją. Kadangi sandėlyje gali būti saugoma informacija ne tik apie limitus einamajam (k) mėnesiui, bet ir praėjusiam (k-1) arba ateinančiam (k+1), tai sandėlio būsenos erdvė Z gali turėti n+n×m+n×m×3=n(4m+1) koordinačių, nors paprastai tai erdvei užtenka n+n×m+n×m=n(2m+1) koordinačių. Tuomet saugomi tik einamojo mėnesio limitai ir vektorius $\vec{z}_3(t) = (z_{3,1,1}(t), z_{3,1,2}(t), \dots, z_{3,n,m}(t))$ turi tik n×m koordinačių.

5. Sandėlio išeigos funkcija $\vec{y}(t) = \vec{\varphi}(\vec{x}(t), \vec{z}(t))$ – vektorinė. Jos koordinatės sudaro m×n skaliarinės funkcijos y_{ij}(t) = φ_{ij}($\vec{x}(t), \vec{z}(t)$), turinčios vienodą struktūrą:

$$y_{i,j}(t) = \begin{cases} \min[x_{2,i,j}(t), z_{3,k,i,j}(t) - z_{2,i,j}(t)], & \text{jei } \sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t), z_{3,k,i,j}(t) - z_{2,i,j}(t)] \leq z_{1,i}(t); \\ \frac{z_{1,i}(t) \times \min[x_{2,i,j}(t), z_{3,k,i,j}(t) - z_{2,i,j}(t)]}{\sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t), z_{3,k,i,j}(t) - z_{2,i,j}(t)]}, & \text{jei } \sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t), z_{3,k,i,j}(t) - z_{2,i,j}(t)] \geq z_{1,i}(t). \end{cases}$$

6. Sandėlio perėjimų funkcija $\bar{z}(t+1)=\bar{\psi}(\bar{z}(t),\bar{x}(t))$ – taip pat vektorinė. Jos struktūra hierarchinė, atitinkanti vektoriaus $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3)$ struktūrą. Vektorinę funkciją $\bar{\psi}$ sudaro $n(2m+1)$ trijų tipų (a,b,c) skaliarinės funkcijos:

$$\begin{aligned} \text{a) } z_{1,i}(t+1) &= z_{1,i}(t) + x_{1,i}(t) - \sum_{j=1}^m y_{i,j}(t) = z_{1,i}(t) + x_{1,i}(t) - \\ & - \sum_{j=1}^m \begin{cases} \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)], & \text{jei } \sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)] \leq z_{1,i}(t), \\ \frac{z_{1,i}(t) \times \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)]}{\sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)]}, & \text{jei } \sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)] \geq z_{1,i}(t). \end{cases} \\ \text{b) } z_{2,i,j}(t+1) &= z_{2,i,j}(t) + y_{i,j}(t) = \\ & = z_{2,i,j}(t) + \begin{cases} \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)], & \text{jei } \sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)] \leq z_{1,i}(t), \\ \frac{z_{1,i}(t) \times \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)]}{\sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)]}, & \text{jei } \sum_{j=1}^m \min[x_{2,i,j}(t); z_{3,k,i,j} - z_{2,i,j}(t)] \geq z_{1,i}(t). \end{cases} \\ \text{c) } z_{3,k,i,j}(t+1) &= \begin{cases} z_{3,k,i,j}(t), & \text{jei } t < T_k, \\ x_{3,k+1,i,j}(t+1), & \text{jei } t = T_k, \end{cases} \text{ kur } T_k - \text{ darbo dienų skaičius } k\text{-jame} \end{aligned}$$

mėnesyje; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$.

Sudarant medžiagų sandėlio išorinį matematinį modelį, kai nagrinėjamas laiko tarpas – vienas duotasis mėnuo, mėnesio indeksą (numerį) k žymėjimuose galima nerašyti ir tuomet vietoj $z_{3,k,i,j}$ galima rašyti $z_{3,i,j}(t)$. Šis žymėjimas reikštų medžiagos i limitą cechui j tam mėnesiui, kuriam priklauso para t . Tuomet vietoj žymėjimų $x_{3,k,i,j}$ bei $x_{3,k,i,j}(t+1)$ galima naudoti žymėjimus $x_{3,i,j}(t)$ bei $x_{3,i,j}(t+1)$.

Paras t galima būtų numeruoti ne tik vieno mėnesio, bet ir visų metų ribose (t. y. nuo 1 iki 365 ar 366), įvedant papildomas konstantas: $T_1=31$, $T_2=28$ (ar 29), $T_3=31$, $T_4=30$, $T_5=31$, $T_6=30$, $T_7=31$, $T_8=31$, $T_9=30$, $T_{10}=31$, $T_{11}=30$, $T_{12}=31$.

Galima būtų numeruoti ne visas kalendorines, o tik darbo dienas t . Tuomet pasikeistų ir konstantų T_k dydžiai. Jie turėtų būti lygūs darbo dienų skaičiui duotajame mėnesyje k .

Įvedus tokius pakeitimus, vietoj aukščiau pavaizduoto perėjimo funkcijos $z_{3,k,i,j}(t+1)=\psi_{3,k,i,j}(\bar{x}(t),\bar{z}(t))$ modelio galima būtų naudotis paprastesniu ir universalesniu modeliu

$$z_{3,i,j}(t+1)=\psi_{3,i,j}(\bar{z}(t),\bar{x}(t))=\begin{cases} z_{3,i,j}(t), & \text{kai } T_{k-1} < t < T_k, \\ x_{3,i,j}(t+1), & \text{kai } t = T_k. \end{cases}$$

Esant ne vienam, o keliems tiekėjams (t. y. kai tiekėjų skaičius $q>1$), tektų išplėsti vektorių $\bar{x}_1=(x_{1,1},...,x_{1,i},...,x_{1,n})$, pakeičiant jį vektoriumi $\bar{x}_1=(x_{1,1,1},x_{1,1,2},...,x_{1,i,s},...,x_{1,n,q})$, kur s – tiekėjo identifikatorius (numeris), galintis keistis nuo 1 iki skaičiaus q , žyminčio visų tiekėjų, aptarnaujančių sandėlį, skaičių.

Vedant apskaitą, kiek kuris tiekėjas pristatė kokios medžiagos nuo mėnesio pradžios iki paros t pradžios, tektų išplėsti ir vektorių $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3)$, įvedant papildomą vektorių $\bar{z}_4(t)=(z_{4,1,1}(t),z_{4,1,2}(t),...,z_{4,i,s}(t),...,z_{4,n,q}(t))$, kur $z_{4,i,s}(t)$ – informacija apie medžiagos i kiekį, kurį tiekėjas s pristatė į sandėlį nuo mėnesio pradžios iki paros t pradžios. Tuomet vektorius $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3)$ taptų vektoriumi $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\bar{z}_4)$ ir vektorius $\bar{x}_1(t)$ turėtų jau ne n , o nq koordinačių. Tuo atveju, kai kokybės kontrolės sumetimais, tos pačios rūšies medžiagos, gautos iš skirtingų tiekėjų, sandėlyje būtų saugomos atskirai, padidėtų ir vektoriaus $\bar{z}_1(t)$ koordinačių skaičius.

Galima būtų išplėsti ir vektorių $\bar{y}(t)$, padarant jį hierarchiniu $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, kur $\bar{y}_1$ vaizduotų medžiagų kiekius, kuriuos sandėlis išduoda cechams, o $\bar{y}_2$ – sandėlio mėnesinius užsakymus tiekėjams.

Medžiagų sandėlio vidinį matematinį modelį nagrinėsime šios mokymosi priemonės 1.10.2. skyrelyje, o jo funkcionavimo trajektorijas – 1.11.1.4. ir 1.11.2.2. skyreliuose bei atlikdami 1.11.4. užduotį.

1.4.6. Determinuotų baigtinių automatų išoriniai matematiniai modeliai

Determinuotais automatais vadinami objektai, kurių įėjimai, išėjimai, būsenos ir kalendorius yra **determinuoti ir diskretūs**. Kai įėjimų, išėjimų ir būsenų vektorių koordinačių skaičius yra baigtinis ir tų koordinačių reikšmių skaičiai yra baigtiniai, t. y. kai įėjimų, išėjimų ir būsenų abėcėlės turi baigtinį simbolių (raidžių, ženklų ir pan.) skaičių, tai automatai vadinami **baigtiniais**. Determinuotų automatų perėjimų ir išėjimų funkcijos yra determinuotos: jų reikšmės vienareikšmiškai priklauso nuo tų funkcijų argumentų reikšmių.

Kai kurie autoriai baigtinio determinuoto automato sąvoką dar labiau susiaurina, vadindami jais determinuotus **diskrečias dinamines sistemas**, turinčias baigtines įėjimų, išėjimų ir būsenų abėcėles, kurių **išėjimai tiesiogiai priklauso tik nuo automato būsenos**, kuri, savo ruožtu, priklauso nuo automato įėjimų ir prieš tai (viena kalendoriaus taktu anksčiau) buvusios būsenos, t. y. tokius objektus, kurių išėjimų funkcijos yra $\bar{y}(t) = \bar{\phi}(\bar{z}(t))$, o perėjimų funkcijos yra $\bar{z}(t) = \bar{\psi}(\bar{x}(t), \bar{z}(t - \Delta t))$ arba $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{\psi}(\bar{x}(t + \Delta t), \bar{z}(t))$, tačiau gali būti ir $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{\psi}(\bar{x}(t), \bar{z}(t))$.

Diskrečias baigtines dinamines sistemas, kurių išėjimai priklauso ir nuo automato būsenos, ir nuo automato įėjimų, t. y. objektus, kurių išėjimų funkcijos yra $\bar{y}(t) = \bar{\phi}(\bar{x}(t), \bar{z}(t))$ arba $\bar{y}(t) = \bar{\phi}(\bar{x}(t), \bar{z}(t - \Delta t))$, o perėjimų funkcijos yra $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{\psi}(\bar{x}(t), \bar{z}(t))$ arba $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{\psi}(\bar{x}(t + \Delta t), \bar{z}(t))$, tie autoriai vadina jau ne baigtiniais automatais, o **sekvencinėmis mašinomis**.

Kiti gi autoriai vadina baigtiniais determinuotais automatais ir tas diskrečias determinuotas dinamines sistemas, kurias pirmieji vadina sekvencinėmis mašinomis, ir tas, kurias pirmieji irgi vadina baigtiniais automatais. Šie pastarieji automatai kai kuriu autorių kartais yra vadinami dar ir **taisyklingais automatais**. Gana dažnai taisyklingus automatus, kurių išėjimų funkcija yra $\bar{y}(t) = \bar{\phi}(\bar{z}(t))$, vadina **Muro (E.F.Moore) automatais**, o sekvencines mašinas, kurių išėjimų funkcijos yra $\bar{y}(t) = \bar{\phi}(\bar{x}(t), \bar{z}(t - \Delta t))$ – **Milio (G.H.Mealy) automatais**.

Šioje mokymosi priemonėje mes laikysimės platesnio požiūrio į baigtinius determinuotus automatus ir naudosime tą terminą ir taisyklingiems automatams, ir taip vadinamoms sekvencinėms mašinoms. Muro automatus laikysime daliniu Milio automatų atveju ir visus tokius automatus vadinsime **X→Y automatais**. Prie diskrečių baigtinių automatų priskirsime ir automatus, neturinčius įėjimų, vadinamus **Y automatais** bei **autonominiais automatais**, taip pat **X automatus**, t. y. automatus neturinčius išėjimų. **X automatus ir Y automatus laikysime daliniais X→Y automatų atvejais**.

Sudarysime baigtinio determinuoto automato, kurį nagrinėjome 1.3. skyriuje, išorinį matematinį modelį.

Jo išorinį informacinį modelį jau turime. Tai – 1.3. skyriuje sudarytoji 11-ji lentelė. Iš tos lentelės matyti, kad automatas turi vieną įėjimą, kurio reikšmės gali būti x_0, x_1 ir x_2 , vieną išėjimą, kurio galimos reikšmės – y_0 ir y_1 , ir vieną būsenų koordinatę, kurios galimos reikšmės – z_0 ir z_1 . Taigi nagrinėjamo automato įėjimas, išėjimas ir būsena yra skaliariai, turintys baigtinį reikšmių skaičių.

Automatas – asinchroninis: jis keičia savo būseną ir gali keisti savo išėjimą tik keičiantis automato įėjimui. Todėl automato kalendorius priklauso nuo jo įėjimo kalendoriaus ir yra diskretus.

Sudarysime automato išėjimo ir perėjimo funkcijas, t. y. matematiškai išreikšime automato išėjimo ir naujos būsenos priklausomybę nuo automato įėjimo ir senos būsenos. Tas priklausomybės galima aprašyti, naudojantis klasikinės matematinės logikos kalba, sudarant išėjimo ir perėjimo funkcijų TDNF ar TKNF, prieš tai transformavus 11-ją lentelę į dvejetainę formą, t. y. išreiškus diskrečias kintamųjų reikšmes dvireikšmės matematinės logikos simboliais 0 ir 1.

Kadangi x gali turėti vieną iš trijų reikšmių, tai x galima transformuoti į vektorių, turintį dvi dvejetaines koordinates ξ_1 ir ξ_2 . Išėjimas y , turintis abėcėlę y_0, y_1 , transformuojasi į kintamąjį η , turintį abėcėlę 0, 1, o būsena z , turinti abėcėlę z_0, z_1 , – į kintamąjį ζ , taip pat turintį abėcėlę 0, 1. Visas šias transformacijas, **vadinamas dvejetainiu kodavimu**, vaizduoja lentelės:

	ξ_2	ξ_1
x_0	0	0
x_1	0	1
x_2	1	0

	η
y_0	0
y_1	1

	ζ
z_0	0
z_1	1

11^{„a“} lentelė

$\zeta(t)$	$\xi_2(t)$	$\xi_1(t)$	$\eta(t)$	$\zeta(t+1)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

11-oji lentelė transformuojasi į lentelę, kurią pažymėsime numeriu 11^{„acc“}.

Iš šios lentelės gauname išėjimo funkcijos TDNF $\eta = \bar{\zeta}\bar{\xi}_2\xi_1 \vee \zeta\bar{\xi}_2\bar{\xi}_1 \vee \zeta\xi_2\bar{\xi}_1$ ir perėjimo funkcijos TDNF $\zeta(t+1) = \bar{\zeta}(t)\xi_2(t)\bar{\xi}_1(t) \vee \zeta(t)\bar{\xi}_2(t)\xi_1(t) \vee \zeta(t)\xi_2(t)\bar{\xi}_1(t)$. Šias funkcijas galima supaprastinti, „suklijuojant“ kai kurias vieneto konstituentes. Gauname: $\eta = \bar{\zeta}\bar{\xi}_2\xi_1 \vee \bar{\zeta}\bar{\xi}_1$, $\zeta(t+1) = \xi_2(t)\bar{\xi}_1(t) \vee \zeta(t)\bar{\xi}_2(t)\xi_1(t)$.

Naudojantis **dalinių loginių funkcijų** minimizavimo metodu (žiūr. 1.16.1.4.10.), galima gauti dar paprastesnes išėjimo ir perėjimo funkcijų išraiškas: $\eta = \zeta\bar{\xi}_1 \vee \bar{\zeta}\xi_1$, $\zeta(t+1) = \xi_2(t) \vee \zeta(t)\xi_1(t)$.

Analogiškai galima gauti išėjimo ir perėjimo funkcijas tobulojoje konjunktyvinėje normaliojoje formoje (TKNF), o po to supaprastinti. Rekomenduoju atlikti 1.4.2 užduotį.

Jei automato būsenų erdvė būtų turėjusi $n > 2$ taškų, tai, norėdami automato matematinio modelio sudarymui pasinaudoti tik klasikinės matematinės logikos kalba ir matematiniu aparatu, būtume privalėję, apskaičiavę $k = \lceil \log_2(n-1) \rceil + 1$, kur $\lceil \log_2(n-1) \rceil$ – sveikoji skaičiaus $\log_2(n-1)$ dalis, vienmatę būsenų erdvę, susidarančią iš n taškų, transformuoti į k -matę vektorinę erdvę, kurios koordinatės būtų „loginės“, t. y. galinčios turėti tik vieną iš dviejų reikšmių „0“ arba „1“. Tuomet automato būseną būtų vaizduojama k -mačiu „dvejetainių“ vektorium, automato perėjimų funkcija taip pat būtų vektorinė, susidedanti iš k skaliarinų loginių funkcijų. Automato išorinis informacinis modelis – automato išėjimų ir perėjimų dvejetainė lentelė – turėtų 2^{k+s} eilučių ir $2k+s+r$ stulpelių. Čia s – įėjimų „dvejetainio“ vektoriaus $\bar{x}$ koordinatžių skaičius, o r – išėjimų „dvejetainio“ vektoriaus $\bar{y}$ koordinatžių skaičius.

Baigtinio determinuoto automato pavyzdžiu, pateiktu šioje mokymosi priemonėje, galima laikyti ne tik ką tik išnagrinėtąjį $X \rightarrow Y$ automatą, bei ir 1.4.2. skyrelyje aprašytąjį nuoseklaus veikimo dvejetainį sumatorių (NVDS), taip pat vienaskiltį dvejetainį sumatorių DVS₃ ir lygiagretaus veikimo n -skiltį dvejetainį sumatorių, kuriuos nagrinėjame 1.4.1. skyrelyje. Pastariesiems dviems automatams (DVS₃ ir LVDS) būdinga tai, jog jie yra „išsigimę automatai“, nes jų būsenos nesikeičia ir todėl jų išėjimai priklauso tik nuo įėjimų. Tokių automatų vidiniai modeliai gali būti sudaryti, naudojantis vien tik paprasčiausiais tipiniais loginiais elementais (pavyzdžiui, konjunktoriais, disjunktoriais ir invertoriais) ir nesinaudojant atminties elementais (trigeriais, vėlinimo blokais). Kadangi, naudojantis loginio neigimo operacija, konjunkciją ir disjunkciją de Morgano formulėmis $\overline{x_1 \wedge x_2} \equiv \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ ir $\overline{x_1 \vee x_2} \equiv \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ galima išreikšti vieną per kitą, tai tokių „išsigimusių automatų“ vidiniai modeliai gali būti sudaryti, naudojantis tik konjunktoriais ir invertoriais arba tik disjunktoriais ir invertoriais. Tačiau tokių automatų vidinių modelių sudarymui dažnai naudoja visų šių trijų rūšių loginius elementus, atliekančius Bulio algebros logines operacijas, o kartais ir kitų loginių algebrų elementus (žiūr, šios mokymosi priemonės 1.16.1. skyrelį).

Schemas, sudarytos tik iš loginių algebrų operacijas atliekančių elementų, nesinaudojant atminties elementais, vadinamos **kombinacinėmis schemomis**. Pavyzdžiui, schemas pavaizduotos 8 ir 9 pav., – kombinacinės schemas.

Baigtinių automatų schemų, kurių sudarymui teko pasinaudoti ne tik loginiais, bet ir atminties elementais, pavyzdžius galite rasti 1.10.3. ir 1.11.3. skyreliuose.

Baigtinio determinuoto automato išoriniu matematiniu modeliu galime laikyti ir 1.4.5. skyrelyje sudarytąjį medžiagų sandėlio matematinį modelį. Tai jau šiek tiek sudėtingesnis determinuoto baigtinio automato modelis, nes šio baigtinio automato įėjimai, išėjimai ir būsenos yra vektoriai, o kai kurie iš tų vektorių – hierarchiniai.

Jei atsižvelgtume į tai, kad sandėlyje atliekami veiksmi negali būti atlikti momentaliai, nes turi tam tikras trukmes, tai medžiagų sandėlio modelis taptų dar sudėtingesnis, bet vis tiek dar liktų determinuoto baigtinio automato matematiniu modeliu, tiksliau **baigtinio determinuoto automato su delsa (vėlavimu) matematiniu modeliu**, kuriame perėjimai iš vienos būsenos į kitą vyksta ne momentaliai, o turi tam tikras trukmes. Laikydami pačius perėjimus tam tikromis ypatingomis automato būsenomis, tokių automatų modelius galime suvesti į mūsų jau nagrinėtų iprastų baigtinių determinuotų automatų matematinius modelius.

Realaus medžiagų sandėlio funkcionavime neišvengiamai atsiranda ne tik sandėlyje vykstančių procesų, keičiančių sandėlio būseną, trukmės, bet ir tokių reiškinių, kuriuos priimta laikyti stochastiniais. Todėl sudarant realaus medžiagų sandėlio matematinį modelį, atspindintį ne tik determinuotus, bet ir stochastinius reiškinius, jau nebepakaktų to matematinio aparato, kuris buvo taikomas baigtinių determinuotų automatų ir jų funkcionavimo modeliavime. Tektų jį papildyti **masinio aptarnavimo sistemų** funkcionavimo modeliavimo aparatu, apie kurį kalbėsime šios mokymosi priemonės 1.14. ir 1.16. skyriuose, taip pat jos antroje dalyje. Ten mes nagrinėsime ne tik determinuotus, bet ir **stochastinius automatus** bei jų matematinius modelius. O su paprastu stochastiniu automatu ir jo matematiniu modeliu susipažinsime neužilgo – 1.4.12. skyrelyje.

Prie determinuotų automatų priskiriamos ir **Tiūringo mašinos**, kurių nagrinėjimui skiriami 1.4.7. ir 1.10.6. šios mokymosi priemonės skyreliai. Tiūringo mašina, atlikdama kokį nors baigtinį algoritmą, veikia kaip determinuotas baigtinis automatas, tačiau turėdama neribotai ilgą juostą, skirtą įėjimo ir išėjimo abėcėlių simbolių įrašymui, įrašinėdama ir skaitydama juostoje buvusius bei atsiradusius įrašus, ji galėtų atlikti kokio tik nori ilgumo algoritmus, t. y. teoriškai ši mašina galėtų būti laikoma ne tik baigtinio laiko, bet ir begalinio laiko determinuotu automatu, jei tik tokios mašinos valdančioji galvutė galėtų turėti kiek nori būsenų. Jei tokių būsenų būtų baigtinis skaičius, tai Tiūringo mašina po kurio laiko arba sustotų, arba pradėtų kartoti kokį nors ciklą.

Determinuotų baigtinių automatų vidinių modelių sudarymui skiriamas 1.10.3. skyrelis, o tokių automatų funkcionavimo trajektorijų aprašymui – 1.11.1.3., 1.11.2.3. ir 1.11.3. skyreliai.

1.4.7. Tiūringo mašina ir jos išorinis matematinis modelis

Tiūringo mašina – tai įsivaizduojama **matematinė konstrukcija**, kurią 1936m. pasiūlė anglų matematikas Alanas Tiūringas (A.M.Turing) kaip priemonę, leidžiančią **konstruktyviai apibrėžti algoritmo sąvoką**. Ši sąvoka tuomet jau buvo plačiai naudojama ir intuityviai visų matematikų vienodai suprantama ta prasme, kad visi matematikai buvo vienodos nuomonės apie pagrindines būtinas kiekvieno algoritmo savybes (procedūrinių taisyklių vienareikšmiškas apibrėžtumas; tų taisyklių rinkinio pilnumas; algoritmo efektyvumas, užtikrinantis rezultato pasiekimą per baigtinį praktiškai priimtina žingsnių skaičių; algoritmo taikymo masiškumas) ir vienodai skyrė algoritmus nuo „nealgoritmų“. Ir tokio intuityvaus algoritmo sąvokos supratimo pilnai pakako iki tol, kol nebuvo susidurta su **kai kurių sudėtingų uždavinių sprendimo algoritmo neegzistavimo įrodymo problema**. Įrodyti, kad to ar kito uždavinio sprendimo algoritmas egzistuoja, teoriškai žiūrint, nėra sunku: pakanka surasti (sukurti) bent vieną to uždavinio sprendimo algoritmą (kas praktiškai, žinoma, ne visada yra lengva). Tačiau įrodyti algoritmo neegzistavimą, neturint formalaus tos sąvokos apibrėžimo, neįmanoma. O neturint tokių įrodymų bei požymių, leidžiančių atpažinti problemas, kurių sprendimo algoritmai neegzistuoja, galima veltui gaišti laiką, ieškant algoritmų ten, kur jų ir būti negali. Todėl ir buvo bandoma sukonstruoti formalų algoritmo apibrėžimą. Ir A.Tiūringas nebuvo vienišas šioje srityje: Gödelis ir Klini pasiūlė „rekursinės funkcijos“ sąvoką, A.Markovas – „normalųjį algoritmą“ („algorifmą“), Postas – „baigtinį kombinatorinį procesą“, Čiorčas – „L – apibrėžtumą“, Kolmogorovas ir Uspenskis – savo „algoritmus“, Jeršovas – „operatorinius algoritmus“ ir t. t. Pažymėtina, kad visi tie formalūs algoritmo apibrėžimai pasirodė ekvivalentūs. Tai rodo, jog, kurdami formalius algoritmo apibrėžimus, skirtingi matematikai savo galvose jau turėjo vienodus koncepcinius sąvokos „algoritmas“ modelius. Nepavykus rasti nė vienos intuityviaja prasme apskaičiuojamos funkcijos, kuri nebūtų rekursyvioji funkcija, A. Čiorčas (A. Church) paskelbė tezę: algoritmškai apskaičiuojamųjų funkcijų aibė sutampa su rekursyviųjų funkcijų aibe. Determinuota Tiūringo mašina kartu su šia teze sudaro aparatą, leidžiantį formaliai nustatyti uždavinių algoritmų egzistavimą.

A. Tiūringo sukurtas formalus algoritmo ir jį realizuojančios „mašinos“ modelis paplito gana plačiai dėl savo „vaizdumo“ ir tuo pačiu metu Tiūringo mašinos veikimo principas, galima sakyti, buvo savotiškas šiuolaikinių kompiuterių veikimo principo prototipas.

Egzistuoja įvairūs Tiūringo mašinų variantai. Aprašysiu vieną iš paprasčiausių, susidedantį iš trijų dalių: 1) begalinės juostos, padalintos į ląsteles, kurių skaičius, slenkant juosta į dešinę, yra begalinis; 2) skaitančios ir rašančios galvutės, kuri gali ne tik skaityti ląstelių turinį bei rašyti į jas, bet ir judėti juosta į dešinę ir į kairę; 3) galvutės valdymo įrenginio, kuris priklausomai nuo iš galvutės atėjusios informacijos gali pereiti į vieną iš baigtinio skaičiaus galimų būsenų ir pasiųsti galvutei komandą, nurodančią, kokį simbolį iš baigtinio jų skaičiaus įrašyti į juostą ir ką daryti: stovėti ar judėti (į dešinę ar į kairę).

Pažymėsime simbolius, kurie (po vieną) gali būti įrašyti į juostos ląsteles, raidėmis s_i : $s_0, s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$, kur n – baigtinis sveikas skaičius, o s_0 reiškia „tuščią“ simbolį, t. y. tą atvejį, kai į atitinkamą ląstelę nieko neįrašoma ar nebuvo įrašyta.

Valdymo įrenginio būsenų baigtinę aibę $\{q_0, q_1, \dots, q_j, \dots, q_m\}$ sudaro $m+1$ skirtingos būsenos q_j . Simbolis q_0 reiškia rimties būseną, kada niekas nevyksta ir niekas nesikeičia, o q_1 – pradinę būseną, nuo kurios prasideda Tiūringo mašinos veikimas.

Iš to, kas pasakyta, išplaukia, jog nagrinėjamo Tiūringo mašinos varianto įėjimų erdvė yra diskreti ir vienmatė, kurios taškai – simboliai $s_0, s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$; išėjimų erdvė taip pat diskreti, tačiau dvimatė: ją sudaro taškai, gaunami kaip aibių $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n\}$ ir $\{S, D, K\}$ dekartinė sandauga, kur S reiškia galvutės pasilikimą vietoje, D – galvutės pasislinkimą į dešinėje esančią gretimą juostos ląstelę, K – galvutės pasislinkimą į kaimyninę juostos ląstelę, esančią kairėje; būsenų erdvė diskreti ir vienmatė, kurią sudaro būsenų aibė $\{q_0, q_1, \dots, q_j, \dots, q_m\}$; kalendorius taip pat diskretus, sudarytas iš to kalendoriaus laiko taktų pabaigos momentų $t_0, t_1, t_2, \dots$.

Tiūringo mašinos ypatybė, išskirianti ją iš kitų baigtinių determinuotų automatų bei sekvencinių mašinų, yra ta, kad jos išėjimų informacija gali tapti įėjimų informacija ir kad Tiūringo mašina potencialiai turi begalinės apimtys atmintį – begalinę juostą, kurios ląstelėse gali būti įrašyta kiek nori daug informacijos.

Tiūringo mašinos perėjimo ir išėjimo funkcijas galima aprašyti lentelėje, išskiriant joje tiek eilučių, kiek mašinos įėjimo abėcėlė turi simbolių s_i , ir tiek stulpelių, kiek mašinos būsenų aibė turi skirtingų būsenų q_j . Tos lentelės vidiniuose langeliuose įrašomi mašinos išėjimai ir nauja būsena tokia tvarka: 1) simbolis s_i , kurį mašina užrašo toje ląstelėje, virš kurios dabar stovi galvutė; 2) nauja būsena, į kurią pereina mašinos valdymo įrenginys; 3) judesio, kurį darys galvutė takto pabaigoje, identifikatorius (S – „stovėti“, D – „dešinė“, K – „kairėn“).

15-oje lentelėje pavaizduota vienos paprastos Tiūringo mašinos, kurioje $n=2$ ir $m=2$, perėjimų ir išėjimų funkcijų lentelė. Ši lentelė kartu yra ir **konkrečios Tiūringo mašinos informacinis modelis**, nes ji aprašo ne tik perėjimų bei išėjimų funkcijas, bet ir įėjimų, išėjimų ir būsenų erdves.

Transformuodami nagrinėjamos Tiūringo mašinos įėjimų, būsenų bei išėjimų erdves ir pervesdami 15-sios lentelės turinį į dvejetainį kodą, gausime 16-ją, 17-ją, 18-ją, 19-ją ir 20-ją lenteles.

15. lentelė

$s \backslash q$	q_0	q_1	q_2
s_0	s_0q_0S	s_0q_1D	s_1q_0S
s_1	s_1q_0S	s_0q_2D	s_1q_2D
s_2	s_2q_0S		s_1q_0S

16. lentelė

$s \backslash x$	x_1	x_0
s_0	0	0
s_1	0	1
s_2	1	0

17. lentelė

$q \backslash z$	z_1	z_0
q_0	0	0
q_1	0	1
q_2	1	0

18. lentelė

$s \backslash y_1$	$y_{1,1}$	$y_{1,0}$
s_0	0	0
s_1	0	1
s_2	1	0

19. lentelė

y_2	$y_{2,1}$	$y_{2,0}$
S	0	0
D	0	1
K	1	0

20. lentelė

$x_1(t)$	$x_0(t)$	$z_1(t)$	$z_0(t)$	$y_{2,1}(t)$	$y_{2,0}(t)$	$y_{1,1}(t)$	$y_{1,0}(t)$	$z_1(t+1)$	$z_0(t+1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0

Iš 20-sios lentelės gauname nagrinėjamos Tiūringo mašinos perėjimų ir išėjimų funkcijų TDNF:

$$z_1(t+1) = [\bar{x}_1(t) \wedge x_0(t) \wedge \bar{z}_1(t) \wedge z_0(t)] \vee [\bar{x}_1(t) \wedge x_0(t) \wedge z_1(t) \wedge \bar{z}_0(t)];$$

$$z_0(t+1) = \bar{x}_1(t) \wedge \bar{x}_0(t) \wedge \bar{z}_1(t) \wedge z_0(t);$$

$$y_{2,1} = 0;$$

$$y_{2,0} = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0 \wedge \bar{z}_1 \wedge z_0) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_0 \wedge \bar{z}_1 \wedge z_0) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_0 \wedge z_1 \wedge \bar{z}_0);$$

$$y_{1,1} = x_1 \wedge \bar{x}_0 \wedge \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_0;$$

$$y_{1,0} = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0 \wedge z_1 \wedge \bar{z}_0) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_0 \wedge \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_0) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_0 \wedge z_1 \wedge \bar{z}_0) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_0 \wedge z_1 \wedge z_0).$$

Kai kurias iš šių funkcijų galima supaprastinti. Dar paprastesnį šios Tiūringo mašinos analizinį modelį gautume, pasinaudodami dalinių loginių funkcijų minimizavimo metodu (žiūr. 1.16.1.4.10. skyrelį). Tuomet gautume, jog $z_1(t+1) = x_0(t) \wedge [z_1(t) \vee z_0(t)]$, $z_0(t+1) = \bar{x}_0(t) \wedge z_0(t)$, $y_{2,1} = 0$, $y_{2,0} = z_0 \vee (x_0 \wedge z_1)$, $y_{1,1} = x_1 \wedge \bar{z}_1$, $y_{1,0} = z_1 \vee (x_0 \wedge \bar{z}_0)$.

Kadangi 15-oje lentelėje rimties būseną q_0 atitinkantis stulpelis nėra informatyvus, nes toje būsenoje nieko nevyksta ir niekas nesikeičia, tai Tiūringo mašinos modelyje tas stulpelis paprastai nevaizduojamas. Tuomet iš 15-sios lentelės gauname 21-ją lentelę.

21. lentelė

$s \backslash q$	q_1	q_2
s_0	s_0q_1D	s_1q_0S
s_1	s_0q_2D	s_1q_2D
s_2		s_1q_0S

22. lentelė

$s \backslash q$	q_1	q_2
0	$0q_1D$	$1q_0S$
1	$0q_2D$	$1q_2D$
+		$1q_0S$

Kaip matyti iš tos lentelės, Tiūringo mašina, būdama pradinėje būsenoje q_1 , gali pradėti veikti tik tais atvejais, kada jos galvutė stovi virš ląstelės su įrašytu joje simboliu s_0 arba s_1 .

Pirmuoju atveju esantis ląstelėje įrašas nekeičiamas (paliekamas įrašas s_0), valdymo įrenginio būseną q_1 taip pat nesikeičia, o galvutė pereina į kaimyninę ląstelę, esančią dešinėje, kad naujame takte perskaitytų ten esantį simbolį.

Antruoju atveju galvutė pakeičia simbolį s_1 į simbolį s_0 , valdymo įrenginys keičia savo būseną q_1 į būseną q_2 ir perveda galvutę į dešinėje esančią kaimyninę ląstelę.

Nagrinėjamoji Tiūringo mašina negali pradėti darbo, kai pradinėje būsenoje po galvutės yra simbolis s_2 , nes toje būsenoje mašina to simbolio „nesupranta“ ir todėl „nežino“, kaip elgtis. Tai ir vaizduoja tuščias lentelės langelis.

Jei juostoje bus surašyti vienas po kito tik simboliai s_0 , tai mašina, nekeisdama savo pradinės būsenos ir juostoje užrašytų simbolių, taktas po takto slinks į dešinę, kol nesutiks simbolio s_1 . Tuomet ji pakeis tą simbolį į s_0 , pereis į būseną q_2 ir dar kartą pastums galvutę į dešinę. Jei, pasislinkus į dešinę, vėl surandamas simbolis s_1 , tai jis paliekamas nepakeistas, nesikeičia ir valdymo įrenginio būseną, tik galvutė pasislenka į dešinę. Ir taip ji slenka iki tol, kol sutinka simbolį s_2 arba s_0 . Kai sutinka simbolį s_2 , tai jį pakeičia į simbolį s_1 , pereina į rimties būseną q_0 ir sustoja. Tą patį mašina daro ir sutikusi simbolį s_0 .

Tarkime, jog simboliai s_0 – tai nuliai, simboliai s_1 – vienetai, o simbolis s_2 reiškia ženklą „+“, ir tarkime, jog juostoje užrašyta tokia simbolių seka 0001111+11100... Perėję prie tokių simbolių, iš 21-sios lentelės, ją konkretizuodami, gausime 22-ją lentelę. Pažiūrėsime koks bus mūsų nagrinėjamos Tiūringo mašinos veikimo rezultatas šiuo atveju.

Būdama pradinėje būsenoje q_1 , mašina, perskaičiusi pirmąjį nulį, pasislinks į dešinę nekeisdama nei ženklo, nei savo būsenos. Suradusi antrąjį nulį, ji padarys tą patį. Tą patį padarys ir suradusi trečiąjį nulį. Užslinkusi ant pirmojo vieneto, mašina pakeis jį į 0, pakeis savo būseną į q_2 ir pasislinks į dešinę. Ten suradusi antrąjį vieneta, mašina paliks jį nepakeistą ir, nepakeitusi savo būsenos, vėl pastums galvutę į dešinę. Taip pat pasielgs su trečiuoju ir su ketvirtuoju vienetais. Užslinkusi ant ženklo „+“, mašina pakeis jį į vieneta, pereis į rimties būseną ir sustos. Juostoje gausime mašinos veikimo rezultatą – nulį ir vienetų seką: 000011111100... Taigi, vietoj sekos 0001111+11100..., reiškiančios kad prie 4 vienetų reikia pridėti 3 vienetus, gavome seką iš 7 vienetų, reiškiančią vienetainėje sistemoje 3 ir 4 sumą. Tai reiškia, kad ši Tiūringo mašina sugeba rasti dviejų sveikų teigiamų skaičių, užrašytų vienetainėje sistemoje, sumą. Tuo nesunku įsitikinti, pervedus mašiną į pradinę būseną ir pateikus jai juostą su kita užduotimi, pavyzdžiui, 0011+11100... Jei pradinėje užduotyje būtų užrašytas tik vienas skaičius, pavyzdžiui, 00111100... be pliuso ženklo, tai mūsų aprašytoji Tiūringo mašina, pakeitusi pirmąjį jo vienetą nuliu, parašytų visus kitus vienetus, ir sutikus pirmąjį nulį, pakeistų jį vienetu, sustodama ir pereidama į rimties būseną. Juostoje gautume tą patį vienetukų skaičių, tik pastumtą viena skiltimi į dešinę: 00011110...

Čia aprašytoji Tiūringo mašina suranda dviejų sveikų ir teigiamų skaičių sumą ne visai standartiniu būdu, priimtu Tiūringo mašinų teorijoje. Veikdama standartiniu būdu, ji turėjo palikti dėmenis savo vietoje, atskirtus vienas nuo kito vienu nuliu ir po to, praleidusi vieną nulį, užrašyti sudėties rezultatą vienetainėje sistemoje, sustodama virš paskutinio sumos vieneto, t. y. mūsų nagrinėtoju atveju turėjo palikti juostoje užrašą: 00011110111011111100... Palieku skaitytojai pačiam „sukonstruoti“ tokią Tiūringo mašiną, t. y. sudaryti tokią jos perėjimų ir išėjimų funkcijų lentelę, kuri galėtų „gaminti“ tokius užrašus (ar net užrašus: 001111+111=111111100...). Žinoma, tokios mašinos būsenų erdvė privalės turėti daugiau taškų, negu mūsų nagrinėjamoji Tiūringo mašina, ir tokios mašinos modelis bus šiek tiek sudėtingesnis. Jei skaitytojas, spėsdamas šį uždavinį, susidurtų su sunkumais, kurių nepajėgtų įveikti, tai rekomenduojau jam pasiskaityti šios mokymosi priemonės 1.10.6. skyrelį, kuriame aprašytos tipinės Tiūringo mašinos ir jų jungimo į sudėtingesnes konstrukcijas būdai.

Kokia sudėtinga bebūtų procedūra su sveikais skaičiais, t. y. kokią sveikaskaitinę funkciją beturėtume, visuomet galima „sukonstruoti“ tokią Tiūringo mašiną, kuri galėtų per baigtinį žingsnių

skaičių apskaičiuoti tos funkcijos reikšmę, panašiai, kaip mūsų ką tik nagrinėtoji mašina apskaičiuavo dviejų sveikų teigiamų skaičių sumą. Tai ir leidžia suformuluoti tokį algoritmo sąvokos apibrėžimą: **algoritmu vadinama bet kokia procedūra, kuri gali būti suvesta į sveikaskaitinės funkcijos reikšmių apskaičiavimą atitinkamai sudaryta Tiūringo mašina.** Kai pavyksta įrodyti, kad kokios tai problemos sprendimas negali būti realizuotas Tiūringo mašina, kitaip tariant, kad negali būti sukonstruota Tiūringo mašina, kuri sugebėtų tokias problemas spręsti, tai reiškia, jog **negali būti surastas bendras algoritmas tai problemai spręsti.** Tačiau tai nereiškia, jog tam tikrais konkrečiais atvejais negali būti surastas (na, pavyzdžiui, kad ir atspėtas) tos problemos koks nors **dalinis, tą konkretų atvejį atitinkantis, sprendinys.** Tai reiškia tik tai, kad šiuo atveju **negalima sukurti tokios bendros procedūros, kuria naudodamiesi, visada galėtume išspręsti bet kokią tos klasės uždavinį.** Kitaip tariant, egzistuoja problemos, kurių sprendimas negali būti algoritmizuotas ir po to – automatizuotas, ir tai galima nustatyti, naudojantis matematine konstrukcija, kurią tam tikslui sugalvojo Alanas Tiūringas: jei pavyksta įrodyti, jog negali būti sukonstruota Tiūringo mašina, sugebanti per baigtinį žingsnių skaičių patekti į būseną, atitinkančią nagrinėjamojo uždavinio sprendinį, tai reiškia, kad tokios klasės uždaviniams bendras jų sprendimo algoritmas neegzistuoja.

Šiame skyrelyje aprašyta determinuota Tiūringo mašina ir jos taikymai. Nagrinėjant skaičiavimo algoritmų sudėtingumą ir sudėtingų uždavinių principinio išsprendžiamumo-neišsprendžiamumo problemą, naudojamos ir nedeterminuotos Tiūringo mašinos koncepcija. Tiūringo mašinų vidinių modelių sudarymui skiriamas 1.10.6. skyrelis, o apie determinuotų ir nedeterminuotų Tiūringo mašinų taikymą bus kalbama dar ir 1.6.4.13. skyrelyje.

1.4.8. Elektromagnetinių virpesių kontūro išorinis matematinis modelis

Apie elektromagnetinių virpesių kontūrą jau buvo kalbėta „Įvade“, aprašant sistemų ir procesų izomorfizmo reiškinį. Elektromagnetinius virpesius jau esame nagrinėję ir 1.3. skyriuje (žiūr. 10, 12 ir 13 pav). Dabar sudarysime elektromagnetinių virpesių kontūro, pavaizduoto 43 pav. (žiūr. 1.7.7.2. skyrelį), matematinį išorinį modelį.

Kontūro įėjimas $x(t)$ yra lygus $E(t)$, kur $E(t)$ – elektros energijos šaltinio, maitinančio tą kontūrą, elektros varomoji jėga (e.v.j.). Ji matuojama voltais ir gali būti pastovi (pavyzdžiui, $E(t)=E_0=\text{const}$), tačiau gali būti ir kintama (pavyzdžiui, $E(t)=E_0\sin\omega t$, kur ω – ciklinis elektros įtampos svyravimų dažnis, t. y. $\omega=\frac{2\pi}{T}$, kur T – tų svyravimų periodo trukmė, matuojama sekundėmis, E_0 – tų svyravimų amplitudė).

Elektromagnetinių virpesių kontūro išėjimas $y(t)$ yra elektrinė įtampa tarp kontūro išėjimo polių, pajungtų lygiagrečiai (žiūr. 43 pav.) su kondensatorium, turinčiu elektrinę talpą C , matuojamą faradais.

Kaip jau matėme 1.3. skyriuje, kontūro būseną yra vektorius $\vec{z}(t)$, turintis dvi koordinates: $\vec{z}(t)=(z_1(t), z_2(t))$. Koordinate $z_1(t)$ pasirinksiame kondensatoriaus įtampą $u_c(t)$, o koordinate $z_2(t)$ – elektros srovės (kontūre) dydį (stiprumą) $i(t)$, kuris yra proporcingas koordinatės $z_1(t)$ išvestinei.

Kontūre vykstančių procesų kalendorius yra tolydus. Pasirinksime laiko atkarpą, kuri būtų žymiai ilgesnė už jau minėtąjį svyravimų periodą T . Tos laiko atkarpos pradžią laikysime momentą $t=t_0=0$.

Išėjimo funkcija $y=\varphi(x, \vec{z})$ šiuo atveju bus labai paprasta: $y=z_1$. Šią lygybę gauname iš lygybės $u_{\text{išėj.}}=u_c$.

Perėjimo funkcijos diferencialinė forma $\frac{d\vec{z}(t)}{dt}=\vec{f}(x(t), \vec{z}(t))$ bus šiek tiek sudėtingesnė. Ją sudarys dvi skaliarinės funkcijos: $\frac{dz_1(t)}{dt}=f_1(x(t), \vec{z}(t))$ ir $\frac{dz_2(t)}{dt}=f_2(x(t), \vec{z}(t))$.

Funkciją $f_1(x(t), \vec{z}(t))$ gausime iš lygybės $z_1(t)=u_c(t)=\frac{q_c(t)}{C}$. Tuomet $\frac{dz_1(t)}{dt}=\frac{1}{C}\frac{dq_c(t)}{dt}=\frac{1}{C}i(t)=\frac{z_2(t)}{C}$. Vadinasi, $f_1(x(t), \vec{z}(t))=\frac{z_2(t)}{C}$ ir tiesiogiai priklauso tik nuo $z_2(t)$.

Funkciją $f_2(x(t), \vec{z}(t))$ gausime iš lygybės $u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$, kur $u_L(t)$ – potencialų skirtumas galuose ritelės, turinčios induktyvumą L , matuojamą henriais, ir praktiškai neturinčios aktyvios varžos.

$$\text{Iš tos formulės išplaukia, jog } \frac{dz_2(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt} = \frac{u_L}{L} = \frac{u_{i\dot{e}j.} - u_C - u_R}{L} = \\ = \frac{x(t) - z_1(t) - R \cdot i(t)}{L} = \frac{x(t) - z_1(t) - R \cdot z_2(t)}{L}. \text{ Vadinasi, } f_2(x(t), z_2(t)) = \frac{x(t) - z_1(t) - R z_2(t)}{L}.$$

Iš šio išorinio matematinio modelio, eliminuojant $z_1(t)$ ir $z_2(t)$, galima gauti diferencialinę lygtį, išreiškiančią išėjimo $y(t)$ priklausomybę tik nuo įėjimo $x(t)$.

$$\text{Kadangi } y(t)=z_1(t), \text{ tai iš lygybės } \frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{z_2(t)}{C} \text{ gauname: } z_2(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \text{ ir} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d^2 z_1(t)}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{dz_2(t)}{dt} = \frac{x(t) - y(t) - RC \frac{dy(t)}{dt}}{LC}, \text{ iš kur išplaukia diferencialinė lygtis} \\ LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t).$$

Šią lygtį taip pat galima laikyti proceso, vykstančio elektromagnetinių virpesių kontūre, matematiniu modeliu, kuriame neišreikštinėje formoje atvaizduota išėjimo $y(t)$ priklausomybė nuo įėjimo $x(t)$.

Žinodami virpesių kontūro išorinį matematinį modelį, jo pradinę būseną $\bar{z}(0) = (z_1(0); z_2(0)) = (u_c(0); i(0))$ ir įėjimo trajektoriją $x(t)$, mes galime panašiai, kaip tai darėme diferencijavimo grandelės ir hidrodinaminės sistemos atveju, apskaičiuoti elektromagnetinių virpesių kontūro fazinę ir išėjimo trajektorijas. Tai bus padaryta 1.11.10. skyrelyje, kuriame bus išnagrinėtas atvejis, kai $x(t)=E_0=\text{const.}$, ir atvejis, kai $x(t)=E_0 \sin \omega t$, esant įvairioms parametrų R , L ir C reikšmėms.

Čia apsiribosiu tik pastaba, jog to nagrinėjimo metu bus gauti gana įdomūs rezultatai, paaiškinantys eilę reiškinių, būdingų daugeliui pirmojo tipo sistemų, nepriklausomai nuo to, ar jos yra techninės, ar organizminės, ar organizacinės.

Visų pirma gausime, jog elektrograndinėje, sudarytoje iš kondensatoriaus, induktyvumo ritelės ir rezistoriaus, kurio varža R pakankamai maža ($R < \sqrt{\frac{L}{C}}$), prijungiant tą grandinę prie nuolatinės (pastovios) e.v.j. šaltinio, prasidės elektros srovės stiprio svyravimo procesas, turintis pastovų ciklinį dažnį $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Tie svyravimai, kuriuos mes vadinsime **nuosavais svyravimais**, bus silpstantys svyravimai ir po kurio laiko užges. Tačiau, jei varža R artėtų prie 0, tai tų svyravimų trukmė artėtų prie $+\infty$, o jų ciklinis dažnis ω_0 – prie $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (t. y. tų svyravimų periodas T – prie $2\pi\sqrt{LC}$).

Siūlyčiu skaitytojui pamąstyti, **kodėl daugelyje pirmojo tipo sistemų, įvykus kokiems nors pasikeitimams, atsiranda svyravimai.**

Antras įdomus reiškinys, kuris būdingas virpesių kontūrai (ir daugeliui pirmojo tipo sistemų) – tai **rezonansas**. Jis atsiranda, kai įėjimo įtampos $u_{i\dot{e}j.}=E_0 \sin \omega t$ svyravimų (**išorinių svyravimų, priverstinių svyravimų**) dažnis ω sutampa arba tampa pakankamai artimas virpesių kontūro nuosavų svyravimų dažniui ω_0 . Įdomų rezonanso reiškinį gamybos ir prekybos sistemoje mes nagrinėsime antrojoje šios mokymosi priemonės dalyje, eksperimentuodami su Foresterio dinaminės sistemos imitaciniu modeliu.

Detaliau procesų, vykstančių elektromagnetinių virpesių kontūre, nagrinėjimui, kaip jau buvo minėta, skiriamas gana didelės apimties 1.11.10. skyrelis.

1.4.9. Dinaminės sistemos ir jų išoriniai matematiniai modeliai

Dinaminės sistemos sąvoka, apie kurią jau kalbėjome šio skyriaus pradžioje, tiesa, dar ne tokia abstrakti ir apibendrinanti ir todėl ne tokia plati savo apimtimi, kaip dabar priimta sistemų teorijoje, susiformavo žymiai anksčiau negu pati sistemų teorija. Ši sąvoka susiformavo klasikinėje mechanikoje, nagrinėjant **mechaninių sistemų** (t. y. materialinių taškų, kietųjų kūnų ir iš tų taškų bei kūnų sudarytų sistemų) judėjimą, veikiant išorinėms bei vidinėms (mechaninės sistemos dalių sąveikavimo) jėgoms, t. y. vykstant sistemos potencialinės energijos perėjimams į kinetinę ir atvirkštiniam perėjimams.

Kuriant matematinius modelius, aprašančius tokių sistemų ir jų elementų judėjimą, buvo įsitikinta, jog **patogu ir tikslinga įsivesti tokią mechaninės sistemos elementų padėtį ir judėjimą**

aprašanti vektorinę charakteristiką, nuo kurios koordinačių reikšmių pilnai (t. y. vienareikšmiškai) priklausytų visi toje sistemoje vykstantys judėjimai bei įvykstantys pokyčiai:

1) pokyčiai mechaninę sistemą sudarančių materialinių taškų bei kūnų išsidėstyme fizinėje erdvėje vienas kito atžvilgiu, apibūdinami tų taškų bei kūnų erdvinių koordinačių pokyčiais, pavadinti pokyčiais **mechaninės sistemos konfigūracijoje**, ir 2) pokyčiai tų taškų bei kūnų judėjimo greičių pasiskirstyme toje mechaninėje sistemoje įsivestos koordinačių sistemos atžvilgiu, pavadinti pokyčiais **mechaninės sistemos kinematikoje**.

Minėtoji charakteristika, susidedanti: 1) iš sistemos materialinių taškų $i=1,2,\dots,n$ erdvinių vektorių koordinačių x_i, y_i, z_i reikšmių, vaizduojančių tų taškų išsidėstymą fizinėje erdvėje (t. y. sistemos konfigūraciją), 2) ir tų taškų greičių projekcijų $v_{ix}=\frac{dx_i}{dt}, v_{iy}=\frac{dy_i}{dt}, v_{iz}=\frac{dz_i}{dt}$ reikšmių duotuoju laiku t , aprašančių tų taškų judėjimą (t. y. sistemos kinematiką), buvo įsivesta ir pavadinta „**dinaminės sistemos judėjimo fazė**“ (arba trumpiau – tiesiog „fazė“).

Epitetas „**dinaminė**“, kuris yra kilęs iš graikiško žodžio „dynamis“, reiškiančio „jėgą“, čia buvo pavartotas todėl, kad būtų pabrėžta, jog **mechaninės sistemos konfigūracija ir kinematika bei pokyčiai jose priklauso nuo jėgų, veikiančių į sistema bei jos viduje**.

Žodis „**fazė**“ čia yra tik trumpesnis sąvokos „**dinaminės sistemos būseną stebimuoju momentu t** “ pavadinimas. Ši sąvoka aprėpia ir mechaninės sistemos konfigūracijos, ir tos sistemos kinematikos sąvokas. Kartais žodis „fazė“ vartojamas ir šiek tiek siauresne prasme. Tai bus aptariama vėliau, nagrinėjant elektrodinamines sistemas. **Nagrinėjant mechanines sistemas, sąvoka „fazė“ visada bus suprantama aukščiau apibrėžta būsenos momentu t prasme.**

Naudodamiesi 1.3. skyriuje priimtais žymenimis, mechaninės sistemos fazę žymėsime kintančiu laike hierarchiniu vektoriumi $\vec{z}(t) = (\vec{z}_1(t), \vec{z}_2(t))$, susidedančiu iš vektorių $\vec{z}_1(t)$ ir $\vec{z}_2(t)$. Čia raidės $\vec{z}, \vec{z}_1$ ir $\vec{z}_2$ žymi nagrinėjamos sistemos būseną (žiūr. šios mokymosi priemonės 1.3. skyrių, kuriame buvo įsivesti tokie žymenys).

Vektorius $\vec{z}_1(t)$ aprašo mechaninės sistemos konfigūraciją momentu t , t. y. tą sistemą sudarančių elementų i koordinačių x_i, y_i, z_i reikšmes pasirinktoje koordinačių sistemoje. Kai mechaninė sistema susideda iš n elementų, tai $\vec{z}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t); x_2(t), y_2(t), z_2(t); \dots; x_n(t), y_n(t), z_n(t))$ turi $3n$ skaliarinių koordinačių. Kadangi žymenys x_i, y_i, z_i – mechaninės sistemos elemento i dekartinės koordinatės, vaizduojančios to elemento padėtį trimatėje erdvėje, tai atsiranda kolizijos galimybė, nes raide z žymimi du skirtingi dalykai: sistemos būseną ir materialinio taško aplikatę. Todėl, norint išvengti kolizijos, kiekvieną kartą būtina atsižvelgti į kontekstą.

Vektoriaus $\vec{z}_1$ reikšmės, kurias jis įgyja keičiantis laikui t , sudaro **vektorinės laiko funkcijos $\vec{z}_1 = \vec{z}_1(t)$ grafiką, vaizduojantį mechaninės sistemos konfigūracijos kitimą laikui bėgant**.

Vektorius $\vec{z}_2(t)$ aprašo sistemos kinematiką. Jį sudaro mechaninės sistemos elementų i greičių $\vec{v}_i$ projekcijos v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} . Kai mechaninę sistemą sudaro n elementų, tai vektorius $\vec{z}_2(t) = (v_{1,x}(t), v_{1,y}(t), v_{1,z}(t); v_{2,x}(t), v_{2,y}(t), v_{2,z}(t); \dots; v_{n,x}(t), v_{n,y}(t), v_{n,z}(t))$ turi taip pat $3n$ koordinačių – laiko t funkcijų, įgyjančių atitinkamas kiekybines reikšmes kiekvienu momentu t . Vektoriaus $\vec{z}_2$ reikšmės, kurias jis įgyja keičiantis laikui t , sudaro **vektorinės laiko funkcijos $\vec{z}_2 = \vec{z}_2(t)$ grafiką, vaizduojantį mechaninės sistemos kinematikos kitimą laikui bėgant**.

Hierarchinio vektoriaus $\vec{z} = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ reikšmės, kurias jis (jo koordinatės) įgyja keičiantis laikui t , sudaro **hierarchinės vektorinės laiko funkcijos $\vec{z}(t) = (\vec{z}_1(t), \vec{z}_2(t))$ grafiką, vadinamą mechaninės sistemos fazine trajektorija**.

Visų galimų mechaninės sistemos fazinių trajektorių taškų aibė $(6n+1)$ matavimų erdvėje $Z_1 \times Z_2 \times T$ sudaro tos mechaninės sistemos **fazinę erdvę***.

Mechaninės sistemos visų galimų **fazinių trajektorių projekcija** į $6n$ matavimų erdvę $Z_1 \times Z_2$, vadinamą mechaninės sistemos **būsenų erdve**, yra vadinama **dinaminės sistemos faziniu portretu būsenų erdvėje**. Jis yra gaunamas eliminuojant iš lygčių sistemos $\begin{cases} \vec{z}_1 = \vec{z}_1(t), \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_2(t), \end{cases}$ sudarytos iš $6n$

* Mechanikoje ir, bendrai, fizikoje, **fazinė erdve** dažnai vadina $6n$ matavimų erdvę $Z_1 \times Z_2$, kurią sistemų teorijoje vadina **būsenų erdve**. Manau, kad sistemų teorijoje vartojama terminologija yra racionali, nes joje terminai sudaro nuoseklią antrojo tipo sistemą. Šioje mokymosi priemonėje mes laikysimės būtent šios terminologijos.

skaliarinių lygčių ir apibrėžtos $6n+1$ matavimų fazinėje erdvėje, laiką t ir surandant matematiškai išreikštą tiesioginį sąryšį tarp vektorių $\vec{z}_1$ ir $\vec{z}_2$ koordinačių reikšmių (pavyzdžiui, sudarant lygčių sistemą), $\vec{0}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \vec{0}$, apibrėžtą $6n$ matavimų būsenų erdvėje).

Kokios nors vienos fazinės trajektorijos $\vec{z}(t)$ projekcija į būsenų erdvę vadinama **fazinės trajektorijos portretu būsenų erdvėje**.

Kai mechaninėje sistemoje pasikeičia jos elementų padėtis (t.y. pasikeičia sistemos konfigūracija, o kartu – ir potencialinės energijos pasiskirstymas sistemoje) ar/ir tų elementų judėjimo greičiai (t.y. pasikeičia sistemos kinematika, o kartu – ir kinetinės energijos pasiskirstymas sistemoje), tai sakoma, jog sistema pakeitė savo būseną – **perėjo iš vienos fazės į kitą**.

Pavyzdžiui, kai Mėnulis, sukdamasis aplink Žemę, kuri pati sukasi aplink Saulę, keičia savo padėtį Žemės ir Saulės atžvilgiu, dėl ko pasikeičia mums matomos jo apšviestos dalies forma, mes sakome, jog keičiasi Mėnulio fazė: „jaunas Mėnulis“ pereina į „pilnatį“, pastaroji – į „delčią“, po to – „sudilęs“ Mėnulis vėl tampa „jaunu“ ir vėl viskas kartojasi.

Stebėdami svambalo (švytuoklės) svyravimus, t.y. švytuoklės būsenos pokyčius, mes sakome, jog švytuoklė pereina iš vienos svyravimų fazės į kitą. Tuos perėjimus galima aprašyti vektorine funkcija $\vec{z}(t) = (\vec{z}_1(t), \vec{z}_2(t))$ – švytuoklės svyravimų fazinė trajektorija, matematiškai modeliuojančia tuos svyravimus. Vektorinė funkcija $\vec{z}_1(t) = (x(t), y(t), z(t))$ aprašo švytuoklės padėties trimatėje erdvėje kitimo grafiką (padėties kitimo, laikui bėgant, trajektoriją), o funkcija $\vec{z}_2(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ – švytuoklės judėjimo greičio $\vec{v}$ projekcijų kitimo grafiką.

Šiame skyrelyje, tik šiek tiek vėliau, bus parodyta, kaip apskaičiuojama švytuoklės fazinė trajektorija ir surandamas jos portretas.

Dinaminės sistemos ir jos fazės sąvokos taikomos ne tik mechanikoje, bet ir elektromechanikoje bei radiotechnikoje. Ten tokios sistemos buvo pavadintos **elektrodinaminėmis**, kadangi tose sistemose veikia ne mechaninės, o elektrinės jėgos, keičiančios tų sistemų būsenas.

Šios mokymosi priemonės 1.3. skyriuje mes nagrinėjome procesus P_1 ir P_2 , matematiškai aprašydami 10 pav. pavaizduotų elektros grandinių būsenas ir jų kitimą.

Procesas P_1 – tai kondensatoriaus, turinčio talpą C , pakrovimo procesas, vykstantis per rezistorių, turintį varžą R_1 , nuo elektros šaltinio, turinčio pastovią įtampą U_0 ir labai mažą vidinę varžą r , kurią galima laikyti praktiškai lygia 0. Tokio proceso būsenos atvaizdavimui, kaip buvo nustatyta 1.3. skyriuje, pakanka vienos koordinatės, pavyzdžiui, įtampos u_c tarp kondensatoriaus polių. Todėl proceso

P_1 fazinė trajektorija yra skaliarinė funkcija $z_1(t) = u_c(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right)$. Jos grafikas pateiktas

11 pav. To grafiko taškai plokštumoje $U_C \times T$ yra proceso P_1 fazių atvaizdai – proceso P_1 fazinė trajektorija. Jos portretas – atkarpa $[z=0, z=U_0]$.

Procese P_2 veikia ne tik elektrostatinės, bet ir elektromagnetinės jėgos, nes, jam vykstant, vyksta ne tik elektrostatinio lauko, susidarančio kondensatoriuje, bet ir elektromagnetinio lauko, susidarančio aplink riteį, kurios laidais teka kintama elektros srovė, pokyčiai. Šio proceso (ir grandinės $C R_2 L$) būseną galima aprašyti įvairiais būdais, pasirenkant dvi to proceso charakteristikas būsenos vektoriaus $\vec{z}$ koordinatėmis z_1 ir z_2 . Nagrinėdami procesą P_2 1.3. skyriuje, buvome pasirinkę $z_1 = u_c$, $z_2 = i$.

Spręsdami iš lygybės $u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$ išplaukiančią diferencialinę lygtį $LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$, esant pradinėms sąlygoms $z_1(0) = u_C(0) = U_0$ ir $z_2(0) = i(0) = 0$, kai proceso P_2 parametrai C , R_2 ir L yra tokie, jog $R_2^2 C^2 \neq 4LC$, gavome tokias $z_1(t)$ ir $z_2(t)$ reikšmes: $z_1(t) = u_C(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$ ir $z_2(t) = i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(C_1 k_1 e^{k_1 t} + C_2 k_2 e^{k_2 t})$.

Šiose formulėse $k_{1,2} = \frac{-R_2 C \mp \sqrt{R_2^2 C^2 - 4LC}}{2LC}$, $C_{1,2} = \frac{U_0}{2} \left(1 \mp \frac{R_2 C}{\sqrt{R_2^2 C^2 - 4LC}} \right)$.

Todėl $\vec{z}_1(t) = U_0 \left[\frac{e^{k_2 t} + e^{k_1 t}}{2} + \frac{R_2 C}{\sqrt{R_2^2 C^2 - 4LC}} \cdot \frac{e^{k_2 t} - e^{k_1 t}}{2} \right]$ ir $\vec{z}_2(t) = -\frac{U_0 C}{\sqrt{R_2^2 C^2 - 4LC}} \times$

$$\times (e^{k_2 t} - e^{k_1 t}).$$

Kai $R_2^2 C^2 = 4LC$ (ir todėl $k_1 = k_2 = -\frac{R_2}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} = k_0$), tai $z_1(t) = u_C(t) =$
 $= U_0 e^{k_0 t} (1 - k_0 t) = U_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} (1 + \frac{R_2}{2L} t) = U_0 e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} (1 + \frac{t}{\sqrt{LC}}), z_2(t) = i(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$

Kai $R_2^2 C^2 < 4LC$, t. y., kai $R_2 < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, tai $\sqrt{R_2^2 C^2 - 4LC} = i\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}$ yra menamas dydis ir todėl grandinėje CR^2L atsiranda elektromagnetiniai svyravimai.

$$\begin{aligned} \text{Tuomet } k_{1,2} &= \frac{-R_2 C \mp i\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} = -\frac{R_2}{2L} \mp i\frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} = \\ &= -\frac{R_2}{2L} \mp i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{2L}\right)^2} = -\frac{R_2}{2L} \mp i\omega, C_{1,2} = \frac{U_0}{2} \left[1 \mp \left(\frac{R_2 C}{i\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \right) \right] \text{ ir} \\ z_1(t) = u_C(t) &= \frac{U_0}{2} e^{-\frac{R_2}{2L} t} \left[\left(1 - \frac{R_2 C}{i\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \right) e^{-i\omega t} + \left(1 + \frac{R_2 C}{i\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \right) e^{i\omega t} \right] = \\ &= U_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{R_2 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right] = U_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} \left[\cos \omega t + \frac{R_2 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \sin \omega t \right] = \\ &= U_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega t \right] = U_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} \frac{2\sqrt{LC}}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2\sqrt{LC}} \cos \omega t + \frac{R_2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega t \right] = U_0 \frac{2\sqrt{LC}}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} e^{-\frac{R_2}{2L} t} [\sin \psi \cos \omega t + \cos \psi \sin \omega t] = \\ &= A \sin(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Gautoji formulė rodo, jog šiuo atveju kondensatoriaus įtampa $z_1(t) = u_C(t)$ periodiškai svyruos su cikliniu dažniu $\omega = \frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, t. y. su svyravimų periodu $T = \frac{2\pi}{\omega} =$
 $= \frac{4\pi LC}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}$. Svyravimų amplitudė $A = U_0 \frac{2\sqrt{LC}}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} e^{-\frac{R_2}{2L} t}$ eksponentiškai mažės, ir svyravimai galų gale užges, nes $\lim_{t \rightarrow \infty} A = 0$. Taip atsitiks todėl, kad dėl varžos $R_2 > 0$ egzistavimo kondensatoriaus elektrostatinė („potencialinė“) ir ritelės elektromagnetinė („kinetinė“) energija ilgainiui virs šilumine ir išsisklaidys.

Dydis $\psi = \arctg \sqrt{\frac{4LC - R_2^2 C^2}{R_2 C}}$ fizikoje vadinamas sinusoidinių **svyravimų pradine faze**, o dydis $\omega t + \psi = \frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} t + \arctg \frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{R_2 C}$ vadinasi šių **svyravimų faze momentu t**.

Kadangi $z_2(t) = i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, tai $z_2(t) = i(t) = C \frac{dz_1(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} \left[U_0 e^{-\frac{R_2}{2L} t} \left(\cos \omega t + \frac{R_2 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \sin \omega t \right) \right] = U_0 C e^{-\frac{R_2}{2L} t} \left[-\frac{R_2}{2L} \left(\cos \omega t + \frac{R_2 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \sin \omega t \right) + \left(-\omega \sin \omega t + \frac{R_2 C \omega}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \cos \omega t \right) \right] =$

$$= U_0 C e^{-\frac{R_2}{2L}t} \left[\cos \omega t \left(-\frac{R_2}{2L} \cdot \frac{R_2 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \cdot \frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} \right) + \sin \omega t \left(-\frac{R_2}{2L} \cdot \frac{R_2 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} - \frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} \right) \right] =$$

$$= -U_0 C e^{-\frac{R_2}{2L}t} \cdot \frac{R_2^2 C^2 + 4LC - R_2^2 C^2}{2LC \sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} \sin \omega t = -\frac{2U_0 C}{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}} e^{-\frac{R_2}{2L}t} \sin \omega t.$$

Kaip matyti iš šios formulės, elektros srovės stipris $z_2(t)=i(t)$ taip pat svyruos su tuo pačiu cikliniu dažniu ω (vadinasi, ir su tuo pačiu periodu T) kaip ir kondensatoriaus įtampa $z_1(t)=u_C(t)$, tačiau su šiek tiek skirtinga eksponentiškai mažėjančia amplitude ir skirtinga faze. Pradinė elektros srovės stiprio $i(t)$ svyravimų fazė šiuo atveju yra lygi 0. Tai atitinka pradinę sąlygą $i(0)=0$. Jei pradinis srovės stipris būtų buvęs nelygus 0, tai ir pradinė jos svyravimų fazė būtų buvusi nelygi 0.

Kaip matome, nagrinėjant elektrodinaminę sistemą, **terminas „fazė“ buvo pavartotas**, nors ir artima anksčiau įvestos sąvokos „dinaminės sistemos fazė“ prasmei, tačiau **šiek tiek kita prasme**:

„fazė“ buvo pavadintas ne vektorius $\vec{z}(t)=(z_1(t), z_2(t))=(u_C(t), i(t))$, o kampas $\omega t + \psi = 2\pi \frac{t}{T} + \psi$, kuris šiuo

atveju yra lygus $\frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{2LC} t + \arctg \frac{\sqrt{4LC - R_2^2 C^2}}{R_2 C}$.

Šios sąvokos – vektorius $\vec{z}(t)$ ir kampas $\omega t + \psi$ – nėra ekvivalenčios: žinodami fazę $\vec{z}(t)=(z_1(t), z_2(t))$ mes visada galime rasti „fazę“ $\omega t + \psi$, o „fazės“ $\omega t + \psi$ žinojimas ne visada yra pakankamas fazės $\vec{z}(t)=(z_1(t), z_2(t))=(u_C(t), i(t))$ apskaičiavimui.

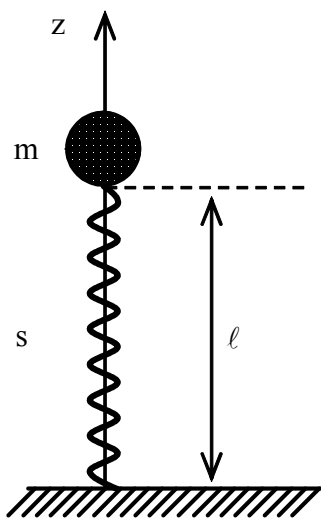
Kaip jau buvo pabrėžta anksčiau, **nagrinėdami mechanines dinamines sistemas mes laikysime anksčiau įsivesto apibrėžimo, jog fazė – tai sistemos būseną momentu t** . Bet kartu su tuo prisiminsime, jog, skaitydami literatūrą, skirtą elektrotechnikai bei radiotechnikai, galime susidurti ir su šio termino vartojimu, nors ir artima, bet šiek tiek kitokia prasme, reiškiančia **būsenų erdvėje besisukančio būsenos vektoriaus $\vec{z}_1$ posūkio kampą $\omega t + \psi$ momentu t** .

Pailiustruosiu šiame skyrelyje įvestų dinamines sistemas charakterizuojančių sąvokų esmę ir jų taikymą, išnagrinėdamas labai paprastą konkrečią mechaninę sistemą, susidedančią iš stangrios spyruoklės s , užmautos ant vertikalaus virbo, kurio apatinis galas kartu su spyruoklės apatiniu galu pritvirtintas prie nejudančios horizontalios plokštės, ir masyvaus rutuliuko, turinčio masę m , simetriškai užmauto ant to virbo ir uždėto ant spyruoklės viršutinio galo (žiūr. 22 pav.).

Šis pavyzdėlis kartu bus ir **konkrečios mechaninės dinaminės sistemos, jos matematinio modelio sudarymo ir dinaminės sistemos judėjimo sisteminės analizės pavyzdys**.

Tarkime, kad rutuliukas ir spyruoklės viršutinis galas, spyruoklę spaudžiant žemyn ar tempiant aukštyn, gali be trinties judėti žemyn ir aukštyn. Tarkime taip pat, kad oro pasipriešinimas tokiam judėjimui yra toks silpnas, kad jį (kaip ir trintį į virbą) galima laikyti lygų 0.

Tarkime, kad tos spyruoklės ilgis pradinėje būsenoje, kai tos spyruoklės niekas nespaudžia ir netempia, yra lygus ℓ ir todėl spyruoklės viršutinio galo koordinatė $z(t)$ momentu $t=0$, kai į spyruoklę jokios jėgos dar neveikia (laikant, kad virbo pagrindo ir apatinio spyruoklės galo koordinatė z visą laiką išlieka pastovi ir lygi 0), yra lygi ℓ , t. y. $z(0)=\ell$.



22 pav.

Tarkim, kad rutuliukas užmaunamas ant virbo ir momentu $t=0$ labai palengva ir labai atsargiai, t. y. taip, kad momentu $t=0$ rutuliuko greitis būtų lygus 0, uždėdamas ant spyruoklės viršutinio galo. Kaip tik tą momentą ir tą rutuliuko bei spiralės padėtį vaizduoja 22 pav.

Tarkime, kad spyruoklės stangrumą charakterizuoja stangrumo koeficientas λ . Jį, naudojantis Huko dėsnio stangrioms deformacijoms, galima apibrėžti formule $\lambda = \frac{F_d}{\Delta \ell}$, kurioje $\Delta \ell = z(0) - z(t^*) = \ell - z^*$

yra spyruoklės ilgio pokytis, atsirandantis pastovaus dydžio nedidelei mechaninei jėgai F_d vertikaliai spaudžiant spyruoklę žemyn iki tol, kol dėl spyruoklės deformacijos atsirandanti ir vis didėjanti deformuotos spyruoklės stangrumo jėga F_s nesusilygina su F_d ir, būdama priešingos krypties, atsveria pastarąją. Momentą, kuriuo pasiekama ši pusiausvyra, pažymėsime žymeniu t_z^* , o spyruoklės viršutinio galo koordinatę z tuo momentu – žymeniu z^* .

Kalbant apie deformuojančią jėgą F_d , buvo pavartotas epitetas „nedidelė“. Jis pavartotas todėl, kad Huko dėsnis galioja tik stangrioms deformacijoms, kurių metu deformuojanti jėga F_d nėra tokia didelė, jog

galėtų deformuoti spyruoklę negrižtamai, t. y. taip, jog po deformuojančios jėgos išnykimo deformuotas kūnas jau nebegalėtų sugrįžti į iki deformacijos buvusią būseną.

Kai rutuliukas, kurio masė yra lygi m , momentu $t=0$ su greičiu, praktiškai lygiu 0, pasiekia viršutinį spyruoklės galą, jis pradeda spausti spyruoklę žemyn savo svorio jėga $P=mg$. Šioje formulėje

$g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ – kūnų, esančių arti Žemės paviršiaus, laisvo kritimo teorijoje erdvėje pagreitis, atsirandantis

dėl Žemės traukos. Ši pagreičio reikšmė nustatyta eksperimentaliai, matuojant teorijoje erdvėje laisvai krintančių kūnų kritimo metu nueitą kelią ir kritimo trukmę. Jėgos P veikiamas rutuliukas pradeda kristi žemyn, deformuodamas spyruoklę, dėl ko ir atsiranda spyruoklės pasipriešinimo jėga $F_s = \lambda \Delta \ell$,

mažinanti rutuliuko kritimo žemyn pagreitį $a = \frac{P - F_s}{m} = g - \frac{\lambda}{m} \Delta \ell$.

Pradžioje, kol spyruoklės deformacija $\Delta \ell = z(0) - z(t)$ dar nėra didelė, jėga F_s dar neatsveria jėgos P ir rutuliukas krinta žemyn su vis mažėjančiu pagreičiu.

Rutuliukui judant žemyn, didėja spyruoklės deformacija $\Delta \ell = \ell - z(t)$, todėl didėja jėga $F_s = \lambda \Delta \ell$. Mažėjant jėgų P ir F_s skirtumui, mažėja ir pagreitis a . Tas mažėjimas tęsiasi iki momento $t=t^*$, kuomet jėga $F_s(t^*) = \lambda[\ell - z(t^*)]$ tampa lygi $P=mg$, ir rutuliuko kritimo žemyn pagreitis a tampa lygus 0. Tuo momentu rutuliukas pasiekia didžiausią žemyn kritimo greitį $v(t^*)$.

Nors momentu t^* išnyksta jėga, stumianti rutuliuką žemyn, bet rutuliukas, turėdamas greitį $v(t^*)$, iš inercijos, kaip teigia pirmasis Niutono dėsnis, tęsia savo judėjimą žemyn, dar labiau suspausdamas spyruoklę ir didindamas jėgą $F_s = \lambda \Delta \ell$, kuri dabar tampa jau didesnė už $P=mg$. Todėl jėgų P ir F_s atstojamoji dabar tampa jau nukreipta į viršų ir dėl to atsiranda nukreiptas į viršų pagreitis

$a = \frac{F_s - P}{m} = \frac{\lambda}{m} \Delta \ell - g$, mažinantis rutuliuko kritimo greitį v .

Rutuliuko kritimas vis mažėjančiu greičiu ir jėgos F_s vis lėtesnis didėjimas tęsis iki tol, kol rutuliukas sustos. Tą momentą, kai rutuliuko greitis taps lygus 0, pažymėsime $t=t^{**}$. Momentu $t=t^{**}$ spyruoklės deformacija $\Delta \ell = \ell - z(t^{**})$ pasiekia maksimumą, ir rutuliukas, veikiamas jėgos $F_s - P =$

$= \lambda[\ell - z(t^{**})] - mg$, pradės judėti aukštyn, su pagreičiu $a = \frac{F_s - P}{m}$. Judant rutuliukui aukštyn, mažės spyruoklės deformacija $\Delta \ell$, todėl mažės ir jėga F_s bei pagreitis a . Tačiau rutuliuko judėjimo į viršų greitis didės, nors ir vis mažėjančiu tempu.

Momentu $t=t^{***}$ vis mažėjanti jėga F_s taps lygi P ir pagreitis a taps lygus 0. Rutuliuko judėjimo į viršų greitis pasiekia maksimumą. Ir nors momentu $t=t^{***}$ išnyks jėgų F_s ir P atstojamoji jėga, stumianti rutuliuką į viršų, jis iš inercijos tęs savo judėjimą, dar labiau mažindamos spyruoklės deformaciją $\Delta \ell$ ir

jėgą F_s , kuri taps jau mažesnė už P . Atsiradęs pagreitis $a = \frac{F_s - P}{m}$ nukreiptas žemyn ir mažinantis rutuliuko judėjimo į viršų greitį v .

Kylant rutuliukui į viršų, jėga F_s vis mažės ir didės jėgų P ir F_s skirtumas, dėl ko didės pagreitis a ir vis didėjančiu tempu mažės rutuliuko kilimo aukštyn greitis v .

Momentu $t=t^{****}$ rutuliukas sustos ir jo kinetinė energija taps lygi 0. Jei nebūtų trinties, oro pasipriešinimo ir kitų energijos nuostolių, tai, vadovaudamiesi energijos tvermės dėsniu, turėtume padaryti išvadą, kad potencialinė rutuliuko ir spyruoklės energija momentu $t=t^{****}$ turėtų būti ta pati kaip ir momentu $t=0$, kuomet rutuliukas buvo uždėtas ant spyruoklės viršutinio galo. Todėl koordinatės $z(t)$ reikšmė $z(t^{****})$ turėtų būti lygi $z(0) = \ell$.

Nuo momento $t=t^{****}$ turėtų prasidėti ką tik aprašyto proceso kartojimasis, kuris, nesant trinties ir kitų energijos nuostolių, turėtų kartotis ir kartotis be galo. Esant trinčiai, spyruoklės ir rutuliuko svyravimų amplitudė turėtų laikui bėgant mažėti, kol svyravimai galų gale visiškai užgestų. Tai įvyktų gėstančių svyravimų pabaigoje spyruoklės viršutiniame galui atsідūrus taške z^* , kuriame $F_s^* = \lambda(\ell - z^*)$ būtų lygi priešingos krypties jėgai $P=mg$. Nesunku įrodyti, jog $z^* = z(t^*) = z(t^{***})$.

Šią koordinatės z reikšmę z^* , o taip pat laiko momentų t^* , t^{**} , t^{***} , t^{****} bei kitų mechaninės sistemos judėjimo charakteristikų (greičių, pagreičių, padėčių $z(t)$, $z(t^*)$, $z(t^{**})$) ir t. t., veikiančių jėgų, potencialinės ir kinetinės energijos kiekių reikšmes mes galėsime apskaičiuoti, sudarę nagrinėjamos mechaninės sistemos judėjimo **matematinį modelį**.

Naudodamiesi tais pačiais mechanikos dėsniais, kuriais mes ką tik naudojome, aprašydami šios mechaninės sistemos judėjimą **kokybiškai**, ir panaudodami tą pačią logiką (t. y. tas pačias logikos taisykles, kuriomis mes „automatiškai“ vadovavomės, darydami išvadas savo samprotavimuose), bet papildomai taikydami dar ir **matematinę kalbą** bei operavimo su tos kalbos „frazėmis“ – matematinėmis formulėmis – **matematinį aparatą**, mes galėsime apskaičiuoti kiekybines to judėjimų charakteristikų reikšmes, t. y. **iš tų pačių mechanikos dėsnių ir vadovaudamiesi ta pačia logika**

išvesti žymiai daugiau informacijos. Taip atsitinka todėl, kad mes, naudodamiesi matematikos aparatu, gauname galimybę naudotis dar ir matematikos mokslo nustatytais ir į matematikos aparatą „įmontuotais“ matematikos ir matematinės logikos dėsniais, tokiais pat bendrais kaip ir sistemo tyros dėsniai ir todėl galiojančiais visoms sistemoms. Kuo galingesni bus mūsų naudojami matematikos ir sistemo tyros formalūs „aparatai“, tuo galingesni, darydami iš turimos informacijos išplaukiančias išvadas, būsime ir mes. Jau vien dėl šios galimybės **naudinga turtinti matematikos ir sistemo tyros kalbas, jų matematinius aparatus bei mokytis jomis ir jais naudotis.**

Sudarydami nagrinėjamos mechaninės sistemos judėjimo matematinį modelį ir atsižvelgdami į tai, kaip 22 pav. pasirinkome aplikačių ašies z kryptį, laikysime vektorius, nukreiptus žemyn, neigiamais, o vektorius, nukreiptus į viršų, – teigiamais. Išvestinėms vaizduoti naudosimės klasikinėje

mechanikoje plačiai taikomais dar Niutono įvestais žymenimis: $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$. Dydžius $z(t)$, $\dot{z}(t)$ ir

$\ddot{z}(t)$ laikysime laiko funkcijomis, o jų reikšmes fiksuotais laiko momentais – algebriniais dydžiais, galinčiais būti ir teigiamais, ir neigiamais skaičiais. Šiuo, dabar mūsų nagrinėjamu, atveju yra aišku, jog $z(t) > 0$. Tačiau $\dot{z}(t)$ ir $\ddot{z}(t)$ reikšmės gali būti ir teigiamos, ir neigiamos. Modelio parametrus l , m , λ , g laikysime teigiamais dydžiais. Teigiamais dydžiais laikysime ir svyravimo periodo T , svyravimų

ciklinio dažnio $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ir svyravimų amplitudės A reikšmes. Svyravimų pradinės fazės φ bei ψ galės

būti ir teigiamos, ir neigiamos. Žymeniu $z(t)$ žymėsime spyruoklės viršutinio galo koordinatę momentu t , todėl $z(0)$ vaizduos tos koordinatės reikšmę momentu $t=0$. Pradžioje mes nagrinėsime atvejį, kai $z(0)=l$, tačiau bendruoju atveju tokios lygybės gali ir nebūti: $z(0)$ reikšmė gali būti pasirenkama eksperimentuojant su mechanine sistema bei aprašant eksperimento pradines sąlygas. Žymeniu $\dot{z}(t)$ žymėsime koordinatės $z(t)$ kitimo greitį. Jis, išskyrus vieną atvejį, apie kurį bus kalbama vėliau, bus lygus spyruoklės viršutinio galo ir rutuliuko judėjimo greičiui momentu t . Žymeniu $\dot{z}(0)$ žymėsime pradinį (t. y. atitinkantį momentą $t=0$) rutuliuko ir spyruoklės viršutinio galo greitį. Mes čia nagrinėsime

tik tokius atvejus, kai $\dot{z}(0) \leq 0$. Todėl dydis $\psi = \arctg \frac{\dot{z}(0)}{g} \sqrt{\frac{\ell}{m}}$ mūsų čia nagrinėjamais atvejais tenkins

sąlygą $\psi \leq 0$, o dydis $\varphi = -\psi$ – sąlygą $\varphi \geq 0$.

Sudarydami mechaninės sistemos judėjimo matematinį modelį, naudosimės mechanikos dėsniais, kuriais jau naudojome, sudarydami kokybinį to judėjimo modelį pirmojoje šio skyrelio dalyje, ir iš jų išplaukiančiomis formulėmis: $P=mg$, $F_s(t)=\lambda[\ell-z(t)]$, $F_{atst.}(t)=F_s(t)-P$, $\ddot{z}(t)=\frac{F_{atst.}(t)}{m}$. Čia

$F_{atst.}(t)$ – veikiančių jėgų atstojamoji jėga.

Pradžioje išnagrinėsime atvejį, atitinkantį pradines sąlygas $z(0)=\ell$ ir $\dot{z}(0)=0$, o vėliau tą atvejį apibendrinsime.

Sudarysime nagrinėjamos mechaninės sistemos (materialinio taško, turinčio masę m) judėjimo diferencialinę lygtį: $\ddot{z}(t) = \frac{F_{atst.}(t)}{m} = \frac{F_s(t)-P}{m} = \frac{\lambda[\ell-z(t)]-mg}{m} = \frac{\lambda}{m}[\ell-z(t)]-g$.

Gavome antros eilės diferencialinę lygtį $\ddot{z}(t) + \frac{\lambda}{m}z(t) = \frac{\lambda}{m}\ell - g$ su pastoviais koeficientais ir su pastovia dešiniąja jos puse. Rekomenduoju skaitytojui savarankiškai išspręsti šią gana paprastą diferencialinę lygtį ir įsitikinti, jog jos bendrasis sprendinys yra $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \left[z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right] \times \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \dot{z}(0) \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$.

Įstatę pradines sąlygas $z(0)=\ell$ ir $\dot{z}(0)=0$, gausime konkretų dalinį sprendinį $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$. Iš šio sprendinio išplaukia, jog spyruoklės viršutinis galas (o kartu ir rutuliukas)

harmoniskai svyruos su cikliniu dažniu $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$ ir su pastovia amplitude $A = \frac{mg}{\lambda}$.

Kadangi svyravimų ciklinis dažnis ω yra surištas su svyravimų periodo trukme T formule

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, tai svyravimų periodo trukmė šiuo atveju bus lygi $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$. Ši formulė rodo, kaip svyravimų periodo trukmė priklauso nuo rutuliuko masės ir spyruoklės stangrumo, o formulė $A = \frac{mg}{\lambda}$ rodo, kaip nuo tų pačių dydžių priklauso svyravimų amplitudės dydis A .

Momentu $t=0$ spyruoklės viršutinio galo koordinatė $z(t)$ bus lygi $z(0) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \cdot 0\right) = \ell$, o praėjus ketvirčiui svyravimų periodo $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ spyruoklės viršutinio galo koordinatė $z(t)$ taps lygi $z\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = \ell - \frac{mg}{\lambda}$. Tame taške spyruoklės (ir rutuliuko) judėjimo greitis bus lygus $\dot{z}(t) = \dot{z}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)$. Apskaičiuosime tą greitį.

Diferencijuodami formulę $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$ gauname $\dot{z}(t) = -\frac{mg}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$. Momentu $t=0$ spyruoklės viršutinio galo ir rutuliuko judėjimo greitis $\dot{z}(t) = \dot{z}(0)$ bus lygus 0, o momentu $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ tas greitis taps lygus $\dot{z}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t - g\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin\frac{\pi}{2} = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$. Gautas rezultatas rodo, jog tas greitis bus nukreiptas žemyn ir turės maksimalų dydį. Judėjimo pagreitis tame taške bus lygus 0. Tuo galime įsitikinti, išvesdami pagreičio $\ddot{z}(t)$ formulę ir įstatydami laiko t reikšmę, lygią $\frac{T}{4}$: $\ddot{z}(t) = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \times \cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t = -g \cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$. Momentu $t=0$ pagreitis lygus $\ddot{z}(0) = -g$, o momentu $t = \frac{T}{4}$ pagreičio $\ddot{z}(t)$ reikšmė taps $\ddot{z}\left(\frac{T}{4}\right) = -g \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = -g \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Lygindami gautus rezultatus su anksčiau atliktos kokybinės analizės rezultatais, matome, jog ten minėtasis momentas t^* yra lygus $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, o $z^* = z(t^*) = \ell - \frac{mg}{\lambda}$. Tašką z^* galime laikyti **svyravimų centru**.

Praėjus nuo svyravimų pradžios $t=0$ pusei svyravimo periodo $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, spyruoklės viršutinio galo koordinatė $z(t)$ taps lygi $z\left(\frac{T}{2}\right) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = \ell - \frac{mg}{\lambda} - \frac{mg}{\lambda} = \ell - 2\frac{mg}{\lambda}$, spyruoklės viršutinio galo greitis $\dot{z}(t)$ taps lygus $\dot{z}\left(\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = 0$, o jo pagreitis $\ddot{z}(t)$ bus lygus $\ddot{z}\left(\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = -g \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right) = g$ ir nukreiptas į viršų.

Vadinasi, $\frac{T}{2}$ yra t^{**} ir $z(t^{**}) = z^{**}$ yra žemutinis svyravimų taškas. Tame taške spyruoklės viršutinio galo koordinatė $z(t)$ įgyja reikšmę $z(t^{**}) = z^{**} = \ell - 2\frac{mg}{\lambda}$ greitis tampa lygus 0, o pagreitis – kūno laisvo kritimo pagreičiui g , tačiau nukreiptam ne žemyn, o aukštyn.

Taške $z(0)=\ell$ mechaninė sistema, susidedanti iš spyruoklės ir rutuliuko, turėjo spyruoklės apatinio galo atžvilgiu potencialinę energiją $W^{(p)}(0)=mg\ell$ ir neturėjo kinetinės energijos, nes rutuliuko greitis $v(0)=\dot{z}(0)$ buvo lygus 0.

Taške z^* rutuliuko potencialinė energija tapo lygi $mgz^*=mg\left(\ell-\frac{mg}{\lambda}\right)=mg\ell-\frac{m^2g^2}{\lambda}$, t. y. sumažėjo dydžiu $\frac{m^2g^2}{\lambda}$. Rutuliuko potencialinės energijos sumažėjimo sąskaita rutuliukas įgijo kinetinę energiją $\frac{mv^2(t^*)}{2}=\frac{m\dot{z}^2(t^*)}{2}=\frac{mg^2\frac{m}{\lambda}}{2}=\frac{m^2g^2}{2\lambda}$, o suspausta spyruoklė – potencialinę energiją $\frac{\lambda(\ell-z^*)^2}{2}=\frac{\lambda\left(\ell-\ell+\frac{mg}{\lambda}\right)^2}{2}=\frac{m^2g^2}{2\lambda}$. Bendras energijos kiekis mechaninėje sistemoje liko tas pats.

Taške z^{**} rutuliuko potencialinė energija dar sumažėjo ir tapo lygi $mgz^{**}=mg\left(\ell-2\frac{mg}{\lambda}\right)=mg\ell-2\frac{m^2g^2}{\lambda}$. Rutuliuko kinetinė energija tapo lygi 0, nes jo greitis $v(z^{**})=\dot{z}(t^{**})$ tapo lygus 0, o suspaustos spyruoklės potencialinė energija dar padidėjo ir tapo lygi $\frac{\lambda(\ell-z^{**})^2}{2}=\frac{\lambda\left(2\frac{mg}{\lambda}\right)^2}{2}=2\frac{m^2g^2}{\lambda}$. Bendras mechaninės energijos kiekis sistemoje išliko tas pats, t. y. $mg\ell$.

Palieku skaitytojų pačiam įsitikinti, jog momentu t^{***} situacija bus beveik ta pati, kaip ir momentu t^* , išskyrus tai, kad rutuliuko greitis $\dot{z}(t^{***})$ bus nukreiptas jau ne žemyn, o aukštyn ir lygus $g\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$.

Momentas t^{****} bus momento $t=0$ pakartojimas. Ir bendrai: $z(t+kT)=z(t)$, $\dot{z}(t+kT)=\dot{z}(t)$ ir $\ddot{z}(t+kT)=\ddot{z}(t)$ bet kurioms sveikoms skaičiaus k reikšmėms.

Išvestos formulės:

$$z(t)=\ell-\frac{mg}{\lambda}+\frac{mg}{\lambda}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t, \quad \dot{z}(t)=-g\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t, \quad \ddot{z}(t)=-g\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t,$$

$$W_r^{(p)}(t)=mgz(t)=mg\ell-\frac{m^2g^2}{\lambda}+\frac{m^2g^2}{\lambda}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t=mg\left(\ell-\frac{2mg}{\lambda}\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\frac{t}{2}\right),$$

$$W_r^{(k)}(t)=\frac{m\dot{z}^2(t)}{2}=\frac{m^2g^2}{2\lambda}\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t=\frac{m^2g^2}{4\lambda}\left(1-\cos 2t\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\right),$$

$$W_{s-s}^{(p)}(t)=\frac{\lambda[\ell-z(t)]^2}{2}=\frac{m^2g^2}{2\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t\right)^2=\frac{m^2g^2}{2\lambda}-\frac{m^2g^2}{\lambda}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t+\frac{m^2g^2}{2\lambda}\cos^2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$$

leidžia apskaičiuoti spyruoklės viršutinio galo koordinatę $z(t)$, jos judėjimo greitį $\dot{z}(t)$, pagreitį $\ddot{z}(t)$, rutuliuko potencialinę energiją, jo kinetinę energiją ir suspaustos spyruoklės potencialinę energiją kiekvienu momentu t .

Nesunku įsitikinti, kad bet kuriuo momentu t energijų suma $W_r^{(p)}(t)+W_r^{(k)}+W_{s-s}^{(p)}=mg\ell=\text{const}$. Tai atitinka energijos tvermės dėsnį.

Palieku skaitytojų savarankiškai įsitikinti, jog šios mechaninės sistemos fazinės trajektorijos – jos būsenos $\vec{z}=(z_1, z_2)=(z, \dot{z})$ kitimo grafikai trimatėje fazinėje erdvėje $Z_1\times Z_2\times T$ – yra sraigtinės elipsinės linijos, o tų trajektorijų portretai, t. y. jų projekcijos į būsenų erdvę $Z_1\times Z_2$, yra elipsės

$\frac{(z_1-z^*)^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$, turinčios bendrą centrą – tašką $(z_1=z^*=\ell-\frac{mg}{\lambda}; z_2=0)$, tačiau galinčios turėti skirtingus parametrus a ir b , priklausančius nuo pradinių sąlygų $z(0)$ ir $\dot{z}(0)$. Kai $z(0)=\ell$ ir $\dot{z}(0)=0$, tai

$a = \frac{mg}{\lambda}$, $b = -g\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$. Keičiantis pradinėms sąlygoms, parametrų a ir b reikšmės gali keistis, tačiau santykis $\frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{\lambda}$ išlieka pastovus, todėl išlieka pastovi elipsių šeimos orientacija: visos elipsės išlieka lygiagrečios tarpusavy, tik jų matmenys didėja didėjant sistemos pilnai energijai.

Pavyzdžiui, atveju, kai $z(0) = \ell$, tačiau rutuliuko pradinis greitis $v(0) = v_0 \neq 0$, iš bendrojo diferencialinės lygties sprendinio $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \left[z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right] \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \dot{z}(0) \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$, įstatę pradinės sąlygas $z(0) = \ell$ ir $\dot{z}(0) = v(0) = v_0 \neq 0$, gauname dalinį sprendinį $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + v_0 \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \sqrt{\frac{m^2 g^2}{\lambda^2} + \frac{v_0^2 m}{\lambda}} \times \left(\frac{g \sqrt{m}}{\sqrt{mg^2 + \lambda v_0^2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \frac{v_0 \sqrt{\lambda}}{\sqrt{mg^2 + \lambda v_0^2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t \right) =$
 $= \ell - \frac{mg}{\lambda} + \sqrt{\frac{m^2 g^2}{\lambda^2} + \frac{mv_0^2}{\lambda}} \times \left(\cos \psi \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \sin \psi \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}}t \right) = \ell - \frac{mg}{\lambda} +$
 $+ \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t - \psi \right).$

Šioje formulėje $\psi = \arctg \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$. Kadangi v_0 – rutuliuko kritimo žemyn greitis, tai $v_0 < 0$.

Todėl ir $\psi < 0$. Įsivedę pradinei fazei žymenį $\varphi = -\psi = \arctg \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} > 0$, gausime spyruoklės viršutinio galo padėtį $z(t)$ kiekvienu laiko momentu aprašančią formulę:

$$z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \varphi \right).$$

Šioje formulėje $\frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}$ – svyravimų amplitudė A , $\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$ – svyravimų ciklinis

dažnis ω , $\varphi = -\arctg \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$ – svyravimų pradinė fazė.

Lygindami šį rezultatą su rezultatu, kurį buvome gavę atveju, kai $v_0 = 0$, matome, jog atveju $v_0 \neq 0$ svyravimų ciklinis dažnis išliko tas pats, svyravimų amplitudė šiek tiek padidėjo, nes daugiklis

$\sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} > 1$, ir svyravimų pradinė fazė φ tapo didesnė už 0. Kaip matyti iš formulės

$\varphi = -\arctg \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$, svyravimų fazės pradinis postūmis pirmyn yra tuo didesnis, kuo didesnis rutuliuko pradinis greitis $|v_0|$. Be to, pradinė fazė priklauso nuo spyruoklės stangrumo ir rutuliuko masės.

Nors šiuo atveju pradinė svyravimų fazė jau nėra lygi 0 ir amplitudė šiek tiek padidėjo, svyravimų centras išliko toje pačioje vietoje: jo koordinatė $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$. Palieku skaitytojo savarankiškam darbui išsiaiškinti, jog šiame taške jėga $F_s = \lambda(\ell - z^*)$, būdama priešingos krypties jėgai $P = mg$, bus lygi jai savo dydžiu ir atsvers pastarąją.

Dėl pradinės fazės postūmio ankščiau aprašytieji įvykiai, įvykę momentais t^* , t^{**} , t^{***} , dabar įvyks šiek tiek ankščiau negu atveju, kai rutuliuko pradinis greitis buvo lygus 0.

Pavyzdžiui, dabar spyruoklės viršutinis galas pasieks tašką $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$ ne momentu

$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, o tokiu momentu t , kada suma $\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \varphi$ taps lygi $\frac{\pi}{2}$, t. y. momentu $t = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$.

Nors dabar, kai $v_0 \neq 0$, spyruoklės viršutinio galo svyravimų žemutinis taškas z^{**} bus šiek tiek žemiau negu $\ell - 2\frac{mg}{\lambda}$, kaip buvo atveju $v_0 = 0$, nes atveju $v_0 \neq 0$ taško z^{**} koordinatė bus lygi

$$\ell - \frac{mg}{\lambda} - \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} = \ell - \frac{mg}{\lambda} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \right) \leq \ell - 2\frac{mg}{\lambda},$$

tačiau tas taškas bus pasiektas šiek tiek anksčiau: ne momentu $t = \pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, o momentu $t = (\pi - \varphi) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$.

Grįždamas iš šio taško į viršų, spyruoklės viršutinis galas vėl pasieks tašką $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$ irgi šiek

ties anksčiau: ne momentu $t = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, o momentu $t = \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$.

Įvykiai svyravimo periodo pabaigoje, kai koordinatės $z(t)$ reikšmė didėdama artės prie ℓ , priklausys nuo to, ar amplitudės viršutinis galas yra pritvirtintas prie rutuliuko, ar ne.

Jei jis būtų pritvirtintas, tai jam grįžtant į viršų ir pasiekus tašką $z = \ell$, kuomet jėga $F_s = \lambda(\ell - z(t))$ taptų lygi 0, spyruoklės viršutinio galo judėjimas dar nesibaigtų: rutuliukas, iš inercijos judėdamas aukštyn (nes jo greitis taške $z = \ell$ dar nebūtų lygus 0), patemptų viršutinį spyruoklės galą iki taško

$$z = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2},$$

kuris būtų šiek tiek aukščiau taško $z = \ell$, ir ten sustotų. Tai įvyktų momentu $t = (2\pi - \varphi) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, t. y. šiek tiek anksčiau negu anksčiau minėtasis momentas $t^{****} \equiv 2\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$. Po

to prasidėtų naujas svyravimų periodas: momentu $t = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ spyruoklės viršutinis galas, judėdamas

žemyn, pasiektų tašką $z = \ell$, momentu $t = \left(\frac{5\pi}{2} - \varphi \right) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ jis vėl pasiektų svyravimų centrą $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$,

momentu $t = (3\pi - \varphi) \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ – žemutinį svyravimų tašką $z^{**} = \ell - \frac{mg}{\lambda} - \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}$ ir t. t.

Apskaičiavę rutuliuko ir spyruoklės viršutinio galo judėjimo greitį $\dot{z}(t) = -\frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi \right)$, nesunkiai galime įsitikinti, jog ir šiuo atveju nagrinėjamos

mechaninės sistemos fazinės trajektorijos portretas bus elipsė $\frac{(z_1 - z^*)^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$. Šioje formulėje

$$z_1 = z(t), \quad z_2 = \dot{z}(t), \quad z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}, \quad a^2 = \frac{m^2 g^2}{\lambda^2} \left[1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 \right] = \frac{m}{\lambda} \left[\frac{mg^2}{\lambda} + v_0^2 \right], \quad b^2 = \frac{mg^2}{\lambda} + v_0^2.$$

Lygindami šį atvejį su atveju $z(0) = \ell$ ir $\dot{z}(0) = 0$, matome, jog naujos elipsės parametrų (elipsės

pusašių) a ir b reikšmės padidėjo $\sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}$ karto. Tas padidėjimas atsirado todėl, kad

nagrinėjamos mechaninės sistemos pilnoji energija išaugo: ji pasipildė ta kinetine energija, kurią atsinešė rutuliukas, išjungdamas į sistemą jau turėdamas pradinį greitį $v_0 \neq 0$.

Šiek tiek kitaip vyktų spyruoklės viršutinio galo judėjimas, jei jis nebūtų pritvirtintas prie rutuliuko, turinčio masę m .

Laikydami, kad spyruoklė yra ideali ir todėl turi tik stangrumą, praktiškai neturėdama inercijos, gautume, jog, viršutiniui spyruoklės galui, jos svyravimų pirmojo periodo pabaigoje sugrįžus į tašką $z = \ell$, kai jėga F_s tampa lygi 0, nebebūtų jėgos, stumiančios spyruoklės viršutinį galą ir deformuojančios spyruoklę. Todėl spyruoklės viršutinis galas sustotų taške $z = \ell$, ir rutuliukas vienas, nebetempdamas su savimi spyruoklės viršutinio galo, iš inercijos tęstų judėjimą aukštyn. Kadangi jam šiuo atveju jau

neriektų deformuoti spyruoklės, tai jis pakiltų aukščiau negu iki taško $z = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}$.

Rutuliuko greitį tuo momentu, kada spyruoklės viršutinis galas, kildamas aukštyn, pasiekia tašką $z = \ell$, nesunku apskaičiuoti, naudojantis jo greitį išreiškančia formule

$\dot{z}(t) = -\frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi \right)$ ir žinant, kad tuo momentu t funkcijos $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} +$

$+\frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi_0 \right)$ reikšmė turi būti lygi ℓ , t. y. $\cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi \right)$ turi būti lygus

$\left[1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$. Kampas $\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi \right)$, esančio šiuo momentu ketvirtajame ketvirtyje sinusas turėtų

būti lygus $-\sqrt{1 - \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi \right)} = \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \left[1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0^2}{g} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$. Įstatę šią $\sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + \varphi \right)$ reikšmę į

greičio $z(t)$ apskaičiavimo formulę, gautume, jog tuo momentu $z(t) = -v_0 > 0$, t. y. rutuliukas tuo momentu vėl turėtų savo pradinį greitį, tačiau dabar nukreiptą ne į apačią, o į viršų.

Ši rezultatą, remiantis energijos tvermės dėsniu ir laikant, kad nesant energijos nuostolių, rutuliuko kinetinė energija spyruoklės pajudėjimo pradžioje ir pabaigoje, turėtų būti ta pati, galėjome gauti ir be jokių skaičiavimų.

Turėdamas greitį $|v_0|$ ir kildamas aukštyn, rutuliukas pakils į aukštį $h = \frac{v_0^2}{2g}$, t. y. svyravimų

viršutinio taško koordinatė z taps lygi $\ell + \frac{v_0^2}{2g}$.

Nesunku įrodyti, jog atveju, kada $v_0 \neq 0$, atstumas $\ell + \frac{v_0^2}{2g}$ bus didesnis už atstumą $\ell - \frac{mg}{\lambda} +$

$+\frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}$, t. y. kad $\frac{v_0^2}{2g} > \frac{mg}{\lambda} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} - 1 \right)$. Iš tikrųjų, jei abi šios nelygybės puses

padaugintume iš teigiamo dydžio $\sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} + 1$, tai gautume, jog $\frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \right) > \frac{v_0^2}{g}$,

t. y. gautume teisingą nelygybę, nes $1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} > 2$.

Spyruoklės ir rutuliuko svyravimai šiuo atveju, kai $v_0 \neq 0$ ir spyruoklės viršutinis galas nepritvirtintas prie rutuliuko, būtų nesimetriški ne tik atstumų, bet ir laiko atžvilgiu: spyruoklės viršutinio galo ir rutuliuko judėjimas nuo „svyravimų centro“ $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$ iki žemutinio svyravimų taško užtruktų, kaip ir tuo atveju, kai spyruoklės viršutinis galas yra pritvirtintas prie rutuliuko, lygiai vieną ketvirtąją periodo T , t. y. $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ laiko vienetų, o štai spyruoklės viršutinio galo judėjimo aukštyn nuo

„svyravimų centro“ iki taško $z = \ell$ užtruktų $\sqrt{\frac{m}{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}$, t. y. trumpiau nei $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$. Rutuliuko

judėjimas aukštyn nuo „svyravimų centro“ iki viršutinio jo svyravimų taško $z = \ell + \frac{v_0^2}{2g}$ užtruktų ilgiau,

būtent $\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{|v_0|}{g}$ laiko vienetų.

Kaip jau esame nustatę ankščiau, $\varphi = \arctg \frac{|v_0|}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$. Todėl, matuodami kampą φ radianais, gautume, jog $\varphi < \frac{|v_0|}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$, iš kur išplauktų, jog $\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{|v_0|}{g} > \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{|v_0|}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \right) + \frac{|v_0|}{g} = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \frac{\pi}{2}$. Vadinasi, rutuliukas iki viršutinio savo svyravimų taško judėtų ilgiau negu ketvirtį svyravimų

periodo. Iš viršutinio savo trajektorijos taško $z = \ell + \frac{v_0^2}{2g}$ jis grįžtų į tašką $z = \ell$ po $\frac{|v_0|}{g}$ laiko vienetų, t. y.

momentu $t = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} (2\pi - \varphi) + \frac{2|v_0|}{g}$, skaitant nuo momento $t=0$, kada rutuliukas, krisdamas greičiu $|v_0|$, pirmą kartą palietė spyruoklės viršutinį galą. Vadinasi, rutuliuko nesimetrinių svyravimų periodas būtų ilgesnis už $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, o atstumas nuo aukščiausio svyravimų taško iki žemiausiojo, būdamas lygus

$$\ell + \frac{v_0^2}{2g} - \left(\ell - \frac{mg}{\lambda} - \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \right) = \frac{mg}{\lambda} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \right) + \frac{v_0^2}{2g}, \quad \text{būtų ilgesnis už}$$

$$2A = 2 \frac{mg}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2}.$$

Visi šie paskaičiavimai ir samprotavimai buvo atlikti tam, kad būtų pademonstruota, kaip **sisteminės analizės metu stengiamasi visapusiškai analizuoti nagrinėjamą reiškinį ar sistemą, tikrinant savo samprotavimų ir skaičiavimų teisingumą, atliekant juos ne mažiau kaip dviem skirtingais būdais. Tai padeda išvengti skaičiavimo ir loginių klaidų sudėtinguose tyrimuose ir skaičiavimuose bei pastebėti tiriamojo reiškinio ypatumus.**

Su panašia sisteminės analizės metodų taikymo demonstracija skaitytojas šioje mokymosi priemonėje susidurs dar ne vieną kartą.

Norėčiau atkreipti skaitytojo dėmesį į **dar vieną sisteminės analizės savybę – į kokybinės ir kiekybinės analizės sintezę, jos taikymą ir tokios sintezės naudingumą.** Juk jei būtume užsiiminėję vien tik kokybine analize, ką darėme šio skyrelio pradžioje, vargu ar būtume sugebėję gauti visas tos mechaninės sistemos parametrų kiekybines charakteristikas, kurias gauti mums padėjo matematinio aparato panaudojimas. Tačiau, jei būtume apsiriboję tik kiekybine analize ir būtume tik „grynai matematiškai“ nagrinėję sudarytą diferencialinę lygtį ir jos sprendinį, tai vargu ar būtume atkreipę

dėmesį į tai, jog nuo momento $t = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} (2\pi - \varphi) = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \left(2\pi + \arctg \frac{z(0)}{g} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \right)$ rutuliuko ir spyruoklės

judėjimas gali pradėti vykti kitaip negu iki to momento. **Tik sujungę abu metodus – kokybinį ir kiekybinį – mes sugebėjome pastebėti skirtumus tarp atvejų, kada rutuliukas pritvirtintas prie spyruoklės ir kada jis nepritvirtintas**, bei gauti tą rezultatą, kurį gavome. Be to, kokybinė analizė buvo reikalinga ir sudarant nagrinėjamo proceso matematinį modelį – diferencialinę lygtį $z(t) + \frac{\lambda}{m} z(t) = \frac{\lambda}{m} \ell - g$.

Tiesa, tas modelis buvo dar labai idealizuotas ir dar stipriai skyrėsi nuo modeliuojamo tikrovės reiškinio, nes tikrovėje egzistuoja ir spyruoklės bei rutuliuko trintys į virbą, ir oro pasipriešinimas spyruoklės ir rutuliuko judėjimui, ir energijos nuostoliai, spyruoklei deformuojantis, kuomet dalis mechaninės energijos virsta šilumine. Todėl spyruoklės ir rutuliuko judėjimo charakteristikų reikšmės,

apskaičiuotos naudojantis diferencialine lygtimi $z(t) + \frac{\lambda}{m} z(t) = \frac{\lambda}{m} \ell - g$, dar nebus visiškai tapačios realioms tų charakteristikų reikšmėms. Apskaičiuotosios reikšmės skirsis nuo tikrųjų ir tą skirtumą sudarys ne tik ką tik minėtosios **modelio paklaidos**, bet ir **metodo paklaidos** bei **skaičiavimų paklaidos** suma. Metodo paklaida atsiranda taikant **artutinius metodus**, o skaičiavimų paklaidos gali atsirasti atliekant tokias matematines operacijas kaip šaknies traukimas, trigonometrinių funkcijų

reikšmių apskaičiavimas ir pan., kuomet mes būname priversti apsiriboti artutiniu operacijos rezultatu. Skaičiavimo paklaidos dydį galima mažinti, didinant ženklų po kablelio skaičių, metodo – taikant tikslesnius metodus, o modelio paklaidą – kuriant tikslesnius bei pilnesnius modelius.

Reikia nepamiršti ir to, kad kurdami objektų bei procesų matematinius modelius ir atlikdami matematinius skaičiavimus, mes naudojames modeliuojamus objektus bei procesus charakterizuojančių parametrų reikšmėmis, kurios turėjo būti koku nors būdu nustatytos, pavyzdžiui, išmatuotos. Todėl tenka turėti omenyje ir galimas **matavimo paklaidas**. Į matavimo paklaidas tenka atsižvelgti ir lyginant skaičiavimų rezultatus su realių objektų bei procesų charakteristikų matavimo rezultatais.

Žinoma, ir matavimo paklaidas galima mažinti, didinant matavimų tikslumą, tačiau tokio mažinimo galimybės praktiškai visada yra ribotos, o, pavyzdžiui, kvantinėje mechanikoje, kaip teigia mūsų jau minėtas (žiūr. 1.2. skyrių) neapibrėžtumo principas, šiuolaikinė fizika teoriškai susidūrė su **absoliučia matavimo tikslumo didinimo riba, nes bet koks matavimas kartu yra ir poveikis į matuojamą objektą**, kuris pakankamai mažiems ar pakankamai jautriems objektams gali būti tiek reikšmingas, jog galėtų pakeisti matuojamo objekto būseną ir iškreipti matavimo rezultatus.

Todėl visada egzistavo, egzistuoja ir egzistuos galimybė atsirasti didesniai ar mažesniai skirtumui tarp tikrovės ir jos matavimo bei matematinio modeliavimo rezultatų. Bet taip pat visada egzistavo, egzistuoja ir egzistuos galimybė tą skirtumą mažinti, tikslinant modelį ir matavimus, pasirenkant tikslesnius metodus bei skaičiavimuose – didesnę ženklų skaičių. Dažnai pavyksta gauti rezultatus, kuriuos galima laikyti tenkinančiais šiandieninės praktikos reikalavimus.

Pavyzdžiui, mūsų čia nagrinėjamos paprastos sistemos judėjimo matematinį modelį galėtume padaryti adekvatesnį tikrovei, jei atsižvelgtume bent į kai kuriuos svarbesnius faktorius, lemiančius mechaninės energijos „nutekėjimo“ iš analizuojamos sistemos atsiradimą ir bent apytikriai įvertintume to „nutekėjimo“ nuostolius.

Tikslindami tą modelį, galėtume, pavyzdžiui, pabandyti įvertinti oro pasipriešinimo spyruoklės ir rutuliuko judėjimui jėgą, kuri mūsų nagrinėjamu atveju yra svarbiausias faktorius, lemiantis mechaninės energijos „nutekėjimą“.

Iš praktikos žinome, kad kietas kūnas, judėdamas ore (ar kitose dujose bei skysčiuose) susiduria su pasipriešinimo jėga, kuri priklauso nuo judėjimo greičio, kūno skerspjūvio, statmeno judėjimo krypties, ploto, tos terpės, kurioje judama, tankio ir to kūno formos: įgaubtas kūnas sutinka didesnę pasipriešinimą negu išgaubtas, aptakus kūnas. Kadangi kietas kūnas, judėdamas dujinėje ar skystoje terpėje, stumdamas tos terpės molekules, didina tam tikrame jų sluoksnyje molekulių greičius, kartais net sukeldamas sūkurius, tai galima teigti, jog judėdamas kūnas atlieka tam tikrą darbą, didindamas tos terpės tam tikro sluoksnio molekulių kinetinę energiją. O tai leidžia manyti, kad terpės pasipriešinimo jėga turėtų tokiais atvejais priklausyti nuo judėjimo greičio v kvadrato.

Šią hipotezę galima patikrinti ir teoriškai, ir eksperimentais:

Teoriniam patikrinimui pasinaudosime metodu, kurį jau taikėme šio skyriaus pradžioje, išvesdami lėktuvo sparno keliamosios jėgos formulę.

Ieškosime oro pasipriešinimo jėgos formulės formoje $F_{o,p} = b\rho^a S^\beta v^\gamma$, kurioje „b“ – bedimensinis koeficientas, priklausantis nuo judančio kūno formos, ρ – terpės, kurioje vyksta judėjimas, tankis, S – judančio kūno skerspjūvio, statmeno judėjimo krypties plotas, v – kūno greitis, terpės, kurioje judama, atžvilgiu, α , β , γ – kol kas neapibrėžti (ieškomi) laipsnių rodikliai. Jei ši formulė teisinga (o ji, logiškai manydamas, neatrodo, kad prieštarautų logikai ir praktikai), tai dimensijos šios lygybės kairiojoje ir dešiniojoje pusėje turėtų sutapti.

Kairiojoje pusėje jėgos $F_{o,p}$ dimensija turėtų būti kg m s^{-2} , nes jėga (pagal jos apibrėžimą) yra masės, matuojamos kilogramais (kg) ir pagreičio, matuojamo metrais į sekundę kvadratu (ms^{-2}), sandauga, turinti dimensiją kg m s^{-2} .

Dešiniojoje lygybės pusėje tankio ρ , turinčio dimensiją kg m^{-3} , ploto S , turinčio dimensiją m^2 , ir greičio v , turinčio dimensiją ms^{-1} , laipsnių α , β , γ sandauga $\rho^a S^\beta v^\gamma$ turės dimensiją $(\text{kg m}^{-3})^a (\text{m}^2)^\beta \times (\text{ms}^{-1})^\gamma = \text{kg}^a \text{m}^{\gamma+2\beta-3a} \text{s}^{-\gamma}$.

Kad dimensijos abiejose lygybės pusėse sutaptų, turėtų galioti lygybės: 1) $\alpha=1$, 2) $\gamma+2\beta-3\alpha=1$, 3) $\gamma=2$. Iš šių lygybių randame, jog $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$. Todėl $F_{o,p} = b\zeta^a S^\beta v^\gamma = b\rho S v^2$. Tai patvirtina mūsų anksčiau išsakytą prielaidą.

Šią oro pasipriešinimo jėgos priklausomybę nuo greičio v ir ploto S patvirtina ir fizikiniai eksperimentai: nustatyta, kad intervale $[2\text{ms}^{-1}, 240\text{ms}^{-1}]$ aerodinaminio pasipriešinimo jėga apytikriai proporcinga judėjimo greičio kvadratui. Kai kūno judėjimo oro atžvilgiu greitis v yra mažesnis už 2ms^{-1} , tai aerodinaminio pasipriešinimo jėga tampa apytikriai proporcinga jau ne antrajam, o pirmajam greičio v laipsniui. Kodėl taip atsitinka, paaiškinsiu šiek tiek vėliau, kai išnagrinėsime išvadas, išplaukiančias iš formulės $F_{o,p} = b\rho S v^2$.

Tarkime, kad rutuliukas, turintis masę m , krinta iš tam tikro aukščio, veikiamas svorio jėgos $P=mg$, įveikdamas oro pasipriešinimo jėgą $F_{o,p} = b\rho S v^2 = kv^2$. Šioje formulėje k reiškia sandaugą $b\rho S$,

kurią šiuo atveju galima laikyti pastoviu dydžiu, nes, kai aukštis, iš kurio krinta rutuliukas, nėra labai didelis, oro tankį ρ ir gravitacinį pagreitį g galima laikyti pastoviais dydžiais.

Rutuliukas, kurio pradinis greitis $v(0)=0$, veikiamas svorio jėgos $P=mg$, pajudės žemyn ir pradės kristi su pagreičiu $a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{P - F_{o.p.}}{m} = \frac{mg - kv^2}{m} = g - \frac{k}{m}v^2$. Didėjant rutuliuko kritimo greičiui, mažės skirtumas $g - \frac{k}{m}v^2$, o todėl ir mažės rutuliuko kritimo pagreitis, artėdamas prie 0.

Tačiau, kol rutuliuko kritimo greitis v bus vis dar mažesnis už $c = \sqrt{\frac{gm}{k}}$, pagreitis a bus vis dar šiek tiek didesnis už 0 ir rutuliuko greitis $v(t)$ artės prie ribos $c = \sqrt{\frac{gm}{k}}$. Net nespėdami diferencialinės lygties

$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$, galime pasakyti, jog rutuliukas, veikiamas vien tik savo svorio jėgos, niekada negalės

pasiekti greičio, didesnio už $c = \sqrt{\frac{gm}{k}} = \sqrt{\frac{gm}{b\rho_t S}} = \sqrt{\frac{g\rho_r V}{b\rho_t S}} = 2\sqrt{\frac{g\rho_r r}{3b\rho_t}}$, kur ρ_t – terpės tankis, ρ_r – rutuliuko medžiagos tankis, r – jo spindulys, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – rutuliuko tūris, $S = \pi r^2$ – rutuliuko skerspjūvio plotas.

Pasinaudodami lygybe $c^2 = \frac{gm}{k}$, iš kurios išplaukia $k = \frac{gm}{c^2}$, pertvarkysime diferencialinę lygtį $\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$. Gausime, jog $\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{g}{c^2}v^2 = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2)$, t. y. $\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2}dt$.

Kadangi $\frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right) = \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{c+v} - \frac{1}{v-c} \right)$, tai iš lygties $\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{c^2 - v^2} = \int_0^t \frac{g}{c^2} dt$ gauname lygtį $\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{c+v} - \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v-c} = 2c \int_0^t \frac{g}{c^2} dt$.

Po integravimo gausime: $\ln \frac{c+v(t)}{c+v(0)} - \ln \frac{v(t)-c}{v(0)-c} = \frac{2g}{c}t$, t. y. $\ln \frac{[c+v(t)][v(0)-c]}{[c+v(0)][v(t)-c]} = \ln e^{\frac{2g}{c}t}$, arba $\frac{[c+v(t)][c-v(0)]}{[c+v(0)][c-v(t)]} = e^{\frac{2g}{c}t}$.

Kadangi $v(0)=0$, tai gauname, jog $\frac{c+v(t)}{c-v(t)} = e^{\frac{2g}{c}t}$, t. y. $c+v(t) = e^{\frac{2g}{c}t} [c-v(t)]$.

Todėl $v(t) = c \cdot \frac{e^{\frac{2g}{c}t} - 1}{e^{\frac{2g}{c}t} + 1} = c \cdot \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} = c \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{gt}{c}}{\operatorname{ch} \frac{gt}{c}} = c \cdot \operatorname{th} \frac{gt}{c}$.

Vadinasi, krintančio rutuliuko greičio $v(t)$ santykis su maksimaliu greičiu c didės taip, kaip didėja argumento $\frac{gt}{c}$ hiperbolinis tangentas. Šį didėjimą grafiškai vaizduoja 23 pav.

Galima apskaičiuoti ir tai, kaip keisis rutuliuko nueitas kelias $s(t)$.

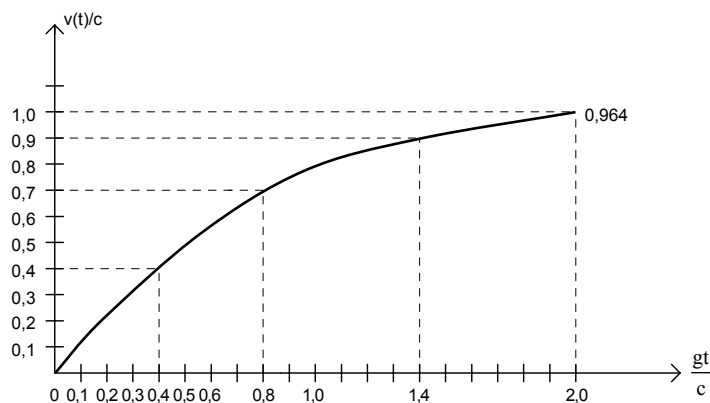
Kadangi $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = c \cdot \operatorname{th} \frac{gt}{c} = c \cdot \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}$ ir $\frac{d \left(\frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}} \right)}{dt} = \frac{g}{t} \left(\frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} \right)$, tai $\left(\frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} \right) dt =$
 $= \frac{c}{g} d \left(\frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}} \right)$ ir $\int_{s(0)}^{s(t)} ds(t) = c \int_0^t \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} dt = \int_{s(0)}^{s(t)} ds(t) = c \int_0^t \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} dt = c \int_0^t \frac{c}{g} d \left(\frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}} \right) =$

$$= \frac{c^2}{g} \int_0^t \frac{d \left(e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}} \right)}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}.$$

$$\text{Integruodami gauname: } s(t) - s(0) = \frac{c^2}{g} \ln \left(e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}} \right) \Big|_0^t = \frac{c^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}{2} = \frac{c^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{c}.$$

Kadangi $s(0)=0$, tai $s(t)=\frac{c^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{c}$. Vadinasi, atstumas $s(t)$ – rutuliuko nueitas kelias per laiką

t kritimo metu – didėjant t , didės kaip argumento $\frac{gt}{c}$ hiperbolinio kosinuso logaritmas.



23 pav.

Rekomenduoju skaitytojui, pasinaudojus atitinkamomis lentelėmis (arba specialiomis programomis, pavyzdžiui, MAPLE) nubraižyti funkcijos $s(t)=\frac{c^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{c}$ grafiką ir įsitikinti, jog tas grafikas asimptotiškai artėja prie tiesės $s(t)=ct - \frac{c^2}{g} \ln 2$, t. y. prie tiesės, vaizduojančios judėjimą su pastoviu greičiu c .

Žinodami aukštį H , iš kurio buvo paleistas kristi rutuliukas, ir laiką t^* , per kurį jis nukrito, naudodamiesi formule $s(t)=\frac{c^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{c}$, įstatę į ją vietoj $s(t)$ konkretų dydį H ir vietoj t – konkretų dydį

t^* , gausime lygtį $H=\frac{c^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt^*}{c}$, leidžiančią apskaičiuoti c reikšmę. Suradę c ir naudodamiesi formule

$$c = \sqrt{\frac{gm}{k}} = \sqrt{\frac{gm}{b\rho_t s}} = \sqrt{\frac{g\rho_r V}{b\rho_t s}} = \sqrt{\frac{g\rho_r 4sr}{b\rho_t s3}} = 2\sqrt{\frac{g\rho_r r}{3b\rho_t}} \text{ bei žinodami rutuliuko spindulį } r, \text{ jo medžiagos}$$

tankį ρ_r ir oro tankį ρ_t , **galime apskaičiuoti koeficiento b , priklausančio nuo judančio kūno formos, reikšmę.**

Taip savo laiku Eifelio Paryžiuje, leisdamas kristi įvairių formų kūnams nuo Eifelio bokšto ir fiksuodamas laiką, per kurį kūnas pasiekdavo žemę, apskaičiavo rutuliuko bei kvadratinės plokštelės aerodinaminio pasipriešinimo koeficientus, tiksliau koeficiento b ir oro tankio ρ_t sandaugas, tuo išvengdamas reikiamybės matuoti medžiagos tankį ρ , nes tai yra sudėtingiau nei matuoti kūno, kurį ruošiamasi mesti, masę, tą kūną pasveriant.

Dabar aerodinaminio pasipriešinimo jėga įvairių formų kūnams yra matuojama specialiuose aerodinaminuose vamzdžiuose, kuriuose patalpinami įvairių formų kūnai. Į tuos kūnus pučiama žinomo greičio oro srovė ir matuojama veikianti į tuos kūnus srovės jėga, kuri ir yra F_{op} . Žinant šios jėgos dydį ir kūno matmenis, galima apskaičiuoti kūno formos koeficientą b .

Kai kūnas juda dujine ar skysta terpe nedideliu beveik pastoviu ar pastoviu greičiu, tai kūno sąveikavimo su terpe, kurioje jis juda, mechanizmas tampa jau kitoks: vyksta jau ne tiek kinetinės energijos perdavimas terpei, kiek savotiška trintis, atsirandanti kūnui skverbiantis pro terpės molekules,

t. y. sankabos jėgų tarp kūno paviršiaus molekulių ir tą paviršių liečiančių terpės molekulių įveikimas, o grimztančiuose į skystį ar dujas kūnams – dar ir išstumiančių iš skysčio ar dujų **Archimedo jėgų** įveikimas. Su šiomis jėgomis irgi reikia skaitytis. Juk laivai ir oro balionai plaukioja ir skraido kaip tik šių jėgų palaikomi. Tiesa, Archimedo jėgos priešinasi tik kūnų grimzdimui ir tiesiogiai nedalyvauja sudarant aerodinaminį ar hidrodinaminį pasipriešinimą horizontaliam kūnų judėjimui, tačiau vertikaliam tų kūnų judėjimui tos jėgos gali turėti reikšmingą poveikį.

Nagrinėdamas skysčių bei dujų trinties jėgas, kurios veikia į tuose skysčiuose bei dujose nedideliu greičiu judančius kūnus, anglų fizikas ir matematikas Dž.Stoksas yra nustatęs, jog tos jėgos priklauso nuo to judėjimo greičio pirmojo laipsnio. Pavyzdžiui, jis yra nustatęs, kad rutuliuką, kurio spindulys yra r , veikia trinties jėga $F_t = 6\pi\mu r v$. Šioje formulėje koeficientą μ vadina **dinaminio klampumo koeficientu**. Jo dydis priklauso nuo skysčio bei dujų molekulių sankabos su judančio kūno paviršiaus molekulėmis jėgų ir yra nustatomas eksperimentiškai. Keičiantis temperatūrai, šios jėgos ir koeficientas μ gali keistis. Tai galima pastebėti kaip terpės klampumo pasikeitimus.

Kadangi rutuliuko masė, o kartu ir jo svorio jėga $P = mg$ priklauso nuo jo medžiagos tankio ρ ir jo tūrio V , kuris yra proporcingas rutuliuko spindulio r trečiajam laipsniui, o trinties jėga priklauso tik nuo pirmojo to spindulio laipsnio, tai tos pačios medžiagos dideli rutuliukai grimzta žymiai greičiau negu maži. Todėl nuosėdos skysčiuose sluoksniuojasi ne tik pagal medžiagų tankį, bet ir pagal jų dalelių dydį. Stambios dalelės nusėda pirmos, o smulkios dulkelės ilgai plaukioja ir nusėda tik labai palengva. Panašiai elgiasi ir dulkės, nusėdamos uždaroje patalpose.

Dar kitoks kietų kūnų paviršių trinties mechanizmas, nes sankabos jėgos tarp tų kūnų paviršių molekulių tampa reikšmingais dydžiais tik tada, kai tie paviršiai yra artimai susiglaudę, t. y. tik tada, kada kūnai yra prispausti vienas prie kito tų ar kitų jėgų.

Vienam kietam kūnui slystant kito kūno paviršiumi, didelę reikšmę trinties jėgai, kurią tenka įveikti tempiant judantį kūną, taip pat turi paviršių nelygumai, jų gruoablėtumas, tepalo bei kitų skysčių tarp tų paviršių buvimas.

Slydimo trinties jėga $F_{s, tr}$, kaip teigia **Amontonso dėsnis**, yra aprašoma formule $F_{s, tr} = f_s N$, kurioje N yra slėgis, statmenas besitrinančių kūnų paviršiams, o f_s – bedimensinis slydimo trinties koeficientas, priklausančias nuo besitrinančių paviršių medžiagų bei tų paviršių kokybės (nelygumų, šiurkštumo, skystos kokio nors tepalo terpės tarp jų buvimo bei jos kokybės ir pan.).

Šiek tiek kitoks yra žymiai mažiau priklausančias nuo paviršių nelygumų riedėjimo trinties mechanizmas. **Riedėjimo trinties jėgą** $F_{r, tr}$ aprašo **Kulono dėsnis**: $F_{r, tr} = f_r \frac{N}{r}$. Šioje formulėje f_r – riedėjimo trinties koeficientas, priklausančias nuo besitrinančių kūnų paviršių kietumo, N – tas pats statmenasis slėgis, o r – riedančio kūno spindulio dydis. Riedėjimo trintis daugelyje atvejų žymiai mažesnė už slydimo trintį.

Remiantis šiuo pastebėjimu jau gilioje senovėje buvo išrastas ratas, kuriuo bei slydimo trinties pakeitimo riedėjimo trintimi efektu labai plačiai naudojamosi iki šių dienų. Tačiau žiemą per gilų ir purų sniegą lengviau yra slysti, o ne riedėti. Todėl buvo išrastos rogės ir slidės. O čiuožiant ledu trintis tampa dar mažesnė, kai stipriai spaudžiamas ir trinamas ledas pradeda tirpti, dėl ko tarp besitrinančių paviršių atsiranda savotiškas skystas „tepalas“, dar labiau mažinantis trintį. Pastebėjus šį reiškinį, buvo išrastos pačiūžos. **Pastabumas, sujungtas su pastebėtų reiškinų apmąstymu, ir atvedė žmoniją prie mokslo ir jo taikymo atsiradimo ir vystymosi.**

Grįžkime prie mūsų nagrinėjamos paprastos mechaninės sistemos, sudarytos iš spyruoklės bei metalinio rutuliuko, ir panagrinėkime, kokios jėgos ją bei joje veikia.

Kadangi nei rutuliukas, nei spyruoklė, judėdami virbu, jo tiesiogiai neslegia (statmenasis jų slėgis N į virbą praktiškai yra lygus 0), o dažnai jo net ir neliečia, tai rutuliuko ir spyruoklės slydimo trintį į virbą galima laikyti praktiškai lygia 0. Mūsų nagrinėjamo atveju nebus ir riedėjimo trinties.

Kadangi mūsų nagrinėjamoje mechaninėje sistemoje rutuliuko judėjimo greitis yra palyginti mažas ir spyruoklės deformacija yra palyginti nedidelė bei vyksta palyginti lėtai, tai spyruoklės deformaciją galima laikyti praktiškai idealia, t. y. absoliučiai stangria ir grįžtama. Todėl galime laikyti, jog tokios deformacijos metu spyruoklės deformacijos mechaninė energija nevirsta šilumine.

Kadangi metalinio rutuliuko medžiagos tankis yra daug kartų didesnis už oro tankį (pavyzdžiui, geležies tankis ρ_g yra $7000\text{--}8000\text{ kgm}^{-3}$, o oro tankis ρ_o yra tik apie $1,29\text{ kgm}^{-3}$), tai rutuliuką išstumiančioji Archimedo jėga, būdama lygi oro svoriui rutuliuko tūryje, yra kelis tūkstančius kartų

mažesnė už rutuliuko svorį $P = mg = \rho_g \frac{4}{3}\pi r^3 g$. Todėl Archimedo jėga gali būti laikoma, lyginant su rutuliuko svoriu, praktiškai lygia 0.

Iš visų išorinių poveikių į nagrinėjamą mechaninę sistemą praktiškai reikšmingi tik Žemės traukos ir oro pasipriešinimo rutuliuko ir spyruoklės judėjimui poveikiai. Spyruoklės deformacijos metu

pasireiškia vidinė jos stangrumo jėga $F_s = \lambda[\ell - z(t)]$, kuri taip pat yra reikšminga. Kadangi rutuliuko ir spyruoklės judėjimo greičiai yra maži (mažesni už 2ms^{-1}), tai oro pasipriešinimo jėgą galima laikyti proporcinga greičiui v ir judančių kūnų skerspjūvio, statmeno judėjimo krypčiai, plotui S . Atsižvelgdami į tai, kad mūsų nagrinėjamoje sistemoje tas plotas visą laiką išlieka pastovus, mes galime laikyti, kad oro pasipriešinimo jėgą galima aprašyti formule $F_{o.p.} \approx kv$, kurioje k – pastovus koeficientas, išreiškiantis $F_{o.p.}$ priklausomybę nuo judančių kūnų formos ir jų skerspjūvio ploto S .

Jei rutuliuko judėjimo maksimalus greitis viršytų 2ms^{-1} , tai oro pasipriešinimo jėgos apskaičiavimo algoritmas taptų sudėtingesnis, nes tektų atsižvelgti į tai, kad vienuose rutuliuko greičio kitimo intervaluose, kuriuose greitis dar nepasiekė 2ms^{-1} , tektų naudotis formule $F_{o.p.} \approx k_1 v$, o kituose, kuriuose greitis jau viršijo 2ms^{-1} , – $F_{o.p.} \approx k_2 v^2$, t. y. keistųsi ir priklausomybės nuo greičio v dėsnis, ir proporcingumo koeficiento k reikšmės. Suprantama, kad tiksliau skaičiuojant tektų atsižvelgti, jog perėjimas nuo vienos formulės prie kitos šiuo atveju turėtų būti ne „šulinis“, o tolydus. Todėl modeliuojant tokių rutuliuko judėjimą, tektų naudotis interpoliacija.

Dar sudėtingesnių skaičiavimų prireiktų apskaičiuojant oro pasipriešinimo jėgą tais atvejais, kai rutuliuko judėjimo maksimalus greitis būtų didesnis už 240ms^{-1} ir artėtų prie garso sklaidimo greičio ore (apie 330m/s) ar net viršytų jį. Juk garso greitis ore, tai garso sukeltų oro bangų, pasireiškiančių kaip oro slėgio pokyčių sklaidimas išilginėmis akustinėmis bangomis, greitis.

Kai judančio ore kūno greitis viršija garso greitį, tai jo sukeltas oro slėgio padidėjimas prieš priekinę judančio kūno dalį jau nebegali suspėti „pabėgti“ nuo judančio kūno. Todėl prieš priekinę judančio kūno dalį kaupiasi vis labiau suspausto oro sluoksnis ir oro tankis tame sluoksnyje vis didėja. Susidaro suspausto oro „siena“, kurią judančiam viršgarsiniu greičiu kūnui tenka „pramušti“, patiriant tos „oro sienos“ „smūgi“. Tie smūgiai, judant pastoviu viršgarsiniu greičiu horizontaliai, periodiškai kartojasi, o judant vertikaliai – kartojasi su besikeičiančiu dažniu. Tų smūgių dažnis keičiasi ir keičiantis judančio kūno greičiui. Gali susidaryti sąlygos, kada tokių smūgių ir oro slėgio bangų dažniai tampa artimi judančio kūno ar jo dalių nuosavų svyravimų dažniams. Tuomet dėl rezonanso reiškinių judantis kūnas ar jo dalys gali pradėti stipriai virpėti. Su tokiu reiškiniu neretai susiduria lėktuvai, judantys viršgarsiniu greičiu. Aviacijoje šį reiškinį vadina **flateriu**. Kad viršgarsiniu greičiu judantiems lėktuvams būtų lengviau pramušti minėtąjį nuolat susidarantį suspausto oro „sieną“, jiems suteikiama speciali forma (pavyzdžiui, lėktuvo priekinėje dalyje įtaisomas ilgas aštrus: „spyglys“, o pačiam lėktuvo korpusui suteikiamos aptakios formos). Aerodinaminio pasipriešinimo jėgos apskaičiavimas, judant viršgarsiniais greičiais, tampa gana sudėtingu procesu, galima sakyti, specialia mokslo sritimi – **viršgarsine aerodinamika**.

Mūsų nagrinėjamoje paprastoje mechaninėje sistemoje, susidedančioje iš stangrios spyruoklės ir masyvaus rutuliuko, jos dalių judėjimo greičiai yra tokie maži, jog net jų maksimumai neviršija 2ms^{-1} . Todėl, kaip jau buvo minėta, oro pasipriešinimo jėgą galima laikyti proporcinga judėjimo greičiui v ir judančių kūnų skersinio pjūvio plotui. Atsižvelgiant į tai, kad mūsų nagrinėjamoje sistemoje skersinio pjūvio plotas išlieka pastovus, galima laikyti, jog oro pasipriešinimo jėgos apskaičiavimui tinka formulė $F_{o.p.} \approx kv$, kurioje k – pastovus koeficientas, lygus skersinio pjūvio S ir aerodinaminio koeficiento, priklausančio nuo judančio kūno formos ir jo paviršiaus kokybės, sandaugai.

Iš čia pateiktos procesų, vykstančių rutuliukui ir spyruoklei judant, analizės išplaukia, jog sudarant rutuliuko ir viršutinio spyruoklės galo judėjimo matematinį modelį, pakanka atsižvelgti į tris šioje mechaninėje sistemoje veikiančias jėgas: 1) Žemės traukos jėgą, pasireiškiančią kaip rutuliuko svorio jėgą $P = mg$, kuri nukreipta žemyn ir todėl laikoma neigiamu dydžiu; 2) spyruoklės stangrumo jėgą $F_s = \lambda[\ell - z(t)]$, atsirandančią spyruoklės deformacijos metu, besikeičiant spyruoklės ilgiui, kuri nukreipta aukštyn, kai $z(t) < \ell$, ir žemyn, kai $z(t) > \ell$; 3) oro pasipriešinimo jėgą, nukreiptą kryptimi, priešinga rutuliuko ir spyruoklės, judėjimo krypčiai ir aprašomą formule $F_{o.p.} \approx -k\dot{z}(t)$.

Šių trijų jėgų atstojamoji jėga $\vec{F}_{ats.}$, suteikianti rutuliukui pagreitį a , yra jų vektorinė suma:

$$\vec{F}_{ats.} = \vec{P} + \vec{F}_S + \vec{F}_{o.p.} = -mg + \lambda[\ell - z(t)] - k\dot{z}(t).$$

Kadangi rutuliuko pagreitis $a = \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t)$ turi būti lygus $\frac{F_{ats.}}{m}$, tai gauname diferencialinę lygtį $\ddot{z}(t) = \frac{-mg + \lambda[\ell - z(t)] - k\dot{z}(t)}{m} = -g + \frac{\lambda}{m}[\ell - z(t)] - \frac{k}{m}\dot{z}(t)$. Ja galima užrašyti formoje $m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z(t) = \lambda\ell - gm$, su kuria jau buvome susidūrę šios mokymosi priemonės „Įvade“, kai kalbėjome apie struktūrų izomorfizmą (žiūr. 0.2.6 skyrelį), arba formoje $\ddot{z}(t) + \frac{k}{m}\dot{z}(t) + \frac{\lambda}{m}z(t) = \frac{\lambda}{m}\ell - g$.

Šią gana standartinę antros eilės diferencialinę lygtį, kurios koeficientai yra pastovūs dydžiai, galima spręsti įvairiais būdais. Vienas iš jų – operacinio skaičiavimo metodų taikymas, suvedantis

diferencialinių lygčių bei jų sistemų sprendimą į algebrinių lygčių bei jų sistemų sprendimą. Jis aprašytas šios mokymosi priemonės 1.11.5., 1.11.6. ir 1.11.7. poskyriuose.

Šios diferencialinės lygties bendrojo sprendinio forma priklauso nuo jos charakteringosios

$$\text{lygties šaknų } s_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4\lambda m}}{2m} \text{ ir } s_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4\lambda m}}{2m}.$$

Kai $s_1 \neq s_2$, t. y. kai $k^2 - 4\lambda m \neq 0$, tai bendrasis šios lygties sprendinys yra toks:

$$z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{k^2 - 4\lambda m}} e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \left[\left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left(k + \sqrt{k^2 - 4\lambda m} \right) + 2m\dot{z}(0) \right] e^{\frac{\sqrt{k^2 - 4\lambda m}}{2m}t} - \left[\left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left(k - \sqrt{k^2 - 4\lambda m} \right) + 2m\dot{z}(0) \right] e^{-\frac{\sqrt{k^2 - 4\lambda m}}{2m}t} \right\}.$$

Kai $k^2 - 4\lambda m > 0$, tai abi charakteringosios lygties šaknys s_1 ir s_2 yra realūs neigiami dydžiai, nes $\sqrt{k^2 - 4\lambda m} < k$.

Todėl $e^{s_1 t}$ ir $e^{s_2 t}$ – eksponentiškai mažėjantys dydžiai ir $z(t)$, laikui bėgant turėtų monotoniškai artėti prie jau mūsų nekartą minėtos reikšmės $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$.

Taip atsitiktų, jei terpės, kuriame juda spyruoklė ir rutuliukas, pasipriešinimo jėga dėl didelio terpės tankio ar klampumo būtų tokia didelė, kad rutuliukas toje terpėje įklimptų ir tik nedideliu vis mažėjančiu greičiu eksponentiškai artėtų prie pusiausvyros būsenos taške $z = z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$.

Tačiau oro tankis ir jo pasipriešinimo jėga rutuliuko ir spyruoklės judėjimui, esant nedideliems šių kūnų greičiams, nėra didelė. Nesunku įsitikinti, jog tokiu atveju $k^2 < 4\lambda m$, ir todėl, kai terpė, kurioje juda spyruoklė ir rutuliukas, yra oras, galioja nelygibė $k^2 - 4\lambda m > 0$.

Tuomet charakteringosios lygties šaknys s_1 ir s_2 tampa kompleksiniai dydžiais:

$$s_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4\lambda m}}{2m} = -\frac{k}{2m} - i\frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{2m} = -\frac{k}{2m} - i\omega,$$

$$s_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4\lambda m}}{2m} = -\frac{k}{2m} + i\frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{2m} = -\frac{k}{2m} + i\omega.$$

Šiose formulėse dydis $\omega = \frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{2m} = \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$ yra realus skaičius, mažesnis už $\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$,

t. y. už dydį, kuris tuo atveju, kai oro pasipriešinimą laikėme lygiu 0, buvo rutuliuko ir spyruoklės svyravimo ciklinis dažnis.

Netrukus įsitikinsime, jog ir dydis $\sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$ taip pat yra rutuliuko ir spyruoklės viršutinio

galo svyravimų ciklinis dažnis tuo atveju, kai terpė, kurioje vyksta svyravimai, trukdo kūnų judėjimui, tačiau ne taip stipriai, kad judantys kūnai iškart įklimptų joje. Lygindami dydžius

$\sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$ ir $\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$, galime pastebėti, kad terpės trukdymas kūnų judėjimui mažina jų svyravimų

dažnį ir tas dažnio sumažėjimas yra tuo didesnis, kuo didesnis yra k (t. y. kuo didesnis kūno skersinio pjūvio plotas S bei terpės tankis ir kuo didesnė kūno formos aerodinaminio pasipriešinimo koeficiento reikšmė) bei kuo mažesnė kūno masė.

Atveju, kai $k^2 - 4\lambda m < 0$, spyruoklės viršutinio galo koordinatės z priklausomybės nuo laiko formulė taps tokia:

$$z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{1}{2i\sqrt{4\lambda m - k^2}} e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \left[\left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left(k + i\sqrt{4\lambda m - k^2} \right) + 2m\dot{z}(0) \right] e^{i\omega t} + \left[\left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left(k - i\sqrt{4\lambda m - k^2} \right) + 2m\dot{z}(0) \right] e^{-i\omega t} \right\} = \ell - \frac{mg}{\lambda} + \frac{1}{4m\omega} e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \left[\left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times (k + i2m\omega) + 2m\dot{z}(0) \Big] e^{i\omega t} - \left[\left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) (k - i2m\omega) + 2m\dot{z}(0) \right] e^{-i\omega t} \Big\} = \\
& = 1 - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \frac{z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda}}{i4m\omega} \left[k(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + i2m\omega(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right] + \frac{2m\dot{z}(0)}{i4m\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right\} = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \frac{z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda}}{2m\omega} \left[k \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} + 2m\omega \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right] + \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right\} = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \frac{z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda}}{2m\omega} \left[k \sin \omega t + 2m\omega \cos \omega t \right] + \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega t \right\} = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left[\frac{k}{2m\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right] + \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega t \right\} = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \left(z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left[\frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2} t + \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2} t \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2m\dot{z}(0)}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2} t \right\}.
\end{aligned}$$

Įstatę į $z(t)$ formulę pradinės būsenos koordinačių reikšmes, pavyzdžiui, $z(0) = \ell$ ir $\dot{z}(0) = 0$, gausime diferencialinės lygties dalinį sprendinį, atitinkantį tas pradines sąlygas:

$$\begin{aligned}
z(t) &= \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \left(\ell - \ell + \frac{mg}{\lambda} \right) \left[\frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2} t + \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2} t \right] \right\} = \\
&= \ell - \frac{mg}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t + \cos \omega t \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Nesunku įsitikinti, jog šis dalinis sprendinys tenkina pradines sąlygas:

$$\begin{aligned}
z(0) &= \ell - \frac{mg}{\lambda} \{1 - 1[0 + 1]\} = \ell; \\
\dot{z}(t) &= -\frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{k^2}{2m\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t + \frac{k}{2m} \cos \omega t - \frac{k\omega}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right] = \\
&= -\frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\sin \omega t \left(\frac{k^2}{2m\sqrt{4\lambda m - k^2}} + \omega \right) + \cos \omega t \left(\frac{k}{2m} - \frac{k}{2m} \right) \right] = -\frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{k}{2m}t} \times \\
&\times \left[\left(\frac{k^2}{2m\sqrt{4\lambda m - k^2}} + \frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{2m} \right) \sin \omega t \right] = -\frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{k}{2m}t} \frac{k^2 + 4\lambda m - k^2}{2m\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t = \\
&= -\frac{mg}{\lambda} \frac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \omega t = -\frac{2mg}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \omega t;
\end{aligned}$$

Įstatę į šią formulę laiko t reikšmę $t=0$, gausime jog $\dot{z}(0) = 0$, kaip ir turi būti.

Šis sprendinys tenkina ir pradinę diferencialinę lygtį $m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z = \lambda\ell - mg$:

$$1) \ddot{z}(t) = -\frac{2mg}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} e^{-\frac{k}{2m}t} \left[-\frac{k}{2m} \sin \omega t + \frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{2m} \cos \omega t \right] = -ge^{-\frac{k}{2m}t} \left[\cos \omega t - \frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t \right];$$

2) $\ddot{z}(0) = -g$; 3) $m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z = -mge^{-\frac{k}{2m}t} \left[\cos \omega t - \frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t \right] -$
 $-\frac{2mgk}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \omega t + \lambda \ell - mg \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t + \cos \omega t \right] \right\} = \lambda \ell - mg + e^{-\frac{k}{2m}t} \times$
 $\times \left[\frac{mgk}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t + mg \cos \omega t - \frac{2mgk}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t - mg \cos \omega t + \frac{mgk}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t \right] = \lambda \ell - mg$, ką ir
 turėjome gauti.

Būsenos $z(t)$ formulę $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} \sin \omega t + \cos \omega t \right] \right\}$ galima

supaprastinti, pasinaudojus formule $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) =$
 $= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(\alpha + \arctg \frac{b}{a} \right).$

Mūsų nagrinėjamo atveju $a = \frac{k}{\sqrt{4\lambda m - k^2}}$, $b=1$, $a^2 + b^2 = \frac{k^2 + 4\lambda m - k^2}{4\lambda m - k^2} = \frac{4\lambda m}{4\lambda m - k^2}$;
 $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2\sqrt{\lambda m}}{\sqrt{4\lambda m - k^2}}$; $\arctg \frac{a}{b} = \arctg \frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{k}$; $z(t) = 1 - \frac{mg}{\lambda} \left[1 - \frac{2\sqrt{\lambda m}}{\sqrt{4\lambda m - k^2}} e^{-\frac{k}{2m}t} \times \right.$
 $\times \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\sqrt{4\lambda m - k^2}}{k} \right) \left. \right] = 1 - \frac{mg}{\lambda} \left[1 - \frac{2\sqrt{\lambda m}}{2m\omega} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{2m\omega}{k} \right) \right] =$
 $= 1 - \frac{mg}{\lambda} \left[1 - \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{2m\omega}{k} \right) \right].$

Naudodamiesi išvestomis formulėmis mes galime apskaičiuoti spyruoklės viršutinio galo padėtį, jo judėjimo greitį bei pagreitį, rutuliuko potencialinę ir kinetinę bei spyruoklės potencialinę energiją bet kuriuo laiko momentu t , panašiai, kaip tai darėme, apskaičiuodami tas charakteristikas atveju, kai oro pasipriešinimą rutuliuko ir spyruoklės judėjimui laikėme lygiu 0.

Palieku skaitytojų savarankiškai išiaiškinti, kad šiuo atveju mechaninės sistemos fazinė trajektorija yra sraigtinė elipsinė linija, kurios elipsių matmenys laikui bėgant eksponentiškai mažėja ir, kai $t \rightarrow \infty$, sraigtinės linijos elipsės konverguoja į tašką $\left(z_1 = z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}, z_2 = \dot{z} = 0 \right)$, esantį visų tų elipsių centre.

Fazinės trajektorijos portretas šiuo atveju – elipsinė spiralė $\frac{(z_1 - z_2)}{a^2(t)} + \frac{z_2^2}{b^2(t)} = 1$, kurios parametrai $a(t)$ ir $b(t)$ – eksponentiškai mažėjančios laiko t funkcijos.

Šiek tiek kitaip būtų sprendžiama diferencialinė lygtis $m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z(t) = \lambda \ell - mg$ tuo atveju, kai charakteringosios lygties $ms^2 + ks + \lambda = 0$ šaknys s_1 ir s_2 būtų lygios, t. y. kai $k^2 - 4\lambda m = 0$. Tai tarpinis atvejis tarp atvejo $k^2 - 4\lambda m < 0$, kuomet terpės pasipriešinimo jėga yra maža ir leidžia sistemai išsisiūbuoti, ir atvejo $k^2 - 4\lambda m > 0$, kai terpės pasipriešinimo jėga yra palyginti didelė ir sistema monotoniškai artėja prie pusiausvyros būsenos.

Atveju $k=4\lambda m$, spręsdami diferencialinę lygtį $m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z(t) = \lambda \ell - mg$, gauname bendrąjį sprendinį $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ z(0) - \ell + \frac{mg}{\lambda} + t \left[\frac{k}{2m} z(0) - \frac{2(\lambda \ell - mg)}{k} + \dot{z}(0) \right] \right\}.$

Dalinis sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas $z(0) = \ell$ ir $\dot{z}(0) = 0$, yra $z(t) = \ell - \frac{mg}{\lambda} +$

$$\begin{aligned}
& + e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \frac{mg}{\lambda} + t \left[\frac{k\ell}{2m} - \frac{2(\lambda\ell - mg)}{k} \right] \right\} = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{mg}{\lambda} + t \frac{k^2\ell - 4m(\lambda\ell - mg)}{2mk} \right] = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{mg}{\lambda} + t \frac{4\lambda m\ell - 4\lambda m\ell + 4m^2g}{2mk} \right] = \ell - \frac{mg}{\lambda} + e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{mg}{\lambda} + t \frac{2mg}{k} \right] = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2m}t} \left[1 + \frac{2\lambda}{k}t \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Šis sprendinys tenkina ir pradines sąlygas, ir diferencialinę lygtį $m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z(t) = \lambda\ell - mg$:

$$\begin{aligned}
1) \quad z(0) &= \ell - \frac{mg}{\lambda} \{1 - (1 + 0)\} = \ell; \quad 2) \quad \dot{z}(t) = -\frac{mg}{\lambda} \left\{ -e^{-\frac{k}{2m}t} \left[\frac{2\lambda}{k} - \frac{k}{2m} \left(1 + \frac{2\lambda}{k}t \right) \right] \right\} = \\
&= \frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\frac{2\lambda}{k} - \frac{k}{2m} - \frac{\lambda}{m}t \right) = \frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\frac{4\lambda m - k^2}{2mk} - \frac{\lambda}{m}t \right) = -g e^{-\frac{k}{2m}t}; \quad 3) \quad \dot{z}(0) = 0; \\
4) \quad \ddot{z}(t) &= e^{-\frac{k}{2m}t} \left(-g + \frac{gk}{2m}t \right) = g e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\frac{k}{2m}t - 1 \right); \quad 5) \quad \ddot{z}(0) = -g; \quad 6) \quad m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) + \lambda z(t) = \\
&= m g e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\frac{k}{2m}t - 1 \right) - k g e^{-\frac{k}{2m}t} + \lambda \ell - mg \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2m}t} \left[1 + \frac{2\lambda}{k}t \right] \right\} = \lambda\ell - mg + \left[mg + \frac{2\lambda mg}{k}t + \right. \\
&= \left. + \frac{mgk}{2m}t - mg - kgt \right] e^{-\frac{k}{2m}t} = \lambda\ell - mg + gt \left[\frac{2\lambda m}{k} + \frac{k}{2} - k \right] e^{-\frac{k}{2m}t} = \lambda\ell - mg + gt \left[\frac{4\lambda m - k^2}{2k} \right] e^{-\frac{k}{2m}t} = \\
&= \lambda\ell - mg, \text{ ką ir turėjome gauti.}
\end{aligned}$$

Iš šių formulių išplaukia, jog ir šiuo atveju pradinis pagreitis $\ddot{z}(0)$ bus lygus $(-g)$, t. y. bus lygus nukreiptam žemyn pagreičiui, kurį rutuliukui suteikia Žemės traukos jėga. Veikiant suspaustos spyruoklės pasipriešinimui, to pagreičio absoliutus dydis mažės savo absoliučiaiu dydžiu ir, kaip rodo formulė $g(t) = g e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\frac{k}{2m}t - 1 \right)$, momentu $t = \frac{2m}{k}$ taps lygus 0. Tuo momentu rutuliukas turės

didžiausią greičio absoliučiąją reikšmę $\left| \dot{z} \left(\frac{2m}{k} \right) \right| = \left| -g \frac{2m}{k} e^{-\frac{k}{2m} \cdot \frac{2m}{k}} \right| = \left| -g \frac{2m}{k} e^{-1} \right| = \left| -\frac{2mg}{ke} \right|$, ir tas greitis bus nukreiptas žemyn.

$$\begin{aligned}
& \text{Tai atsitiks taške } z \left(\frac{2m}{k} \right) = \ell - \frac{mg}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-1} \left[1 + \frac{2\lambda}{k} \cdot \frac{2m}{k} \right] \right\} = \ell - \frac{mg}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-1} \left[1 + \frac{4\lambda m}{k^2} \right] \right\} = \\
& = \ell - \frac{mg}{\lambda} \left(1 - \frac{2}{e} \right) > \ell - \frac{mg}{\lambda}, \text{ t. y. dar nepasiekus taško } z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}.
\end{aligned}$$

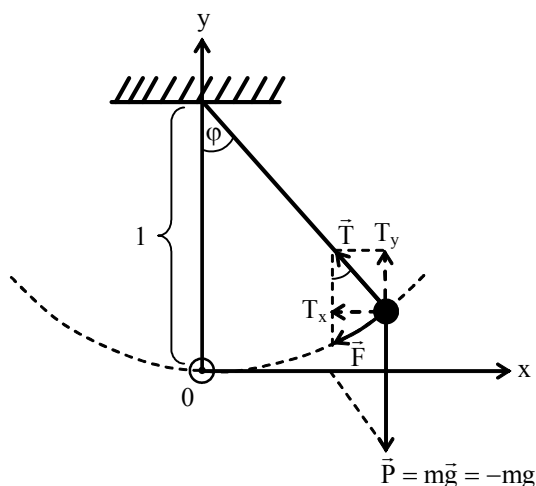
Po to rutuliuko pagreitis taps jau teigiamas, t. y. nukreiptas į viršų, ir rutuliuko kritimo žemyn greitis pradės mažėti, artėdamas prie 0, o rutuliuko apatinis taškas vis mažėjančiu greičiu artės prie pusiausvyros taško $z^* = \ell - \frac{mg}{\lambda}$.

Palieku skaitytojai savarankiškai išsiaiškinti, kaip vyks rutuliuko ir spyruoklės viršutinio galo judėjimas atveju $k^2 > 4\lambda m$ ir palyginti tą judėjimą su atveju $k^2 = 4\lambda m$.

Taip pat palieku jo savarankiškam darbui išsiaiškinimą, kas pasikeis, lyginant su ką tik išnagrinėtais atvejais, tuomet, kai rutuliuko pradinis greitis $v(0)$ jau nebus lygus 0.

Visais šiame skyrelyje nagrinėtais atvejais diferencialinę lygtį, aprašančią dinaminės sistemos judėjimą, pavyko išspręsti tiksliai, nesinaudojant artutiniais diferencialinių lygčių bei jų sistemų sprendimo metodais. Taip atsitiko todėl, kad tos lygtys buvo tiesinės: jų forma buvo $\ddot{z}(t) = f(z(t), \dot{z}(t))$, kurioje funkcija f buvo tiesinė argumentų z ir $\dot{z}$ funkcija.

Kai funkcija f nėra tiesinė, tai tokią diferencialinę lygtį bei tokių lygčių sistemą išspręsti tampa žymiai sudėtingiau, ir gauti tikslų bendrąjį sprendinį, išreikštą tikslia formule, sudaryta iš funkcijų, ku-



24 pav.

potencialinės energijos jo pusiausvyrinės būsenos atžvilgiu, jis pasiekia tą būseną atitinkantį tašką turėdamas atitinkamą kinetinę energiją, kurią jis įgyja anksčiau jam suteiktos potencialinės energijos sąskaita. Todėl tame taške svorelis nesustoja, o juda toliau, paversdamas turimą kinetinę energiją į potencialinę. Taip prasideda svyravimai, kurie niekada nesustotų, jei nebūtų mechaninės energijos „nutekėjimo“, jos virtimo šilumine.

Sudarysime tų svyravimų, vadinamų matematinės švytuoklės švytavimais, matematinį modelį.

Tarkime, jog mes svorėlį ir siūlą, tempdami pastarąjį, atlenkiame kampu φ nuo pusiausvyros taško 0 (žiūr. 24 pav.), kurį laikysime koordinatės sistemos xy pradžia.

Kadangi mūsų pasirinktoje sistemoje koordinatės x reikšmės didėja, judant į dešinę, o koordinatės y – judant į viršų, tai svorelio svorio jėgą $\vec{P} = m\vec{g}$, nukreiptą vertikaliai žemyn, laikysime neigiamu dydžiu ($-mg$). Tos jėgos veikiamas, svorelis pradės kristi žemyn, tačiau siūlo laikomas jis bus priverstas judėti apskritimu, kurio spindulys lygus siūlo ilgiui ℓ . Į judantį svorėlį veiks dvi jėgos: Žemės traukos jėga $\vec{P} = m\vec{g}$, kurią galima laikyti aktyviąja (pirmine) jėga ir siūlo reakcijos jėga $\vec{T}$, atsirandanti svoreliui judant ir tempiant siūlą. Ta jėga svorelio judėjimo atžvilgiu bus antrinė, nes ji atsiranda kaip įtempto siūlo reakcija į svorelio poveikį. Ji suteiks svoreliui taip vadinamąjį įcentrinį pagreitį $\vec{a}_{ic}$, iškreipiantį svorelio judėjimo trajektoriją. Iš mokyklinio fizikos kurso žinome, jog to pagreičio dydis $a_{ic} = \frac{v^2}{r}$ priklauso nuo judėjimo greičio v kvadrato ir nuo apskritimo spindulio r , kuris šiuo atveju lygus ℓ .

Oro pasipriešinimo jėgos kol kas nenagrinėsime, laikydami ją maža, lyginant su ką tik paminėtomis dviem jėgom.

Jėgų $\vec{P}$ ir $\vec{T}$ atstojamoji jėga $\vec{F}$ suteiks svoreliui pagreitį $\vec{a}_1$ apskritimo liestinės kryptimi. Situacijoje, kurią vaizduoja 24 pav., pagreitis a_1 bus neigiamas dydis, nes jo projekcijos a_{1x} ir a_{1y} , būdamos nukreiptos į kairę ir žemyn, bus neigiami dydžiai. Pasinaudodami 24 pav., gauname, jog $a_1 = \frac{F}{m} = -\frac{mg \sin \varphi}{m} = -g \sin \varphi$.

Šis pagreitis nebus pastovus dydis, nes, svoreliui judant, keisis kampas φ , o kartu su juo keisis ir pagreitis a_1 , ir svorelio judėjimo greitis v . Tačiau formulė $a_1 = -g \sin \varphi(t)$ išliks teisinga.

Jei toje padėtyje, kurią vaizduoja 24 pav., paleisime svorėlį kristi, tai kampas φ pradės mažėti. Todėl to kampo kitimą aprašanti funkcija $\varphi = \varphi(t)$ situacijoje, pavaizduotoje 24 pav., turės neigiamą išvestinę $\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$, vaizduojančią svorelio judėjimo apskritimu kampinio greičio ω kitimą.

Svoreliui (kurį laikysime materialiniu tašku) judant, keisis jo koordinatės x ir y , tačiau tų koordinatės priklausomybės nuo kampo φ forma nesikeis: bet kuriuo laiko momentu t galios lygybės $x(t) = \ell \sin \varphi(t)$, $y(t) = \ell (1 - \cos \varphi(t))$. Pasinaudodami šiomis formulėmis ir anksčiau išvesta formule $a_1 = -g \sin \varphi(t)$, išvesime diferencialinę lygtį, aprašančią svorelio judėjimą.

Diferencijuodami $x(t)$ ir $y(t)$ gauname $\dot{x}(t) = \ell \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t)$, $\dot{y}(t) = \ell \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t)$. Situacijoje, pavaizduotoje 24 pav., šios išvestinės bus neigiami dydžiai, nes $\dot{\varphi}(t) < 0$. Tokį rezultatą mes ir turėjome

rias priimta vadinti elementariomis, dažniausiai nepavyksta. Tuomet belieka tenkintis artutinių dalių sprendinių radimu, pasitelkiant artutinius skaičiavimo matematikos metodus.

Su tokiu atveju susidurtume ir mes, jei mūsų nagrinėtoje mechaninėje sistemoje rutuliuko greitis būtų galėjęs viršyti $2m \cdot s^{-1}$.

Diferencialinių lygčių netiesiškumas gali atsirasti ne tik todėl, kad mechaninėse sistemose galimas energijos „nutekėjimas“, vykstantis „netiesiškai“. Yra ir kitų netiesiškumo priežasčių.

Pavyzdžiui, net tokios paprastos mechaninės sistemos kaip ideali švytuoklė, susidedanti iš turinčio masę m svorelio, pakabinto ant siūlo, turinčio pastovų ilgį ℓ ir tokią mažą masę, kad ją lyginami su svorelio mase, galime laikyti lygia 0, judėjimą aprašo netiesinė diferencialinė lygtis. Išvedus tą sistemą iš pusiausvyros, t. y. suteikus svoreliui

gauti, nes $\dot{x}(t) = v_x(t)$, $\dot{y}(t) = v_y(t)$, o greičio $\vec{v}$ projekcijos v_x ir v_y šioje situacijoje yra neigiami dydžiai. Absoliučiąją greičio v reikšmę gausime, pasinaudodami formule $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$, iš kurios išplaukia, jog $v = \ell\dot{\varphi}(t) = \ell\omega(t)$.

Diferencijuodami antrą kartą, gauname, jog $\ddot{x}(t) = \ell\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) - \ell\dot{\varphi}(t)^2\sin\varphi(t)$, $\ddot{y}(t) = \ell\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) + \ell\dot{\varphi}(t)^2\cos\varphi(t)$.

Iš šių formulių išplaukia išvada, jog svorelio pagreitį $\vec{a} = \vec{i}\ddot{x}(t) + \vec{j}\ddot{y}(t)$ galima dekomponuoti į du pagreičius: $\vec{a}_1 = \vec{i}\ddot{x}_1(t) + \vec{j}\ddot{y}_1(t) = \vec{i}\ell\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) + \vec{j}\ell\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)$ ir $\vec{a}_2 = \vec{i}\ddot{x}_2(t) + \vec{j}\ddot{y}_2(t) = -\vec{i}\ell\dot{\varphi}^2(t)\sin\varphi(t) + \vec{j}\ell\dot{\varphi}^2(t)\cos\varphi(t)$.

Pagreičio $\vec{a}_1$ modulis $a_1 = \sqrt{\ddot{x}_1^2(t) + \ddot{y}_1^2(t)} = \ell\ddot{\varphi}(t)$, o pagreičio $\vec{a}_2$ modulis $a_2 = \sqrt{\ddot{x}_2^2(t) + \ddot{y}_2^2(t)} = \ell\dot{\varphi}^2(t) = \ell\omega^2(t) = \frac{[\ell\omega(t)]^2}{\ell} = \frac{v^2(t)}{\ell}$.

Kaip matome, pagreitis $\vec{a}_2(t)$ yra mūsų jau minėtasis įcentrinis pagreitis $a_{ic} = \frac{v^2}{r}$. Situacijoje, pavaizduotoje 24 pav., to pagreičio projekcija $a_{2,x}(t) = \ddot{x}_2(t)$ turėtų būti neigiamas dydis, nes įcentrinės jėgos $\vec{T}$ projekcija T_x nukreipta į kairę. Tai atitinka ir formulę $\ddot{x}_2(t) = -\ell\dot{\varphi}^2(t)\sin\varphi(t)$, kuri vaizduoja neigiamą dydį, nes šioje situacijoje $\sin\varphi(t) > 0$. Projekcija $a_{2,y} = \ddot{y}_2(t) = \ell\dot{\varphi}^2(t)\cos\varphi(t)$ yra teigiamas dydis, ir tai atitinka jėgos $\vec{T}$ projekciją T_y , kuri nukreipta į viršų.

Nesunku įsitikinti, kad pagreitis $\vec{a}_1(t) = \vec{i}\ddot{x}_1(t) + \vec{j}\ddot{y}_1(t)$ yra svorelio judėjimo apskritimu pagreitis. Tai tas pats pagreitis $\vec{a}_1(t)$, kurio dydį $a_1(t) = g\sin\varphi(t)$ mes jau esame apskaičiavę. Todėl galime sudaryti lygybę $\ell\ddot{\varphi}(t) = -g\sin\varphi(t)$. Gauname netiesinę diferencialinę lygtį $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t)$.

Šią diferencialinę lygtį, aprašančią matematinės švytuoklės judėjimą, pasinaudojus energijos tvermės dėsniu, buvo galima gauti žymiai paprasčiau.

Švytuoklei judant iš padėties $\varphi(0) = \varphi^*$, kurioje jos kinetinė energija buvo lygi 0, o potencialinė energija buvo lygi $mgh(0) = mg\ell(1 - \cos\varphi(0))$, jos potencialinė energija mažėja, virsdama kinetine. Momentu t , kai kampas φ tampa lygus $\varphi(t)$, svyruoklės potencialinė energija sumažėja iki dydžio $mg\ell[1 - \cos\varphi(t)]$. Tuo pačiu metu iki to momento svyruoklė įgyja kinetinę energiją $\frac{mv^2(t)}{2} = \frac{m\ell^2\dot{\varphi}(t)^2}{2}$. Iš energijos tvermės dėsniu, kai nėra trinties ir kitų mechaninės energijos nuostolių, išplaukia, jog $\frac{m\ell^2\dot{\varphi}(t)^2}{2} = mg\ell(1 - \cos\varphi^*) - mg\ell[1 - \cos\varphi(t)]$.

Diferencijuodami abi formules $\dot{\varphi}^2(t) = \frac{2g}{\ell}[\cos\varphi(t) - \cos\varphi^*(t)]$ puses gauname lygybę $2\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) = -\frac{2g}{\ell}\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)$.

Kadangi visuose švytuoklės judėjimo taškuose, išskyrus taškus, kuriuose $\varphi(t) = \pm\varphi^*$, funkcijos $\dot{\varphi}(t)$ reikšmė nėra lygi 0, tai dalindami abi gautos lygybės puses iš $2\dot{\varphi}(t)$, gauname diferencialinę lygtį $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t)$.

Kai švytuoklės svyravimų amplitudė yra maža, tai šią netiesinę diferencialinę lygtį galima aproksimuoti artutine tiesine lygtimi $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\varphi(t)$, nes tuo atveju, kai kampas φ yra mažas ir jo dydis matuojamas radianais, galioja artutinė lygybė $\sin\varphi \approx \varphi$. Ta lygybė tuo tikslesnė, kuo kampas φ yra mažesnis. Kai $\varphi \rightarrow 0$, tai $\sin\varphi \rightarrow \varphi$, nes $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$.

Diferencialinę lygtį $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\varphi(t)$ išspręsti yra jau visai paprasta. Jos bendrasis sprendinys

$$\text{yra } \varphi(t) = \varphi(0) \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \dot{\varphi}(0) \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\ell}} t = \sqrt{\varphi^2(0) + \frac{\ell}{g} \dot{\varphi}^2(0)} \left[\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varphi^2(0) + \frac{\ell}{g} \dot{\varphi}^2(0)}} \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{\varphi^2(0) + \frac{\ell}{g} \dot{\varphi}^2(0)}} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right] = \sqrt{\varphi^2(0) + \frac{\ell}{g} \dot{\varphi}^2(0)} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t - \psi \right).$$

Šioje formulėje $\varphi(0)$ yra pradinis matematinės švytuoklės atlenkimo nuo vertikalios pusiausvyrinės padėties kampas (žr. 24 pav.), $\dot{\varphi}(0)$ – švytuoklės judėjimo pradinis kampinis greitis momentu $t=0$, $\psi = \arctg \frac{\dot{\varphi}(0)}{\varphi(0)} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ – švytuoklės svyravimų pradinė fazė.

Kai pradinės sąlygos yra tokios, jog momentu $t=0$, $\varphi(0)=\varphi^*$, o $\dot{\varphi}(0)=0$, t. y., kai švytuoklė, kuri buvo atlenkta nuo pusiausvyrinės būsenos kampu $\varphi=\varphi^*$, momentu $t=0$ paleidžiama laisvai (be stumtelėjimo ar prilaikymo) kristi, įtempiant ją prilaikantį besvorį, neturintį inercijos ir nesideformuojantį „siūlą“, tai $\psi=0$. Tuomet matematinės švytuoklės svyravimus apytiksliai aprašo lygybė $\varphi(t) = \varphi^* \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$.

Ši lygybė bus tuo tikslesnė, kuo mažesnė bus „kampinė“ svyravimų amplitudė φ^* .

Naudodamiesi gautu artutiniu bendruoju sprendiniu $\varphi(t) \approx \sqrt{\varphi^2(0) + \frac{\ell}{g} \dot{\varphi}^2(0)} \times \cos \left[\sqrt{\frac{g}{\ell}} t - \arctg \frac{\dot{\varphi}(0)}{\varphi(0)} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \right]$ (arba artutiniu daliniu sprendiniu $\varphi(t) = \varphi^* \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$) bei formulėmis $x(t) = \ell \sin \varphi(t)$, $y(t) = \ell [1 - \cos \varphi(t)]$, $v(t) = \ell \dot{\varphi}(t)$, galime apskaičiuoti materialinio taško, vaizduojančio matematinės švytuoklės svorėlį, koordinates $x(t)$ ir $y(t)$ bei svorėlio judėjimo greitį $v(t)$ kiekvienam laiko momentui t .

Pažymėję matematinės švytuoklės būsenas $\vec{z} = (z_1, z_2)$ ir apskaičiavę jų reikšmes $z_1 = \varphi(t)$, $z_2 = \dot{\varphi}(t)$, galime apskaičiuoti švytuoklės artutinę fazinę trajektoriją bei rasti artutinį jos portretą – elipsę $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$, kurios parametrus a ir b galime apskaičiuoti naudodamiesi formulėmis $a^2 = \varphi^2(0) + \frac{\ell}{g} \dot{\varphi}^2(0)$, $b^2 = \frac{g}{\ell} \varphi^2(0) + \dot{\varphi}^2(0)$, gaunamomis eliminuojant parametą t iš lyčių $z_1(t) = \varphi(t)$ ir $z_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ panašiu būdu, kaip mes tai jau darėme 1.2. skyriuje.

Matematinės švytuoklės svyravimai vyks pastoviu periodu $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$, kuris priklausys tik nuo švytuoklės ilgio ℓ bei nuo gravitacinio pagreičio g , nepriklausydamas nei nuo švytuoklės masės m , nei nuo pradinių sąlygų.

Paskutinis teiginys nėra absoliučiai tikslus, nes formulė $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ buvo gauta sprendžiant artutinę diferencialinę lygtį $\ddot{\varphi}(t) \approx -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$, išvestą priėmus prielaidą, jog švytuoklės svyravimų amplitudė φ^* yra tokia maža, kad praktiškai galioja lygybė $\varphi^* \approx \sin \varphi^*$.

Tikslus diferencialinės lygties $\ddot{\varphi}(t) \approx -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t)$ sprendimas leidžia išreikšti svyravimų

periodo trukmę T pirmojo tipo elipsiniu integralu $T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} \sin^2 u}}$, kurio reikšmės yra

apskaičiuotos ir pateiktos specialiose lentelėse (žr., pavyzdžiui, [35, 36]). Tas reikšmes galima apskaičiuoti ir naudojantis kompiuterinėmis programomis, įtrauktomis į standartinius taikomųjų programų paketus MAPLE, MATLAB, MATHCAD.

Skaičiavimai, atlikti naudojantis jau minėtąją tikslia svyravimų periodo T trukmės apskaičiavimo formule, rodo, jog artutinės formulės $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$, išvestos naudojantis prielaida, kad φ^* –

mažas kampas, paklaida yra maža ir šia artutine formule galima naudotis ne tik tada, kai $\varphi^* \approx 0$, bet ir esant ne tokioms jau mažoms švytuoklės svyravimų amplitudėms φ^* . Pavyzdžiui, kai $\varphi^* \leq \frac{\pi}{18} = 10^\circ$, tai

periodo T trukmės apskaičiavimo, naudojantis artutine formule $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$, paklaida neviršija 0,2 %. Ir

net tada, kai $\varphi^* \leq \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, paklaida neviršija 2 %.

Šia matematinės švytuoklės svyravimų periodo T pastovumo savybe buvo pasinaudota sukonstruojant švytuoklinį laikrodį, o svyravimo periodo trukmės T priklausomybė nuo švytuoklės ilgio ℓ naudojama tokio laikrodžio reguliavimui: kai pastebima, jog laikrodis pradėjo „vėluoti“, redukuotas švytuoklės ilgis ℓ^* , apie kurį kalbėsime šiek tiek vėliau, būna šiek tiek sumažinamas, kad padidėtų švytavimų dažnis, o kai pastebima, jog laikrodis pradeda „skubėti“ – redukuotas švytuoklės ilgis ℓ^* šiek tiek padidinamas.

Kad švytuoklinis laikrodis ir žiemą, ir vasarą laiką matuotų vienodai, jo švytuoklę gamina iš tokio metalų lydinio, kurio šiluminio plėtimosi koeficientas yra labai mažas.

Kad švytuoklinio laikrodžio švytuoklės švytavimų amplitudė φ^* nemažėtų dėl mechaninės energijos nuostolių, atsirandančių įveikiant oro pasipriešinimą ir laikrodžio detalių trintį, švytavimai palaikomi lengvais švytuoklės stumtelėjimais, atliekamais automatiškai, ir periodiškai kompensuojančiais mechaninės energijos nuostolius. Senoviniuose švytuokliniuose laikrodžiuose tokia kompensacija vykdavo laikrodžiuose esančių svorelių ar laikrodyje esančios prisukamos spyruoklės potencinės energijos mažėjimo sąskaita.

Diferencialinės lygties $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t)$, pakankamai tiksliai aprašančios matematinės švytuoklės svyravimus beorėje erdvėje ir neegzistuojant trinčiai, sprendinį galima rasti įvairiais būdais. Vienas jų – **Dufingo diferencialinės lygties** sprendimo būdas (žr., pavyzdžiui, [37]), susivedantis į laipsninės eilutės sumos apskaičiavimą. Rekomenduoju skaitytojui susipažinti su tuo sprendimo būdu.

Sudarydami matematinės švytuoklės svyravimus aprašančią diferencialinę lygtį $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t)$, mes laikėme, jog siūlas, prilaikantis svorelį, turintį masę m , pats neturi inercijos, t. y. kad siūlo masė lygi 0, o patį svorelį laikėme materialiniu tašku, kurio visa masė sukoncentruota siūlo gale.

Toks švytuoklės modelis vadinamas **matematine švytuokle**. Jis yra realios fizinės švytuoklės idealizacija, tik artutinis realios fizinės švytuoklės modelis. Tačiau galima įrodyti, kad toks idealizuotas matematinis modelis gali būti taikomas ir realių fizinių švytuoklių nagrinėjimui, nes, **fizinės švytuoklės svyravimų matematinį modelį galima suvesti į mūsų jau nagrinėtąjį matematinės svyrųoklės matematinį modelį**, apskaičiuojant taip vadinamąjį **redukuotą fizinės svyrųoklės ilgį** ℓ^* ir įstatant jį į matematinės svyrųoklės lygtį vietoj matematinės svyrųoklės ilgio ℓ .

Fizine svyrųokle vadinamas bet koks kietas kūnas, galintis svyruoti aplink nejudančią horizontalią ašį, veikiant to kūno svorio jėgai. Bet kuriame teorinės mechanikos kurse (žr., pavyzdžiui, [38]), įrodoma, jog redukuotą fizinės svyrųoklės ilgį ℓ^* galima apskaičiuoti naudojantis

formule $\ell^* = \frac{I}{md}$, kurioje I yra svyrųojančio kūno **inercijos momentas** svyravimų ašies atžvilgiu, m – to kūno masė, o d – to kūno **masių centro atstumas** nuo svyravimų ašies.

Inercijos momentas I yra fizikinis dydis, kuris **sukamajame kūno judėjime** vaidina vaidmenį, analogišką masės vaidmeniui to kūno **tiesiaiegiame judėjime**. Pavyzdžiui, besisukančio aplink savo ašį

su pastoviu kampiniu greičiu ω kieto kūno kinetinė energija yra lygi $\frac{I\omega^2}{2}$, ir ši formulė yra analogiška tiesiaiegio judėjimo kinetinės energijos formulėi $\frac{mv^2}{2}$. Šios formulės skiriasi tik tuo, kad vienoje operuojama su tiesiniu greičiu v ir su mase m , o antroje – su kampiniu greičiu ω ir inercijos momentu I . Materialinio taško, turinčio masę m ir judančio apskritimu, turinčiu spindulį r , su pastoviu linijiniu greičiu v , kinetinė energija lygi $\frac{mv^2}{2}$. Kadangi šiuo atveju $v=\omega r$, tai to taško kinetinė energija, išreikšta per kampinį greitį ω , yra lygi $\frac{mr^2\omega^2}{2}$, iš kur išplaukia, jog materialinio taško inercijos momentas šiame sukamajame judėjime yra lygus $I=mr^2$.

Skaidydami kietą kūną, kurio medžiagos tankis yra lygus ρ , į be galo mažus materialinius taškus, kurių tūris būtų lygus $dV=dx dy dz$, o masė būtų lygi $\rho dV=\rho dx dy dz$, ir matuodami tų taškų atstumus iki sukimosi ašies bei sumuodami kietąjį kūną sudarančių taškų inercijos momentus, apskaičiuotus, naudojantis formule $I=mr^2$, mes galime apskaičiuoti įvairių kūnų inercijos momentus. Pavyzdžiui, labai plonos lazdelės, turinčios ilgį ℓ , labai mažą pastovų skersinio pjūvio plotą S ir pastovų medžiagos, iš kurios ta lazdelė sudaryta, tankį ρ , inercijos momentas I ašies, statmenos tai lazdelei ir kertančios tą lazdelę viename iš jos galų, atžvilgiu yra $I=\int_0^\ell x^2 \rho S dx = \rho S \frac{\ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}$. Tuo atveju, kai sukimosi ašis, būdama statmena tai lazdelei, kirstų ją jos masės centre, gautume, jog jos inercijos momentas lygus $I=2\int_0^{\ell/2} x^2 \rho S dx = \frac{m\ell^2}{12}$.

Šios formulės gali būti laikomos teisingomis tik labai plonomis lazdelėms, kurioms jų taškus, priklausančius vienam skersiniam jų pjūviui, galima laikyti praktiškai vienodai nutolusiais nuo sukimosi ašies. Storesnių lazdelių atveju tektų atsižvelgti ir į skersinius matmenis. Pavyzdžiui, jei vietoj lazdelės būtų stačiakampis gretasienis, turintis matmenis $a*b*c$ ir pagamintas iš medžiagos, turinčios visur vienodą tankį, tai to gretasienio inercijos momentai jo simetrijos ašių atžvilgiu būtų lygūs: $\frac{m}{12}(a^2+b^2)$, $\frac{m}{12}(a^2+c^2)$, $\frac{m}{12}(b^2+c^2)$. Rekomenduočiau skaitytojui pabandyti išvesti šias formules.

Mokėdami apskaičiuoti fizinio kūno inercijos momentus ir masės centro koordinates, mes galime apskaičiuoti redukuotą fizinės svyruoklės ilgį ℓ^* ir suvesti fizinės svyruoklės modelį į matematinės svyruoklės modelį.

Pavyzdžiui, jei fizinę svyruoklę sudarytų plonas ilgas virbelis, pakabintas už vieno savo galo, tai tokios fizinės svyruoklės redukuotas ilgis būtų $\ell^* = \frac{I}{md} = \frac{m\ell^2 \cdot 2}{3 \cdot \ell \cdot m} = \frac{2}{3}\ell$. Tokios svyruoklės svyravimus beorėje erdvėje ir be trinties aprašytų diferencialinė lygtis $\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell^*} \sin \varphi(t) = -\frac{3g}{2\ell} \sin \varphi(t)$.

Apytikris tokio virbelio svyravimų periodas būtų $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell^*}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$, t. y. mažesnis už matematinės svyruoklės svyravimų periodą $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Atveju, kai fizinė svyruoklė turėtų sudėtingesnę konstrukciją, pavyzdžiui, būtų sudaryta iš už vieno savo galo pakabinto ilgo plono virbelio ir masyvaus rutuliuko ant virbelio kito galo, redukuoto tokios svyruoklės ilgio nustatymas būtų jau sudėtingesnis: jos inercijos momentas būtų lygus rutuliuko ir virbelio inercijos momentų sumai, o atstumą d nustatymui tektų pasinaudoti formulėmis: virbeliui $d_v = \frac{\ell}{2}$, rutuliukui $d_r = \ell + r$, visai svyruoklei $d = \frac{m_v \frac{\ell}{2} + m_r(\ell + r)}{m_v + m_r}$, kuriose ℓ – virbelio ilgis, r – rutuliuko spindulys, m_v – virbelio masė, m_r – rutuliuko masė.

Dar sudėtingesnį fizinės svyruoklės svyravimų modelį gautume, jei reiktų atsižvelgti ir į oro pasipriešinimą, ir į tos svyruoklės detalių trintį. Suprantama, kad tikslaus diferencialinės lygties

sprendinio tokiu atveju gauti jau nebepavyktų, tačiau artutinį sprendinį, kuris būtų vis dėlto adekvatesnis tikrovei negu tikslus diferencialinės lygties, aprašančios atitinkamos matematinės svyruoklės svyravimus, sprendinys, gauti įmanoma. Bet kuriuo atveju svyruoklės judėjimą galima aprašyti diferencialine lygtimi $\ddot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$, kurioje f yra funkcija, vaizduojanti svyruoklės kampinio pagreičio $\ddot{\varphi}(t)$ priklausomybę nuo jos kampinio greičio, charakterizuojančio spyruoklės kinetinę energiją ir mechaninės energijos nuostolius dėl oro pasipriešinimo bei kitokios trinties, ir nuo paties kampo $\varphi(t)$, charakterizuojančio spyruoklės padėtį ir tuo pačiu – jos potencialinę energiją.

Išnagrinėti šiame (1.4.9.) skyrelyje mechaninių dinaminų sistemų pavyzdžiai iliustruoja tokių sistemų matematinių modelių sudarymo metodiką, susivedančią į jėgų, veikiančių mechaninę sistemą, išsiaiškinimą, jų atstojamosios jėgos ar jos momento projekcijų nustatymą ir mechanikos dėsnių taikymą, išreiškiant sistemos bei jos dalių pagreičių priklausomybę nuo veikiančių jėgų bei jų momentų, atsižvelgiant į mechaninę sistemą sudarančių kūnų mases bei inercijos momentus.

Kai mechaninę sistemą sudaro materialinis taškas, galintis judėti trimatėje fizinėje erdvėje bet kuria kryptimi, jos matematinį modelį sudaro **trijų skaliarinių antrosios eilės diferencialinių lygčių**

$$\text{ sistema: } \begin{cases} \ddot{x}(t) = f_x(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \\ \ddot{y}(t) = f_y(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \\ \ddot{z}(t) = f_z(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \end{cases}$$

Ši lygčių sistema gaunama nagrinėjant ir nustatant materialinį tašką veikiančių jėgų $\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}$ projekcijas F_{1x} , F_{1y} , F_{1z} , sudarant tų projekcijų algebrines sumas $\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ ir taikant kiekvienai sumai antrąjį Niutono mechanikos dėsni:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n F_{ix}}{m} &= f_x(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)); \quad \ddot{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iy}}{m} = f_y(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)); \\ \ddot{z}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^n F_{iz}}{m} = f_z(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \end{aligned}$$

Taikant vektorinės algebros simboliką ir jos matematinį aparatą, diferencialinių lygčių sistemą galima užrašyti kompaktiškiau: $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$. Šioje formulėje $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$, $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$, $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$.

Sprendžiant šią vektorinę diferencialinę lygtį (ar trijų skaliarinių diferencialinių lygčių sistemą), randamas tos vektorinės diferencialinės lygties (trijų skaliarinių diferencialinių lygčių sistemos)

$$\text{ bendrasis sprendinys. Skaliarinėje formoje jis atrodo taip: } \begin{cases} x(t) = F_x(x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0), t), \\ y(t) = F_y(x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0), t), \\ z(t) = F_z(x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0), t). \end{cases}$$

Jį galima užrašyti ir vektorinėje formoje: $\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0), t)$.

Konkretų vektorinės diferencialinės lygties $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$ (bei tą vektorinę lygtį skaliarinėje formoje vaizduojančios trijų skaliarinių lygčių sistemos) dalinį sprendinį galima gauti iš bendrojo sprendinio, ištačius į jo dešiniąsias lygybių puses konkrečias pradinių sąlygų reikšmes: $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $z(0)=z_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$, $\dot{y}(0)=\dot{y}_0$, $\dot{z}(0)=\dot{z}_0$.

$$\text{ Dalinis sprendinys skaliarinėje formoje } \begin{cases} x(t) = F_x(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t), \\ y(t) = F_y(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t), \\ z(t) = F_z(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t) \end{cases} \text{ vaizduoja}$$

dinaminės sistemos, susidedančios iš vieno materialinio taško, **konfigūraciją** – to taško padėtį trimatėje erdvėje kiekvienu laiko momentu t .

Diferencijuodami dalinį sprendinį, gauname skaliarinių funkcijų sistemą

tą sistemą sudarančio materialinio taško judėjimo greičio $\vec{v}$ projekcijų v_x , v_y , v_z priklausomybę nuo laiko t ir nuo pradinių sąlygų.

Diferencijuodami vektorinę funkciją $\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t)$ gauname vektorinę funkciją $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{F}}(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t)$, aprašančią tos dinaminės sistemos kinematiką vektorinėje formoje.

Pavyzdžiui, diferencialinių lygčių sistema, aprašančią matematinio taško judėjimą trimatėje

$z_{2,1}=\dot{x}$, $z_{2,2}=\dot{y}$, $z_{2,3}=\dot{z}$, ir atsižvelgiant į tai, kad $z_{2,1}=\dot{z}_{1,1}$, $z_{2,2}=\dot{z}_{1,2}$, $z_{2,3}=\dot{z}_{1,3}$, o $\ddot{x}=\dot{z}_{2,1}$, $\ddot{y}=\dot{z}_{2,2}$, $\ddot{z}=\dot{z}_{2,3}$, galima pertvarkyti į šešių eilės diferencialinių lygčių sistemą

Analogišku būdu 3n antrosios eilės diferencialinių lygčių sistema

228

$$\begin{cases}
\dot{z}_1(t) = z_{3n+1}(t), \\
\dot{z}_2(t) = z_{3n+2}(t), \\
\dot{z}_3(t) = z_{3n+3}(t), \\
\dot{z}_4(t) = z_{3n+4}(t), \\
\ldots \ldots \ldots \\
\dot{z}_i(t) = z_{3n+i}(t), \\
\ldots \ldots \ldots \\
\dot{z}_n(t) = z_{4n}(t), \\
\ldots \ldots \ldots \\
\dot{z}_{3n-2}(t) = z_{6n-2}(t), \\
\dot{z}_{3n-1}(t) = z_{6n-1}(t), \\
\dot{z}_{3n}(t) = z_{6n}(t), \\
\dot{z}_{3n+1}(t) = f_1(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{3n}(t), z_{3n+1}(t), z_{3n+2}(t), \ldots, z_{6n}(t)), \\
\dot{z}_{3n+2}(t) = f_2(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{3n}(t), z_{3n+1}(t), z_{3n+2}(t), \ldots, z_{6n}(t)), \\
\dot{z}_{3n+3}(t) = f_3(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{3n}(t), z_{3n+1}(t), z_{3n+2}(t), \ldots, z_{6n}(t)), \\
\ldots \ldots \ldots \\
\dot{z}_{6n-2}(t) = f_{3n-2}(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{3n}(t), z_{3n+1}(t), z_{3n+2}(t), \ldots, z_{6n}(t)), \\
\dot{z}_{6n-1}(t) = f_{3n-1}(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{3n}(t), z_{3n+1}(t), z_{3n+2}(t), \ldots, z_{6n}(t)), \\
\dot{z}_{6n}(t) = f_{3n}(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{3n}(t), z_{3n+1}(t), z_{3n+2}(t), \ldots, z_{6n}(t)),
\end{cases}$$

išreiškiančią priklausomybes, egzistuojančias tarp mechaninės sistemos būsenos koordinačių $z_1, z_2, \ldots, z_{3n}, z_{3n+1}, z_{3n+2}, \ldots, z_{6n}$, vadinamos fazinėmis koordinatėmis.

Sudarant mechaninių sistemų judėjimo matematinius modelius, **fazinėmis koordinatėmis gali būti pasirinktos ne būtinai dekartinės materialinių taškų ir jų greičių projekcijų koordinatės.**

Kaip matėme matematinės svyrųoklės pavyzdyje, fazinėmis koordinatėmis buvo pasirinktos kampo $\varphi(t)$ ir jo išvestinės reikšmės. Fazinėmis koordinatėmis taip pat gali būti mechaninę dinaminę sistemą sudarančių materialinių taškų bei kietųjų kūnų potencialinės ir kinetinės energijos, materialinių taškų ir kūnų judėjimo kiekiai ir pan.

Apibendrinus dinaminės sistemos sąvoką ir taikant ją ne tik mechaninėms sistemoms, jų būsenos vektorius $\bar{z}$ koordinatėmis gali būti elektrinės įtampos, elektros srovės stipriai, demografiniai, socialiniai bei ekonominiai rodikliai, rodikliai, apibūdinantys kokios nors vietovės ar visos mūsų planetos ekologinę būseną ir t. t.

Gana dažnai **dinaminių sistemų būsenų fazinių koordinačių žymėjimui vartojami ne tik žymenys z_i** (pastarieji, kaip jau buvo minėta, ne visada yra patys tinkamiausi, nes sutampa su erdvinės koordinatės, vadinamos **aplikate**, standartiniu žymeniu), bet ir žymenys s_i, q_i, w_i ir pan.

Tokių **apibendrintųjų fazinių koordinačių** skaičius n gali būti labai įvairus ir priklauso nuo dinaminės sistemos bei jos elementų **laisvės laipsnių** skaičiaus. Gana įvairios gali būti ir priklausomybės, egzistuojančios tarp jų. Todėl **bendruoju atveju dinaminės sistemos matematinis modelis**, užrašytas **vektorinėje diferencialinėje formoje**, atrodo taip:

$$\begin{cases}
\dot{\bar{q}}(t) = \bar{f}(\bar{q}(t)) = \bar{f}(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_i(t), \ldots, q_n(t)), \\
\bar{q}(t_0) = (q_1(t_0), q_2(t_0), \ldots, q_i(t_0), \ldots, q_n(t_0)) = (q_{1,0}, q_{2,0}, \ldots, q_{i,0}, \ldots, q_{n,0}).
\end{cases}$$

Naudojantis mums jau įprastais žymenimis, jis atrodytų taip:

$$\begin{cases}
\dot{\bar{z}}(t) = \bar{f}(\bar{z}(t)) = \bar{f}(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_i(t), \ldots, z_n(t)), \\
\bar{z}(0) = (z_1(0), z_2(0), \ldots, z_i(0), \ldots, z_n(0)) = (z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots, z_{i,0}, \ldots, z_{n,0}).
\end{cases}$$

Pereidami nuo vektorinės prie skaliarinės formos, gautume skaliarinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases}
\dot{q}_i(t) = f_i(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_i(t), \ldots, q_n(t)), \\
q_i(0) = q_{i,0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.
\end{cases}$$

Mūsų ką tik nagrinėtos matematinės švytuoklės, švytuojančios beorėje erdvėje ir be trinties, atveju ši sistema atrodytų taip:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = f_1(q_1(t), q_2(t)) = q_2(t) = \dot{\varphi}(t), \\ \dot{q}_2(t) = f_2(q_1(t), q_2(t)) = -\frac{g}{\ell} \sin q_1(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t), \\ q_1(0) = \varphi(0) = \varphi^*, \\ q_2(0) = \dot{\varphi}(0) = 0. \end{cases}$$

Anksčiau nagrinėtos mechaninės dinaminės sistemos – spyruoklės su rutuliuku, pavaizduotos 22 pav., matematinis modelis, kai oro pasipriešinimą laikome lygiu 0, yra diferencialinių lygčių ir pradinų sąlygų sistema:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = f_1(q_1(t), q_2(t)) = q_2(t) = \dot{z}(t), \\ \dot{q}_2(t) = f_2(q_1(t), q_2(t)) = \frac{\lambda}{m}[\ell - q_1(t)] - g = \frac{\lambda}{m}[\ell - z(t)] - g, \\ q_1(0) = z(0) = \ell, \\ q_2(0) = \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Tuo atveju, kai atsižvelgiame ir į oro pasipriešinimą, gauname tokį spyruoklės su rutuliuku judėjimo matematinį modelį:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = f_1(q_1(t), q_2(t)) = q_2(t) = \dot{z}(t), \\ \dot{q}_2(t) = f_2(q_1(t), q_2(t)) = -g + \frac{\lambda}{m}[\ell - q_1(t)] - \frac{k}{m}q_2(t) = -g + \frac{\lambda}{m}[\ell - z(t)] - \frac{k}{m}\dot{z}(t), \\ q_1(0) = z(0) = \ell, \\ q_2(0) = \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Šio skyrelio pradžioje nagrinėto proceso P_2 – elektrodinaminės sistemos – matematinis modelis apibendrintoje formoje atrodytų taip:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = f_1(q_1(t), q_2(t)) = \frac{1}{C}q_2(t) = \frac{1}{C}i(t), \\ \dot{q}_2(t) = f_2(q_1(t), q_2(t)) = -\frac{1}{L}[q_1(t) + Rq_2(t)] = -\frac{1}{L}[u_c(t) + Ri(t)], \\ q_1(0) = u_c(0) = U_0 = \text{const}, \\ q_2(0) = i(0) = 0. \end{cases}$$

Naudodamiesi šiuo modeliu, galėtume gauti mums jau įprastą antros eilės diferencialinę lygtį: $\ddot{q}_1(t) = \frac{1}{C}\dot{q}_2(t) = -\frac{1}{LC}[Rq_2(t) + q_1(t)] = -\frac{1}{LC}[RC\dot{q}_1(t) + q_1(t)]$, t. y. lygtį $LC\ddot{q}_1(t) + RC\dot{q}_1(t) + q_1(t) = 0$, kurią sprendami ir pasinaudodami pradinėmis sąlygomis $q_1(0)=U_0$, $q_2(0)=C\dot{q}_1(0)=0$, gautume tuos sprendinius, kuriuos gavome šio skyrelio pradžioje.

Dinaminių sistemų aibėje išskiriamas jų poaibis, jungiantis tokias dinamines sistemas, kurios buvo pavadintos **klasikinėmis dinaminėmis sistemomis (KSD)**.

Šioms sistemoms būdinga, kad jų fazinių trajektorijų, atitinkančių skirtingas pradines sąlygas, faziniai portretai nesikerta tarpusavyje ir todėl bet kurio portreto bet kurio vieno taško žinojimas leidžia vienareikšmiškai nustatyti visą tą portretą, t. y. visus kitus to portreto taškus. Dėl šios savo savybės KDS kartais vadinamas **dinaminėmis sistemomis, apibrėžtomis savo būseną**.

Formalus matematinis **KDS (kaip tam tikros tipinių išorinių matematinių modelių klasės) apibrėžimas** yra toks:

KDS – tai metrinės r -matės (r – sveikasis skaičius) erdvės Z , vadinamos **būsenų erdve**, transformacijų į save **vienaparametrinė algebrinė grupė** $\bar{F}(\bar{z}, t) \in Z$, apibrėžta visoms būsenų vektoriaus $\bar{z} \in Z$ reikšmėms, esant bet kokioms parametro t , vadinamo laiku ir vaizduojančio laiką, reikšmėms $t \in (-\infty, +\infty)$, tenkinanti šias tris sąlygas:

- 1) pradinų sąlygų **suderinamumo**: $\bar{F}(\bar{z}(0), 0) = \bar{z}(0)$,
- 2) funkcijos $\bar{F}(\bar{z}, t)$ **tolydumo**: funkcija $\bar{F}(\bar{z}, t)$ turi būti tolydi visų savo argumentų $z_1, z_2, \dots, z_p, \dots, z_r$ ir parametro t atžvilgiu visoje tos funkcijos apibrėžimo srityje $\bar{z} \in Z$ ir $t \in (-\infty, +\infty)$,

* **Algebrinės grupės** apibrėžimą skaitytojas gali rasti šios mokymosi priemonės 1.9.1.5. skyrelyje.

3) **algebrinės grupės:** $\bar{F}(\bar{z}(0), t_1 + t_2) = \bar{F}(\bar{F}(\bar{z}(0), t_1), t_2) = \bar{F}(\bar{z}(t_1), t_2)$ visoms t_1 ir t_2 reikšmėms iš $(-\infty, +\infty)$.

Ši – trečioji – sąlyga reiškia, jog, judant **fazine trajektorija** $\bar{z}(t) = \bar{F}(\bar{z}(0), t)$, esančia diferencialinių lygčių sistemos $\dot{\bar{z}}(t) = f(\bar{z}(t))$, sudarančios dinaminės sistemos matematinį modelį, **daliniu sprendiniu**, atitinkančiu pradinės sąlygas $\bar{z}(0) = \bar{z}_0$, **bet kurią tos fazinės trajektorijos atkarpą turėtų būti galima visiškai vienodai nueiti visą iškart arba dalimis, skaidant tą atkarpą į bet kokią baigtinį bet kokių atkarpų skaičių.**

Išnagrinėsime klasikinės dinaminės sistemos ir šio formalaus jos apibrėžimo taikymo pavyzdį, įrodydami, kad diferencialinių lygčių sistema
$$\begin{cases} \dot{z}_1 = b + 2t, \\ \dot{z}_2 = 2, \end{cases}$$
 esant pradinėms sąlygoms $z_1(0) = a = \text{const}$, $z_2(0) = b = \text{const}$, apibrėžia **klasikinių dinaminių sistemų šeimą**.

Surasime tai šeimai priklausančių KDS fazinių trajektorijų portretų matematinį modelį ir pavaizduosime grafiškai tokių portretų pavyzdžius:

- 1) iš lygties $\frac{dz_1(t)}{dt} = b + 2t$ gauname, jog $dz_1 = (b + 2t)dt$ t. y. gauname, jog $z_1(t) = z_1(0) + bt + t^2 = a + bt + t^2$;
- 2) iš lygties $\frac{dz_2(t)}{dt} = 2$ gauname, jog $dz_2 = 2dt$, t. y. gauname, jog $z_2(t) = z_2(0) + 2t = b + 2t = \frac{dz_1(t)}{dt}$;
- 3) kaip matome, duotąją diferencialinių lygčių sistemą **galima suvesti į standartinę (normalinę) dinaminės sistemos matematinio modelio formą**
$$\dot{\bar{z}} = \bar{f}(\bar{z}) = \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = 2, \end{cases}$$

kurioje išvestinės $\dot{z}_p$ (šiuo atveju – $\dot{z}_1$ ir $\dot{z}_2$) priklauso tik nuo kanoninių kintamųjų ir tiesiogiai nepriklauso nuo parametro t ;

- 4) funkcija $\bar{F}(\bar{z}(0), t) = (F_1(\bar{z}(0), t); F_2(\bar{z}(0), t)) = (z_1(0) + z_2(0) \cdot t + t^2; z_2(0) + 2t)$ yra apibrėžta visoms realioms z_1, z_2 ir t reikšmėms;
- 5) ši vektorinė funkcija tenkina pirmąją KDS apibrėžimo sąlygą – pradinių sąlygų suderinamumo sąlygą, nes $F_1(\bar{z}(0), 0) = z_1(0) + z_2(0) \cdot 0 + 0^2 = z_1(0)$ ir $F_2(\bar{z}(0), 0) = z_2(0) + 2 \cdot 0 = z_2(0)$;
- 6) ji tenkina ir antrąją – tolydumo – sąlygą, nes funkcijos $F_1(\bar{z}(0), t) = z_1(0) + z_2(0) \cdot t + t^2 = a + bt + t^2$ ir $F_2(\bar{z}(0), t) = z_2(0) + 2t = b + 2t$ yra tolydžios savo argumentų atžvilgiu;
- 7) ši vektorinė funkcija tenkina ir trečiąją – algebrinės grupės – sąlygą, nes $F_1(\bar{z}(0), t_1 + t_2) = z_1(0) + z_2(0)(t_1 + t_2) + (t_1 + t_2)^2 = z_1(0) + z_2(0)t_1 + t_1^2 + (z_2(0) + 2t_1)t_2 + t_2^2 = z_1(t_1) + z_2(t_1)t_2 + t_2^2 = F_1(\bar{z}(0), t_1) + F_2(\bar{z}(0), t_1)t_2 + t_2^2 = F_1(\bar{z}(t_1), t_2)$ ir $F_2(\bar{z}(0), t_1 + t_2) = z_2(0) + 2(t_1 + t_2) = z_2(0) + 2t_1 + 2t_2 = z_2(t_1) + 2t_2 = F_2(\bar{z}(0), t_1) + 2t_2 = F_2(\bar{z}(t_1), t_2)$.

Iš gautų rezultatų išplaukia išvada: **duotoji diferencialinių lygčių sistema yra KDS matematinis modelis**, nes jis pilnai tenkina KDS apibrėžimą.

Surasime šios KDS šeimos fazinį portretą, pasinaudodami gautomis lygybėmis

$$\begin{cases} z_1(t) = a + bt + t^2, \\ z_2(t) = b + 2t \end{cases}$$
 ir eliminuodami iš jų parametą t :

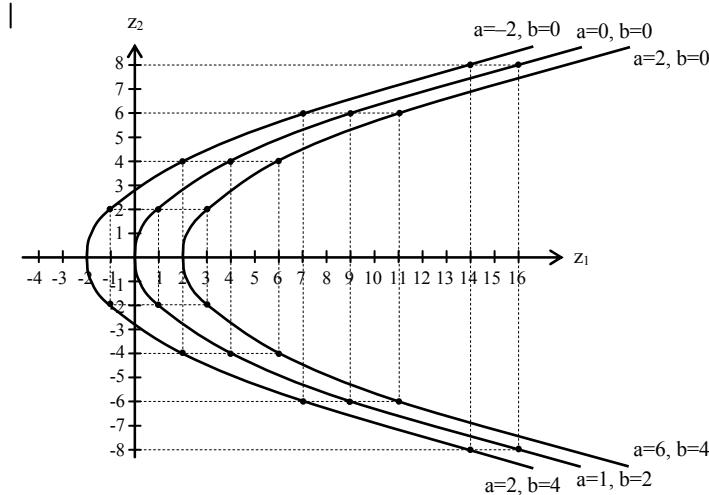
$$1) \quad t = \frac{z_2 - b}{2},$$

$$\begin{aligned} 2) \quad z_1 &= a + b \cdot \frac{z_2 - b}{2} + \left(\frac{z_2 - b}{2} \right)^2 = a + \frac{b}{2} z_2 - \frac{b^2}{2} + \frac{z_2^2}{4} - \frac{2bz_2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{1}{4} z_2^2 + \left(a - \frac{b^2}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} z_2^2 + C, \text{ kur } C = z_1(0) - \left(\frac{z_2(0)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Gautoji lygybė $z_1 = 0,25z_2^2 + C = 0,25z_2^2 + \left[z_1(0) - \left(\frac{z_2(0)}{2} \right)^2 \right]$ vaizduoja parabolių šeimą ir yra

nagrinėjamos KDS fazinių trajektorijų fazinių portretų šeimos matematinis modelis.

Fazinius portretus, atitinkančius dalinius diferencialinių lygčių sistemos sprendinius, galima gauti, pasirenkant atitinkamas pradinės sąlygų $z_1(0)$ ir $z_2(0)$ reikšmes ir apskaičiuojant konstantą C . Pavyzdžiui, kai $z_1(0)=0$ ir $z_2(0)=0$, tai gauname parabolę $z_1 = 0,25z_2^2$ (žiūr 25 pav.).



25 pav.

Keičiant konstantos $C = z_1(0) - \left[\frac{z_2(0)}{2} \right]^2$ reikšmę, t. y. atitinkamai keičiant pradinės sąlygas

$z_1(0)=a$ ir $z_2(0)=b$, nagrinėjamos portretų šeimos parabolės viršūnės slankios koordinatės z_1 ašimi, nekeisdamos koordinatės $z_2=0$ reikšmės.

Esant skirtingoms pradinėms sąlygoms, tos parabolės arba bus paslinktos viena kitos atžvilgiu (kai parabolės konstantos C bus skirtingos), arba sutaps visais savo taškais (kai konstantos C bus vienodos, kaip, pavyzdžiui, atvejais $a=0, b=0$ ir $a=1, b=2$), tačiau niekada nesikirs kokiame nors viename taške.

Vadinasi, kiekvieną konstantos $C = a - \left(\frac{b}{2} \right)^2$ reikšmę atitiks viena ir tik viena parabolė

$z_1 = 0,25z_2^2 + C$ ir per kiekvieną būsenų erdvės Z tašką $\vec{z}^* = (z_1^*, z_2^*)$ eis viena ir tik viena parabolė,

kurios taškų koordinatės z_1 ir z_2 tenkins lygtį $z_1 - 0,25z_2^2 = z_1^* - 0,25(z_2^*)^2 = C = a - \left(\frac{b}{2} \right)^2 = z_1(0) -$

$-\left(\frac{z_2(0)}{2} \right)^2$.

Žinodami bent vieną tokios parabolės tašką, galėsime rasti visus kitus tokios parabolės taškus ir ją nubrėžti.

Pavyzdžiui, jei žinome, kad tam tikra šios šeimos parabolė kerta tašką, turintį koordinatės $z_1^* = 6$ ir $z_2^* = 4$, tai galime rasti, jog tos parabolės konstanta C^* yra lygi $z_1^* - 0,25(z_2^*)^2 = 6 - 0,25 \cdot 4^2 = 2$. Po to galima apskaičiuoti, jog tos parabolės viršūnės koordinatės z_2 reikšmė yra lygi 0, o tos viršūnės koordinatė $z_1 = 0,25z_2^2 + C = 0,25 \cdot 0^2 + 2 = 2$.

Taip pat kiekvienai koordinatės z_2 reikšmei, priklausančiai intervalui $(-\infty, +\infty)$ visada galime rasti atitinkamą koordinatės $z_1 = 0,25z_2^2 + C = 0,25z_2^2 + 2$ reikšmę.

Dar vienas KDS pavyzdys – labai dažnai stebimi procesai, kurių matematinis modelis yra šios mokymosi priemonės „Įvado“ 0.2.6. skyrelyje pateikta diferencialinė **logistinės kreivės lygtis** $\dot{z}(t) = k_1 z(t) - k_2^2 z^2(t)$.

Šios diferencialinės lygties išvedimas, sprendimas ir taikymas ekologijoje gyvūnų populiacijų narių skaičiaus $z(t)=N(t)$ nagrinėjimui pateiktas šios mokymosi priemonės 1.14.13. skyrelyje. Panašia lygtimi pasinaudota ir 1.14.12.2.2. skyrelyje, nagrinėjant ekonomikos augimo procesą.

Čia įrodysiu, jog ši diferencialinė lygtis priklauso KDS modelių klasei, t. y., kad jos bendrasis sprendinys – fazinių trajektorijų šeimos matematinis modelis $z(t)=F(z(0),t)$ – tenkina visas tas sąlygas, kurias turi tenkinti KDS.

Pradžioje rasiu bendrąją šios lygties sprendinį $z(t)=F(z(0),t)$, pertvarkydamas diferencialinę lygtį $\dot{z}(t) = k_1 z(t) - k_2 z^2(t)$ į lygtį $\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z - \frac{k_1}{k_2}} = k_1 dt$ ir pastarąją integruodamas.

Potenciuodamas integravimo rezultata $\frac{z(t) \cdot \left(z(0) - \frac{k_1}{k_2} \right)}{z(0) \cdot \left(z(t) - \frac{k_1}{k_2} \right)} = k_1 t = \ln e^{k_1 t}$ ir išreikšdamas iš gautos lygybės $z(t)$, randu, jog $z(t)=F(z(0),t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t} + \frac{k_2}{k_1}}$.

Nesunku įsitikinti, jog ši funkcija tenkina suderinamumo reikalavimą, nes $F(z(0),0)=z(0)$ ir, kai $z(0)=0$, tai $F(z(0),t)$ tampa konstanta, tapachiai lygia 0, kadangi $F(z(0),t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t} + \frac{k_2}{k_1}} = \frac{z(0)}{\left(1 - \frac{k_2}{k_1} z(0) \right) e^{-k_1 t} + \frac{k_2}{k_1} z(0)}$ ir, kai $z(0)=0$, gauname, jog $F(z(0),t)=0$. Todėl funkcija $z(t)=F(z(0),t)$

egzistuoja visoms galimoms $z(0) \geq 0$ ir $t \in (-\infty, +\infty)$ reikšmėms ir tenkina sąlygą $F(z(0),0)=z(0)$.

Kai $0 < z(0) < \frac{k_1}{k_2}$, tai $z(t)$, didėjant t , didėja, o kai $z(0) > \frac{k_1}{k_2}$, tai $z(t)$, didėjant t , mažėja. Kai $z(0)=0$, tai, kaip jau buvo įrodyta, $z(t) \equiv 0$, o kai $z(0) = \frac{k_1}{k_2}$, tai $z(t) = \frac{k_1}{k_2} = \text{const}$.

Ši konstanta yra ribinis populiacijos dydis, priklausantis nuo resursų (maisto, erdvės ir pan.), kuriais populiacija gali naudotis.

Nesunku įsitikinti, jog funkcija $z(t)=F(z(0),t)$ yra tolydi, kadangi $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(z(0),t + \Delta t) = F(z(0),t)$ visoms t , Δt ir leistinoms $z(0)$ reikšmėms. Analogiškai galima įrodyti funkcijos $F(z(0),t)$ tolydumą pradinės sąlygos $z(0)$ pokyčių atžvilgiu: $\lim_{\Delta z(0) \rightarrow 0} F(z(0) + \Delta z(0),t) = F(z(0),t)$.

Belieka patikrinti, ar funkcija $z(t)=F(z(0),t)$ tenkina trečiąją (ir paskutinįją) – algebrinės grupės – reikalavimą:

$$\begin{aligned} 1) \quad & F(z(0),t_1+t_2) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1(t_1+t_2)} + \frac{k_2}{k_1}}; \\ 2) \quad & z(t_1)=F(z(0),t_1) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t_1} + \frac{k_2}{k_1}}, \text{ todėl } \frac{1}{z(t_1)} = \left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t_1} + \frac{k_2}{k_1}; \\ 3) \quad & F(z(t_1),t_2) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z(t_1)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t_2} + \frac{k_2}{k_1}} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t_1} + \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-k_1 t_2} + \frac{k_2}{k_1}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{k_2^2}{k_1}\right)e^{-k_1(t_1+t_2)} + \frac{k_2^2}{k_1}} = F(z(0), t_1 + t_2), \text{ ką ir reikėjo įrodyti.}$$

Gavome, kad dinaminė sistema, kurios perėjimo funkcija yra $\dot{z}(t) = k_1 z(t) - k_2^2 z^2(t)$, tikrai yra KDS.

Tačiau ne visos dinaminės sistemos yra KDS. Pavyzdžiui, palikę tas pačias pradinės sąlygas $z_1(0)=a$ bei $z_2(0)=b$ ir tik šiek tiek pakeitę anksčiau nagrinėtąją diferencialinių lygčių sistemą, t. y. vietoj sistemos $\begin{cases} \dot{z}_1 = b + 2t, \\ \dot{z}_2 = 2 \end{cases}$ paėmę sistemą $\begin{cases} \dot{z}_1 = b + 2t, \\ \dot{z}_2 = 1, \end{cases}$ gautume dinaminę sistemą, kuri jau nebepriklausytų KDS klasei.

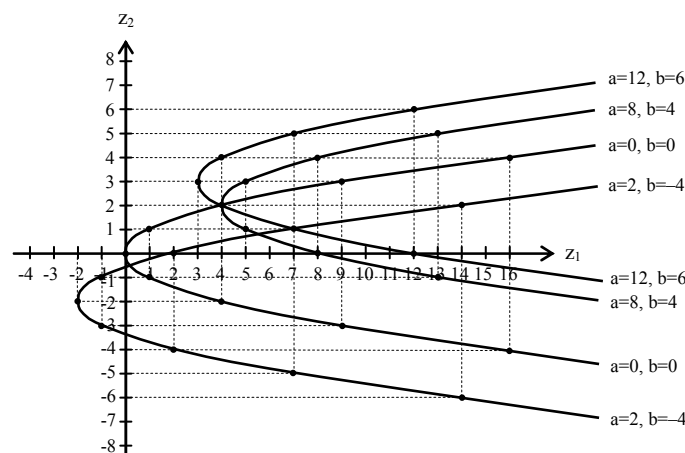
Tai nesunku parodyti ir įrodyti:

- 1) sprenddami duotąsias diferencialines lygtis gauname, jog $z_2(t)=z_2(0)+t=b+t$, $z_1(t)=z_1(0)+bt+t^2=a+bt+t^2$;
- 2) eliminuodami iš ką tik gautos lygčių sistemos parametą t , gauname, jog $t=z_2-b$ ir

$$z_1 = a + b(z_2 - b) + (z_2 - b)^2 = z_2^2 - bz_2 + a = \left(z_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4}\right).$$

Gautoji lygtis $z_1 = \left(z_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4}\right)$ vaizduoja irgi parabolį šeimą, tačiau ši parabolį šeima skiriasi nuo ankstesnės, nes dabar, keičiantis pradinėms sąlygoms, parabolės viršūnė gali slankioti ne tik horizontaliai (keičiantis $C = a - \frac{b^2}{4}$), bet ir vertikaliai (keičiantis b , nes parabolės viršūnės koordinatė $z_2 = z_2^{(v)} = \frac{b}{2}$).

Rekomenduojau skaitytojui atlikti 1.4.19. užduotį ir grafiškai pavaizduoti šios dinaminės sistemos kai kurių fazinių trajektorijų portretus. Atlikdami šią užduotį, Jūs išsitikinsite ką tik išsakyto teiginio teisingumą, o taip pat tuo, kad skirtingos parabolės, atitinkančios skirtingus dalinius diferencialinių lygčių sistemos sprendinius, kirsis vienos su kitomis: dauguma baigtiniuose būsenų erdvės Z taškuose, kai kurios kitos – begalybėje. Todėl **kiekvieną būsenų erdvės tašką kirs jau ne viena, o be galo daug skirtingų parabolį** $z_1 = \left(z_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4}\right) = z_2^2 - bz_2 + a$. Kai kurios iš jų pavaizduotos 26 pav.



26 pav.

Todėl, žinodami tokio tipo dinaminės sistemos pradinę būseną $\bar{z}(0)=(z_1(0), z_2(0))$ ar kokį nors kitą jos trajektorijos portreto tašką, mes jau nebegalėsime vienareikšmiškai nustatyti kitų šio portreto taškų, ką buvo galima padaryti, nagrinėjant KDS.

Įrodysime, jog ką tik dabar nagrinėtoji sistema netenkina formalaus KDS apibrėžimo, nes netenkina tame apibrėžime suformuluotos trečiosios sąlygos – nėra algebrinė grupė.

Tuo tikslu apskaičiuosime funkcijų $F_1(\bar{z}(0), t_1+t_2)$ bei $F_1(\bar{z}(t_1), t_2)$ reikšmes ir įsitikinsime, jog šiuo atveju tos reikšmės nėra lygios:

- 1) $F_1(\bar{z}(0), t_1+t_2) = z_1(0) + z_2(0)(t_1+t_2) + (t_1+t_2)^2 = a + b(t_1+t_2) + t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2 = a + bt_1 + t_1^2 + bt_2 + 2t_1t_2 + t_2^2 = z_1(t_1) + (b+t_1)t_2 + t_2^2 = z_1(t_1) + z_2(t_1)t_2 + t_2^2 + t_1t_2 = F_1(\bar{z}(t_1), t_2) + t_1t_2$;
- 2) $F_1(\bar{z}(t_1), t_2) = z_1(t_1) + z_2(t_1)t_2 + t_2^2 = z_1(0) + z_2(0)t_1 + t_1^2 + (z_2(0)+t_1)t_2 + t_2^2 = a + b(t_1+t_2) + t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2$;
- 3) kaip matome, $F_1(\bar{z}(0), t_1+t_2) \neq F_1(\bar{z}(t_1), t_2)$, nes $F_1(\bar{z}(0), t_1+t_2) - F_1(\bar{z}(t_1), t_2) = t_1t_2 \neq 0$, kai $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

Nors diferencialinių lygčių sistemos $\begin{cases} \dot{z}_1 = b + 2t, \\ \dot{z}_2 = 2 \end{cases}$ ir $\begin{cases} \dot{z}_1 = b + 2t, \\ \dot{z}_2 = 1, \end{cases}$ esant vienodoms pradinėms

sąlygoms, atrodo beveik vienodai, tačiau jų savybės, kaip matėme nagrinėdami tų sistemų dalinius sprendinius ir juos atitinkančius fazinių trajektorijų portretus, kardinaliai skiriasi.

To skirtumo priežastys paaiškės, pabandžius rasti šių sistemų matematinius modelius standartinėje (normalinėje) formoje.

Pirmosios sistemos, esančios KDS, atveju gauname diferencialinių lygčių $\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = 2, \end{cases}$ atitinkan-

čių normalinę formą $\dot{\bar{z}}(t) = \bar{f}(\bar{z}(t))$, sistemą, o antrosios sistemos į tokią formą transformuoti nepavyksta. Kadangi $z_2(t) = b + t$ ir $\dot{z}_1(t) = b + 2t = z_2(t) + t$, tai gauname, jog antroji sistema gali būti užrašyta

formoje $\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + t, \\ \dot{z}_2 = 1, \end{cases}$ t. y. formoje $\dot{\bar{z}}(t) = \bar{f}(\bar{z}(t), t)$, kurioje **išvestinė priklauso nuo laiko t ne tik**

netiesiogiai, bet ir tiesiogiai. Tai reiškia, jog antrojoje sistemoje būsenos kitimo greitis priklauso ne tik nuo pasiektos būsenos, bet ir tiesiogiai nuo laiko, kitaip tariant, **sistemos būsenos kitimo dėsnis, laikui bėgant, keičiasi.** Apie tokį reiškinį jau buvo kalbėta 1.3. skyriuje, įvedant objekto būsenos sąvoką.

Tokios dinaminės sistemos vadinamos **nestacionariomis**, kai tuo tarpu KDS priklauso **stacionariųjų dinaminių sistemų** aibei.

Visos dinaminės sistemos, kai jos yra stebimos pakankamai ilgą laiką, pasirodo esančios nestacionarios, nes **per pakankamai ilgą laiką pasikeičia ne tik tų sistemų būsenų koordinačių reikšmės, bet ir priklausomybės, egzistuojančios tarp dinaminės sistemos charakteristikų, t. y. patys tų sistemų matematiniai modeliai tampa laiko t funkcijomis.**

Tačiau pakankamai trumpuose laiko intervaluose tokie pasikeitimai gal būti dar nereikšmingi ir todėl **nemažą dalį dinaminių sistemų tokiuose intervaluose galima laikyti praktiškai stacionariomis ir taikyti joms stacionariųjų dinaminių sistemų matematinius modelius bei jų funkcionavimo analizės matematinius modelius.**

Su stacionariomis ir nestacionariomis sistemomis mes jau buvome susidūrę 1.3. skyriuje, nagrinėdami sistemų būsenos sąvoką ir būsenos kitimo procesus. Ten mes buvome nustatę, jog **nestacionarios sistemos matematinį modelį formaliai galima suvesti į stacionarios sistemos matematinį modelį**, formaliai priėmus, kad laikas t – tai dar viena – papildoma – būsenos vektoriaus $\bar{z}$ koordinatė, tačiau – ypatinga koordinatė, nes nuo jos kitimo gali priklausyti visų kitų vektoriaus $\bar{z}$ (o taip pat ir vektoriaus $\bar{x}$) koordinačių reikšmės ir priklausomybės tarp jų.

Stacionariųjų dinaminių sistemų, kai jos turi „trumpą“ atmintį, perėjimo funkcijos argumentais gali būti momentinės tų sistemų būsenų $\bar{z}$ ir įėjimų $\bar{x}$ koordinačių reikšmės, o kai tos sistemos turi „ilgą“ atmintį, – tų sistemų fazinių trajektorijų bei įėjimo trajektorijų atkarpos. Nestacionariųjų dinaminių sistemų perėjimo funkcijų argumentų sąrašas gaunamas, papildžius jau minėtuosius stacionariųjų sistemų perėjimo funkcijų argumentų sąrašus dar vienu argumentu – laiku t –, vaidinančiu, kaip jau buvo minėta, ypatingą vaidmenį: jis veikia būsenos kitimo procesą ne tik netiesiogiai (per kintančius laike vektorius $\bar{x}(t)$ ir $\bar{z}(t)$), bet ir tiesiogiai, keisdamas pačios naujos būsenos $\bar{z}(t+1)$ ar jos kitimo greičio priklausomybes $\bar{z}(t)$ nuo $\bar{x}(t)$ ir $\bar{z}(t)$.

Šio skyriaus (1.4.) pradžioje objekto išorinio modelio aprašymas yra pateiktas tokioje formoje, kuri tinka stacionarioms sistemoms, todėl, kad, kaip čia ką tik buvo minėta, į tokią formą formaliai gali būti suvestas ir nestacionarios sistemos išorinis matematinis modelis. Operuoti su tokiu modeliu galima taip pat, kaip ir su stacionarios sistemos išoriniu matematiniu modeliu, tačiau tokiais atvejais būtina atsižvelgti į to modelio dvigubą priklausomybę nuo laiko. Tos priklausomybės gana dažnai apsunkina ne tik paties matematinio modelio sudarymą, bet ir jo taikymą, pavyzdžiui, apskaičiuojant bei analizuojant fazinę bei išėjimo trajektorijas bei jų portretus.

Grįždami prie KDS nagrinėjimo, galime pridurti, jog prie šios dinaminų sistemų klasės priklauso ne tik šiame (1.4.9.) skyrelyje nagrinėtų mechaninių dinaminų sistemų matematiniai modeliai (svyruojančios spyruoklės su rutuliuku, spaudžiančiu jos galą, neegzistuojant ir egzistuojant oro pasipriešinimui; krintančio ore kūno; matematinės ir fizinės švytuoklės), bet ir 1.4.3. skyrelyje nagrinėtoji diferencijavimo grandelė, ir 1.4.4. skyrelyje aprašytoji paprasta hidrodinaminė sistema, ir elektromagnetinių virpesių kontūras, kurį nagrinėjome 1.4.8. skyrelyje bei dar nagrinėsime (tik žymiai detaliau ir plačiau) 1.11.10. skyrelyje.

Tiesa, reikėtų pažymėti, jog tam, kad 1.4.3., 1.4.4. ir 1.4.8. skyreliuose nagrinėtų objektų, bei 1.3. skyriuje aprašytų procesų P_1 ir P_2 matematiniai modeliai priklausytų KDS klasei, reikalinga, kad tų objektų įėjimai būtų arba pastovūs, (t. y. nekintantys laike), arba kintantys laike pagal pastovų (nekintantį laike) dėsnį, dėl ko tą įėjimą būtų galima įtraukti į nagrinėjamąjį objektą kaip pastarojo sudedamąją dalį. Taip pasielgti tektų todėl, kad standartiniame klasikinės mechaninės dinaminės sistemos modelyje nenumatyta įėjimų, t. y. nenumatytas nekontroliuojamų ir iš anksto nežinomų aplinkos poveikių į dinaminę sistemą egzistavimas, o nagrinėjami tik sistemos būsenos kitimo procesai, veikiant žinomoms išorinėms jėgoms, bei dinaminės sistemos viduje esančių dalių sąveikavimo jėgoms.

Klasikinių dinaminų sistemų standartiniuose modeliuose nenagrinėjami ir tų sistemų poveikiai į aplinką. Jiems dinaminų sistemų aplinka kaip ir neegzistuoja. Todėl į tokių matematinių modelių sudėtį neįeina ir išėjimo funkcijos.

Kitaip tariant, nagrinėjant KDS, nagrinėjamos tik objektų bei sistemų būsenos ir jų kitimo procesai, dinaminės sistemos elementams sąveikaujant tarpusavyje ir to sąveikavimo metu keičiant savo santykinę padėtį (**dinaminės sistemos konfigūraciją**) ir savo greičius bei pagreičius vienas kito atžvilgiu (**dinaminės sistemos kinematiką**).

Apie tokius nepilnus išorinius matematinius modelius šiame mokymosi priemonės skyriuje jau buvo rašyta, kalbant apie taip vadinamus **dalinius išorinius objektų matematinius modelius**. Klasikinės mechanikos dinaminės sistemos papildoma tokių modelių sąrašą.

Baigiant dinaminų sistemų išorinių matematinių modelių apžvalgą, reikėtų pažymėti, kad **dinaminės sistemos sąvoka, susiformavusi teorinėje mechanikoje, sistemų teorijoje gali ir turi būti išplėsta ir apibendrinta, priimant papildymą, kad dinaminės sistemos, nagrinėjamos sistemų teorijoje, gali turėti ne tik kintančią būseną, bet ir įėjimus bei išėjimus, t. y. gali turėti ne tik dalinį, bet ir pilną išorinį matematinį modelį, aprašytą šio (1.4.) skyriaus pradžioje.**

Todėl šiame (1.4.9.) skyrelyje nagrinėtas dinaminės sistemos, neturinčias įėjimų ir išėjimų, mes laikysime dinaminų sistemų, nagrinėjamų sistemotyroje, daliniu atveju, o objektų, nagrinėtų 1.4.3., 1.4.4. ir 1.4.8. skyreliuose, išorinius matematinius modelius laikysime irgi dinaminėmis sistemomis.

Reikėtų padaryti dar vieną šio skyrelio papildymą – paminėti dar vieną svarbią dinaminų sistemų teorijos šaką – **katastrofų teoriją**.

Katastrofomis vadinsime reikšmingus šuolinius dinaminės sistemos būsenos bei jos reakcijos (išėjimų) pokyčius, staiga atsirandančius tolydžiai ir nereikšmingai keičiantis tą dinaminę sistemą supančioms išorinėms sąlygoms, pavyzdžiui, palengva ir tolydžiai keičiant valdomųjų kintamųjų reikšmes optimizuojant netiesinės sistemos valdymą. Tokie šuoliniai pokyčiai neretai būna didelių avarių priežastimi.

Katastrofų teorija pradėjo intensyviai vystytis palyginti visai neseniai: jos pradininku laikomas prancūzų topologas Renė Tomas (R. Thom), 1972 m. pasiūlęs panaudoti topologinę dinaminų sistemų teoriją (kurios pradininku buvo mūsų jau ne kartą minėtas prancūzų matematikas, fizikas ir filosofas H. Puankarė) šuolinių pokyčių gamtoje (ypač biologijoje) modeliavimui.

Matematinę katastrofų teorijos pagrindą sudaro **dinaminų sistemų funkcionavimo stabilumo (bei nestabilumo) teorija**, H. Puankarė **dinaminų sistemų kokybinė teorija** (ypač ta jos dalis, kurią galima pavadinti **bifurkacijų teorija**) ir amerikiečių matematiko H. Whitney'o **glodžių atvaizdų ypatumų teorija**, nagrinėjanti glodžių paviršių projekcijų į plokštumą ypatumus, interpretuojamus, kaip dinaminės sistemos funkcionavimo ypatumai, atsirandantys keičiant valdomųjų kintamųjų reikšmes.

Katastrofų teorija ne tik žymiai išplečia bei papildoma dinaminų sistemų teoriją, ypač tą jos dalį, kuri nagrinėja **dinaminų sistemų funkcionavimą ir jo stabilumą bei nestabilumą**, ir atveria **naujas dinaminų sistemų teorijos taikymo sritis**, tampančias ypatingai aktualiomis **projektuojant ir eksploatuojant sudėtingas ir rizikingas sistemas** (pavyzdžiui, atominės elektrinės, šiuolaikinius avialainerius, atominius povandeninius laivus, kosmines raketas bei tokius kompleksus kaip kosminės stotys), bet ir taria naują žodį, nagrinėjant **tolydumo – diskretumo dilemą**, apie kurią jau buvo kalbėta šios mokymosi priemonės 1.2. skyriuje, kitaip tariant, **permeta dar vieną tiltuką tarp tolydžiosios klasikinės fizikos ir diskrečiosios kvantinės fizikos**.

Prie katastrofų teorijos mes dar grįšime 1.14.12.1.1. skyrelyje, nagrinėdami paviršius $u = Y_1^{\alpha_1} \cdot Y_2^{\alpha_2}$, o taip pat antroje šios mokymosi priemonės dalyje, nagrinėdami dinaminų sistemų funkcionavimą bei jo stabilumą ir sudėtingų netiesinių sistemų funkcionavimo ir valdymo ypatumus.

Norintiems susipažinti su šia įdomia ir turinčia plačias taikymo perspektyvas teorija jau dabar, rekomenduojau pastudijuoti kurią nors iš knygų [39÷43]. Po to rekomenduojau paskaityti ir knygą [44], kuri skirta ne katastrofų teorijai, bet sistemotyros mokslui labai svarbiam **sistemų saviorganizacijos reiškiniui**. Taip padaryti rekomenduoju todėl, kad katastrofų ir saviorganizacijos „mechanizmai“ turi nemažai bendrų bruožų: saviorganizacija dažniausiai irgi įvyksta šuoliu, susidarius ypatingoms sąlygoms, t. y. kaip savo rūšies „katastrofa“ sudėtingos netiesinės sistemos funkcionavimo ypatinguose taškuose bei srityse.

Prie dinaminių sistemų matematinės sistemotyros kurse mes dar grįšime ne vieną kartą. Pavyzdžiui, 1.11. skyriuje mes nagrinėsime dinaminių sistemų funkcionavimą ir jo ypatumus, klasifikuosime dinaminių sistemų fazines trajektorijas į tipus, išsivesime **dinaminės sistemos funkcionavimo stabilumo ir ekvifinališkumo** sąvokas ir nagrinėsime įvairius to stabilumo tipus bei jų apibrėžimus, nagrinėsime **fazinių trajektorių kritinius (izoliuotus ir neizoliuotus) taškus bei ypatinguosius tų trajektorių taškus**, dinaminių sistemų funkcionavimą tų taškų aplinkoje.

Antroje šios mokymosi priemonės dalyje, nagrinėdami tipinius objektų ir sistemų makromodelius, mes dar labiau išplėsime dinaminės sistemos sąvoką ir nagrinėsime **dinamines sistemas, turinčias mišrų kalendorių**.

1.4.10. Baigtinio determinuoto automato, turinčio priešistorę, išorinis matematinis modelis

Baigtiniais automatais, turinčiais priešistorę, vadinami baigtiniai automatai, kurių perėjimo funkcijos argumentai – ne tik momentinė automato būsena dabar $\bar{z}(t)$ ir įėjimas $\bar{x}(t)$, **bet ir baigtinė jo fazinės trajektorijos, atvedusios automatą į dabartinę būseną, atkarpa**, susidedanti iš k taškų – k momentinių automato būsenų $\bar{z}(t-1), \bar{z}(t-2), \dots, \bar{z}(t-k)$. Parametras k turi sveikaskaitines reikšmes 1, 2, 3, ... ir **reiškia automato priešistorės taktų skaičių**. Todėl šį parametą vadina **baigtinio automato priešistorės ilgiu**. Kai $k=0$, tai baigtinis automatas priešistorės neturi ir yra paprastas baigtinis automatas – **Markovo objektas** (žiūr. šios mokymosi priemonės 1.3. skyrių).

Baigtiniai automatai, turintys priešistorę, gali būti **determinuoti** ir **stochastiniai**. Šiame skyrelyje bus išnagrinėtas determinuoto baigtinio automato, turinčio priešistorę, matematinis modelis ir jo taikymas to automato fazinės ir išėjimo trajektorių apskaičiavimui. Stochastinio automato pavyzdys pateiktas 1.4.12. skyrelyje.

Pateikdami konkretų turinčio priešistorę determinuoto baigtinio automato pavyzdį, paprastumo dėlei priimsime, kad automato momentinė būsena – skaliaras $z(t)$ ir kad $k=2$, t. y., kad automato perėjimo funkcija yra $z(t+1)=\psi(z(t), z(t-1), z(t-2), \bar{x}(t))$. Priimsime, jog šio automato įėjimai ir išėjimai – taip pat skaliarai $x(t)$ ir $y(t)$. Todėl šio automato išėjimo funkcija bus $y(t)=\varphi(x(t), (z(t), z(t-1), z(t-2)))$, o perėjimo funkcija bus $z(t+1)=\psi(z(t), z(t-1), z(t-2), x(t))$.

Kaip matome iš čia pateiktų bendrųjų šio automato matematinio modelio formulių, jos savo forma beveik nesiskiria nuo paprasto („markoviško“) automato, turinčio vektorinę būseną $\bar{z}(t)$, formulių: skirtumas tik toks, kad:

- 1) padidėja būsenos vektoriaus $\bar{z}(t)$ koordinačių skaičius ir vietoj anksčiau buvusių r koordinačių (kur $r=1, 2, \dots$) dabar tų koordinačių skaičius tampa lygus $r+kz=r(k+1)$;
- 2) pridedamos k vektorių koordinatės yra vėluojančio argumento funkcijos ir priklauso ne nuo t , o nuo $t-1, t-2, \dots, t-k$ automato kalendoriaus (jo priešistorės) momentų.

Iš to, kas čia pasakyta, išplaukia, jog **baigtinio automato, turinčio priešistorę, išorinis matematinis modelis formaliai gali būti suvestas į paprasto („markoviško“) baigtinio automato išorinį matematinį modelį**.

Naudojant tokį modelį automato fazinės ir išėjimų trajektorių apskaičiavimui, kai tas automatas yra **stacionarus**, t. y., kai funkcijos φ ir ψ , laikui bėgant nesikeičia, reikia tik atsižvelgti į tai, jog baigtinio automato, turinčio priešistorę, „išplėstinis“ būsenos vektorius $\bar{\bar{z}}(t)$, turintis $r+kr$ koordinačių, laikui bėgant, slenka laike, t. y. mūsų nagrinėjamu paprastu atveju gauname, jog $z(t+1)=\psi(z(t), z(t-1), z(t-2), x(t))$, $z(t+2)=\psi(z(t+1), z(t), z(t-1), x(t+1))$, $z(t+3)=\psi(z(t+2), z(t+1), z(t), z(t-1), x(t+2))$, $z(t+4)=\psi(z(t+3), z(t+2), z(t+1), x(t+3))$ ir t. t.

Tačiau toks „slinkimas“ nėra kokia nors ypatinga tokio automato savybė, nes panašiai „slenka“ ir paprasto („markoviško“) automato būsenos vektorius jo perėjimo funkcijoje: $\bar{z}(t+1)=\bar{\psi}(\bar{z}(t), \bar{x}(t))$, $\bar{z}(t+2)=\bar{\psi}(\bar{z}(t+1), \bar{x}(t+1))$ ir t. t. Analogišką „poslinkį“ pastebėsime ir automatų išėjimo funkcijose.

Šie „poslinkiai“ – tai paties laiko poslinkio automato kalendoriuje padariniai, kurie būdingi bet kokiems automatams.

Iliustruodami šiame skyrelyje išsakytus bendrus teiginius konkrečiu pavyzdžiu, priimsime, jog mūsų nagrinėjamas automatas yra „**loginis automatas**“, t. y., jog skaliarai x , y ir z gali turėti tik klasikinės dvireikšmės logikos logines reikšmes „0“ arba „1“.

Tarkime, jog mūsų nagrinėjamo automato, turinčio priešistorę, išorinis **informacinis modelis** yra toks, kaip parodyta 23. lentelėje. Jis vaizduoja automato išėjimo $y(t)$ ir jo naujos būsenos $z(t+1)$ priklausomybę nuo argumentų $z(t-2)$, $z(t-1)$, $z(t)$ ir $x(t)$ visų galimų reikšmių visų galimų kombinacijų.

23. lentelė

Eil. Nr.	$z(t-2)$	$z(t-1)$	$z(t)$	$x(t)$	$y(t)$	$z(t+1)$
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	1	1	0	1
5	0	1	0	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1
7	0	1	1	0	0	0
8	0	1	1	1	0	1
9	1	0	0	0	1	1
10	1	0	0	1	0	0
11	1	0	1	0	1	0
12	1	0	1	1	0	1
13	1	1	0	0	1	1
14	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	0	1	0
16	1	1	1	1	1	1

Apskaičiuosime šio automato fazinės ir išėjimo trajektorijų atkarpas, atitinkančias įėjimų trajektorijos atkarpą $(x(t), x(t+1), x(t+2), x(t+3), x(t+4))=(1,0,0,0,1)$ ir „pradinę“ automato su priešistorę būseną $(z(t-2), z(t-1), z(t))=(1,0,1)$.

Momentu t turėsime situaciją, atitinkančią 12-ąją 23. lentelės eilutę. Todėl gausime, jog $y(t)=0$, o $z(t+1)=1$. Būsenos „vektorius“ taps $(z(t-1), z(t), z(t+1))=(0,1,1)$. Kadangi $x(t+1)=0$, tai momentu $t+1$ turėsime situaciją, atitinkančią 23. lentelės 7-ąją eilutę. Gausime, jog $y(t+1)=0$ ir $z(t+2)=0$. Būsenos „vektorius“ taps $(z(t), z(t+1), z(t+2))=(1,1,0)$. Kadangi $x(t+2)=0$, tai momentu $t+2$, turėsime situaciją, atitinkančią 23. lentelės 13-ąją eilutę. Gausime, jog $y(t+2)=1$ ir $z(t+3)=1$. Būsenos „vektorius“ taps $(z(t+1), z(t+2), z(t+3))=(1,0,1)$. Kadangi $x(t+3)=0$, tai momentu $t+3$, turėsime situaciją, atitinkančią 23. lentelės 11-ąją eilutę. Gausime, jog $y(t+3)=1$, $z(t+4)=0$. Būsenos „vektorius“ taps $(z(t+2), z(t+3), z(t+4))=(0,1,0)$. Kadangi, $x(t+4)=1$, tai momentu $t+4$ turėsime situaciją, atitinkančią 6-ąją 23. lentelės eilutę. Gausime, jog $y(t+4)=0$, $z(t+5)=1$.

Mūsų atliktą eksperimentą galima pavadinti **imitaciniu**, nes mes imitavome automato veikimą, atlikdami su automatu eksperimentus ne „fizinėje“, o „informacinėje“ erdvėje (žiūr. 1 pav. šios mokymosi priemonės „Ivade“). Gavome automato išėjimo trajektorijos atkarpą $(y(t), y(t+1), y(t+2), y(t+3), y(t+4))=(0,0,1,1,0)$ ir pratęsėme turėtąją fazinės trajektorijos atkarpą $(z(t-2), z(t-1), z(t))=(1,0,1)$, gaudami atkarpą $(z(t+1), z(t+2), z(t+3), z(t+4), z(t+5))=(1,0,1,0,1)$.

Gautus rezultatus galima panaudoti 1.3. skyriuje įvestų sąvokų „**dalinė momentinė būseną**“ ir „**pilnoji būseną**“ iliustracijai: čia pažymėtos ir nagrinėtos automato, turinčio priešistorę, būsenos (būsenos – skaliarai) $z(t-2)$, $z(t-1)$, $z(t)$, $z(t+1)$, $z(t+2)$, $z(t+3)$, $z(t+4)$, $z(t+5)$ yra **dalinės momentinės to automato būsenos**, o automato fazinės trajektorijos atkarpos – „slenkantys vektoriai“ $(z(t-2), z(t-1), z(t))$, $(z(t-1), z(t), z(t+1))$, $(z(t), z(t+1), z(t+2))$, $(z(t+1), z(t+2), z(t+3))$, $(z(t+2), z(t+3), z(t+4))$, $(z(t+3), z(t+4), z(t+5))$ vaizduoja **pilnąsias to automato būsenas** $\vec{z}(t)$, $\vec{z}(t+1)$, $\vec{z}(t+2)$, $\vec{z}(t+3)$, $\vec{z}(t+4)$, $\vec{z}(t+5)$ momentais t , $t+1$, $t+2$, $t+3$, $t+4$, $t+5$, nes mūsų nagrinėtasis automatas kiekvienu momentu „atsimena“ ne tik šiuo momentu turimą momentinę būseną, bet ir prieš tai buvusių dviejų taktų momentines būsenas ir atsižvelgia į jas, reaguodamas į išėjimą, ateinantį nagrinėjamu momentu, t. y. pereidamas į naują būseną ir formuodamas išėjimą.

Kaip matome, stacionarių determinuotų baigtinių automatų, turinčių priešistorę, **informacinių modelių** sudarymas ir jų funkcionavimo imitavimas principinių sunkumų nesukelia. Modeliai tampa tik šiek tiek grėmėzdiškesni, o funkcionavimo imitavimui reikia atlikti šiek tiek daugiau skaičiavimų.

Nesukelia ypatingų sunkumų ir tokių automatų **matematinį modelį** sudarymas, perkoduojant tokių automatų informacinius modelius – įėjimų – perėjimų – išėjimų lenteles – į dvejetainę sistemą ir užrašant perėjimo ir išėjimo funkcijas, naudojantis klasikinės matematinės logikos kalba, o po to tas funkcijas, reikalui esant, minimizuojant.

Sudarysime mūsų nagrinėtojo konkretaus automato **išorinį matematinį modelį**, išvesdami jo perėjimo ir išėjimo funkcijas.

Kadangi automato informacinis modelis – 23. lentelė – pateiktas jau dvejetainėje sistemoje, tai perkodavimo reikiamybė šiuo atveju atpuola. Minėtąsias funkcijas, galima rašyti iškart, naudojantis loginės funkcijos TDNF gavimo metodu (žiūr. bet kurį matematinės logikos vadovėlį, pavyzdžiui, šių eilučių autoriaus parašytą knygutę [51]). Gauname:

$$z(t+1)=\psi(z(t-2), z(t-1), z(t), x(t))=\bar{z}(t-2)\bar{z}(t-1)\bar{z}(t)x(t)\vee\bar{z}(t-2)\bar{z}(t-1)z(t)x(t)\vee\bar{z}(t-2)z(t-1)\bar{z}(t)x(t)\vee\bar{z}(t-2)z(t-1)z(t)x(t)\vee z(t-2)\bar{z}(t-1)\bar{z}(t)\bar{x}(t)\vee z(t-2)\bar{z}(t-1)z(t)x(t)\vee z(t-2)z(t-1)\bar{z}(t)\bar{x}(t)\vee z(t-2)z(t-1)z(t)x(t)=\bar{z}(t-2)x(t)\vee z(t)x(t)\vee\bar{z}(t-2)\bar{z}(t)\bar{x}(t).$$

$$y(t)=\varphi(z(t-2), z(t-1), z(t), x(t))=\bar{z}(t-2)\bar{z}(t-1)\bar{z}(t)x(t)\vee\bar{z}(t-2)\bar{z}(t-1)z(t)\bar{x}(t)\vee\bar{z}(t-2)z(t-1)\bar{z}(t)\bar{x}(t)\vee\bar{z}(t-2)z(t-1)z(t)\bar{x}(t)\vee z(t-2)\bar{z}(t-1)\bar{z}(t)\bar{x}(t)\vee z(t-2)\bar{z}(t-1)z(t)\bar{x}(t)\vee z(t-2)z(t-1)\bar{z}(t)\bar{x}(t)\vee z(t-2)z(t-1)z(t)\bar{x}(t)=z(t-2)\bar{x}(t)\vee z(t-1)z(t)x(t)\vee\bar{z}(t-1)z(t)\bar{x}(t)\vee\bar{z}(t-1)\bar{z}(t)\bar{x}(t)\vee\bar{z}(t-2)\bar{z}(t-1)\bar{z}(t)x(t).$$

Galutinės (jau minimizuotos) perėjimų ir išėjimų funkcijų reikšmės čia užrašytos (jos paryškintos) minimalioje disjunktvinėje normalinėje formoje (MDNF). Jos buvo gautos iš TDNF, taikant Karno kortelių metodą (žiūr. 1.16.1.4.3. skyrelį).

1.4.11. Vėluojančio argumento dinaminės sistemos išorinis matematinis modelis

Vėluojančio argumento dinaminėmis sistemomis priimta vadinti sistemas, turinčias tolydų kalendorių, kurių perėjimo funkcijos išreiškiamos vėluojančio argumento diferencialinėmis lygtimis bei jų sistemomis. Tai **dinaminės sistemos, turinčios baigtinio ilgio „atmintį“ ir esančios ką tik nagrinėtų automatų su priešistore tolydžiu analogu.**

Vėluojančio argumento dinaminės sistemos pavyzdžiu gali būti dinaminė sistema, kurios perėjimo funkcija diferencialinėje formoje yra diferencialinė lygtis $\dot{z}(t)=az(t-\tau)+bz(t)$, kai a ir b yra pastovūs koeficientai, o τ – pastovus dydis, turintis laiko dimensiją ir vadinamas **vėlinimo konstanta**, arba tiesiog – vėlinimu (delsa).

Norint gauti konkretų dalinį šios lygties sprendinį – konkrečią šios sistemos fazinę trajektoriją aprašančią funkciją $z(t)$, – jau nebepakanka žinoti tik pradinę sąlygą – pradinę tos sistemos būsenos reikšmę $z(t_0)$, kur $t=t_0$ – pradinis sistemos funkcionavimo stebėjimo momentas.

Kad išitikintume ką tik išsakymo teiginio teisingumą, pakanka pabandyti spręsti duotąją diferencialinę lygtį koku nors artutiniu metodu, pavyzdžiui, Oilerio metodu.

Norėdami pasinaudoti tuo metodu funkcijos $z(t)$ artutinės reikšmės artimiausiame nuo $t=t_0$ taške $t=t_0+\Delta t$, kur Δt – pakankamai mažas dydis, apskaičiavimui taikant artutinę formulę $z(t_0+\Delta t)\approx z(t_0)+[\dot{z}(t)]_{t=t_0}\cdot\Delta t=z(t_0)+(a\cdot z(t_0-\tau)+bz(t_0))\Delta t$, mes turėtume žinoti ne tik $z(t_0)$ reikšmę, bet ir $z(t_0-\tau)$ reikšmę.

Jei tą reikšmę iš kur nors sužinotume ir apskaičiuotume artutinę $z(t_0+\Delta t)$ reikšmę bei po to pabandytume rasti artutinę išvestinės $\dot{z}(t)$ reikšmę taške $t=t_0+\Delta t$, kurios mums prireiktų apskaičiuojant artutinę $z(t)$ reikšmę sekančiame taške $t=(t_0+\Delta t)+\Delta t=t_0+2\Delta t$, tai, pastebėję, jog $z(t_0+2\Delta t)\approx z(t_0+\Delta t)+[\dot{z}(t)]_{t=t_0+\Delta t}\cdot\Delta t=z(t_0+\Delta t)+(az(t_0+\Delta t-\tau)+bz(t_0+\Delta t))\Delta t$, suprastume, jog dabar mums prireiks funkcijos $z(t)$ reikšmės taške $t=t_0+\Delta t-\tau$ žinojimo, o po to – dar ir taške $t=t_0+2\Delta t-\tau$ ir t. t. žinojimo.

Kadangi dydis Δt gali būti pasirenkamas įvairiai, tai iš to išplaukia, jog mums, norint rasti diferencialinės lygties $\dot{z}(t)=az(t-\tau)+bz(t)$ dalinį sprendinį, gali prireikti funkcijos $z(t)$ visų reikšmių intervale $[t_0-\tau\leq t\leq t_0]$ žinojimo, kitaip tariant, taip vadinamos **pradinės funkcijos $z(t)=f(t)$ intervale $[t_0-\tau\leq t\leq t_0]$ reikšmių žinojimo. Sprendžiant vėluojančio argumento diferencialinę lygtį, pradinę funkciją atlieka pradinių sąlygų vaidmenį.**

Pasinaudodami pradinės funkcijos reikšmėmis $f(t_0-\tau)$ ir $f(t_0)$ mes galėtume rasti artutinę $z(t)$ reikšmę taške $t=t_0+\Delta t$, o po to, pasinaudodami rastąja artutine $z(t_0+\Delta t)$ reikšme ir pradinės funkcijos reikšme $f(t_0+\Delta t-\tau)$, apskaičiuotume artutinę $z(t_0+2\Delta t)$ reikšmę ir t. t. Slinkdami laiko tiesę tolyn, mes galėtume rasti vis naujas artutines fazines trajektorijos $z(t)$ reikšmes.

Panašiai galima elgtis ir ieškant ne tik artutinio, bet ir tikslaus dalinio diferencialinės lygties $\dot{z}(t)=az(t-\tau)+bz(t)$ sprendinio, atitinkančio tą ar kitą pradinę funkciją $f(t)$, integruojant duotąją

vėluojančio argumento diferencialinę lygtį.

Pailiustruosiu tai konkrečiu pavyzdžiu, priėmęs jog $t_0=0$, $a=1$, $b=-1$, $\tau=2$ ir pasirinkęs pradinę funkciją $f(t)$ funkciją $f(t)=t$, atitinkančią atvejį, kai $z(t_0)=z(0)=0$.

Diferencialinės lygties $\dot{z}(t)=az(t-\tau)+bz(t)$ integravimui pasinaudosime superpozicija $z=uv$ ir, pasinaudodami tuo, jog $\dot{z}=\dot{u}v+u\dot{v}$, vietoj lygties $\dot{z}(t)-bz(t)=af(t-\tau)$, kai $[t_0-\tau \leq t \leq t_0]$, gausime iš diferencialinės lygties $u(\dot{v}-bv)+bv\dot{u}=f(t-\tau)$ išplaukiančią dviejų diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dot{v}-bv=0, \\ v\dot{u}=af(t-\tau). \end{cases}$$

Spręsdami pirmąją diferencialinę lygtį $\frac{dv}{dt}=bv$ gausime, jog $\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = b \int_{t_0}^t dt$, t. y. gausime, jog

$$v(t) = v(t_0)e^{b(t-t_0)}.$$

Pasinaudodami pirmosios diferencialinės lygties bendruoju sprendiniu ir, spręsdami antrąją diferencialinę lygtį, gausime $\int_{u(t_0)}^{u(t)} du = \frac{a}{v(t_0)} \int_{t_0}^t f(t-\tau)e^{-b(t-t_0)} dt$, iš kur išplaukia, jog $u(t) = u(t_0) +$

$$+ \frac{a}{v(t_0)} \int_{t_0}^t f(t-\tau)e^{-b(t-t_0)} dt.$$

$$\text{Kadangi } z(t)=u(t) \cdot v(t), \quad \text{tai } z(t) = u(t_0)v(t_0)e^{b(t-t_0)} + e^{b(t-t_0)}a \int_{t_0}^t f(t-\tau)e^{-b(t-t_0)} dt =$$

$$= z(t_0)e^{b(t-t_0)} + ae^{b(t-t_0)} \int_{t_0}^t f(t-\tau)e^{-b(t-t_0)} dt, \text{ kai kintamojo } t \text{ reikšmė keičiasi nuo } t_0 \text{ iki } t_0+\tau, \text{ t. y. kai}$$

pradinė funkcija keičia savo reikšmę nuo $f(t_0-\tau)$ iki $f(t_0)$.

Naujame integravimo intervale nuo $(t_0+\tau)$ iki $t_0+2\tau$ pradinės funkcijos vaidmenį galės atlikti jau apskaičiuota argumento t reikšmėms $t \in [t_0, t_0+\tau]$ funkcija $z(t)$. Atidėliodami ilgio τ intervalus ant laiko ašies t vis toliau į priekį, mes galėsime gauti kokio tik norime ilgio fazinės trajektorijos $z(t)$ atkarpą, esančią vėluojančio argumento diferencialinės lygties daliniu sprendiniu, atitinkančiu duotąją (ar pasirinktąją) pradinę funkciją.

Taikydami čia aprašytąjį metodą mūsų nagrinėjamam konkrečiam atvejui $t_0=0$, $a=1$, $b=-1$, $\tau=2$, $f(t)=z(t)_{t \in (t-\tau, t_0)} = t$, gautume:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \text{Kai } 0 \leq t \leq \tau=2, \text{ tai } t_0=0, z(t_0)=z(0)=0, z(t) = z(0)e^{-t} + e^{-t} \int_{t_0}^t (t-2)e^t dt = e^{-t} \int_0^t (t-2)e^t dt = \\ & = e^{-t} [te^t - 3e^t]_0^t = e^{-t} [te^t - 0 - 3(e^t - 1)] = t - 3 + 3e^{-t}. \end{aligned}$$

Gautas sprendinys tenkina sąlygą $z(0)=0$, nes $z(0)=0-3+3e^0=0$.

Intervalo gale, t. y. taške $t=2$, būsenos $z(t)$ reikšmė yra $z(2)=2-3+3e^{-2}=3e^{-2}-1$.

2. Pereidami prie intervalo $2 \leq t \leq 4$, pradinę funkciją $f(t)=z(t)=t$, kuri galiojo intervale $t_0-\tau \leq t \leq t_0$, t. y. intervale $-2 \leq t \leq 0$, pakeisime funkcija $z(t)=t+3e^{-t}-3$, galiojančia intervale $0 \leq t \leq 2$. Todėl funkcija $z(t)$ intervale $2 \leq t \leq 4$ gali būti apskaičiuota laikant, kad dabar $t_0=2$, ir naudojantis formule

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_0)e^{-(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)} \int_{t_0}^t (t-2+3e^{-(t-2)}-3)e^{t-t_0} dt = (3e^{-2}-1)e^{-(t-2)} + e^{-(t-2)} \int_2^t (t+3e^{-t+2}-5)e^{t-2} dt = \\ &= 3e^{-t} - e^{-t+2} + e^{-t+2} \left[te^{t-2} - 6e^{t-2} + 3(t-2) \right]_2^t = 3e^{-t} - e^{-t+2} + e^{-t+2} [te^{t-2} - 2 - 6(e^{t-2}-1) + 3t - 6] = 3e^{-t} - \\ &- e^{-t+2} + e^{-t+2} [te^{t-2} - 6e^{t-2} + 3t - 2] = 3e^{-t} - e^{-t+2} + t - 6 + 3te^{-t+2} - 2e^{-t+2} = 3e^{-t} - 3e^{-t+2} + t + 3te^{-t+2} - 6. \end{aligned}$$

Šio intervalo pradžioje, t. y. taške $t=2$ gautume, jog $z(2)=3e^{-2}-e^0+2+3 \cdot 2 \cdot e^0-6=3e^{-2}-1$. Ši reikšmė sutampa su anksčiau apskaičiuota $z(2)$ reikšme. Tai reiškia, jog perėjimas iš intervalo $0 \leq t \leq 2$ į intervalą $2 \leq t \leq 4$, vyksta be trūkių, kaip ir turėjo būti, nes pradinė funkcija bei kitos funkcijos, įeinančios į diferencialinę lygtį, yra tolydžios funkcijos.

3. Apskaičiuavę, jog $z(4)=3e^{-4}-3e^{-2}+4+3\cdot 4\cdot e^{-2}-6=3e^{-4}+9e^{-2}-2$ ir priėmę, jog dabar pradinė funkcija yra $z(t)=3te^{-t+2}+t-3e^{-t+2}+3e^{-t}-6$, galime pereiti prie $z(t)$ apskaičiavimo intervale $4\leq t\leq 6$:

$$z(t) = (3e^{-4} + 9e^{-2} - 2)e^{-(t-4)} + e^{-(t-4)} \int_4^t [3(t-2)e^{-t+4} + t - 2 - 3e^{-t+4} + 3e^{-(t-2)} - 6]e^{-t+4} dt = 3e^{-t} + 9e^{-t+2} - 2e^{-t+4} + e^{-t+4} \int_3^t (3(t-2+te^{t-4} - 8e^{t-4} + 3e^{-2})) dt = 3e^{-t} + 9e^{-t+2} - 2e^{-t+4} + e^{-t+4} \left[\frac{3}{2}(t^2 - 16) - 9(t-4) + te^{t-4} - 4 - 9(e^{t-4} - 1) + 3e^{-2}(t-4) \right] = 3e^{-t} + 9e^{-t+2} - 2e^{-t+4} + \frac{3}{2}t^2e^{-t+4} + 17e^{t-4} - 9te^{-t+4} - 9 + t + 3te^{-t+2} - 12e^{-t+2} = 3e^{-t} - 3e^{-t+2} + 15e^{-t+4} + \frac{3}{2}t^2e^{-t+4} - 9te^{-t+4} - 9 + t + 3te^{-t+2}.$$

Apskaičiuosime $z(4)$, pasinaudodami ką tik gauta funkcija $z(t)$ ir palyginsime su $z(4)$ reikšme, apskaičiuota ankstesniame intervale: $z(4)=3e^{-4}-3e^{-2}+15+24-36-9+4+12e^{-2}=3e^{-4}+9e^{-2}-2$.

Gauta $z(4)$ reikšmė sutampa su anksčiau gauta $z(4)$ reikšme. Taip ir turėjo būti.

4. Panašius skaičiavimus galima tęsti toliau, gaunant tolimesnius tolydžius fazinės trajektorijos tęsinius.

Skaiciavimai, tiesa, tampa vis gremėzdiškesni, tačiau, pasitelkiant kompiuterį ir fazinę trajektoriją vaizduojant ne tik formulėmis bet ir grafiškai, spręsti panašias diferencialines lygtis ir nagrinėti gaunamus sprendinius galima ir net pakankamai patogiu. Rekomenduoju skaitytojams susipažinti su panašių lygčių sprendimais, kuriuos atliko studentės R. Kutavičiūtė, V. Tomkovskaja, A. Pereskokova ir A. Ikvildaitė, naudodamosios programų paketu MAPLE V. Su šiais studentų darbais galima susipažinti VU MIF Matematinės statistikos katedroje.

Nesunku įsitikinti, kad vėluojančio argumento diferencialinių lygčių daliniai sprendiniai labai priklauso nuo pradinės funkcijos. Pavyzdžiui, jei nagrinėjamu atveju būtume pasirinkę, jog pradinė funkcija yra konstanta C, tai būtume gavę, jog $z(t)=C$ visoms $t>0$ reikšmėms.

Vėluojančio argumento diferencialinės lygties sprendinys keičiasi ir keičiant vėlinimo konstantą τ .

Jei mūsų nagrinėjamame pavyzdyje vietoj $\tau=2$ būtume pasirinkę $\tau=1$, o visas kitas sąlygas būtume palikę tas pačias, tai būtume gavę, jog intervale $-1\leq t\leq 0$ funkcija $z(t)$ būtų buvusi lygi t , o $z(0)$, kaip ir anksčiau, būtų buvęs lygus 0. Tačiau toliau fazinė trajektorija $z(t)$ būtų jau kitokia:

1. kai $0\leq t\leq 1$, tai $z(t)=t+2e^{-t}-2$,
2. kai $1\leq t\leq 2$, tai $z(t)=2te^{-t+1}+2e^{-t}+t-4$,
3. kai $2\leq t\leq 3$, tai $z(t)=(t^2-2t+2te^{-1}+2e^{-2}+2)e^{-t+2}+t-6$ ir t. t., iš kur išplauktų, jog $z(t)=2e^{-1}$, $z(2)=2e^{-2}+4e^{-1}-2$, $z(3)=2e^{-3}+6e^{-2}+5e^{-1}-3$ ir t. t.

Palyginsime gautus rezultatus, sudarydami 24. lentelę.

24. lentelė

τ	$\tau=1$	$\tau=2$
$z(0)$	0	0
$z(0,5)$	$2e^{-0,5}-1\approx-0,2869$	$3e^{-0,5}-2,5\approx-0,6804$
$z(1)$	$2e^{-1}-1\approx-0,2624$	$3e^{-1}-2\approx-0,8964$
$z(2)$	$2e^{-2}+4e^{-1}-2\approx-0,2578$	$3e^{-2}-1\approx-0,5940$
$z(3)$	$2e^{-3}+6e^{-2}+5e^{-1}-3\approx-0,1992$	$3^{-3}+6e^{-1}-3\approx-0,6434$

Kaip matome, rezultatai stipriai skiriasi, nors abiejuose modeliuose visos sąlygos tos pačios, išskyrus vėlinimą τ .

Šis (1.4.11) ir 1.4.10. skyreliai buvo įtraukti į mokymosi priemonės 1.4. skyrių dėl dviejų priežasčių:

1) **šių skyrelių studijavimas padeda giliau (ir todėl pilniau bei tiksliau) suvokti objekto pilnosios ir momentinės būsenų sąvokas**, apie kurias buvo kalbėta 1.3. skyriuje, įsivedant labai svarbią sistemos tyros mokslui „objekto būsenos“ sąvoką;

2) visi realūs procesai turi didesnę ar mažesnę trukmę, todėl objekto reakcija, kokia staigi ji bebūtų, visada šiek tiek vėluoja to poveikio, į kurį objektas šia savo reakcija reaguoja, atžvilgiu; todėl **vėluojančio argumento funkcijos tampa reikalingomis, kuriant matematinius modelius, atsižvelgiančius į realių procesų trukmes.**

Su vėluojančio argumento funkcijomis mes šioje mokymosi priemonės dalyje dar susidursime 1.11. skyriuje. Ten mes nagrinėsime tokių funkcijų Laplaso ir Hevisaio atvaizdus ir spręsimą procesų, kuriuose pasireiškia vėlavimai, fazinių ir įėjimo trajektorijų apskaičiavimo ir analizės uždavinius (žiūr., pavyzdžiui, 1.11.15., 1.11.47., 1.11.48., 1.11.49., 1.11.67., 1.11.70. užduotis). Su vėluojančio argumento funkcijomis susidursime ir 1.14. skyriuje, nagrinėdami **biznio ciklus** bei laiko eilučių **regresinius modelius su pasiskirsčiusiais lagais**, taip pat kai kuriuose 1.16. skyriaus skyreliuose (pavyzdžiui, nagrinėdami **laiko logikos funkcijas**).

Kuriant **procesų imitacinius modelius** irgi dažnai teks atsižvelgti į įvykių įvykimo galimus vėlavimus ir juos imituoti. Įvairių imituojamų procesų trukmės dažnai būna atsitiktinės, dėl to atsitiktiniais būna jų pabaigos, o kartais – ir jų pradžios momentai. Į dėl šių priežasčių atsirandančius **atsitiktinius vėlavimus** tenka atsižvelgti, taikant **tinklinius grafikus** darbų kompleksų, kuriuos atlieka skirtingi vykdytojai, planavime ir operatyviniame valdyme, apie ką bus kalbama ir šios mokymosi priemonės pirmosios dalies 1.9. skyriuje, ir antrojoje jos dalyje.

1.4.12. Stochastinių automatų išoriniai matematiniai modeliai

Stochastiniais automatais vadinami automatai, kuriuose perėjimai iš vienos automato būsenos į kitą gali vykti ir vyksta (kartais ar net visada) **ne tik determinuotai, bet ir atsitiktinai**, nesvarbu, ar tie atsitiktinumai yra „tikri atsitiktinumai“, ar jie mums tokie tik atrodo dėl tuos perėjimus sukėlusių galimų priežasčių gausybės, įvairovės ir sudėtingumo (žiūr. šios mokymosi priemonės 1.2. skyrių, kuriame mes jau buvome susidūrę su **determinuotumo – stochastiškumo dilema**).

Stochastinio automato stochastiškumas gali pasireikšti ne tik tuo, kad mes negalime vienareikšmiškai atsakyti į klausimą, į kokią naują būseną dabar pereis (ar net nepereis) mūsų nagrinėjamas stochastinis automatas, bet kartais ir tuo, kad mes neretai negalime tiksliai žinoti, kada tas perėjimas įvyks. Mes galime tik, surinkę ir apdoroję statistinę informaciją apie stochastinio automato funkcionavimą, apskaičiuoti galimų automato perėjimų iš vienos būsenos į kitą tikimybes bei tokių įvykių įvykimo momentų tikimybinį pasiskirstymą laike.

Atsitiktiniais gali būti ne tik stochastinio automato perėjimai iš vienos būsenos į kitą, bet ir jo išėjimai. Todėl, sudarant stochastinio automato išorinį matematinį modelį, būtina nustatyti ir nurodyti visų galimų (ar bent tų, kurie įvyksta pakankamai dažnai) perėjimų ir išėjimų tikimybes ar tų tikimybių pasiskirstymo skirstinius ir tų skirstinių parametrų pakankamai tikslus statistinius įverčius, kuriais naudodamiesi mes galėtume tas tikimybes apskaičiuoti. Stochastinių automatų pavyzdžiais gali būti įvairūs, dabar labai populiarūs, žaidimų automatai.

Stochastiniai automatai gali būti stacionarūs ir nestacionarūs, paprasti (t. y. „markoviški“, žiūr. 1.3. skyrių) ir automatai, turintys priešistorę, (žiūr. 1.4.10. skyrelį).

Stacionariais vadinami tokie stochastiniai automatai, kurių perėjimų ir išėjimų tikimybės nesikeičia laikui bėgant. Paprasto stacionaraus stochastinio automato pavyzdys – kaleidoskopas. Galimos jo būsenos – iš spalvotų stikliukų susidarantys įvairūs vaizdeliai, kuriuos matome pažvelgę į kaleidoskopo vamzdelį.

Nestacionariais stochastiniais automatais vadinami tokie stochastiniai automatai, kurių perėjimo ar/ir išėjimo tikimybės gali keistis, laikui bėgant. Nestacionaraus stochastinio automato pavyzdys – urna su įvairių spalvų rutuliais, iš kurios laikas nuo laiko atsitiktinai išimamas atsitiktinis skaičius rutulių, kurie po to pakeičiami atsitiktinai paimtais naujais rutuliais (ne būtinai tų pačių spalvų ir ne būtinai tuo pačiu skaičiumi).

Šiame skyrelyje nagrinėsime paprasto (be priešistorės) stacionaraus stochastinio automato matematinį modelį ir to modelio taikymą automato funkcionavimo galimų trajektorijų nustatymui ir tų trajektorijų tikimybių apskaičiavimui.

Norint sudaryti **paprasto stacionaraus stochastinio automato išorinį matematinį modelį, reikia:**

- 1) aprašyti jo kalendorių, t. y. nurodyti taisykles, leidžiančias nustatyti (rasti) to kalendoriaus ypatinguosius taškus, reiškiančius to automato kalendoriaus taktų pradžias bei pabaigas (ar bent pateikti tokių taškų sąrašą);
- 2) aprašyti automatų įėjimus ir įėjimų erdvę, t. y. nurodyti įėjimų vektoriaus koordinates ir jų reikšmių galimo kitimo sritis, įsivedant įėjimo proceso ir įėjimų srauto matematiniam aprašymui reikalingus žymenis ir įėjimų aprašymo gramatikos taisykles;
- 3) panašiu būdu matematiškai aprašyti automato išėjimus ir išėjimų erdvę;
- 4) matematiškai aprašyti automato būseną ir būsenų erdvę;
- 5) nustatyti galimus automato perėjimus ir tų perėjimų tikimybes, sudaryti perėjimo tikimybių matricas;
- 6) nustatyti galimų automato išėjimų tikimybes ir sudaryti tų tikimybių matricas.

Perėjimo ir išėjimo tikimybių matricas galima sujungti į perėjimų – išėjimų tikimybių matricas, sudarant tokių matricų matricą.

Išsivesime perėjimo ir išėjimų tikimybių sąvokas bei jų žymėjimo kalbą, pradžioje iliustruodami tas sąvokas paprastais pavyzdžiais, kai automato įėjimas, išėjimas ir būseną aprašomi skaliariais x, y, z .

Tarkime, jog stochastinio automato įėjimas gali turėti u diskrečių reikšmių $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_u$, būseną – v diskrečių reikšmių $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_v$, išėjimas – w diskrečių reikšmių $y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_w$.

Paprasčiausio „loginio“ stochastinio automato atveju $u=v=w=2$.

Tikimybę, kad stochastinis automatas, būdamas būsenoje z_i ir gavęs įėjimo signalą x_k , pereis į būseną z_j , žymėsime $p(z_j/z_i, x_k)$, o tikimybę, kad automatas, būdamas būsenoje z_i , atreaguos į įėjimą x_k išėjimu y_s , pažymėsime $p(y_s/z_i, x_k)$.

Žymeniu $p(y_s, z_j/z_i, x_k)$ žymėsime **perėjimų – išėjimų tikimybę**, reiškiančią tikimybę, jog automatas, būdamas būsenoje z_i , veikiant įėjimui x_k , pereis iš būsenos z_i į būseną z_j ir išduos išėjimo signalą y_s .

Tikimybės $p(y_s, z_j/z_i, x_k)$ sudaro kvadratinę **matricą** $(p(y_s, z_j/z_i, x_k))_{y_s=\text{const}}^{x_k=\text{const}}$, turinčią $v \times v$ matavimų, matricą, turinčią $u \times w$ matavimų. Šios **matricų matricos eilutės k** yra sudarytos iš matricų $(p(y_s, z_j/z_i, x_k))_{y_s=\text{const}}^{x_k=\text{const}}$, turinčių vienodas automato įėjimo x reikšmes $x_k, k=1, 2, \dots, u$, o tos **matricų matricos stulpeliai s** sudaryti iš matricų $(p(y_s, z_j/z_i, x_k))_{y_s=\text{const}}^{x_k=\text{const}}$, turinčių vienodas automato išėjimo y reikšmes $y_s, s=1, 2, \dots, w$.

Kvadratinės matricas $(p(y_s, z_j/z_i, x_k))_{y_s=\text{const}}^{x_k=\text{const}}$, priklausančias matricų matricai, turinčiai $u \times w$ matavimų, vadinsime tos matricų matricos **elementariomis matricomis**, nes jos, būdamos matricų matricos elementais, užims tik po vieną pastarosios „langelį“.

Elementariųjų matricų eilutės i sudaromos iš tikimybių $p(y_s, z_j/z_i, x_k)$, turinčių vienodas automato dabartinės būsenos z reikšmes $z_i, i=1, 2, \dots, v$, o tų matricų stulpeliai – iš tikimybių, turinčias vienodas būsenos, į kurias automatai pereis, reikšmes $z_j, j=1, 2, \dots, v$.

Tikimybių $p(y_s, z_j/z_i, x_k)$ sumos $\sum_{s=1}^w \sum_{j=1}^v p(y_s, z_j/z_i, x_k) = 1$ bet kurioms pastovioms z_i reikšmėms, $i=1, 2, \dots, v$, ir bet kurioms pastovioms x_k reikšmėms, $k=1, 2, \dots, u$, nes automatas iš bet kurios būsenos z_i , paveikus bet kuriam įėjimui x_k , pereis į kurią nors iš galimų būsenų $z_j, j=1, 2, \dots, v$ (kai $j=i$, tai automatas iš būsenos z_i „pereis“ į būseną z_i , t. y. pasiliks toje pačioje būsenoje), ir išduos kurį nors iš galimų išėjimo signalų, paimtą iš jų pilno sąrašo $y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_w$, kuriam priklauso ir „tuščias“ signalas, žymintis tą atvejį, kai automatas į aplinką niekaip neveikia.

Panašiai samprotaujant, nesunku įrodyti, jog $\sum_{s=1}^w p(y-s, z_j/z_i, x_k) = p(z_j/z_{i,x-k})$, o

$$\sum_{j=1}^v p(y_s, z_j/z_i, x_k) = p(y_s/z_i, x_k).$$

Kai stochastinis automatas yra **autonominis**, t. y., kai aplinkos poveikis į automatą yra nesvarbus (pavyzdžiui, todėl, kad jis nereikšmingas), tai vietoj perėjimų tikimybių matricų $(p(z_j/z_i, x_k))_{x_k=\text{const}}$ vektoriaus, turinčio u komponentų, gauname vieną matricą $(p(z_j/z_i))$ – **autonominio automato perėjimų tikimybių matricą**, turinčią $v \times v$ matavimų, o vietoj matricų vektoriaus $(p(z_j/z_i, x_k))_{x_k=\text{const}}$, taip pat turinčio u komponentų, taip pat gauname tik vieną matricą $(p(y_s/z_i))$ – **autonominio automato išėjimų tikimybių matricą**, turinčią $v \times w$ matavimų.

Kai paprasto stacionaraus stochastinio automato įėjimai, būsenos ir išėjimai yra vektoriai $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, $\vec{z}=(z_1, z_2, \dots, z_p, \dots, z_r)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, \dots, y_e, \dots, y_m)$, kurių koordinatės $x_i (i=1, 2, \dots, n)$, $z_p (p=1, 2, \dots, r)$ ir $y_\ell (\ell=1, 2, \dots, m)$ turi baigtines galimų reikšmių aibes $(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,u_i})$, $(z_{p,1}, z_{p,2}, \dots, z_{p,v_p})$, $(y_{\ell,1}, y_{\ell,2}, \dots, y_{\ell,w_\ell})$, tai vietoj perėjimų – išėjimų tikimybių matricų matricos $(p(y_s, z_j/z_i, x_k))$, susidedančios iš $u \times w$ matricų $(p(y_s, z_j/z_i, x_k))_{y_s=\text{const}}^{x_k=\text{const}}$, turinčių po $v \times v$ matavimų,

gauname žymiai sudėtingesnę matricų matricą, susidedančią iš $\prod_{i=1}^n u_i \times \prod_{\ell=1}^w w_\ell$ matricų

$(p(\bar{y}_{s_i}, \bar{z}_{j_p} / \bar{z}_{i_p}, \bar{x}_{k_i}))_{\substack{\bar{x}_k = \text{const} \\ \bar{y}_s = \text{const}}}$, turinčių po $\prod_{p=1}^r v_p \times \prod_{p=1}^r v_p$ matavimų.

Operuodami su šios matricų matricos komponentėmis, galėtume apskaičiuoti atskiras perėjimų ir išėjimų tikimybes $p(\bar{z}_j / \bar{z}_i, \bar{x}_k)$ ir $p(\bar{y}_s / \bar{z}_i, \bar{x}_k)$, kaip jau tai buvo padaryta paprastų „skaliarinių“ įėjimų, būsenų ir išėjimų atveju.

Dar sudėtingesnes matricas ir matricų matricas privalėtume sudaryti, kurdami **nestacionaraus vektorinio stochastinio automato išorinį matematinį modelį**. Šiuo atveju jau nebeužtektų vienos matricų matricos, o tektų kurti matricų matricą kiekvienam automato taktui (ar bent jau tiems taktams, pereinant prie kurių, perėjimų – išėjimų tikimybėse įvyktų kokie nors pasikeitimai. Žinoma, jei tie pasikeitimai vyktų dėsningai ir mes žinotume, kaip tuos dėsningumus matematiškai aprašyti, tai vietoj laiko eilutės, sudarytos iš perėjimų – išėjimų tikimybių matricų matricų, pakaktų algoritmų, apskaičiuojančių tas tikimybes, matricų matricos (ar kokio nors vieno sudėtingo algoritmo, galinčio apskaičiuoti visas perėjimo – išėjimo tikimybes kiekvienam galimam stochastinio automato perėjimui – išėjimui, t. y. kiekvienam jo funkcionavimo taktui).

Kai nestacionarus stochastinis automatas funkcionuotų asinhroniniame režime ir jo ypatingieji taškai (perėjimų į naują būseną ir išėjimų išdavimo bei pasiuntimo į išorinę automato aplinką momentai) būtų pasiskirstę laike atsitiktinai ir tolydžiai pagal kokį nors tikimybinių pasiskirstymo dėsnį, tai tokio automato perėjimų – išėjimų matricų matricą turėtų sudaryti ne konkrečios perėjimų – išėjimų tikimybės, o laiko funkcijos, leidžiančios generuoti automato kalendoriaus ypatinguosius taškus – perėjimų į naują būseną ir išėjimų signalų išdavimo momentus – ir apskaičiuoti perėjimo – išėjimo tikimybes $p_t(\bar{y}_s, \bar{z}_j / \bar{z}_i, \bar{x}_k)$ bet kuriam laiko momentui t .

Sukurti tokį analizinį nestacionaraus „vektorinio“ stochastinio automato išorinį modelį būtų sunku ir daugumoje atvejų vargu ar įmanoma, tačiau sukurti jo algoritminį imitacinį modelį, turint pakankamai informacijos apie automato funkcionavimą, daugumoje atvejų būtų įmanoma.

Dabar jau galima detalai paaiškinti šio skyrelio pradžioje pateiktus penktąjį ir šeštąjį sąrašo darbų, kuriuos reikia atlikti, sudarant stacionaraus stochastinio automato išorinį matematinį modelį, punktus.

Tie punktai reiškia, jog, sudarant stacionaraus stochastinio automato išorinį matematinį modelį, reikia nustatyti (t. y. apskaičiuoti, apdorojus natūrinių aktyvių bei pasyvių eksperimentų metu sukauptą statistinę informaciją) tikimybių $p(\bar{y}_s, \bar{z}_j / \bar{z}_i, \bar{x}_k)$ reikšmes ir, sudarius iš šių tikimybių atitinkamas matricas, pastarąsias sujungti į matricų matricą, turinčią tiek eilučių, kiek reikšmių gali turėti vektorius $\bar{x}$ (o tai ne daugiau negu $\prod_{i=1}^n u_i$), ir tiek stulpelių, kiek reikšmių gali turėti vektorius $\bar{y}$ (o tai ne

daugiau negu $\prod_{\ell=1}^w w_\ell$). Šios matricų matricos elementais bus kvadratinės matricos, turinčios po tiek

eilučių ir stulpelių, kiek skirtingų reikšmių gali turėti automato būsenos vektorius $\bar{z}$. Kiekvienos tokios elementarios matricos elementų skaičius – galimų skirtingų automato perėjimų iš vienos būsenos į kitą

skaičius. Tas skaičius ne didesnis už skaičių $\left(\prod_{p=1}^r v_p \right)^2$.

Dabar pateiksiu **konkretaus paprasto stacionaraus automato išorinio matematinio modelio pavyzdį**.

Tarkime, jog mūsų nagrinėjamas stochastinis automatas funkcionuoja tokiaime asinhroniniame režime: jis gali pereiti į naują būseną ir suformuoti išėjimo signalą tik tada, kai ateina koks nors įėjimo signalas, o laiko intervaluose tarp įėjimo signalų atėjimo momentų, automatas savo būsenos nekeičia.

Tarkime, kad automatas turi du įėjimo kanalus, t. y., kad jo įėjimas – vektorius $\bar{x} = (x_1, x_2)$.

Tarkime, kad įėjimo pirmojo kanalo abėcėlę sudaro įėjimo signalai $x_{1,1}$ ir $x_{1,2}$ – kintamojo x_1 reikšmės, o antrojo kanalo – $x_{2,1}$, $x_{2,2}$, $x_{2,3}$ – kintamojo x_2 reikšmės. Todėl $u_1=2$, $u_2=3$.

Tarkime, kad automatas turi tik vieną išėjimą ir išėjimo abėcėlę sudaro signalai y_1 ir y_2 – kintamojo y reikšmės. Todėl $w=2$.

Tarkime, jog automatas gali būti vienoje iš trijų būsenų z_1 , z_2 , z_3 , kurios yra automato būsenos – kintamojo z konkrečios reikšmės. Tai reiškia, jog automato būsena – skaliaras ir būsenų abėcėlė susideda iš 3 raidžių. Todėl $v=3$.

Prieš pradėdami aprašinėti perėjimų ir išėjimų tikimybes, transformuosime įėjimų erdvę: vietoj dviejų įėjimo kanalų su įėjimo signalais $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{2,1}$, $x_{2,2}$, $x_{2,3}$ išvėsime vieną apibendrintą įėjimą su

$u=u_1 \times u_2=2 \cdot 3=6$ įėjimo signalais: $\xi_1=x_{1,1} \wedge x_{2,1}$, $\xi_2=x_{1,1} \wedge x_{2,2}$, $\xi_3=x_{1,1} \wedge x_{2,3}$, $\xi_4=x_{1,2} \wedge x_{2,1}$, $\xi_5=x_{1,2} \wedge x_{2,2}$, $\xi_6=x_{1,2} \wedge x_{2,3}$, laikydami jog čia konjunkcijos ženklas „ $\wedge$ “ reiškia tai, kad automatas gavo įėjimą susidedantį iš dviejų signalų: vienas atėjo pirmuoju kanalu, kitas – antruoju.

Po tokios transformacijos stochastinio automato perėjimų ir išėjimų tikimybės $p(y_s, z_j / z_i, \xi_k)$, sudarys matricų matricą, turinčią $u=u_1 \times u_2=6$ eilutes bei $w=2$ stulpelius ir susidedančią iš matricų $(p(y_s, z_j / z_i, \xi_k))_{\xi_k=\text{const}}^{y_s=\text{const}}$, turinčių po $v \times v=3 \times 3$ matavimų.

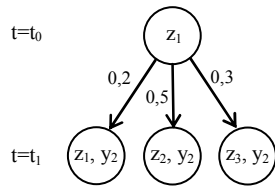
Tarkime, jog ši matricų matrica yra tokia:

	$y=y_1$	$y=y_2$																																
$\xi=\xi_1$	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,1	0,3	0,1	z_2	0,2	0,4	0,1	z_3	0,2	0,2	0,1	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0,1</td><td>0</td><td>0,2</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,2	0,1	0,2	z_2	0,1	0	0,2	z_3	0,3	0,1	0,1
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,1	0,3	0,1																															
z_2	0,2	0,4	0,1																															
z_3	0,2	0,2	0,1																															
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,2	0,1	0,2																															
z_2	0,1	0	0,2																															
z_3	0,3	0,1	0,1																															
$\xi=\xi_2$	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0	0	0	z_2	0	1	0	z_3	0	0	0	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	1	0	0	z_2	0	0	0	z_3	0	0	1
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0	0	0																															
z_2	0	1	0																															
z_3	0	0	0																															
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	1	0	0																															
z_2	0	0	0																															
z_3	0	0	1																															
$\xi=\xi_3$	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,1</td><td>0</td><td>0,3</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0,5</td><td>0</td><td>0,5</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,1	0	0,3	z_2	0	1	0	z_3	0,5	0	0,5	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,5</td><td>0</td><td>0,1</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,5	0	0,1	z_2	0	0	1	z_3	0	0	0
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,1	0	0,3																															
z_2	0	1	0																															
z_3	0,5	0	0,5																															
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,5	0	0,1																															
z_2	0	0	1																															
z_3	0	0	0																															
$\xi=\xi_4$	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,5</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,5	0,1	0,1	z_2	0,1	0,1	0,1	z_3	0,1	0,1	0,1	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,5</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0,1</td><td>0,5</td><td>0,1</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,1	0,1	0,1	z_2	0,1	0,1	0,5	z_3	0,1	0,5	0,1
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,5	0,1	0,1																															
z_2	0,1	0,1	0,1																															
z_3	0,1	0,1	0,1																															
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,1	0,1	0,1																															
z_2	0,1	0,1	0,5																															
z_3	0,1	0,5	0,1																															
$\xi=\xi_5$	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0	0	0	z_2	0	0	0	z_3	0	0	0	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,3</td></tr><tr><td>z_2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,2	0,5	0,3	z_2	1	0	0	z_3	0	0,4	0,6
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0	0	0																															
z_2	0	0	0																															
z_3	0	0	0																															
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0,2	0,5	0,3																															
z_2	1	0	0																															
z_3	0	0,4	0,6																															
$\xi=\xi_6$	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,5</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0,3</td><td>0,7</td><td>0</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0	1	0	z_2	0,4	0,1	0,5	z_3	0,3	0,7	0	<table><tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr><tr><td>z_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0	0	0	z_2	0	0	0	z_3	0	0	0
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0	1	0																															
z_2	0,4	0,1	0,5																															
z_3	0,3	0,7	0																															
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																															
z_1	0	0	0																															
z_2	0	0	0																															
z_3	0	0	0																															

Ši matricų matrica ir yra mūsų nagrinėjamo stochastinio automato išorinis informacinis modelis, kurį kartu galima laikyti ir to automato matematiniu modeliu, nes jis matematine kalba aprašo automato įėjimus, išėjimus, būsenas ir perėjimų – išėjimų tikimybes.

Turėdami ką tik sudarytą konkretaus paprasto stacionaraus stochastinio automato išorinį modelį ir žinodami automato pradinę būseną, pavyzdžiui $z(t_0)=z_1$, bei, jo įėjimo trajektoriją (įėjimo signalų atėjimo momentus $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ ir jų reikšmes ξ_k) arba generuodami įėjimo signalų seką, mes galime imituoti stochastinio automato funkcionavimą, rasti galimas jo fazines ir išėjimo trajektorijas bei jų tikimybes.

Tarkime, kad mūsų nagrinėjamo stochastinio automato atsitiktinės įėjimo trajektorijos pradinę atkarpą sudaro keturių įėjimo signalų ξ_n seka $\xi_5, \xi_1, \xi_6, \xi_3$, o kalendorių – laiko momentai t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 , kur t_0 – pradinis laiko momentas, kurio metu $z(t_0)=z_1$, t_1 – pirmojo signalo ξ_5 atėjimo momentas, t_2 – antrojo signalo ξ_1 atėjimo momentas ir t. t.

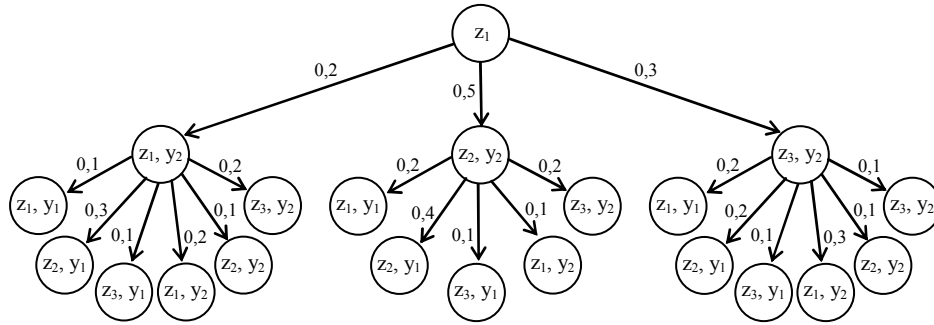


27 pav.

Atėjus pirmajam įėjimo signalui $\bar{x}(t_1)=(x_{12}, x_{22})=\xi_5$, galimus automato perėjimus, būsenas ir išėjimus bei jų tikimybes galima atvaizduoti grafu (žiūr. 27 pav.)

Šis grafas, sudarytas naudojantis duotąja matricų matrica, vaizduoja, jog, atėjus įėjimo signalui $\xi=\xi_5$, automatas su tikimybe, lygia 0,2, gali pereiti į būseną z_1 (t. y. pasilikti senojoje būsenoje), su tikimybe, lygia 0,5, pereiti į būseną z_2 ir su tikimybe, lygia 0,3, gali pereiti į būseną z_3 . Automato išėjimas šiuo atveju gali būti tik vienas – y_2 , todėl jo tikimybė lygi 1.

Po antrojo įėjimo ξ_1 , (t. y. po dviejų įėjimų signalų sekos ξ_5, ξ_1) stochastinio automato perėjimų – išėjimų grafas išsišakos žymiai daugiau (žiūr. 28 pav.)



28 pav.

Gavome, jog atėjus dviems pirmiesiems įėjimo signalams ξ_5, ξ_1 , galimos tokios automato fazinių trajektorijų pradinės atkarpos ir tokios jų atsiradimo tikimybės:

- 1) $z_1 z_1 z_1$ su tikimybe $0,2(0,1+0,2)=0,06$,
- 2) $z_1 z_1 z_2$ su tikimybe $0,2(0,1+0,3)=0,08$,
- 3) $z_1 z_1 z_3$ su tikimybe $0,2(0,2+0,1)=0,06$,
- 4) $z_1 z_2 z_1$ su tikimybe $0,5(0,2+0,1)=0,15$,
- 5) $z_1 z_2 z_2$ su tikimybe $0,5 \cdot 0,4=0,20$,
- 6) $z_1 z_2 z_3$ su tikimybe $0,5(0,1+0,2)=0,15$,
- 7) $z_1 z_3 z_1$ su tikimybe $0,3(0,2+0,3)=0,15$,
- 8) $z_1 z_3 z_2$ su tikimybe $0,3(0,2+0,1)=0,09$,
- 9) $z_1 z_3 z_3$ su tikimybe $0,3(0,1+0,1)=0,06$.

Galima rasti ir išėjimo trajektorijų pradinės atkarpos bei jų atsiradimo tikimybes, esant duotajai įėjimo trajektorijos pradinei atkarpai ir automato pradinei būsenai:

- 1) $y_2 y_1$ su tikimybe $0,2(0,1+0,3+0,1)+0,5(0,2+0,4+0,1)+0,3(0,2+0,2+0,1)=0,6$,
- 2) $y_2 y_2$ su tikimybe $0,2(0,2+0,1+0,2)+0,5(0,1+0,2)+0,3(0,3+0,1+0,1)=0,4$.

Galima rasti ir stochastinio automato funkcionavimo trajektorijų pradinės atkarpos bei jų atsiradimo tikimybės:

- 1) $z_1(z_1, y_2)(z_1, y_1)$ su tikimybe $0,2 \cdot 0,1=0,02$,
- 2) $z_1(z_1, y_2)(z_1, y_2)$ su tikimybe $0,2 \cdot 0,2=0,04$,
- 3) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)$ su tikimybe $0,2 \cdot 0,3=0,06$,
- 4) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_2)$ su tikimybe $0,2 \cdot 0,1=0,02$,
- 5) $z_1(z_1, y_2)(z_3, y_1)$ su tikimybe $0,2 \cdot 0,1=0,02$,
- 6) $z_1(z_1, y_2)(z_3, y_2)$ su tikimybe $0,2 \cdot 0,2=0,04$.
- 7) $z_1(z_2, y_2)(z_1, y_1)$ su tikimybe $0,5 \cdot 0,2=0,10$,
- 8) $z_1(z_2, y_2)(z_1, y_2)$ su tikimybe $0,5 \cdot 0,1=0,05$,
- 9) $z_1(z_2, y_2)(z_2, y_1)$ su tikimybe $0,5 \cdot 0,4=0,20$,
- 10) $z_1(z_2, y_2)(z_3, y_1)$ su tikimybe $0,5 \cdot 0,1=0,05$,
- 11) $z_1(z_2, y_2)(z_3, y_2)$ su tikimybe $0,5 \cdot 0,2=0,10$.
- 12) $z_1(z_3, y_2)(z_1, y_1)$ su tikimybe $0,3 \cdot 0,2=0,06$,
- 13) $z_1(z_3, y_2)(z_1, y_2)$ su tikimybe $0,3 \cdot 0,3=0,09$,
- 14) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_1)$ su tikimybe $0,3 \cdot 0,2=0,06$,
- 15) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_2)$ su tikimybe $0,3 \cdot 0,1=0,03$,
- 16) $z_1(z_3, y_2)(z_3, y_1)$ su tikimybe $0,3 \cdot 0,1=0,03$,
- 17) $z_1(z_3, y_2)(z_3, y_2)$ su tikimybe $0,3 \cdot 0,1=0,03$.

Žinodami trečiąjį įėjimo signalą $\xi(t_3)=\xi_6$, analogiškai galime rasti pailgėjusias fazinių, išėjimo ir funkcionavimo trajektorijų pradines atkarpas bei jų atsiradimo tikimybes, esant duotajai įėjimo trajektorijos pradinei atkarpai ir automato pradinei būsenai.

Pavyzdžiui, galėtume gauti $3+3\cdot3+3\cdot2=18$ fazinių trajektorijų skirtingų pradinių atkarpų su jų atsiradimo tikimybėmis:

- 1) $z_1 z_1 z_1 z_2$ su tikimybe 0,060,
- 2) $z_1 z_2 z_1 z_2$ su tikimybe 0,150.
- 3) $z_1 z_3 z_1 z_2$ su tikimybe 0,150,
- 4) $z_1 z_1 z_2 z_1$ su tikimybe 0,032,
- 5) $z_1 z_1 z_2 z_2$ su tikimybe 0,008,
- 6) $z_1 z_1 z_2 z_3$ su tikimybe 0,040 ir t. t.

Pailgėjusių išėjimo trajektorijų pradinių atkarpų būtų vėl tik dvi:

- 1) $y_2 y_1 y_1$ su tikimybe 0,6 ir
- 2) $y_2 y_2 y_1$ su tikimybe 0,4.

Pailgėjusių funkcionavimo trajektorijų skirtingų pradinių atkarpų būtų $6+5\cdot3+6\cdot2=33$, pavyzdžiui:

- 1) $z_1(z_1, y_2)(z_1, y_1)(z_2, y_1)$ su tikimybe 0,020,
- 2) $z_2(z_1, y_2)(z_1, y_2)(z_2, y_1)$ su tikimybe 0,040,
- 3) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)$ su tikimybe 0,024,
- 4) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_2, y_1)$ su tikimybe 0,006,
- 5) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_3, y_1)$ su tikimybe 0,030 ir t. t.

Analogiškai samprotaudami rastume, kad po ketvirtojo įėjimo signalo $\xi(t_4)=\xi_3$ fazinių trajektorijų pailgėjusių skirtingų atkarpų atsirastų 27, pavyzdžiui:

- 1) $z_1 z_1 z_1 z_2 z_3$ su tikimybe 0,0600,
- 2) $z_1 z_2 z_1 z_2 z_3$ su tikimybe 0,1500,
- 3) $z_1 z_3 z_1 z_2 z_3$ su tikimybe 0,1500,
- 4) $z_1 z_1 z_2 z_1 z_1$ su tikimybe 0,0192,
- 5) $z_1 z_1 z_2 z_1 z_3$ su tikimybe 0,0128,
- 6) $z_1 z_1 z_2 z_2 z_3$ su tikimybe 0,0800,
- 7) $z_1 z_1 z_2 z_3 z_1$ su tikimybe 0,0200,
- 8) $z_1 z_1 z_2 z_3 z_3$ su tikimybe 0,0200 ir t. t.

Dabar atsirastų jau keturios skirtingos išėjimo trajektorijų pradinės atkarpos:

- 1) $y_2 y_1 y_1 y_1$ su tikimybe 0,2232,
- 2) $y_2 y_1 y_1 y_2$ su tikimybe 0,3768,
- 3) $y_2 y_2 y_1 y_1$ su tikimybe 0,0534,
- 4) $y_2 y_2 y_1 y_2$ su tikimybe 0,3466.

Funkcionavimo trajektorijų pailgėjusių skirtingų pradinių atkarpų atsirastų jau 71, pavyzdžiui:

- 1) $z_1(z_1, y_2)(z_1, y_1)(z_2, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0200,
- 2) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_1, y_1)$ su tikimybe 0,0024,
- 3) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_3, y_1)$ su tikimybe 0,0072,
- 4) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_1, y_2)$ su tikimybe 0,0120,
- 5) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0024,
- 6) $z_1(z_1, y_2)(z_2, y_1)(z_2, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0060,
-
- 27) $z_1(z_2, y_2)(z_1, y_1)(z_2, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,1000,
- 28) $z_1(z_2, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_1, y_1)$ su tikimybe 0,0080,
- 29) $z_1(z_2, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_3, y_1)$ su tikimybe 0,0240,
-
- 46) $z_1(z_3, y_2)(z_1, y_1)(z_2, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0600,
- 47) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_1, y_1)$ su tikimybe 0,0024,
- 48) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_3, y_1)$ su tikimybe 0,0072,
- 49) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_1, y_2)$ su tikimybe 0,0120,
- 50) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_1)(z_1, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0024,
- 51) $z_1(z_3, y_2)(z_2, y_1)(z_2, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0060,
-
- 71) $z_1(z_3, y_2)(z_3, y_2)(z_2, y_1)(z_3, y_2)$ su tikimybe 0,0210.

Žinodami trajektorijas ir jų tikimybes, galime apskaičiuoti būsenų ir išėjimų tikimybes bet kuriame automato kalendoriaus taške. Pavyzdžiui:

$$p\{z(t_1)=z_1\}=0,2, p\{z(t_1)=z_2\}=0,5, p\{z(t_1)=z_3\}=0,3;$$

$$p\{y(t_1)=y_1\}=0, p\{y(t_1)=y_2\}=1;$$

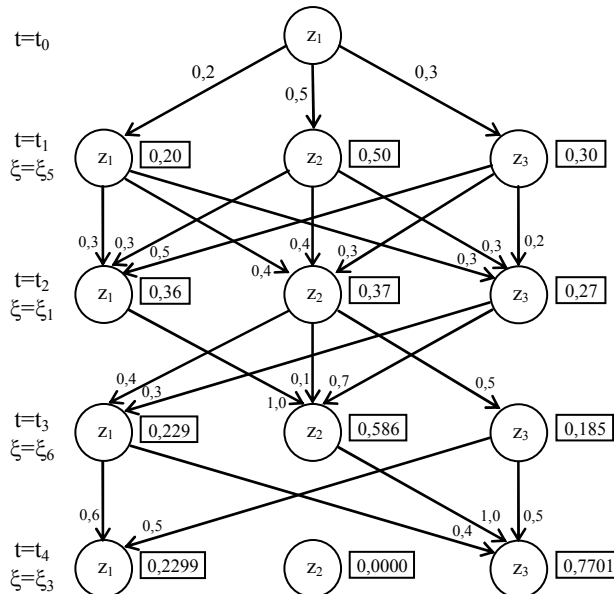
$$\begin{aligned}
p\{z(t_2)=z_1\} &= 0,2(0,1+0,2)+0,5(0,2+0,1)+0,3(0,2+0,3)=0,36; \\
p\{z(t_2)=z_2\} &= 0,2(0,3+0,1)+0,5\cdot 0,4+0,3(0,2+0,1)=0,37; \\
p\{z(t_2)=z_3\} &= 0,2(0,1+0,2)+0,5(0,1+0,2)+0,3(0,1+0,1)=0,27; \\
p\{y(t_2)=y_1\} &= 0,2(0,1+0,3+0,1)+0,5(0,2+0,4+0,1)+0,3(0,2+0,2+0,1)=0,69; \\
p\{y(t_2)=y_2\} &= 0,2(0,2+0,1+0,2)+0,5(0,1+0,2)+0,3(0,3+0,1+0,1)=0,4; \\
p\{z(t_3)=z_1\} &= 0,229, \quad p\{z(t_3)=z_2\} = 0,568, \quad p\{z(t_3)=z_3\} = 0,185; \\
p\{y(t_3)=y_1\} &= 1, \quad p\{y(t_3)=y_2\} = 0; \\
p\{z(t_4)=z_1\} &= 0,2299, \quad p\{z(t_4)=z_2\} = 0, \quad p\{z(t_4)=z_3\} = 0,7701; \\
p\{y(t_4)=y_1\} &= 0,2480+0,0534=0,3014, \quad p\{y(t_4)=y_2\} = 0,3520+0,3466=0,6986;
\end{aligned}$$

Tuo atveju, kai mus domintų tik automato būsenų ir jo fazinių trajektorijų tikimybės, tai būtų galima supaprastinti skaičiavimus.

Pradžioje, naudodamiesi formule $p(z_j/z_i, x_k) = \sum_{s=1}^w p(y_s, z_j/z_i, x_k)$, surastume perėjimų tikimybes $p(z_j/z_i, x_k)$ ir gautume perėjimo tikimybių matricių vektorių, kuris būtų paprastesnis ir patogesnis už perėjimų – išėjimų matricių matricę:

$\xi=\xi_1$	<table border="1"> <tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr> <tr><td>z_1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>z_2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>z_3</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,2</td></tr> </table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,3	0,4	0,3	z_2	0,3	0,4	0,3	z_3	0,5	0,3	0,2	$\xi=\xi_2$	<table border="1"> <tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr> <tr><td>z_1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>z_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	1	0	0	z_2	0	1	0	z_3	0	0	1
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																																
z_1	0,3	0,4	0,3																																
z_2	0,3	0,4	0,3																																
z_3	0,5	0,3	0,2																																
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																																
z_1	1	0	0																																
z_2	0	1	0																																
z_3	0	0	1																																
$\xi=\xi_3$	<table border="1"> <tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr> <tr><td>z_1</td><td>0,6</td><td>0</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>z_2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>z_3</td><td>0,5</td><td>0</td><td>0,5</td></tr> </table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,6	0	0,4	z_2	0	0	1	z_3	0,5	0	0,5	$\xi=\xi_4$	<table border="1"> <tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr> <tr><td>z_1</td><td>0,6</td><td>0,2</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>z_2</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,6</td></tr> <tr><td>z_3</td><td>0,2</td><td>0,6</td><td>0,2</td></tr> </table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,6	0,2	0,2	z_2	0,2	0,2	0,6	z_3	0,2	0,6	0,2
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																																
z_1	0,6	0	0,4																																
z_2	0	0	1																																
z_3	0,5	0	0,5																																
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																																
z_1	0,6	0,2	0,2																																
z_2	0,2	0,2	0,6																																
z_3	0,2	0,6	0,2																																
$\xi=\xi_5$	<table border="1"> <tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr> <tr><td>z_1</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>z_2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>z_3</td><td>0</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr> </table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0,2	0,5	0,3	z_2	1	0	0	z_3	0	0,4	0,6	$\xi=\xi_6$	<table border="1"> <tr><td>$z_i \backslash z_j$</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td></tr> <tr><td>z_1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>z_2</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>z_3</td><td>0,3</td><td>0,7</td><td>0</td></tr> </table>	$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3	z_1	0	1	0	z_2	0,4	0,1	0,5	z_3	0,3	0,7	0
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																																
z_1	0,2	0,5	0,3																																
z_2	1	0	0																																
z_3	0	0,4	0,6																																
$z_i \backslash z_j$	z_1	z_2	z_3																																
z_1	0	1	0																																
z_2	0,4	0,1	0,5																																
z_3	0,3	0,7	0																																

Turėdami perėjimų tikimybių reikšmes pavaizduotas matricių vektoriuje, galime sudaryti perėjimų grafą, pavaizduotą 29 pav.



Būsenų tikimybių $p\{z(t_k)=z_j\}$ apskaičiavimas labai supaprastėja, nes jų apskaičiavimas tampa nuosekliu rekurentiniu procesu: $p\{z(t_{k+1})=z_j\}=\sum_{i=1}^V p\{z(t_k)=z_i\} \cdot p\{z_j/z_i, \xi(t_{k+1})\}$.

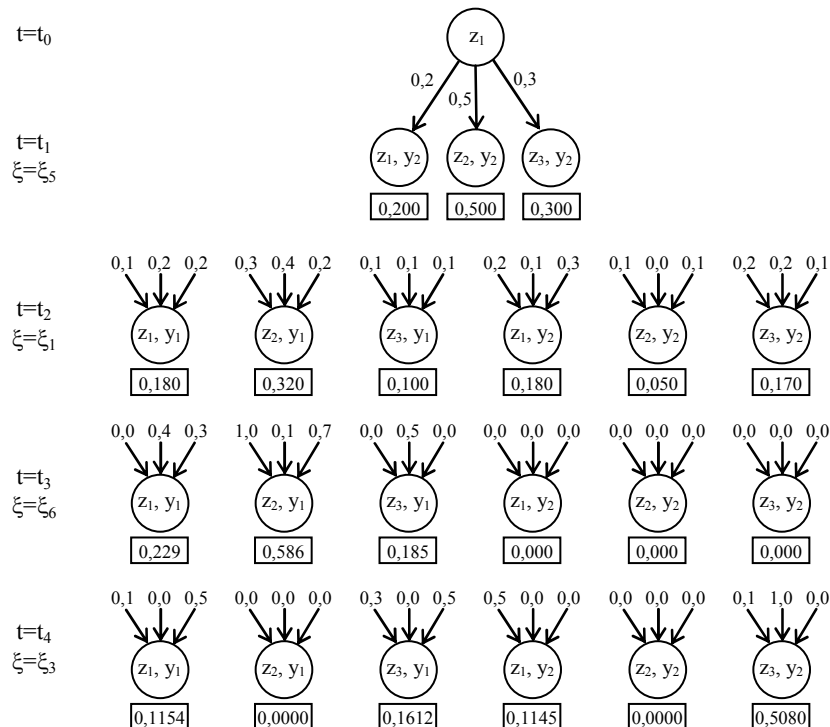
Iš šios formulės išplaukia, kad automato būsenų tikimybių apskaičiavimui momentu $t+1$ galima pasinaudoti jau apskaičiuotomis būsenomis, kurias automatas galėjo turėti momentu t_1 dauginant jas iš atitinkamų perėjimo tikimybių ir sumuojant gautas sandaugas. Atitinkamų sandaugų sumos – būsenų tikimybės – 29 pav. įrašytos į stačiakampius šalia atitinkamų būsenų.

Naudojantis 29 pav. pavaizduotu perėjimų grafu, labai paprasta surasti visas galimas fazines trajektorijas, ir apskaičiuoti jų atsiradimo tikimybes, atitinkančias duotąją pradinę būseną ir duotąją iėjimo trajektoriją.

Pavyzdžiui, gauname tokius rezultatus:

- 1) $z_1 z_1 z_1 z_2 z_3$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,3 \times 1,0 \times 1,0 = 0,0600$,
- 2) $z_1 z_1 z_2 z_1 z_1$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 = 0,0192$,
- 3) $z_1 z_1 z_2 z_1 z_3$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,0128$,
- 4) $z_1 z_1 z_2 z_2 z_3$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,1 \times 1,0 = 0,0080$,
- 5) $z_1 z_1 z_2 z_3 z_1$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,5 \times 0,5 = 0,0200$,
- 6) $z_1 z_1 z_2 z_3 z_3$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,5 \times 0,5 = 0,0200$,
- 7) $z_1 z_1 z_3 z_1 z_1$ su tikimybe $1,0 \times 0,2 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,6 = 0,0108$ ir t. t.

Galima sudaryti grafą, panašų į 29 pav. pavaizduotą grafą, tačiau jau skirtą išėjimų tikimybių bei automato funkcionavimo trajektorijų tikimybių apskaičiavimo palengvinimui. Tokio grafo sudarymui, įsivesime **situacijos** sąvoką, pavadindami situacija būsenos ir išėjimo reikšmių galimą kombinaciją. Situacijų pavaizduotų skrituliais, grafas pateiktas 30 pav. Kiekvienos situacijos charakteristika – būsenos ir išėjimo reikšmės įrašytos skritulių viduje. Horizontalios skritulių eilutės atitinka automato taktus ir tuo pačiu metu iėjimų reikšmes. Jos užrašytos kairėje 30 pav. pusėje. Kad išvengtume susikertančių tiesių margumyno, pavaizduoti tik „situacijų iėjimai“, prie kurių surašytos patekimo į tą situaciją tikimybės iš būsenų z_1, z_2, z_3 , esant duotajai iėjimo $\xi(t)$ reikšmei. Tos tikimybės randamos perėjimų – išėjimų matricių matricioje atitinkamų elementarių matricių stulpeliuose, atitinkančiuose skritulių vaizduojamą situaciją. Prie kiekvienos situacijos stačiakampiuose įrašomos situacijų tikimybės. Jos apskaičiuojamos kaip jau minėtų patekimo į situaciją iš atitinkamų būsenų tikimybių sandaugų su tų būsenų tikimybėmis sumos. Būsenų tikimybės galima imti iš 29 pav. pavaizduoto grafo, o taip pat ir iš 30 pav. pavaizduoto grafo, sudedant situacijų, kurios turi tas pačias būsenų reikšmes ir skiriasi tik išėjimų reikšmėmis tikimybes.



30 pav.

Naudotis 30 pav. labai paprasta: norint surasti kiekviename takte t_1, t_2, t_3, t_4 automato atitinkamos būsenos tikimybę, reikia sudėti skaičius, užrašytus stačiakampiuose tą taktą atitinkančioje eilutėje, kurie priklauso situacijoms, charakterizuojamoms būsenai, o norint surasti atitinkamo išėjimo tikimybę, reikia sudėti skaičius, įrašytus į stačiakampius, priklausančius tam išėjimui.

Pavyzdžiui, jei norime sužinoti tikimybę $p\{z(t_3)=z_2\}$, tai sudedame eilutės, atitinkančios $t=t_3$ (ir $\xi=\xi_6$) skaičius 0,586 ir 0,000, priklausančius situacijoms (z_2, y_1) ir (z_2, y_2) . Gauname, jog $p\{z(t_3)=z_2\}=0,586$. Tai sutampa su rezultatu, pavaizduotu 29 pav. grafe. Iš šio fakto išplaukia, jog 30 pav. grafas gali būti grafo, pavaizduoto 29 pav., pakaitalu.

Jei norime sužinoti tikimybę $p\{y(t_2)=y_1\}$, tai sudedame eilutės, atitinkančios $t=t_2$ (ir įėjimo $\xi=\xi_1$) skaičius stačiakampiuose, priklausančiuose situacijoms, charakterizuojamoms $y=y_1$, būtent, skaičius 0,180, 0,320 ir 0,100. Gauname, jog $p\{y(t_2)=y_1\}=0,600$. Tai sutampa su jau anksčiau minėtu rezultatu.

Dabar jau galima dar kartą paaiškinti, kaip apskaičiuojamos situacijų tikimybių reikšmės, įrašytos į stačiakampius.

Situacijų, priklausančių eilutei $t=t_1$, tikimybių reikšmių apskaičiavimo algoritmas aiškus iš brėžinio, pateikto 30 pav.

Situacijų, priklausančių eilutei $t=t_2$, tikimybės apskaičiuojamos, dauginant būsenų, priklausančių eilutei $t=t_1$, tikimybes iš perėjimų iš tų būsenų į eilutės $t=t_2$ situaciją tikimybių ir gautas sandaugas sumuojant.

Pavyzdžiui, situacijos (z_1, y_1) , priklausančios eilutei $t=t_2$, tikimybę randame kaip sandaugų sumą: $0,2 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,18$. Situacijos (z_2, y_1) , priklausančios tai pačiai eilutei, tikimybę randame analogiškai: $0,2 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,32$.

Panašiai randame ir situacijų, priklausančių eilutei $t=t_3$, tikimybes. Pavyzdžiui, situacijos (z_1, y_1) tikimybė yra lygi eilutės $t=t_2$ būsenų sandaugų iš perėjimų į eilutės $t=t_3$ situaciją (z_1, y_1) iš tų būsenų tikimybių sumai: $(0,180+0,180) \cdot 0,0 + (0,320+0,050) \cdot 0,4 + (0,100+0,170) \cdot 0,3 = 0 + 0,37 \cdot 0,4 + 0,27 \cdot 0,3 = 0,148 + 0,085 = 0,229$. Analogiškai randame situacijos (z_2, y_1) , priklausančios eilutei $t=t_3$, tikimybės reikšmę: $(0,180+0,180) \cdot 1,0 + (0,320+0,050) \cdot 0,1 + (0,100+0,170) \cdot 0,7 = 0,36 + 0,37 \cdot 0,1 + 0,27 \cdot 0,7 = 0,360 + 0,037 + 0,189 = 0,586$.

Analogiškai apskaičiuojamos ir visų kitų situacijų tikimybės.

Grafą, pavaizduotą 30 pav., galima panaudoti ir išėjimo bei funkcionavimo trajektorijų pradinių atkarpų tikimybių reikšmių apskaičiavimui. Tai gana universalus grafas.

Į stochastinio automato būsenų ir išėjimų kitimą galima žiūrėti kaip į **diskretų atsitiktinį procesą**, o į to kitimo matematinį aprašymą, – kaip į **diskrečias atsitiktines (stochastines) funkcijas**, kurių realizacijomis (ir grafikais daugiamatėse erdvėse) ir yra konkrečios stochastinio automato fazinės ir išėjimo trajektorijos $\bar{z}(t)$ ir $\bar{y}(t)$.

Autonominių stochastinių automatų fazinės trajektorijos – tai atsitiktinių procesų, vadinamų Markovo grandinėmis, realizacijos.

Kai paprastas stochastinis autonominis automatas yra stacionarus, tai jo fazinės trajektorijos priklauso taip vadinamų **homogeninių Markovo grandinių** poklasiui, o kai – nestacionarus, tai jo fazinės trajektorijos yra **nehomogeninių Markovo grandinių** realizacijos.

Kai paprastas autonominis stochastinis automatas funkcionuoja su apibrėžtais tam tikro ilgio taktais $\Delta t = T_i$, tai automato fazinės trajektorijos priklauso **Markovo grandinių su diskrečiu laiku** poklasiui, o kai autonominis automatas funkcionuoja režime su atsitiktiniais perėjimų momentais, pasiskirsčiusiais laike tolydžiai, tai jo fazinės trajektorijas galima priskirti **Markovo grandinių su tolydžiu laiku** poklasiui.

Šiuo atveju **stochastinio automato modelis** yra dalinis atvejis **tipinio universalus išorinio matematinio modelio – Buslenkos agregato modelio** [32, 45], turinčio mišrų kalendorių ir perėjimo bei išėjimo funkcijas, kurios gali būti ir stochastinės, ir determinuotos, o taip pat – ir diskrečios, ir tolydžios. Iš tokių agregatų konstruojamos **agregatinės sistemos** (BAS). Buslenkos agregatus ir BAS nagrinėsime antroje šios mokymosi priemonės dalyje.

Kalbant apie ryšį tarp stochastinių automatų matematinių modelių ir Markovo grandinių, galima teigti, jog **paprasto (be priešistorės) autonominio stochastinio automato fazinės trajektorijos visada priklauso Markovo grandinių klasei ir Markovo grandinės su diskrečiu laiku visada galima interpretuoti kaip paprasto stochastinio automato būsenos kitimo proceso matematinį modelį** – jo fazinę trajektoriją.

Apie Markovo procesus ir Markovo grandines dar bus kalbama šios mokymosi priemonės pirmosios dalies 1.14. skyriuje, o taip pat antroje šios mokymosi priemonės dalyje. Markovo grandinės nagrinėjamos ir šių eilučių autoriaus sudarytame preprinte [4], kuris jau buvo minėtas šios mokymosi priemonės „Ivade“. Čia apsiribosiu tik Kolmogorovo – Čepmeno formulės Markovo

grandinėms su diskrečiu laiku pateikimu bei Kolmogorovo diferencialinių ir alegbrinių lygčių sistemos Markovo grandinėms su tolydžiu laiku išvedimu.

Pažymėsime tikimybę $P\{z(t_{k+1})=z_j\}$, reiškiančią tikimybę, jog momentu t_{k+1} diskretaus laiko Markovo grandinė bus būsenoje z_j , sutrumpintai $P_j(t_{k+1})$. Kai Markovo grandinė homogeninė, tai jos perėjimų iš vienos būsenos į kitą tikimybės nepriklauso nuo laiko. Todėl perėjimų iš kokios nors būsenos z_i į kokią nors būseną z_j sąlyginę tikimybę homogeninėse Markovo grandinėse galima žymėti p_{ij} , nenurodant laiko, kada tas perėjimas įvyks.

Tarkime, kad būsenų, kuriose gali būti nagrinėjamoji Markovo grandinė, skaičius yra n ir visos tos būsenos sunumeruotos nuo 1 iki n . Tarkime, jog indeksai i ir j yra kintamieji, kurių reikšmės yra minėtieji numeriai.

Naudodamiesi įsivestais žymenimis, galime užrašyti formulę $P_j(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^n P_i(t_k) p_{ij}$, kuri homogeninėms Markovo grandinėms yra akivaizdžiai teisinga. Tai ir yra **Kolmogorovo – Čepmeno formulė**.

Ši formulė nehomogeninėms diskretaus laiko Markovo grandinėms skirsis tik tuo, kad joje reikės kokių nors būdu pažymėti sąlyginių perėjimo tikimybių priklausomybę nuo laiko. Kadangi laikas šiuo atveju diskretus, tai pakanka nurodyti to momento, kada vyksta perėjimas, numerį, pavyzdžiui $p_{ij}^{(k)}$, $p_{ij}^{(k+1)}$ ir pan.

Todėl Kolmogorovo – Čepmeno formulė diskretaus laiko nehomogeninėms Markovo grandinėms atrodo taip $P_j(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^n P_i(t_k) p_{ij}^{(k+1)}$.

Tolydaus laiko Markovo grandinėms sąlygines tikimybes, kad grandinė, kuri momentu t buvo būsenoje z_i , per laiko intervalą Δt pereis į būseną z_j , žymėsime taip: $p_{ij}(t, t+\Delta t)$, kur $\Delta t > 0$, o $(t, t+\Delta t)$ – laiko intervalas nuo momento t iki momento $t+\Delta t$.

Tuomet, samprotaudami analogiškai, kaip buvo samprotauta sudarant Kolmogorovo – Čepmeno formulę, gauname lygybę $P_j(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) p_{ij}(t, t+\Delta t)$.

Akivaizdu, kad $\sum_{j=1}^n p_{ij}(t, t+\Delta t) = 1$, taip pat, kad $\sum_{i=1}^n p_{ji}(t, t+\Delta t) = 1$.

Iš paskutinės lygybės gauname, jog $p_{ji}(t, t+\Delta t) = 1 - \sum_{i=1, i \neq j}^n p_{ji}(t, t+\Delta t)$.

Iš čia pateiktų akivaizdžiai teisingų lygybių akivaizdžiai išplaukia tokios lygybės:

$$P_j(t+\Delta t) = \sum_{i=1, i \neq j}^n P_i(t) p_{ij}(t, t+\Delta t) + P_j(t) p_{jj}(t, t+\Delta t) = \sum_{i=1, i \neq j}^n P_i(t) p_{ij}(t, t+\Delta t) + P_j(t) - P_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^n p_{ji}(t, t+\Delta t).$$

Kadangi $\Delta t > 0$, tai iš ką tik užrašytos lygybės išplaukia lygybės:

$$\frac{P_j(t+\Delta t) - P_j(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1, i \neq j}^n P_i(t) \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} - P_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{p_{ji}(t, t+\Delta t)}{\Delta t};$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_j(t+\Delta t) - P_j(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1, i \neq j}^n P_i(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} - P_j(t) \sum_{i=1, i \neq j}^n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ji}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Kadangi nagrinėjamoji Markovo grandinė – tolydaus laiko grandinė, tai ribos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_j(t+\Delta t) - P_j(t)}{\Delta t}, \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \frac{p_{ji}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \text{ turėtų egzistuoti.}$$

Pirmoji riba yra tiesiog išvestinės $\frac{dP_j(t)}{dt}$ apibrėžimas.

Nagrinėdami antrąją ir trečiąją ribas, galime pastebėti, jog, Δt artėjant prie 0, intervalas $(t, t+\Delta t)$ trumpėja ir $t+\Delta t$ artėja prie t : **intervalinė funkcija artėja prie taškinės funkcijos** ir, kai Δt tampa lygus 0, gauname tam tikras taško t funkcijas, kurias pažymėsime $\lambda_{ij}(t)$ ir $\lambda_{ji}(t)$.

Funkcijas $\lambda_{ij}(t)$ ir $\lambda_{ji}(t)$ galime interpretuoti kaip atsitiktinių įvykių – perėjimų iš būsenos z_i į būseną z_j ir iš būsenos z_j į būseną z_i – **srauto tankius (momentinius tankius, atitinkančius momentą t)**.

Kai Markovo grandinė homogeninė, tai šie tankiai nepriklauso nuo laiko ir yra konstantos λ_{ij} ir λ_{ji} , nehomogeninėms tolydaus laiko Markovo grandinėms šie tankiai yra laiko funkcijos $\lambda_{ij}(t)$ ir $\lambda_{ji}(t)$.

Gautoji lygybė
$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n P_i(t)\lambda_{ij}(t) - P_j(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ji}(t)$$
 vadinama **Kolmogorovo diferencialine**

lygtimi tolydžioms Markovo grandinėms.

Tokią lygtį galima užrašyti kiekvienai Markovo grandinės būsenai $j=1, 2, \dots, n$. Todėl gauname diferencialinių lygčių sistemą, vadinamą **Kolmogorovo diferencialinių lygčių sistema Markovo grandinėms**.

Ši lygčių sistema nėra nepriklausoma, nes $\sum_{j=1}^n P_j(t) = 1$ ir todėl $\sum_{j=1}^n \frac{dP_j(t)}{dt} = 0$.

Todėl, sprendžiant tokią diferencialinių lygčių sistemą, vieną kintamąjį, naudojantis ką tik užrašytomis lygybėmis, galime išreikšti per kitus, ir spręsti jau $n-1$ lygčių sistemą su $n-1$ nežinomuoju.

Galima įrodyti, kad didelė dalis atsitiktinių procesų (jų tarpe ir tie, kurių modeliai yra Markovo grandinės), laikui bėgant, artėja prie **dinaminės pusiausvyros**, kurioje nusistovi **pastovios būsenų finalinės tikimybės** P_j , $j=1, 2, 3, \dots, n$: **nors atsitiktiniai perėjimai iš vienos būsenos į kitą ir vyksta, bet skirtingų krypčių perėjimų srautai atsveria vienas kitą ir todėl vidutinės būsenų tikimybės tampa pastovios**. Kitaip tariant, vidutinės santykinės trukmės, kurių metu sistema būna būsenose z_j , $j=1, 2, \dots, n$, **finalinėje pusiausvyrinėje situacijoje** išlieka pastovios ir proporcingos nusistovėjusioms tikimybėms P_j , kurios, kaip jau buvo minėta, vadinamos **finalinėmis tikimybėmis**.

Todėl, kai tikimybės $P_j(t)$ tampa finalinėmis, tai jos tampa pastoviomis tikimybėmis P_j . Tuomet išvestinės $\frac{dP_j}{dt}$ tampa lygios 0 ir Kolmogorovo diferencialinių lygčių sistema tampa **Kolmogorovo algebrinių lygčių sistema Markovo grandinės finalinėms tikimybėms** P_j , $j=1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n P_i \lambda_{ij} - P_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_{ji} = 0, \quad j=1, 2, 3, \dots, n.$$

Spręsdami šią sistemą (ji taip pat nėra nepriklausoma) kartu su lygybe $\sum_{j=1}^n P_j = 1$, mes, žinodami λ_{ij} ir λ_{ji} reikšmes (jos nustatomos, apdorojant surinktą statistinę informaciją apie nagrinėjamos Markovo grandinės funkcionavimą), galime apskaičiuoti finalinių tikimybių reikšmes ir, pasinaudodami jomis, apskaičiuoti kitas vidutinės finalinės statistinės Markovo grandinės charakteristikų reikšmes.

Tokie skaičiavimai plačiai taikomi **masinio projektavimo sistemų projektavime ir analizėje, jų funkcionavimo tobulinime**. Masinio aptarnavimo sistemų (MAS) funkcionavimą ir jo modeliavimą mes nagrinėsime 1.14. šios mokymosi priemonės skyriuje.

1.4.13. Deskriptiniai ir normatyviniai išoriniai modeliai

Išoriniai informaciniai (tame tarpe ir matematiniai, tačiau ne būtinai vien tik matematiniai) modeliai gali vaizduoti realiai egzistuojančius objektus, aprašydami jų įėjimus, išėjimus, būsenas bei ryšius tarp jų taip, kad tas aprašymas kiek įmanoma tiksliau atvaizduotų tai, **kas yra tikrovėje**. Tokie modeliai vadinami **aprašomaisiais**, arba **deskriptiniais**. Pagrindinis reikalavimas, kurį turi tenkinti deskriptinis modelis, yra jo **adekvatumas** tam objektui, kurį tas modelis aprašo. Adekvatumo laipsnis priklauso ir nuo modelio **pilnumo** (t. y. nuo to, kurią dalį realaus objekto savybių ir santykių tas modelis atspindi), ir nuo modelio **objektyvumo** (t. y. nuo to, kaip tiksliai bei bešališkai realaus objekto savybės ir santykiai atvaizduoti modelyje).

Tačiau galima sudarinėti ne tik jau egzistuojančių objektų deskriptinius modelius, bet projektuoti naujus objektus bei galvoti apie egzistuojančių objektų tobulinimą ir kurti tokių patobulintų objektų **modelius – projektus**. Jie vaizduotų ne tai, kas yra, o tai, **kas, mūsų nuomone, privalėtų būti, ko mes pageidautume**. Tokie modeliai vadinami **normatyviniais**. Pagrindinis reikalavimas, kurį turi tenkinti

normatyvinis modelis, yra jo **racionalumas**: normatyvinis modelis turėtų būti toks, kad naudojantis juo būtų galima kuo lengviau pasiekti pageidaujamą tikslą: sukurti naują objektą, kuo geriau tenkinantį projektuojamo objekto vartotojų poreikius, arba pervesti turimą objektą į tokią naują būseną, kurioje tas objektas funkcionuotų taip, kad geriausiai tenkintų jam keliamus reikalavimus. Antrasis reikalavimas, kurį turi tenkinti normatyvinis modelis, yra to modelis (projekto) **realizuojamumas**: normatyvinis modelis turi būti toks, kad jį būtų galima realizuoti, t. y. sukurti realią sistemą, turinčią deskriptinį modelį, sutampantį su duotuoju (suprojektuotu) normatyviniu modeliu. Trečiuoju reikalavimu, kuris dabar dar ne visada yra tenkinamas, bet yra būtinas, siekiant, jog kuriami nauji objektai bei projektuojama veikla tarnautų žmonijos progresui ir mūsų planetos bei jos gamtos įvairovės išsaugojimui ar bent jau nekenktų šioms vertybėms, turėtų būti siūlomų projektų **moralinis ir juridinis priimtinumas**, jų atitikimas visuomenės pripažįstamumas moralinėms ir teisinėms socialinėms bei ekologinėms normoms.

1.4.3, 1.4.4 ir 1.4.8. skyreliuose sudarytus diferencijavimo grandelės, hidrodinaminės sistemos ir elektromagnetinių virpesių kontūro matematinius modelius galima priskirti prie labai supaprastintų (idealizuotų) deskriptinių modelių, o 1.4.1., 1.4.2 ir 1.4.5. skyreliuose sudarytus DVS, NVDS ir medžiagų sandėlio modelius – prie normatyvinių išorinių matematinių modelių. Prie normatyvinių informacinių modelių galima priskirti ir 1.4.13.2. skyrelyje pateiktą pareigybės paso pavyzdį, kurį mes dar nagrinėsime. Kai kurie teoriniai matematiniai modeliai **gali būti interpretuojami bei taikomi ir kaip deskriptiniai**, nes buvo sukurti aprašant realius objektus, **ir kaip normatyviniai**, nes gali būti naudojami, projektuojant naujus objektus.

Deskriptinius ir normatyvinius modelius galima sudarinėti ne tik objektams, bet ir procesams. Valdymo sistemose deskriptiniai modeliai kuriami **apskaitos**, o normatyviniai – **planavimo** metu.

Apskaitos metu įvertinama **esama situacija** ir sudaromos **ataskaitos**, aprašančios ir įvertinančios tai, kas ir kaip buvo padaryta ar nepadaryta, kas tų darbų rezultate buvo pasiekta ar nepasiekta. Ataskaitos, būdamos deskriptiniais informaciniais modeliais, turi tenkinti pakankamo pilnumo ir objektyvumo reikalavimus, turi pakankamai adekvačiai atspindėti padarytą darbą ir jo rezultate pasiektą esamą padėtį.

Planavimo metu sudaromi **planai**, kuriuose nustatoma, kokių tikslų turi būti siekiama, kokie rezultatai turi būti gauti, kas, ką, kada, kur ir kaip privalo padaryti, kokių rezultatų kada pasiekti, kam, kada ir kaip atsiskaityti už padarytą darbą ir jo rezultatus. Planuojant atsižvelgiama į tai, kad didelė dalis procesų, nuo kurių priklauso mūsų darbo rezultatai ir pagrindinių tikslų pasiekimas, nėra pilnai nuo mūsų priklausomi, **nėra mūsų valdomi**, o **valdomais procesais** yra tik nedaugelis procesų, pirmoje eilėje tie procesai, kurie sudaro mūsų pačių, bei mums pavaldžių asmenų ir technikos veiklą. Todėl planuojant stengiamasi **prognozuoti nevaldomų procesų eigą** ir, atsižvelgiant į prognozavimo rezultatus, **planuoti valdomų procesų eigą**, tokiu būdu **priartinant objektyvių procesų sąlygojamą prognozuojamą būseną prie mūsų subjektyviai pageidaujamos planuojamos būsenos**. Planai, būdami mūsų **būsimos veiklos normatyviniais modeliais**, privalo, kaip jau buvo minėta, tenkinti **racionalumo ir realizuojamumo** reikalavimus, taip pat ir **moralinio bei teisinio priimtumo** reikalavimus.

Naujų bei patobulintų objektų ir procesų normatyviniai modeliai, skirti naujų objektų gamybai bei egzistuojančių objektų tobulinimui, vadinami **projektais**, o tokių modelių kūrimas – **projektavimu**.

Kai projektuojamas ar tobulinamas objektas yra sudėtinga sistema, tai gana dažnai tokio objekto projektavimo procesą skaido į **stadijas (priešprojektinę, kurios metu sudaroma ir derinama projektavimo techninė užduotis, projektinę ir projekto realizavimo), o pačias stadijas – dar į etapus.** Pavyzdžiui, projektinė stadija skaidoma į tris etapus: 1) techninį projektavimą, 2) techninio projekto tinkamumo patikrinimą natūriniuose eksperimentuose bei eksperimentuose su modeliu, 3) darbinį projektavimą.

Techniniu projektu vadinamas objekto **normatyvinis** (dažniausiai dar tik **išorinis**, o vietoj vidinio modelio pateikiamas kol kas tik pagrindinės jo – **vidinio modelio projekto** – sukūrimo idėjos, būsimos sistemos veikimo principai, **principinė vidinio modelio schema**) modelis, nusakantis projektuojamojo objekto paskirtį, jo funkcionavimo principus bei to funkcionavimo sąlygas ir to funkcionavimo išdavoje gausimus rezultatus.

Darbinio projektu vadinamas objekto **vidinis normatyvinis modelis**, detaliai aprašantis ne tik projektuojamo objekto kaip naujai kuriamos sudėtingos sistemos vidinę sandarą (sudėtį ir struktūrą), sistemos posistemų ir elementų funkcionavimą, bet ir tos **sistemos pagaminimo procesą.** Todėl darbiname projekte galima išskirti projektuojamos sistemos **konstrukcinį projektą** (tos sistemos vidinį jos sudėties ir struktūros normatyvinį modelį) ir **technologinį projektą** (sistemos pagaminimo technologijos normatyvinį modelį), t. y. **iš darbinio projekto galima sužinoti ne tik tai, kaip projektuojamoji sistema bus sudaryta ir kaip ji veiks, bet ir tai, kaip tokią sistemą pagaminti.**

Techninis projektas tikrinamas tada, kada kyla abejonų, ar tą projektą pavyks realizuoti ir ar tas projektas leis sukurti gaminį, tenkinantį jam keliamus reikalavimus. Kai projektuojamoji ar tobulinamoji sistema projektuotojams nėra sudėtinga bei nėra jiems jau tokia nauja, kad, sukūrę techninį jos projektą, jie galėtų abejonų jo realizuojamumu bei tinkamumu, tai nėra prasmės projektavimo procesą skaidyti į aukščiau išvardintus tris etapus. Tuomet eliminuojamas antrasis etapas, o pirmasis bei trečiasis etapas dažnai sujungiami į vieną, ir tokios sistemos konstrukcinis ir technologinis projektai kuriami iškart ir beveik vienu metu. Tai pagreitina projektavimo procesą ir palengvina galimų projektavimo klaidų pastebėjimą ir taisymą.

Turėdamas darbinį projektą, naujo objekto gamintojas sudaro dar vieną normatyvinį dokumentą – **gamybos planą.** Gamybos planas – **tai normatyvinis gamybos proceso modelis**, papildantis technologinį projektą, nurodant ne tik tai, kaip ir iš ko gaminti sistemos elementus bei kaip juos jungti į sistemą, bet ir pateikiant informaciją apie tai, **kas, kur ir kada vykdys gamybos procesą sudarančias operacijas.** Kai gamybos planas yra sudėtingas ir jo realizavime dalyvauja daug subjektų, tam planui dažnai suteikiama **tinklinio grafiko*** forma.

Iš to, kas buvo pasakyta, išplaukia, jog projektuojant naujus objektus ir jų gamybą, kuriama trijų rūšių **normatyvinė dokumentacija: konstruktorinė, technologinė ir planinė.**

Projektuojant ir tobulinant organizacines sistemas, jų veiklą bei jų valdymo sistemas, kuriama **normatyvinė organizacinė dokumentacija (NOD).** Priklausomai nuo NOD paskirties, skiriamos tokios NOD rūšys: **struktūrinė, technologinė ir planinė.** Kartais NOD vadinama organizacijos **vidiniais standartais.**

* Apie tinklinius grafikus, jų sudarymą bei taikymus bus kalbama 1.9.2.16.–1.9.2.18. šios mokymosi priemonės skyreliuose bei dar plačiau – jos antrojoje dalyje.

Struktūrinė NOD aprašo normatyvinę organizacijos ir jos padalinių struktūrą, santykius (pirmoje eilėje pavaldumo ir atsakomybės bei atsiskaitomybės) tarp organizacijos narių (pareigūnų) bei santykius tarp organizacijos padalinių, o taip pat veiklos funkcijų (pareigūnų ir organizacijos padalinių pareigų) paskirstymą organizacijoje. Struktūrinė NOD nustato (reglamentuoja), **kas kam yra pavaldus, kas ką turi daryti, kas kam privalo atsiskaityti, kas kokias teises turi, kas už ką atsako**. Struktūrinei NOD priskiriama: 1) organizacijų **įstatai**, 2) organizacijų padalinių **nuostatai**, 3) pareigūnų **pareiginiai pasai** (taip vadinamosios **pareiginės instrukcijos**).

Technologinė NOD nustato (reglamentuoja) organizacijoje vykdomų veiklos funkcijų (pareigų atlikimo) **normatyvinę technologiją**, nurodydama, **kaip** ta ar kita operacija ar iš jų sudaryta sudėtinga procedūra **turi būti atliekama, kokiomis priemonėmis ir kokia eilės tvarka** visą tai turi būti daroma, **kaip turi būti vertinama** pareigų atlikimo **kokybė**. Technologinėje NOD galima išskirti tokias jos rūšis: 1) **maršrutines technologines korteles (MTK)** ir 2) **operacines korteles (OK)** bei **operacines instrukcijas (OI)**.

Operacinė kortelė reglamentuoja atskiros **rutininės operacijos** atlikimą, nurodydama, **kaip** ta operacija privalo būti atlikta, **kiek ir kokių resursų** (tame tarpe ir laiko) numatoma, esant normalioms sąlygoms, tos operacijos atlikimui sunaudoti, t. y. aprašo **operacijos vykdymo algoritmą**. Tą pačią paskirtį turi ir **operacinė instrukcija (OI)**, kuri skiriasi nuo OK tik tuo, kad OK turi reglamentuotą (standartizuotą) formą, o OI pateikiama laisva forma.

Operacijomis vadinamos tokios elementarios veiklos funkcijos, kurios yra vykdomos **vieno vykdytojo** (dažniausiai vieno pareigūno, nors kartais – ir pastoviai egzistuojančio ir kartu vykdančio tą operaciją kelių pareigūnų junginio, sudarančio struktūrinį toliau jau nebedalomą vienetą) **vienoje darbo vietoje**, naudojantis **vienu ir tuo pačiu įrangos komplektu**, per **vieną laiko intervalą**, nereikalaujantį jo pertraukimo. Keičiantis veiklos atlikėjui, jos vykdymo vietai bei jos atlikimui reikalingai įrangai, o taip pat užsibaigiant pradėtai veiklai jos rezultato gavimu ir prasidedant kito (nebūtinai kitoniško) rezultato siekiančiai veiklai, įvyksta **perėjimas nuo vienos operacijos prie kitos** (nebūtinai kitoniškos). Pavyzdžiui, kai darbininkas tekina partiją vienodų detalių, tai jis atlieka ne vieną tekinimo operaciją, o kartoja tiek **vienodų (aprašomų viena ir ta pačia OK) gamybinių operacijų**, kiek toje partijoje yra detalių. Kai jis keičia techninę įrangą ir pradeda tekinti kitoniškas detales, tai jis pereina prie kitoniškų gamybinių operacijų, aprašomų kitomis OK. Perėjimas prie kitos operacijos, turinčios kitą OK, įvyksta ir tada, kai vienas ir tas pats darbininkas, atlikęs kokią tai operaciją su detale, su ta pačia detale pereina į kitą darbo vietą (pavyzdžiui prie kitų staklių) ir toliau tęsia tos detalės apdorojimo procesą. Operacija susideda iš **elementarių veiksmų**. Sudarant OK ir OI tie veiksmai įvardijami ir išvardijami, nurodoma jų atlikimo tvarka.

Veiklos funkcijos gali būti kūrybinės ir rutininės.

Rutininėmis veiklos funkcijomis (tame tarpe ir **rutininėmis operacijomis**) vadinamos tokios funkcijos, kurių atlikimo procesas gali būti pilnai algoritmizuotas ir todėl gali būti pilnai reglamentuotas. Pavyzdžiui, buhalterinės apskaitos vedimas ir buhalterinės ataskaitos sudarymas daugumoje atvejų yra (ar bent jau turėtų būti) rutininės procedūros, kurios gali ir privalo būti reglamentuotos ir kuriose „kūrybos elementai“, galintys privesti prie piktnaudžiavimų, ne tik neskaitantini, bet ir neleistini. Kaip tik todėl, kuriant AVS, tas operacijas buvo nesunku algoritmizuoti ir jų atlikimą automatizuoti. Griežtesnis buhalterinės apskaitos ir ataskaitų reglamentavimas bei šios veiklos automatizavimas – **veiksminga priemonė kovoje su korupcija, kurios**

klestėjimui dabar labai padeda patogi „komercinės“ bei „valstybinės“ „paslapties“ skraistė ir kelių skirtingų nuosavybės formų egzistavimas. Todėl kai kurios grupuotės labai suinteresuotos tokios „skraistės“ buvimu ir jos didinimu, pažeidžiant piliečių teisę žinoti ir tokiu būdu palengvinant jų mulkinimą.

Kūrybinėmis veiklos funkcijomis vadinamos tokios veiklos funkcijos, kurių atlikimo pilnas reglamentavimas, sudarant visų į tą veiklą įeinančių operacijų OK, yra ne tik negalimas dėl tos veiklos griežto algoritmo neturėjimo ar net neegzistavimo, bet dažnai – ir nepageidautinas dėl tos veiklos vykdytojo kūrybinės iniciatyvos ir jo kūrybinių galių galimo išankstinio suvaržymo. Kūrybinės funkcijos pavyzdys – organizacijos raidos perspektyvinio plano sudarymas. Kūrybinei veiklai priklauso, pavyzdžiui, ir šios mokymosi priemonės rašymas.

Nors kūrybinė veikla negali ir neturi būti griežtai reglamentuota, tačiau tai nereiškia, jog kūrybinių funkcijų vykdyme negali būti ir rutininių operacijų, o taip pat, kad kūrybinė veikla negali ir neturi būti reglamentuojama įstatymais bei moralinėmis normomis. Čia svarbu pažymėti tik tai, kad **kūrybinėje veikloje egzistuoja ir jos pagrindinę dalį sudaro tokios operacijos, kurioms OK suprojektuoti yra ir neįmanoma, ir nepageidautina. OK sudaromos tik rutininėms operacijoms**, kas jau buvo pažymėta, įvedant OK sąvoką. Kūrybinėms operacijoms gali būti sudaromi tik **juridiniai bei moraliniai apribojimai „iš apačios“**, kuriuos peržengti neleistina. **Pati kūrybinė veikla jokia normatyvine technologine dokumentacija negali ir neturi būti reglamentuojama**, nes kūrybinės veiklos metu kaip tik ir **gimsta naujos technologijos**.

Reikia pažymėti, kad ne tik kūrybinės, bet ir reglamentuotos rutininės operacijos bei jas reglamentuojanti NOD gali būti tobulinamos, tobulinant turimą NOD. Tokios dokumentacijos kūrimas ir tobulinimas – irgi kūrybinė veikla.

Maršrutine technologine kortele vadinama NOD, reglamentuojanti sudėtingos veiklos funkcijos (kurių vykdyme dalyvauja **keli vykdytojai** ir kuriame galima išskirti **keletą etapų**) atskirų **operacijų vykdymo tvarką**. MTK nustato, kokios operacijos ir kur turi būti įvykdytos šios sudėtingos procedūros pradžioje, kas ir kur tą procedūrą bei jos „šakas“ privalo tęsti, kas ir kur tą procedūrą turi baigti, kokiomis OK bei OI pareigūnai turi vadovautis, vykdydami sudėtingos funkcijos turinį sudarančias elementarias veiklos funkcijas – operacijas.

Planinė NOD – tai organizacijos, jos padalinių ir atskirų pareigūnų **perspektyviniai, einamieji bei operatyviniai darbo planai ir darbo grafikai**. Planinė NOD reglamentuoja veiklos **funkcijų atlikimo pasiskirstymą bei paskirstymą laike**, nustatydamą laiko momentus, iki kurių turi įvykti tie ar kiti organizacijai reikšmingi, jai bei jos nariams „pavaldūs“ įvykiai, bei konkrečius laiko intervalus, skirtus rutininių darbų atlikimui.

Norėčiau atkreipti skaitytojų dėmesį į planavimo, planų ir planinės NOD praktinę reikšmę ir naudą, racionalizuojant ir optimizuojant savo veiklą. Taip darau todėl, kad Lietuvoje po Nepriklausomybės paskelbimo pradėjo plisti šiek tiek nihilistinis požiūris į planavimą ir planus, bandymas juos priskirti „sovietmečio reliktais“.

Tai nėra gerai, tačiau tai – natūrali reakcija į perdėtą planavimo sureikšminimą ir net dogmatizavimą sovietmečiu, kuomet planavimas ir planai buvo tapę ne tik veiklos valdymo priemone, kuo jie ir turėtų būti, bet dažnai net ir veiklos tikslu. Toks dogmatizuotas planavimas, vadovaujantis lozungu „План любой ценой!“, neretai duodavo daugiau žalos negu naudos ir diskreditavo planavimo idėją.

Tačiau, **atmetant dogmatizmą planavime, nederėtų atsisakyti paties planavimo**, kitaip tariant, išpilant vandenį iš vonelės, nereikėtų kartu „išpilti“ ir kūdikėlio, kurį tame vandenyje maudėme.

Netiesa, kad Vakaruose, kuriuos mes dabar stengiamės visur ir visaip mėgdžioti (net ir ten, kur nederėtų), nėra planavimo. Planavimo skeptikams siūlyčiau susipažinti su Vakarų firmų **verslo planais**, vadinamais **biznio planais**, o taip pat su tuo, kaip Pentagonas planuoja savo veiklą. Taip pat rekomenduočiau paskaityti JAV matematiko T. Saati knygą [46] apie planavimą, tuo labiau, kad toje knygoje **planavimas labai tampriai surištas su sistemotyra ir to ryšio dėka planavimas tampa moksliskai pagrįstu ir realistišku**.

Galima pasidžiaugti, kad planavimo neigimo liga Lietuvoje pamažu pradeda praeiti: jau ir Lietuvos firmos pradeda sudarinėti gana detalius ir pakankamai realius **biznio planus**, kuriuos lietuviškai derėtų vadinti **verslo planais**, o Vyriausybėje jau pradeda kalbėti apie **valstybės programinį valdymą**, apie **programinį valstybės biudžeto lėšų skirstymą**. Apmaudu tik, kad tas kalbėjimas dar netapo rimta ir moksliskai pagrįsta valstybine veikla, juridiskai įteisinta įstatymais, numatančiais **ne tik politinę, bet ir asmeninę „valdžios vyrų“ atsakomybę už savo veiklą ir jos rezultatus, už rinkimų metu duotų pažadų tesėjimą**.

Apie NOD ir jos projektavimą, apie normatyvinių ir deskriptinių informacinių modelių kūrimo metodologiją ir priemones, tame tarpe ir apie automatizuotas projektavimo ir modeliavimo sistemas daugiau informacijos skaitytojas gali rasti šių eilučių autoriaus parengtoje metodinėje priemonėje [16], be to apie tai bus gana detalai pasakojama antrojoje šios mokymosi priemonės dalyje. Ten studentai galės susipažinti ir su sudėtingų deskriptinių modelių, sudėtingų projektų ir įvairios NOD pavyzdžiais. Šioje mokymosi priemonės dalyje apsiribosiu tuo, kad pateiksiu metodinius nurodymus, kaip projektuoti pareigybių normatyvinius modelius – **pareigybinius pasus (PP)**, ir vienos pareigybės paso, suprojektuoto vadovaujantis tais nurodymais, pavyzdį. Daugiau įvairių PP pavyzdžių skaitytojas gali rasti kurso dėstytojo sukauptoje studentų darbų bibliotekėlėje.

PP sudarymo metodiniai nurodymai šių eilučių autoriaus buvo parašyti dar septintajame praėjusio amžiaus dešimtmetyje Vakarų Sibiro įmonių, ėmusių racionalizuoti valdymą ir diegti **automatizuotas valdymo sistemas (AVS) „nuo apačios“***, užsakymu. Vėliau, autoriui sugrįžus į Lietuvą, šie nurodymai buvo pakoreguoti, pritaikant Lietuvos sąlygoms, ir perrašyti jau lietuvių kalba. Buvo parašyta ir speciali knyga apie valdymo sistemų kūrimo sisteminę metodologiją ir jos principus, skirta organizacijų vadovams ir AVS projektuotojams [15]. Minėtaisiais metodiniais nurodymais buvo naudojamos Kauno radijo gamykloje „Banga“, o taip pat Vilniaus „Viktorijoje“. Naujoji jų redakcija, užsakovams iš Tolumų Rytų ir Uzbekistano pageidaujant, vėl buvo išversta į rusų kalbą, o lietuviškoji redakcija buvo ir dabar tebėra taikoma buvusių VU Maf studentų R. ir R. Šabrinskų įkurtoje UAB „Digrija“. Statistikos departamento vadovybės prašymu šie metodiniai nurodymai (kartu su jau minėta kita metodine priemone [16]) buvo perduoti ir Statistinės informacinės sistemos (SIS) projektuotojams, tačiau Statistikos departamente jais (pilna jų apimtimi) praktiškai vis dar nesinaudojama ir dėl šios priežasties departamento ir jo skyrių vadovai bei darbuotojai praktiškai vis dar beveik nedalyvauja jiems projektuojamos ir diegiamos informacinės sistemos kūrime.

Norėdamas konkrečiai supažindinti studentus – būsimuosius sudėtingų informacinių sistemų projektuotojus bei tokių sistemų diegimo ir tobulinimo procesų dalyvius – su tokių sistemų darbuotojų veiklos normatyvinių modelių projektavimu ir sistemiškumo bei sistematiškumo principų taikymu darbų organizavime, 1.4.13.1. skyrelyje pateikiu tos tų metodinių nurodymų redakcijos, kuria dabar naudojasi UAB „Digrija“, kopiją.

Kartu pridedu (žiūr. 1.4.13.2. skyrelį) ir PP (pareigybės paso) pavyzdį, pasiskolintą iš UAB „Digrija“, jos vadovui p. R. Šabrinskui ir šio PP autorei – tos UAB ekonomistei – deklarantei p. R. Iržėkevičienei – maloniai leidus tai padaryti.

Norėtuši pažymėti, kad UAB „Digrija“ susikūrimo ir jos darbuotojų PP atsiradimo istorija irgi yra šiek tiek surišta ir su šių eilučių autoriumi bei jo skaitomais kursais VU Matematikos fakultete.

* Apie valdymo ir savivaldos sistemų kūrimą „nuo apačios“ skaitytojas gali sužinoti paskaitęs šios mokymo priemonės 1.8.6.2. ir 1.16.4.4. skyrelius bei šių eilučių autoriaus atsiminimus ir straipsnius, pateiktus internetiniame tinklalapyje adresu <http://www.mif.vu.lt/~sukys>.

Prieš keliolika metų VU Maf Taikomosios matematikos katedra, kurioje teko dirbti ir man, sugrįžus iš tremties, bendradarbiavo su Kauno ir Šiaulių televizorių gamyklomis, o taip pat su Panevėžio „Ekranu“ ir Vilniaus „Vingio“ gamyklomis televizorių kokybės bei jų patikimumo didinimo ir AVS diegimo srityse.

Šiaulių gamyklos „Tauras“ vadovų užsakymu mūsų katedra paruošė studentus R. ir R. Šabrinskus tos gamyklos AVS skyriui kaip sisteminius projektuotojus. Tačiau mūsų buvusiems studentams neteko ilgai dirbti „Tauro“ AVS skyriuje, nes, pereinant į rinkos ekonomiką, „Tauro“ gamykla sunyko, ir AVS skyriaus darbuotojams teko ieškoti kitų pragyvenimo šaltinių.

R. ir R. Šabrinskai sukūrė savo UAB, kurioje nutarė diegti progresyviuosius darbo ir valdymo metodus, kuriuos jie buvo studijavę mūsų universitete. Kad šis darbas vyktų sparčiau ir kvalifikučiau, UAB „Digrija“ vadovai pakvietė į talką buvusį savo dėstytoją – šių eilučių autorių – ir jo studentus.

Man labai malonu, kad UAB „Digrijai“ neblogai sekasi, kad ji stipriai išaugo ir turi savo filialus visuose didesniuose Lietuvos miestuose, o taip pat Baltarusijoje, Ukrainoje, Kaliningrado srityje.

Dar labiau malonu, kad progresyvūs darbo ir valdymo metodai save pateisina ir kad UAB „Digrija“ palaiko labai glaudžius ryšius su Vilniaus Universitetu, o taip pat kad p. p. R. ir R. Šabrinskai stengiasi padėti savo Alma Mater bei jos darbuotojams (tame tarpe ir šių eilučių autoriui), už ką Matematikos fakultetas yra dėkingas savo buvusiems auklėtiniams. Tik labai gaila, kad iš VU MAF (dabar jau MIF) katedrų sąrašo dingio Taikomosios matematikos katedros pavadinimas. Buvusioji Taikomosios matematikos katedra buvo pervadinta į Matematinės statistikos katedrą, kuri atitikdama naują savo pavadinimą, stengiasi siauriau specializuotis. Žinoma, VU MIF reikia ir Matematinės statistikos katedros, tačiau jam reiktų ir Taikomosios matematikos, ir Matematinės sistematikos katedrų. O gal tai turėtų būti (bent jau kol kas) viena jungtinė katedra? Juk Kauno TU jau turi matematinės sistematikos katedrą. Yra sistematikos katedra ir Klaipėdos universitete, o užsienyje egzistuoja ne tik sistematikos (sistemologijos) katedros, bet ir fakultetai. Ir net atskiri moksliniai sisteminių tyrimų institutai. Ar Lietuvai ir VU tai neaktualu? Nesakyčiau, kad VU MIF Matematinės statistikos katedros darbuotojai nepakankamai ar blogai dirbo su Kauno „Banga“, Panevėžio „Ekranu“ ar Vilniaus „Vingiu“. Dirbo net labai gerai ir pasiekė puikių rezultatų produkcijos kokybės, jos patikimumo gerinime. Tačiau vien tik to neužteko, kad šios Lietuvai labai reikalingos įmonės sugebėtų išsilaikyti negailestingoje konkurencinėje kovoje. **Pritrūko kaip tik sisteminio matymo ir sisteminio mąstymo, pritrūko supratimo, kad vien tik geros kokybės ir pigios darbo jėgos faktorių nepakaks, kad būtina pereiti prie naujausių technologijų, investuojant į jų diegimą ne tik įmonių bet ir valstybės lėšas.** Sistemiskai mąstant, buvo galima ir buvo privalu numatyti, kad Lietuvoje darbo jėgos kaina negali ilgą laiką išlikti mažesnė negu šiltose Pietų Azijos ar Afrikos šalyse, kuriose žmogaus pragyvenimo (ir išgyvenimo) išlaidos žymiai mažesnės, **kad mūsų šalis gali (ir jai tai naudinga) konkuruoti tik gamindama produkciją, kurios gamybai reikia aukštos kvalifikacijos darbuotojų.** Šito nesugeba (ar nenori) suprasti ne tik mūsų šalies verslininkai, bet ir Lietuvos vyriausybės, pradedant nuo nepriklausomybės atkūrimo laikų (žiūr. šios mokymosi priemonės 1.14.12.2.1. skyrelį). **Tai rodo sisteminio mąstymo ir atsakomybės stoką mūsų valstybėje. Ar nederėtų apie tai pamąstyti ir mūsų universitetų vadovybėms? Juk galų gale ir universitetai yra atsakingi už savo šalies piliečių mąstymo lygį.**

Norėčiau pažymėti, kad, kurdamas savo PP, p. R. Iržėkevičienė (ir ne tik ji, bet ir dauguma UAB „Digrija“ darbuotojų) ne „aklai“ naudojo 1.4.13.1. skyrelyje pateiktais metodiniais nurodymais, o kūrybiškai juos pritaikė, sukurdamas originalų funkcijų vykdymo technologijos aprašymo būdą ir net savotišką sistemą. Ši sistema jai leido gana kompaktiškai aprašyti sudėtingas ekonomistės – deklaratės funkcijas ir yra patogi tų funkcijų tolimesniam tobulinimui ir kompiuterizavimui. Žinoma, net nuo tokio PP dar toli iki matematinio pareigybės modelio, tačiau praktiniam naudojimui pilnai pakanka tokio informacinio normatyvinio modelio verbalinėje formoje, koks pateiktas 1.4.13.2. skyrelyje bei jau minėtuose studentų sudarytuose PP pavyzdžiuose.

1.4.13.1. Pareigybės paso (PP) (pareigybės instrukcijos (PI)) projektavimo metodiniai nurodymai

1. PP paskirtis

PP – tai normatyvinis dokumentas, charakterizuojantis atitinkamą pareigybę, jos vietą ir vaidmenį organizacijoje, jos funkcijas ir teises, tai pareigybei keliamus reikalavimus, jos atsakomybę, jos santykius su kitomis pareigybėmis, tą informaciją, kurią pareigūnas gauna, su kuria dirba ir kurią teikia kitiems pareigūnams bei organizacijoms.

2. PP sudėtinės dalys

Į PP sudėtį įeina šie skyriai:

- 1) Bendroji dalis
- 2) Tikslai
- 3) Funkcijos
- 4) Informacija
- 5) Teisės
- 6) Atsakomybė
- 7) Priedai (jų pavadinimai išvardijami konkrečios PP sudėties turinyje)

3. PP sudėtinų dalių turinys

3.1. Bendrosios dalies turinys

Bendroje dalyje aprašoma pareigybės vieta ir vaidmuo organizacijoje, nurodomos pagrindinės veiklos kryptys, apibrėžiami pavaldumo, pavadavimo ir atsiskaitomybės santykiai, išdėstomi tie reikalavimai (išsilavinimo, patirties, charakterio, moralinių bei fizinių savybių ir t. t.), kuriuos turi tenkinti asmuo, pretenduojantis į tą pareigybę, nusakomos priėmimo, darbo (darbo dienos ir darbo savaitės trukmė, atostogų trukmė, jų suteikimo ypatumai ir pan.) bei darbo apmokėjimo, jo efektyvumo skatinimo (alga, premijos) ir atleidimo iš pareigų sąlygos.

3.2. Tikslų skyriaus turinys

Tikslų skyriuje išvardinami visi tikslai, kurių turi siekti pareigūnas, ir nurodomos visos jo veiklos organizacijoje kryptys.

Pareigūnų tikslai ir veiklos kryptys turi išplaukti iš visos organizacijos ir to jos padalinio, kuriam priklauso pareigūnas, tikslų ir veiklos krypčių ir savo visumoje (turint omenyje visus to padalinio bei visos organizacijos pareigūnus) turi užtikrinti padalinio bei visos organizacijos tikslų pasiekimą ir visos veiklos sėkmingą vykdymą.

Nustatant organizacijos, jos padalinių ir atskirų pareigūnų tikslus, reikia atsižvelgti į tai, kad tikslai gali būti dviejų tipų:

- a) tikslai, užtikrinantys sėkmingą (efektyvų) ir stabilų organizacijos funkcionavimą dabar;
- b) tikslai, nukreipti į ateitį, į organizacijos vystymąsi besikeičiančiose aplinkybėse, jos sudėties, jos struktūros ir jos veiklos tobulinimą, pareigūno kvalifikacijos kėlimą.

Dauguma žemutinio lygio pareigūnų tikslų turi priklausyti tipui „a“, o tipui „b“ gali priklausyti tik nuosavos veiklos (funkcijų vykdymo technologijos) tobulinimo bei savo kvalifikacijos kėlimo tikslai.

Kuo aukštesniam organizacijos valdymo ešelonui priklauso pareigūnas, tuo didesnę jo tikslų dalį turi sudaryti „b“ tipo tikslai. Aukštesniųjų ešelonų pareigūnai, sudarydami savo tikslų ir funkcijų sąrašus, privalo vadovautis principu: **jei kokį nors tikslą gali pasiekti ir kokią nors funkciją gali įvykdyti (kokį nors darbą gali padaryti) mano pavaldiniai be manęs, tai tikslinga tą tikslą ir tą funkciją palikti pavaldiniams, o pačiam imtis sudėtingesnių tikslų siekimo ir sudėtingesnių funkcijų vykdymo.**

Gana dažnai jauni nepatyrę vadovai daro klaidą, bandydami beveik viską aprėpti vieni patys ir per mažai funkcijų, teisių ir atsakomybės deleguodami savo pavaldiniams, palikdami jiems per mažai savarankiškumo. Reikia stengtis nepadaryti tos nepatyrusių vadovų klaidos, nustatant pareigybių tikslus, veiklos kryptis ir funkcijas. Kuo daugiau funkcijų, teisių ir atsakomybės bus patikėta organizacijos ir jos valdymo sistemos žemesniųjų ešelonų atstovams, tuo aktyvesnė, atsakingesnė ir efektyvesnė bus tų ešelonų veikla.

3.3. Funkcijų skyriaus turinys

Šiame skyriuje išvardinamos ir aprašomos visos funkcijos, išplaukiančios iš pareigybės vietos ir vaidmens organizacijoje, jos tikslų ir veiklos krypčių, t. y. atsakoma į klausimą, **ką pareigūnas privalo daryti.**

Pareigybės funkcijų sąrašas turi užtikrinti visų pareigūno tikslų, išvardintų antrajame PP skyriuje, pasiekimą, ir jame neturėtų būti funkcijų, nereikalingų nė vienam tikslų, išvardintų skyrelyje „Tikslai“. Šio reikalavimo netenkinimas rodo, jog tas pareigybės pasas buvo sudarytas dar nepakankamai atsakingai, nepakankamai sistemiškai ir jog tuos sąrašus dar reikia derinti.

Priklausomai nuo tikslų, kurių siekiama vykdant tą ar kitą funkciją, ir nuo funkcijos vykdymo procesą sudarančių procedūrų apibrėžtumo lygio pareigūnų funkcijos gali būti skirstomos į reglamentuotas („rutinines“) ir nereglamentuotas („kūrybines“).

Reglamentuotos funkcijos – tai tokios funkcijos, kurios vykdomos siekiant „a“ tipo tikslų ir kurių vykdymo procesai susideda iš taip vadinamų „rutininių“ procedūrų, t. y. procedūrų, turinčių

nusistovėjusius (ir tapusius standartiniais ar beveik standartiniais) algoritmus, kuriuos galima pakankamai pilnai ir vienareikšmiškai aprašyti.

Neregamentuotos funkcijos – tai tokios funkcijos, kurios vykdomos siekiant „b“ tipo tikslų ir kurių vykdymo procesų sudėtis nustatoma kiekvienam planuojamam periodui „individualiai“, sudarant „b“ tipo tikslų pasiekimo planus.

Reglamentuotų funkcijų vykdymo algoritmai turi būti aprašyti specialiaame PP „Priedų“ skyriuje, o PP funkcijų skyriuje (3–jame PP skyriuje), išvardinant funkcijas, turi būti duotos tik nuorodos į tuos „Priedus“, kuriuose pateikiama reglamentuotos funkcijos technologinė ir planinė normatyvinė organizacinė dokumentacija (TNOD ir PNOD), nurodanti, **kaip ir kada pareigūnas privalo tą funkciją vykdyti.**

TNOD nevaržo pareigūno kūrybinės iniciatyvos ir nusako tik **žemutinę reglamentuotų funkcijų vykdymo kokybės ribą**: pareigūnas privalo vykdyti savo funkcijas ne blogiau negu nurodyta technologinėje NOD, tačiau jis gali siūlyti tos TNOD patobulinimus. Tokiu būdu **TNOD tampa veiklos tobulinimo ir patirties kaupimo instrumentu**. Todėl TNOD turėjimas labai praverčia, keičiantis pareigūnų kartoms ir apmokant naujai priimtus nepatyrusius pareigūnus bei priimant į darbą naujus pareigūnus.

Neregamentuotoms funkcijoms TNOD nesudarinėjama. **Tokių funkcijų vykdymo procesai aprašomi tik tų funkcijų tikslų pasiekimo planų lygyje.** Tokie planai gaunami dekomponuojant pagrindinius „b“ tipo tikslus į smulkesnius potikslis, įvertinant tų potikslų pasiekimo sąnaudas ir paprocesių trukmę bei nustatant potikslų pasiekimo direktyvinius terminus.

Neregamentuotų funkcijų vykdymo planai, numatantys, kokie darbai bus atlikti einamaisiais metais, einamajame ketvirtyje, einamajame mėnesyje, einamąją savaitę bei ateinančią dieną, taip pat turi būti pateikti PP „Priedų“ skyriuje (popieriuje arba kompiuteryje, nes pats PP gali būti įrašytas į kompiuterį ir saugomas jame), o funkcijų skyriuje pakanka tik funkcijų išvardijimo ir nuorodų į atitinkamus priedus.

Paskirstant funkcijas pareigūnams ir aprašant kiekvienos pareigybės funkcijas bei sudarant reglamentuotų funkcijų TNOD ir neregamentuotų funkcijų vykdymo planus, **būtina laikytis reikalavimų, išdėstytų šiuose organizaciniuose valdymo sistemų projektavimo principuose:**

- 1) „Valdymo funkcijų, valdymo personalo teisių ir atsakomybės apibrėžtumo (vienareikšmiškumo) principas“;
- 2) „Valdymo funkcijų paskirstymo vienaadresiškumo principas“;
- 3) „Funkcinės atsiskaitomybės ir personalinio pavaldumo vienaadresiškumo principas“;
- 4) „Valdymo sistemos mazgų galingumo ir jų vykdomų funkcijų apimtys (darbo imlumo) atitikimo principas“;
- 5) „Valdymo funkcijų grupavimo ir jų priskyrimo valdymo sistemos mazgams principas“;
- 6) „Valdymo funkcijų įvykdymo kriterijų ir to įvykdymo kokybės rodiklių reglamentavimo principas“;
- 7) „Valdymo funkcijų (pareigų), teisių bei atsakomybės atitikimo principas“;
- 8) „Rutininių valdymo darbų technologijos inžinerinio projektavimo, reglamentavimo ir dokumentavimo principas“;
- 9) „Rutininių valdymo darbų automatizavimo principas“;
- 10) „Atsakomybės formų ir atsakomybės dydžio intervalų apriorinio reglamentavimo ir dokumentinio fiksavimo principas“;
- 11) „Valdymo darbų agregavimo į kompleksus principas“;
- 12) „Kūrybinių darbų technologijos tobulinimo principas“.*

3.4. Informacijos skyriaus turinys

Šiame skyriuje aprašoma:

- 1) **kokia informacija reikalinga** išvardintų trečiajame PP skyriuje funkcijų vykdymui,
- 2) **kokia informacija** tų vykdymo metu **atsiranda**,
- 3) **iš kur ir kokiam režime** (reglamentuotame, signaliniame ar užklauso režime) gaunama funkcijų vykdymui reikalinga informacija,
- 4) **kam, kada ir kokiam režime pareigūnas privalo perduoti informaciją**, už kurios savalaikį parengimą ir jos kokybę atsako,

* – Visi šie ir eilė kitų principų aprašyti knygelėje: A. Šukys. Pirmosios kartos ĮAVS neefektyvumo priežastys. Antrosios kartos ĮAVS projektavimo principai. Šioje knygelėje anksčiau išvardintieji principai pažymėti numeriais: 3.4.6.–3.4.9, 3.4.11–3.4.18. Visų šių principų formuluotes ir iš jų išplaukiančias rekomendacijas galima rasti ir autoriaus tinklalapyje adresu <http://www.mif.vu.lt/~sukys>.

5) **kokią informaciją kaupia bei susikuria pareigūnas pats sau**, norėdamas padidinti savo darbo efektyvumą bei pagerinti darbo rezultatų kokybę, t. y., kokius žurnalus, kartotekas, tvarkaraščius, bloknutus ar kitus panašius dokumentus pildo pareigūnas ir susikuria nuosavus duomenų ar žinių* bankus savo paties reikmėms.

Informacijos apdorojimo algoritmai bei reikalingos **pirminės informacijos surinkimo technologija** turi būti aprašyti jau minėtoje funkcijų vykdymo technologinėje NOD, pridedamoje septintame PP skyriuje (kaip PP priedai), todėl šiame – ketvirtame – PP skyriuje tie algoritmai ir technologijos neaprašinėjami, o apsiribojama tik nuorodomis į atitinkamus jau minėtus PP priedus.

Projektuojant pareigūnų informacinio aprūpinimo sistemą, **rekomenduojama vadovautis atitinkamais JAVS antrosios kartos projektavimo principais.****

PP prieduose turi būti pateikti rekomenduojamų dokumentų bei kitų informacinių pranešimų formų ir jų pildymo pavyzdžiai ir turi būti aprašytos tų pranešimų (dokumentų) parengimo ir panaudojimo technologijos, o šiame–ketvirtame–PP skyriuje, aprašant informacinius procesus, kuriuose dalyvauja pareigūnas, vykdydamas savo funkcijas, turi būti apsiribojama tik nuorodomis į atitinkamus PP priedus.

Reikia stengtis visur, **kur galima ir apsimoka, informacinius procesus automatizuoti**, ir į tai būtina atsižvelgti, sudarant PP projektus.

3.5. Teisių skyriaus turinys

Šiame skyriuje išvardinamos ir aprašomos visos tos teisės, kurios reikalingos pareigybės funkcijų vykdymui, o taip pat iš pareigybės statuso išplaukiančios pareigūno socialinės teisės.

Projektuojant šį PP skyrių, būtina vadovautis šiais (jau minėtais) principais:

1) „Valdymo funkcijų, valdymo personalo teisių ir atsakomybės apibrėžtumo (vienareikšmiškumo) principas“;

2) „Valdymo funkcijų (pareigų) ir pareigūnų teisių bei atsakomybės atitikimo principas“.

Pagrindiniai reikalavimai, kuriuos turi tenkinti šis PP skyrius, yra tokie:

1) **teisės turi būti aprašytos tikrai vienareikšmiškai**, kad negalėtų kilti ginčų dėl nevienodo jų supratimo;

2) **kiekvienam pareigūnui turi būti duota tiek teisių, jog jų pilnai pakaktų visų pareigūno funkcijų vykdymui, tačiau tų teisių neturi būti per daug**, t. y. neturi būti sudaryta galimybė pareigūnui piktnaudžiauti savo teisėmis.

Tikslinga, kad, sudarant šį PP skyrių, būtų konsultuojamasi su juristu.

3.6. Atsakomybės skyriaus turinys

Šio PP skyriaus tikslas – tiksliai aprašyti, už ką (už kokius objektus ar darbus), kokia forma ir kokiose ribose asmuo, užimantis šią pareigybę, atsako ir kam už tai atsiskaito.

Labai dažnai šis PP skyrius turi trūkumą, pasireiškiantį tuo, kad šiame skyriuje **konkrečiai nenurodomos atsakomybės formos ir atsakomybės dydžio intervalai**, o apsiribojama tik atsakomybės objektų bei darbų nurodymu.

Todėl, sudarant šį PP skyrių, **būtina vadovautis jau minėtu „Atsakomybės formų ir atsakomybės dydžio intervalų apriorinio reglamentavimo ir dokumentinio fiksavimo principu“**.

Žinoma, šio principo reikalavimų tenkinimas reikalauja daug kruopštaus darbo ir net kelių šio skyriaus projektavimo iteracijų, kol galų gale surandami racionalūs atsakomybės dydžio intervalai, tačiau **tas didelis darbas ilgainiui šimteriopai atsiperka**, nes jis, iš anksto ir apgalvotai reglamentuodamas atsakomybę, pastoviai duoda didelę naudą ir pareigūnui, ir jo vadovui, ir visai organizacijai. Jei minėtų reikalavimų nesilaikoma, tai šis PP skyrius tampa beveik neinformatyvus ir beveik netenka prasmės, nes atsakomybė lieka tik žodinė (ir, galbūt, moralinė), be to ir ta pati beveik neapibrėžta. O tai reiškia, jog lieka beveik **nepanaudota labai svarbi darbo efektyvumo skatinimo ir jo kokybės gerinimo priemonė, neužkertamas kelias galimiems piktnaudžiavimams ir iš pareigūno, ir jo vadovų pusės**.

3.7. PP priedų turinys

PP priedus sudaro:

7.1) pareigūno vykdomų reglamentuotų funkcijų MTK ir OK bei OI;

7.2) pareigūno nereglamentuotų funkcijų vykdymo planai;

7.3) pareigūno darbo grafikas – tvarkaraštis (Time Manager);

* – Apie duomenų ir žinių bankus žiūr. 1.16.33. šios mokymo priemonės skyrelį.

** – Žiūr. jau minėtos A. Šukio knygelės 3.5. skyriaus principus, pažymėtus numeriais 3.5.1–3.5.16.

7.4) pareigūno gaunamų, papildomų bei išduodamų dokumentų (spausdinamų, rašytinių, gaunamų displejų ekranuose) formų ir jų pildymo pavyzdžiai bei aprašymai;

7.5) darbo automatizuotoje darbo vietoje (ADV) scenarijai ir instrukcijos (jei pareigūnas turi ADV ar ruošiasi ją turėti);

7.6) PP papildymų bei pakeitimų lentelė;

7.7) įvairios pastabos, santrumpų paaiškinimai ir pan.

4. PP priedų parengimo instrukcija

MTK – maršrutinės technologinės kortelės – sudaromos sudėtingoms reglamentuotoms funkcijoms, t. y. funkcijoms, susidedančioms iš kelių reglamentuotų elementarių funkcijų (operacijų), vykdomų skirtingų vykdytojų skirtingose darbo vietose skirtingu darbo laiku. MTK todėl ir vadinamas MTK, kad jos aprašo **sudėtingos funkcijos vykdymo maršrutą**.

OK – operacinės kortelės – sudaromos reglamentuotoms elementarioms funkcijoms, kurias vykdo vienas (paprastas ar kompleksinis) vykdytojas vienoje darbo vietoje kaip nepertraukiamą kelių standartinių veiksmų seką ar vieną nepertraukiamą veiksmą. **OK aprašo reglamentuotos operacijos vykdymo algoritmą**, t. y. aprašo, **kaip turėtų būti vykdoma ta operacija**, ir atsako į klausimus: a) iš kokių standartinių veiksmų ta operacija susideda; b) kokia vidutinė kiekvieno veiksmo ir visos operacijos trukmė; c) kokia informacija ir kokios priemonės reikalingos operacijos vykdymui; d) iš kur ta informacija gaunama; e) kokia informacija atsiranda operacijos vykdymo metu; f) kur ji panaudojama bei kam perduodama.

OK sudaromos tais atvejais, kai atsakymus į aukščiau išvardytus klausimus ir visą operacijos vykdymo algoritmo aprašymą įmanoma ir patogu pateikti **standartinėje formoje** – standartinę struktūrą turinčioje lentelėje (žiūr. 1 pav.).

OPERACIJOS PAVADINIMAS _____							
OK KODAS _____							
Eil. Nr.	Veiksmų pavadinimai ir aprašymai (algoritmai)	Reikalingos priemonės	Reikalinga informacija	Iš kur ji ateina	Gaminama informacija bei kita produkcija	Kam ji perduodama	Vidutinė veiksmo trukmė
1.							
2.							
...							
n							
Visos operacijos vidutinė trukmė							

1 pav.

Tais atvejais, kai reglamentuotos operacijos vykdymo algoritmo aprašymą pateikti standartinė forma neįmanoma arba netikslinga (pavyzdžiui, kai tame algoritme yra ne tik vykdymo, bet ir loginiai blokai, ir algoritmo blokinė schema „šakojasi“), tas aprašymas pateikiamas laisva forma (laisvu tekstu, blokinėmis schemomis, formulėmis, piešiniais ir pan.) ir vadinamas **OI – operacine instrukcija**. **OI – tai OK, pateikta ne standartinė, o laisva forma**.

MTK aprašo sudėtingų funkcijų vykdymo procesą operacijų, aprašytų OK arba OI, lygyje ir atsako į klausimus: a) iš kokių operacijų susideda sudėtinga funkcija; b) kokia eilės tvarka, kas ir kur vykdo tas operacijas; c) kokia vidutinė kiekvienos operacijos trukmė ir koks bendras visos sudėtingos funkcijos vidutinis darbo imlumas. Sudarant MTK, galima naudotis standartinė forma, parodyta 2 pav.

FUNKCIJOS PAVADINIMAS _____					
MTK KODAS _____					
Eil. Nr.	Operacijos pavadinimas	OK arba OI kodas	Padalinys, kuriame vykdoma operacija	Operacijos vykdytojas (pareigybė)	Vidutinė operacijos trukmė
1.					
2.					
...					
n					
Vidutinis pilnas sudėtingos funkcijos darbo imlumas					

2 pav.

Į PP „Priedą“ patalpinamos tik tokių sudėtingų reglamentuotų funkcijų MTK, kurių sudėtyje yra nors viena (gali būti ir daugiau) operacija, vykdoma to pareigūno, kurio pareigybei sudaromas PP. Visų tokių operacijų OK arba OI taip pat patalpinamos į PP „Priedą“.

Nereglamentuotoms funkcijoms, kaip jau buvo minėta, MTK, OK bei OI nesudarinėjamos, kadangi tokių funkcijų turinys nėra pastovus.

Tokioms funkcijoms periodiškai sudarinėjami einamųjų darbų, sudarančių einamuoju momentu tų funkcijų turinį, **vykdymo planai**: metiniai (ketvirčiais), einamojo ketvirčio (mėnesiais), einamojo mėnesio (savaitėmis), einamosios savaitės (dienomis), ateinančios darbo dienos (valandomis ir minutėmis). **Metiniai, ketvirtiniai ir mėnesiniai nereglamentuotų funkcijų vykdymo planai derinami su pareigūno tiesioginiu vadovu ir po jo patvirtinimo tampa PP priedais**, kurie atitinkamais laiko tarpais keičiami naujais, senuosius perduodant į archyvą. Šiais planais ir reglamentuotų funkcijų aprašymais vadovaudamasis **pareigūnas susidaro nuosavam naudojimui savaitinius ir darbo dienos planus, o taip pat ir grafikus – tvarkaraščius (Time Manager)**. Į savaitinius ir darbo dienos grafikus – tvarkaraščius įtraukiami ir reglamentuoti, ir nereglamentuoti darbai. Naudojantis statistiniais ir ekspertiniais metodais įvertinamos vidutinės laiko sąnaudos atsitiktiniams darbams, nenumatytiems reglamente bei planuose ir, sudarant tvarkaraštį, paliekami atitinkami laiko rezervai tokiems atsitiktiniams darbams. Tai padaryti reikalinga, kad gautume **atsparų įvairiems atsitiktinumams tvarkaraštį**, kurį pažeisti būtų galima tik nelaimingų atsitikimų atveju. Tvarkaraščio atsparumo didinimui gali pasitarnauti ir racionalus reglamentuotų ir nereglamentuotų darbų ir darbo laiko rezervų išdėstymas laike. Jei kurią dieną nenumatytų darbų neatsiranda, tai laisvi laiko rezervai panaudojami nereglamentuotų darbų, numatytų einamosios savaitės bei einamojo mėnesio planuose, vykdymui. **Grafikų – tvarkaraščių sudarymas pradedamas nuo viršaus**: pradžioje sudaromi organizacijos ir jos vadovų darbo grafikai – tvarkaraščiai, po to – organizacijos pirmojo lygio padalinių ir jų vadovų grafikai – tvarkaraščiai ir t. t. iki eilinių administracijos darbuotojų darbo grafikų – tvarkaraščių. Tokiu būdu gaunama **suderinta visos organizacijos darbuotojų tvarkaraščių sistema**, leidžianti žymiai padidinti darbo laiko panaudojimo efektyvumą ir darbo organizuotumą.

Pareigūno darbo planus ir jo grafiką – tvarkaraštį galima sujungti į vieną kintamo turinio dokumentą, kurio vienos iš galimų formų pavyzdys parodytas 3 pav.

PAREIGŪNO _____ DARBO TVARKARAŠTIS IR DARBO PLANAI								
Darbo dienos laikas (val., min)	Darbų pavadinimai ir nereglamentuotų darbų turinys (kodai)			Savaitiniai planai	Mėnesiniai planai	Ketvirčių planai	Metiniai darbai	Epizodiniai darbai (pagal būtinumą)
	Pirmadienis	...	Penktadienis					
9:00–9:07		...						
9:07–9:13		...						

3 pav.

Jei pareigūnas turi personalinę ADV, tai savo darbo grafiką – tvarkaraštį (Time Manager) ir darbo planus jis gali laikyti kompiuterio atmintyje ir naudotis jais **reglamentiniame** (išvedant į kompiuterio ekraną arba spausdinant spausdintuvu kiekvienos darbo dienos pradžioje ir pabaigoje), **užklaušų** (pavyzdžiui, norėdamas peržiūrėti, kur galėtų įterpti atsitiktinai atsiradusį epizodinį darbą) ir **signaliniame** (kai, pavyzdžiui, kompiuteris signalizuoja darbuotojui apie tai, į ką jis privalėtų atkreipti dėmesį) **režimuose**.

Tais atvejais, kai pareigūnas neturi personalinės ADV, pareigūno darbo grafikas – tvarkaraštis ir darbo planai rašomi specialiuose blankuose („popierinis „Time Manager“ variantas) ar šiaip popieriuje ir **pridedami prie PP kaip periodiškai keičiamas jo priedas**.

Sudarant pareigūno technologinę ir planinę NOD, rekomenduotina vadovautis jau minėtąją A.Šukio knygele [15] ir joje išdėstytais principais bei technologinės ir planinės NOD pavyzdžiais, pateiktais knygoje [17], o taip pat čia pateiktame PP pavyzdyje (257÷270 p.p.).

Funkcijų vykdymo technologijos aprašymai turi būti **pakankamai pilni ir detalūs, kad programuotojai, naudodamiesi net vien tik jais, sugebėtų kurti algoritmus ir programas**, reikalingas tų funkcijų automatizavimui, o naujai priimti į tas pareigas, kurioms skirti PP, darbuotojai, pastudijavę PP tekstą, galėtų pradėti iškart teisingai (nors pradžioje galbūt ir lėčiau negu reikėtų) vykdyti savo funkcijas.

Pareigūnui, **planuojant savo darbą**, tikslinga einamųjų metų planą sudaryti ketvirčiais, artimiausiam ketvirčiui – mėnesiais, artimiausiam mėnesiui – savaitėmis, artimiausiai savaitei – dienomis, o artimiausiai dienai sudaryti savo darbo grafiką jau valandomis ir minutėmis, **išskiriant griežtai reglamentuotą darbo laiką reglamentuotiems darbams ir tam tikrus laiko tarpus tarp**

reglamentuotų darbų – nereglamentuotiems ir atsitiktiniams darbams, kurių ir kurių trukmių iš anksto numatyti nebuvo galima, tačiau statistiškai įvertinti visiems atsitiktiniams darbams reikalingo laiko vidurkį vis dėlto įmanoma ir todėl įmanoma apytikriai prognozuoti būsimo darbo trukmę.

Jei AVS ar AIS projekte tai pareigybei numatoma personalinė ar profesionalinė ADV, tai PP priede 7.3. reikia aprašyti, **kaip ta ADV bus naudojama**. Ypatingai detalai reikia **aprašyti darbą užklausų režime**, išvardinant galimus užklausimus ir aprašant jų tenkinimo scenarijus, kad projektuotojai, žinodami apie tai, **iš anksto paruoštą atitinkamą programinę įrangą ir informacinį banką**.

Žinoma, reikia taip pat **iš anksto pranešti projektuotojams ir programuotojams apie tai, kokią informaciją pareigūnas pageidautų gauti signaliniame režime ir kokie signalinių rodiklių nuokrypiai nuo jų normatyvinių reikšmių turi inicijuoti signalinės informacijos atsiradimą**.

Prieduose galima pateikti ir kai kurių PP pagrindinio teksto vietų papildymus, paaiškinimus, patikslinimus, kai kurias išimtis iš veikiančių taisyklių ir pan., kas šiaip galėtų perkrauti pagrindinį PP tekstą. Pagrindiniame PP tekste, naudojantis priedais, tuomet apsiribojama tik nuorodomis į tam tikrus PP priedus, kurių pavadinimų sąrašas ir numeriai bei patys priedai turi būti pateikti septintajame PP skyriuje.

Kadangi, keičiantis sąlygoms, gali keistis pareigūnų funkcijos, jų vykdymo technologija ir t. t., todėl šiame PP skyriuje pridedama **ir PP pakeitimų bei papildymų kortelė**.

Keičiant PP, atitinkamoje PP vietoje įrašomas specialus pakeitimo ženklas, rodantis, jog ši PP vieta jau pakeista, ir nuoroda į PP pakeitimų kortelę, kurioje galima rasti naują tos PP vietos tekstą ir datą, nuo kurios tas pakeitimas įsigalioja.

Kai PP pakeitimų kortelėje susirenka pakankamai daug pakeitimų, PP tekstas perrašomas iš naujo. Taip atsiranda antroji, trečioji ir t. t., **PP redakcijos**.

Ilgainiui, kai nusistovi organizacijos struktūra ir joje vykdomų darbų technologija, PP pakeitimų skaičius palaipsniui mažėja ir naujos PP redakcijos tampa gana retu reiškiniu. Tačiau tai nereiškia, jog ilgainiui PP pradeda visai nebesikeisti. Jei taip įvyksta, reikia specialiai paanalizuoti, ar organizacija ir jos struktūra nesustabarėjo, ar joje neprasidėjo stagnacija. Nors, žinoma, PP stabilumas gali reikšti ir tai, kad organizacijos struktūra ir vykdomų darbų technologijos pasiekė gana aukštą tobulumo lygį, kuris organizaciją šiuo metu visiškai tenkina.

5. PP sudarymo, tvirtinimo ir keitimo tvarka

PP sudarymo procese galima išskirti **keturis etapus**.

Pirmajame etape pareigūno tiesioginis vadovas praneša į atitinkamas pareigas paskirtam pareigūnui apie jo pareigybės vietą ir vaidmenį organizacijoje, nurodo pagrindinius pareigūno veiklos tikslus bei kryptis ir iš to išplaukiančias pagrindines pareigūno funkcijas, apibrėžia pareigūno teises bei atsakomybę ir duoda užduotį, gerai susipažinus su šiai pareigybei būdingos veiklos specifika, paruošti pareigybės paso projektą.

Labai pageidautina, kad **pareigūno tiesioginis vadovas**, duodamas pareigūnui šią užduotį, pateiktų pareigūnui savo PP kaip pavyzdį ir kaip orientyrą, kuris padėtų pareigūnui geriau matyti savo vietą organizacijoje ir sudaryti kokybišką PP. Tai reiškia, jog **tikslinga struktūrinės NOD** (organizacijos ir jos padalinių nuostatų, pareigybių pasų) sudarymą **pradėti vykdyti „nuo viršaus“**, t. y. nuo organizacijos vadovų. Būtų gerai, kad pareigūnas gautų ir **to padalinio, kuriame jis dirba, nuostatus bei visos organizacijos įstatus ir struktūrinę schemą**. Tai irgi labai padėtų pareigūnui savo veiklą ir funkcijas geriau įkomponuoti į savo padalinio ir visos organizacijos veiklą.

Antrajame etape pareigūnas, vadovaudamasis savo tiesioginio vadovo nurodymais, savo darbo patirtimi bei savo vaidmens organizacijoje supratimu, o taip pat ir šiais metodiniais nurodymais, sudaro savo PP projektą, aptaria jį su savo kolegomis padalinyje bei organizacijoje ir pateikia savo tiesioginiam vadovui koregavimui ir tvirtinimui.

Trečiajame etape pareigūno tiesioginis vadovas analizuoja pateiktą projektą, aptaria jį su PP projektą pateikusių pareigūnų ir jo kolegomis, kuriuos tas projektas liečia, išsiaiškina, ar visi to projekto pasiūlymai yra teisingi, racionalūs ir realizuojami bei realizuoti praktikoje, o po to, priklausomai nuo analizės rezultatų, arba tvirtina tą projektą arba grąžina jį pareigūnui su reikalavimais ir konkrečiais nurodymais, ką reikėtų pakoreguoti ar iš naujo parašyti.

Po korekcijos projektas vėl perduodamas pareigūno tiesioginiam vadovui, kuris, išanalizavęs pataisytą projektą ir jį aptaręs, **arba tą projektą tvirtina, arba sprendžia klausimą apie pareigūno atitikimą atitinkamoms pareigoms**.

Kartais, kaip išimtis, gali būti leidžiama ir antroji PP projekto korekcija ir tik po to seka projekto tvirtinimas arba pareigūno atleidimas iš užimamų pareigų (tiksliau, jo nepriėmimas į tas pareigas).

Jei pareigūnas mano, kad jo PP projektas nepriimamas ir nepatvirtinamas neteisingai dėl tendencingos ir neteisingos jo tiesioginio vadovo nuomonės apie pareigūną, jis turi teisę kreiptis į aukštesnę instanciją, kuri privalo objektyviai išspręsti iškilusį ginčą.

Ketvirtasis etapas – tai PP įdiegimo, jo funkcionavimo ir tobulinimo etapas, kada kaupiama patirtis ir PP pakeitimai, kurie registruojami pakeitimų lentelėje. Patys **pakeitimai įsigalioja tik pareigūno tiesioginiam vadovui leidus, o pakeitimų iniciatoriumi gali būti ir pats pareigūnas, ir pareigūno vadovas, ir pareigūno kolegos**. Kitaip tariant, PP pakeitimo idėjas gali siūlyti ir pats pareigūnas, ir pareigūno vadovas, ir pareigūno kolegos, net ir pareigūno pavaldiniai, tačiau jų įgyvendinimui reikalingas pareigūno vadovo ir paties pareigūno sutikimas, jų **konsensusas**.

Visi tokie pasiūlymai apsvarstomi ir arba priimami, arba argumentuotai atmetami, įrodant tokių pakeitimų netikslumą.

PP sudarymo, tvirtinimo ar keitimo metu, **kilus nesutarimui tarp pareigūno ir jo tiesioginio vadovo, arbitro vaidmenį atlieka pareigūno tiesioginio vadovo vadovas, o kilus konfliktui tarp pareigūno ir jo pavaldinio ar pavaldinių, arbitru būna pareigūno tiesioginis vadovas**.

PP projektavimas ir įdiegimas reikalauja iš darbuotojo ir jo tiesioginio vadovo nemažų laiko sąnaudų. Tačiau tos **sąnaudos keleriopai atsiperka**, nes:

1) PP sudarymas **padedą apibrėžti ir racionaliau paskirstyti funkcijas organizacijoje**, sumažinti „baltų dėmių“ ir pareigūnų funkcijų „persidengimo“ atvejų skaičių ar net visai to išvengti;

2) gerai apgalvotos ir organizacijos kolektyve suderintos skatinimo (premiavimo ir baudimo) sistemos įdiegimas ir palaikymas, reguliariai ją tobulinant, **didina darbuotojų suinteresuotumą savo darbo rezultatais ir to darbo našumą**;

3) dėl pirmame punkte nurodytų priežasčių sumažėja nesusipratimų ir konfliktų tarp darbuotojų skaičius, o dėl antrame punkte nurodytų priežasčių padidėja skatinimo objektyvumas, premijų ir nuobaudų pagrįstumas, o visa tai **gerina psichologinį klimatą organizacijoje**, darbuotojų tarpusavio santykius, o taip pat santykius tarp darbuotojų ir jų vadovų bei darbdavių;

4) pareigūnai, sudarydami savo PP, būna priversti sistemiskai apžvelgti savo darbą ir savo vietą organizacijoje ir gana dažnai **pastebi tai, kas turėtų būti tobulintina**; todėl PP sudarymas ir įdiegimas **stimuliuoja pareigūnų darbo našumo didėjimą ir darbo rezultatų kokybės gerėjimą**;

5) **PP su savo priedais (technologine NOD) tampa darbų vykdymo technologijos tobulinimo, pareigūnų darbo patirties kaupimo ir jos perdavimo kitiems darbuotojams bei kitoms jų kartoms instrumentu**;

6) PP gali būti panaudoti kaip **naujai priimtų pareigūnų apmokymo priemonė**, o taip pat kaip **priemonė, padedanti tiems darbuotojams, kuriems tenka laikinai pavaduoti tą ar kitą pareigūną** (pavyzdžiui, pareigūno ligos atveju ar jam išėjus atostogų, išvykus į komandiruoję ir pan.);

7) PP galima panaudoti kaip **pagalbinę priemonę, parenkant kandidatus į tą ar kitą pareigybę**: pretenduojantiems į tokią pareigybę galima pasiūlyti susipažinti su jos PP, išskiriant 2–3 dienas laiko, ir po to organizuoti pretendentams „kvalifikacinį egzaminą“; egzamino metu **galima nesunkiai patikrinti pretendento kvalifikaciją, jo atidumą, jo kūrybinius sugebėjimus ir kitas svarbias savybes**;

8) toks pareigūnų parinkimo būdas naudingas **ne tik darbdaviui, bet ir samdomam darbuotojui**: psichologiškai **daug lengviau pačioje pradžioje pasitikrinti savo sugebėjimus, negu po to apvilti kitus, nusivilti savimi ir tapti atleistu iš pareigų**;

9) organizacijose, kuriose pareigūnai turi gerai suprojektuotus veikiančius PP ir technologinę NOD, **daug lengviau diegti automatizuotas sistemas (AVS ir AIS)**: informacinės, programinės ir techninės įrangos projektuotojai daug greičiau, pilniau ir tiksliau išsiaiškina juos dominančius klausimus ir sukuria įrangą, pilniau ir tiksliau atitinkančią vartotojų poreikius; **tarp projektuotojų ir vartotojų kyla daug mažiau nesusipratimų ir vienas kito kaltinimų**; automatizuotos sistemos kokybė būna žymiai aukštesnė, o pati ta **sistema sukuriamą ir įdiegiama žymiai greičiau ir už žymiai mažesnę kainą**;

10) PP sudarymas ir tobulinimas gali ir turi būti panaudotas kaip darbuotojų **kvalifikacijos kėlimo ir jų atestavimo priemonė**: jei darbuotojas nesugeba racionaliai suprojektuoti ir aprašyti savo darbo, tai vargu, ar jis sugeba gerai tą darbą vykdyti, nors, žinoma, reikia nepamiršti ir to, kad ne visi darbuotojai, sugebantys gerai parašyti, nori ir sugeba gerai dirbti; gerų PP sudarymas yra būtina, tačiau dar nepakankama gero sudėtingų funkcijų vykdymo sąlyga, nes reikalinga dar ir gera darbo vertinimo ir skatinimo sistema (kurios įdiegimui taip pat reikalingi geri PP) bei pakankamai aukšta pareigūno kvalifikacija ir jo atsakingumas;

11) PP sudarymas ir tobulinimas **padedą sukurti ir įdiegti rutininių darbų darbo imlumo ir kitus organizacinius normatyvus**: pradžioje darbuotojai, rašydami TNOD rutininiams darbams, suskaido juos į elementarias operacijas ir ekspertiniu būdu įvertina tų operacijų įvykdymui reikalingas sąnaudas (tame tarpe – ir darbo laiko sąnaudas); vėliau, statistiškai apdorojus darbuotojų pateiktus

ekspertinius įvertinimus, o kai kuriuos iš jų dar ir patikrinus natūraliais eksperimentais, sudaromi statistiniai darbo sąnaudų normatyvai, kuriais galima po to vadovautis, sudarant ir tobulinant naują TNOD ir naujus PP, planuojant naujų darbų vykdymą, apskaičiuojant jų kainą;

12) Tai, kad pareigūnai nebūna priversti besąlygiškai ir nuolankiai paklusti „iš viršaus nuleistoms“ pareiginėms instrukcijoms, sudarytoms jiems patiems nedalyvaujant, o patys kuria sau PP, kuriais po to vadovaujasi, atlikdami savo pareigas, žymiai padidina pareigūnų savigarbos jausmą, jų atsakingumą, iniciatyvumą ir savarankiškumą, o tai tampa ypač svarbu susidūrus su kokia nors PP nenumatyta situacija, kurių atsiradimo tikimybė visada išlieka.

6. Literatūra

Sudarant PP, tikslinga naudotis šia literatūra:

1. A. Šukys. Pirmosios kartos ĮAVS neefektyvumo priežastys. Antrosios kartos ĮAVS projektavimo ir diegimo principai. Vilnius: VU, 1987.

2. Aunapu F. F., Linkov A. S., Tereščenko V. I., Šukys A. A., Avtomatizirovannyje sistemy upravlenija predpriyatijem i objedinenijem, pod red. d.e.n. V. I. Tereščenko. Kiev: Technika, 1978 (rusų k.)

3. A. V. Kazakov. Metodičeskije ukazaniya po razrabotke dolžnostnyh instrukcij dlja sotrudnikov podrazdelenij predpriyatij. Trudy Altajskogo politehničeskogo instituta, vypusk 19. Barnaul: Altajskoje knižnoje izdatelstvo, 1972 (rusų k.)

1.4.13.2. Pareigybės paso pavyzdys

TURINYS

1. Bendroji dalis.
2. Tikslai.
3. Funkcijos.
4. Informacija.
5. Teisės.
6. Atsakomybė.
7. Papildymai ir pakeitimai.
8. 1 priedas – funkcijų aprašymas.
9. 2 priedas – funkcijų prioritetai.
10. 3 priedas – metinis planas.
11. 4 priedas – procedūrų paaiškinimai.
12. 5 priedas – pareigybių sutrumpinimai.
13. 6 priedas – dokumentų pavyzdžiai.*

PAREIGYBĖS PASAS

1. BENDROJI DALIS

1.1. Skyrius (padalinys) – UAB „DIGRIJA“

1.2. Pilnas pareigybės pavadinimas – ekonomistė – deklaratė (DK2*)

* Visi pareigybių sutrumpinimai pateikiami 5 priede.

1.3. Ši pareigybė pavaldi ir gauna įsakymus bei nurodymus iš DK1

1.4. Papildomus įpareigojimus gali gauti iš:

1.4.1. PV

1.4.2. GD

1.4.3. VF

Šių darbuotojų nurodymai vykdomi, jeigu jie neprieštarauja tiesioginio vadovo nurodymams.

1.5. Ši pareigybė duoda įpareigojimus ir metodinius nurodymus DK3.

1.6. Šios pareigybės vykdytoją pavaduotoja DK3 (funkcijas 3.1., 3.2., 3.3., 3.4., 3.6.)

1.7. Šios pareigybės vykdytojas pavaduotoja DK1 (funkcijas 3.1., 3.2., 3.3., 3.4., 3.5.), DK3 ir, esant būtinybei, PV (funkcijas 3.7., 3.2., 3.11., 3.14.)

1.8. Pareigybės patvirtinimas:

* Dokumentų pavyzdžiai čia nepriedami, nes tų dokumentų gana daug (62) ir kai kurie iš jų užima net po du lapus. Norintieji susipažinti su pilnu PP, turinčiu ir šeštąjį priedą, tai gali padaryti VU MIF Matematinės statistikos katedroje.

	Patvirtinimo pareigose požymiai	Reikalavimai	Faktiškai
1.8.1.	Išsilavinimas	Aukštasis	Aukštasis
1.8.2.	Specialybė	Ekonomistas*	Maisto pramonės inžinierius – ekonomistas
1.8.3.	Minimalus darbo stažas pagal specialybę	2 metai	18 metų
1.8.4.	Rekomendacija	Reikalinga	Buvo reikalinga
1.8.5.	Šeimyninė padėtis	Neturi reikšmės	Ištekėjusi

* Kadangi pagrindinė firmos veiklos kryptis – prekyba maisto produktais, tai privalumas – specialybė susijusi su maisto pramone.

1.9. Teisės atostogauti – 28d.

1.10. Atlyginimas – pagal susitarimą.

1.11. Premijavimas:

	Premijų tipai	Dydis	Gavimo sąlygos
1.11.1.	Už metinius rezultatus	Ne <500 lt	Pasibaigus metams
1.11.2.	Už papildomų užduočių, nesusijusių su tiesioginėmis funkcijomis, atlikimą	10÷100 lt	Atlikus užduotį
1.11.3.	Už KNP kodo patvirtinimą BD, leidžiantį sutaupyti mokant maito, akcizo, PVM mokesčius	5% nuo sutaupytos sumos	Kas mėnesį
1.11.4.	„proginės“	Iki 500 lt	30, 40, 50 ir t. t. Jubiliejų proga
1.11.5.	Įnešti piniginius indėlius ir gauti 2 kartus (ar daugiau) didesnes palūkanas negu banke	Pagal tuo metu nustatytą tvarką	Pagal tuo metu galiojančią tvarką
1.11.6.	Naudotis firmos pašalpomis ir lengvatomis vaikų gimimo, ligos, artimųjų mirties atvejais	Pagal tuo metu nustatytą tvarką	Pagal tuo metu galiojančią tvarką
1.11.7.	Nusipirkti firmos parduodamas prekes urmine kaina	Neribotai	Bet kuriame prekybos skyriuje darbo metu
1.11.8.	Už išdirbtą firmoje laiką: 5 metai 10 metų 15 metų	5 MGL 10 MGL 15 MGL	Sukakus terminui

2. TIKSLAI

2.1. Siekti, kad apiforminant importą ir eksportą nebūtų padaromi nuostoliai firmai.

2.2. Siekti kuo palankesnėmis sąlygomis (vadovaujantis vyriausybės nustatyta tvarka) apiforminti importą ir eksportą.

2.3. Maksimaliai išnaudoti kompiuterį ir kitas darbo našumą didinančias priemones savo funkcijų atlikimui.

2.4. Kelti savo kvalifikaciją, priklausomai nuo funkcijų sudėties. *

* Būdai šiam tikslui pasiekti pateikiami 3 priede (3,4,5 punktai).

3. FUNKCIJOS*

3.1. Importo apiforminimas.

3.2. Eksporto ir išmuitinimo apiforminimas.

3.3. Sertifikatų atrinkimas prekių realizavimo leidimams gauti.

3.4. Prekių likučių muitinės sandelyje kontrolė.

3.5. Permokėtų mokesčių išieškojimas.

3.6. Nutarimų, reguliuojančių importą, eksportą, muitinių darbą, mokesčius ir kt. Lietuvoje, sekimas, analizė, pasiūlymai.

3.7. Baltarusijos, Ukrainos importo mokesčių tarifų paieška bei jų pasikeitimų sekimas, analizė, pasiūlymai.

3.8. Reikalingų duomenų suvedimas į „kainų būrimo“ programą.

3.9. Baltarusijos, Ukrainos mokesčių paskaičiavimo, mokesčių sumokėjimo kontrolė, gautų rezultatų perdavimas reikalingiems asmenims.

3.10. Sutarčių su klientais, esančiais ne Lietuvoje, ruošimas.

3.11. BD ištaisyimas pagal muitinės sprendimą.

3.12. Duoti pasiūlymus (pateikiant prašymus) IKC dėl atskirų funkcijų kompiuterizavimo.

3.13. Mėnesinių ataskaitų apie prekių importą, priskaičiuotus mokesčius, PVM sąskaitų panaudojimą paruošimas ir pateikimas vyr. buhalterei.

* Funkcijų aprašymas pateikiamas 1 priede. Funkcijų prioritetai pateikiami 2 priede.

4. INFORMACIJA

4.1. INFORMACIJA FUNKCIJŲ ATLIKIMUI*.

4.1.1. Funkcijos 3.1. atlikimui reikalinga informacija:

Informacijos turinys	Kas ir kam perduoda	Dokumentas	Režimas
→ Gaunama informacija			
4.1.1.1. Dokumentų paketas: CARNET TIR, CRM sąskaita – faktūra, svorių važtaraštis, kilmės sertifikatas EUR1 arba kilmės sertifikatas „OF ORIGIN“, specifikacija.	DK1	D1 D2 D3 D4 D5 D6 D7	REGL–**
4.1.1.2. Naujų prekių rūšies pavadinimas, kombinuotosios prekių nomenklatūros kodas, muitų, akcizų, PVM tarifai.	„LR MUITŲ TARIFAI“	LEID	UŽKL***
4.1.1.3. Naujų prekių pavadinimas, nomenklatūrinis kodas, įpakavimas, svoriai, kaina, tūris.	TSVRŠ PV	D8 D9	REGL– REGL–
4.1.1.1. Prekių pasiskirstymas.	PR. „DUTY“	D18	REGL–
4.1.1.1.1. Prekių pasiskirstymas pagal rūšis.	DK1	ŽOD	SIGN****
4.1.1.1.1. Pranešimas apie trūkumus.	PR.PAKET.		
4.1.1.1.1. Bendrojo dokumento pildymo instrukcija.	„MUITINĖ“	KOMP	UŽKL
4.1.1.1.1. Vertės deklaracijos pildymo instrukcija.	PR.PAKET. „MUITINĖ“	KOMP	UŽKL REGL–
4.1.1.2. Apiformintų bendrųjų dokumentų rinkiniai: IM7, IM4 (procedūra 4000), ET1, ET3, EK1, EK3.	DK1	D10 D11 D12 D13 D14 D15	
4.1.1.10. Pranešimas apie transporto priemones.	TSV2	ŽOD	UŽKL
4.1.1.11. Garantiniai raštai.	DK1	D16	REGL–
4.1.1.12. Pranešimas apie mokesčių sumokėjimą (mokomųjų pavedimų kopijos).	BUH1 SPI	D17 DISK	REGL– REGL–
4.1.1.13. Programinio paketo „Muitinė“ pakeitimai.			
4.1.1.14. Baltarusijos importo indikatyvinės kainos.	BY DK1	D57	UŽKL
→ Perduodama informacija			
4.1.1.15. Pranešimas apie reikalingų dokumentų nebuvimą, klaidas importo dokumentuose.	TSVRŠ, PV, DK1	ŽOD	SIGN
4.1.1.16. Prekių pasiskirstymas (jeigu yra IM4).	DK3	D9	REGL–
4.1.1.17. Paaiškinamieji raštai (prekių sąrašai pagal sandėliavimo vietą): prekės į MS, prekės į CM.	DK1	D49 D50	REGL–

4.1.1.18. Paruošti bendrieji dokumentai: IM4 (procedūra 4000), IM7, ET1, ET3, EK1, EK3, vertės deklaracija, disketės su BD įrašu.	DK1	D11 D10 D12 D13 D14 D15 D19 DISK	REGL–
4.1.1.19. Papildomi reeksporto dokumentai: PVM sąskaita – faktūra, rusiška sąskaita – faktūra, CMR, TIR CARNET, specifikacija, sutartis su gavėju (kopija), įmonės registracijos pažymėjimas (kopija).	DK1	D56 D20 D21 D22 D23 D51 D52 D25	REGL–
4.1.1.20. Atidėtų mokesčių sąrašas.	S1		REGL+*****

4.1.2. Funkcijos 3.2. atlikimui reikalinga informacija:

→Gaunama informacija			
4.1.2.1. Užsakymai prekių išvežimui: iš muitinės sandėlio, iš centrinio sandėlio.	PV	D26 D27	REGL–
4.1.2.2. Užsakymo pakeitimas.	PV	ŽOD	SIGN
4.1.2.3. Užsakymai turto išvežimui: elektroninės technikos, mašinų baldų ir kt.	IKC	D28	REGL–
4.1.2.4. Pranešimas apie transporto priemones.	OP	ŽOD	REGL–
4.1.2.5. Užsakymo suvestinė.	TSV2	ŽOD	UŽKL
4.1.2.6. Programinis paketas „Muitinė“.	PR. „DUTY“	D30	REGL–
4.1.2.7. Bendrojo dokumento pildymo instrukcija.	SPI	DISK	REGL–
4.1.2.8. Vertės deklaracijos pildymo instrukcija.	PR.PAKET. „MUITINĖ“	KOMP	UŽKL
4.1.2.9. Apiformintų bendrųjų dokumentų rinkiniai: ET1, ET3, EK1, EK3, IM4(procedūra 4071)	PR. PAKET. „MUITINĖ“ DK1	KOMP	UŽKL
4.1.2.10. Pranešimas apie sumokėtus mokesčius (mokomųjų pavedimų kopijos), pavedimų kopijos.	DK1	D12 D13 D14 D15 D29 D17	REGL–
4.1.2.11. Baltarusijos importo indikatyvinės kainos.	BUH1		REGL–
→Perduodama informacija	BY DK1	D57	UŽKL
4.1.2.12. Papildomi reeksporto dokumentai: PVM sąskaita – faktūra, rusiška sąskaita – faktūra, CMR, TIR CARNET, specifikacija, sutartis su gavėju(kopija)	DK1	D56 D20 D21 D22 D23 D51	REGL–
4.1.2.13. Neto svorių nurašymas pagal deklaracijas.	DK1	D31	REGL–
4.1.2.14. Likučiai MS pagal deklaracijas.	DK1	D32	REGL–
4.1.2.15. Prekių pasiskirstymas pagal kilmės šalis.	DK1	D33	REGL–
4.1.2.16. Papildomi išmuitinimo dokumentai:	DK1		

prekių importo sąskaita, transporto priemonių sąrašas, DP sąrašas.		D34 D53	REGL–
4.1.2.17. Paruošti bendrieji dokumentai: IM4 (procedūra 4071), ET1, ET3, EK1, EK3, vertės deklaracija disketės su BD įrašais.	DK1	D29 D12 D13 D14 D15 D19 DISK	REGL–
4.12.18. Pranešimas apie eksportuojamas augalinės kilmės prekes.	PVA	D54	REGL–
4.12.19. Atidėtų mokesčių pagal IM4 sąrašas.	S1	D25	REGL–

4.1.3. Funkcijos 3.3. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija			
4.1.3.1. Prekių paskirstymas.	PV	D9	REGL–
4.1.3.2. Originalūs prekių sertifikatai su pasienio muitinės posto žyme „įvežti leidžiama“ arba „privaloma papildoma kontrolė“.	DK1	D37 D38	REGL–
→ Perduodama informacija			
4.1.3.3. Dokumentai reikalingi prekių realizavimo leidimams gauti: Kokybės sertifikatas, Fitosanitariniai sertifikatai, Kokybės sertifikatai, Sąskaita– faktūra, BD IM7, BD IM4.	PVA	D38 D39 D36 D3 D10 D11	REGL–

4.1.4. Funkcijos 3.4. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija			
4.1.4.1. Muitinės sandėlio prekių likučiai.	II	D40	UŽKL
→ Perduodama informacija			
4.1.4.2. MS likučių nukrypimai.	SV	ŽOD	SIGN
4.1.4.3. MS likučiai prekių apskaitos kortelėse.	AGRO	D41	REGL+
4.1.4.4. Prekių likučiai MS pagal pavadinimus.	AGRO	D42	REGL–

4.1.5. Funkcijos 3.5. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija			
4.1.5.1. Prekių kilmės sertifikatai EUR1, „OF ORIGIN“.	PV	D5 D6	REGL–
4.1.5.2. Pranešimas apie reikalingų mokesčių sumokėjimą.	S1	D17	REGL–
4.1.5.3. Muitinės sprendimas apie mokesčių grąžinimą.	MUIT	D62	REGL–
→ Perduodama informacija			
4.1.5.4. Prašymas su mokesčių perskaičiavimais Šiaulių teritorinei muitinei.	MUIT	D43	REGL–
4.1.5.5. Dokumentų kopijos: BD IM 7, BD IM 4 (procedūra 4000), BD IM 4 (procedūra 4071), vertės deklaracijos, sąskaitos–faktūros, mokomieji pavedimai, CMR, kilmės sertifikatai EUR1, OF ORIGIN.	MUIT	D10 D11 D29 D19 D3 D17 D2 D5,D6	REGL–

4.1.5.6. Prekių judėjimo sertifikatai EUR1	MUIT	D55	REGL–
4.1.5.7. Originalūs kilmės sertifikatai EUR1.	MUIT	D5	REGL–
4.1.5.8. Originalūs kilmės sertifikatai OF ORIGIN.	MUIT	D6	REGL–
4.1.5.9. Muitinės sprendimas apie mokesčių grąžinimą.	VB	D62	REGL–

4.1.6. Funkcijos 3.6. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija 4.1.6.1. Vyriausybės nutarimai, ministerijų įsakymai.	Vyriausybės žinios	LEID	REGL–
→ Perduodama informacija 4.1.6.2. Muitų, akcizų, PVM tarifų pasikeitimai.	GD, PV, TSVRŠ, DK1		
4.1.6.3. Nutarimai susiję su importo, eksporto tvarka, muitinių darbu.	GD, PV, TSVRŠ, DK1	D44	REGL–
		LEID	REGL–

4.1.7. Funkcijos 3.7. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija 4.1.7.1. Naujų prekių rūšių Baltarusijos ir Ukrainos muitų, akcizų, PVM tarifai.	PROGRAMOS „DEKLARANT“	KOMP	UŽKL
4.1.7.2. Baltarusijos importo indikatyvinės kainos.	„BROKER“, BY DK1, UK VADOVAS BY DK1	ŽOD D57	UŽKL UŽKL
→ Perduodama informacija 4.1.7.3. Baltarusijos, Ukrainos muitų, akcizų, PVM tarifų pakeitimai.	GD, TSV1	KOMP, ŽOD	REGL–

4.1.8. Funkcijos 3.8. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija 4.1.8.1. Lietuvos, Baltarusijos, Ukrainos muitų, akcizų, PVM tarifai, prekių KPN kodai	„LR MUITŲ TARIFAI“ PR. PAKETAI „MUITINĖ“, „DEKLARANT“ „BROKER“ BY DK1, UK VADOVAS GD	LEID KOMP ŽOD	UŽKL UŽKL UŽKL
→ Perduodama informacija 4.1.8.2. Informacijos 4.1.8.1. pakeitimai.		KOMP	REGL–

4.1.9. Funkcijos 3.9. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija 4.1.9.1. Išankstinis pranešimas apie atvykstančio į Minską tralo mokesčius su GD atžyma.	BY DK1	D58	REGL–
4.1.9.2. Pranešimas apie faktiškai atvykusio tralo mokesčius	BY DK1	D59	REGL–
4.1.9.3. Mėnesinės ataskaitos apie gautas prekes, sumokėtus muitinės mokesčius.	BY DK1, UK VADOVAS	D46 D47	REGL+
→ Perduodama informacija 4.1.9.4. Pranešimas apie ataskaitų patikrinimo rezultatus.	VF, TSVRŠ	D48 D45	REGL+

4.1.10. Funkcijos 3.11. atlikimui reikalinga informacija:

→ Gaunama informacija 4.1.10.1. Muitinės sprendimas.	MUIT	D24	REGL–
4.1.10.2. Bendrojo dokumento taisymo pažyma.	MUIT	D60	REGL–
4.1.10.3. Prekių klasifikavimo aktas.	MUIT	D61	REGL–
→ Perduodama informacija 4.1.10.4. Naujas ir anuluotas BD.	MUIT	D10, D11	REGL–

* Dokumentų pavyzdžiai pateikti 6 priede.

** „REGL–“, – dokumentas pateikiamas reglamentuota forma, tačiau nebūtinai reglamentuotu laiku.

- *** „UŽKL“ – informacija pateikiama užklausų režime.
**** „SIGN“ – informacija pateikiama signaliniame režime.
***** „REGL+“ – informacija pateikiama ne tik reglamentuota forma, bet ir reglamentuotu laiku

4.2. RESURSAI

- 4.2.1. Kompiuterio komplektas.
- 4.2.2. Kalkuliatorius.
- 4.2.3. Programinė įranga:
 - 4.2.3.1. MUITINĖ3 – BD pildymo programa,
 - 4.2.3.2. DUTY – importo, eksporto programa,
 - 4.2.3.3. WORD 6.0 – redaktorius,
 - 4.2.3.4. EXEL 5.0 – skaičiuoklė,
 - 4.2.3.5. BROKER – Ukrainos muitinės programa,
 - 4.2.3.6. DEKLARANT 4 – Baltarusijos muitinės programa,
 - 4.2.3.7. KAINOS – kainininkas,
 - 4.2.3.8. LIKUČIAI MS – likučių peržiūra,
 - 4.2.3.9. ATSARGOS – atsargų skaičiavimo programa.
- 4.2.4. „Vyriausybės žinios“.
- 4.2.5. Leidinys „LR muitų tarifai“.

4.3. VEDAMI ŽURNALAI, KORTELĖS

- 4.3.1. Garantinių raštų registracijos žurnalas,
- 4.3.2. Sertifikatų kartoteka,
- 4.3.3. Muitinės sandėlio prekių apskaitos kortelės,
- 4.3.4. BD pagal tiekėjus ir gavėjus bylos,
- 4.3.5. Mokesčių registravimo byla,
- 4.3.6. Sutarčių byla,
- 4.3.7. Baltarusijos, Ukrainos ataskaitų bylos,
- 4.3.8. Išsiunčiamų ir gaunamų raštų bylos.

5. TEISĖS

- 5.1. Funkcijų vykdymui suteikiamos teisės:
 - 5.1.1. Savarankiškai parinkti prekėms kombinuotosios prekių nomenklatūros kodą, nustatyti prekių rūšį.
 - 5.1.2. Iškilusius klausimus aiškintis su muitinės departamento, Šiaulių teritorinės muitinės, mokesčių inspekcijos atstovais.
 - 5.1.3. Reikalauti iš asmenų, pateikusių ataskaitas, ištaisyti klaidas, padarytas apskaičiuojant ir sumokant muitinės mokesčius Baltarusijoje ir Ukrainoje.
- 5.2. Teisė gauti atlyginimą.
- 5.3. Kasmet gauti atostogas norimu laiku, jeigu nuo to nenukenčia darbas.
- 5.4. Duoti metodinius nurodymus DK3.
- 5.5. Teisė gauti nedarbingumo pašalpą.

6. ATSAKOMYBĖ

- 6.1. Už numatytų funkcijų nepatenkinamą vykdymą t. y. jeigu dėl aplaidumo, apiforminant importą ir eksportą, padaryti nuostoliai firmai ir nuostolio sumos negalima atsiimti oficialiu būdu, skiriama bauda – iki 50% patvirtinto mėnesinio atlyginimo, tačiau neviršijant nuostolio sumos.
- 6.2. Už importo ir eksporto dokumentų paruošimo nesavalaikiškumą, t. y., jeigu dėl nepateisinamų priežasčių nebuvo laiku paruošti dokumentai ir dėl tos priežasties firma turėjo nuostolių, skiriama bauda – iki 50 Lt, jeigu nuostolio nebuvo – bauda 10 Lt.
- 6.3. Atostogaujant, funkcijų atlikimo kokybė, terminai neturi nukentėti. Priešingu atveju – atšaukimas iš atostogų.

PAREIGYBINĘ INSTRUKCIJĄ
SUDARĖ

PAREIGYBINĘ INSTRUKCIJĄ
PATVIRTINO

7. PAPILDYMAI IR PAKEITIMAI

Eil. Nr.	Punkto nr.	Nauja redakcija	Data	Kas patvirtino pakeitimą

1 PRIEDAS

FUNKCIJŲ APRAŠYMAS

F-JOS NR.	FUNKCIJOS TURINYS	TRUKMĖ
3.1.	Importo apiforminimas.	
3.1.1.	Pagal gautus kilmės sertifikatus nustatoma galima preferencija →3.1.2. →3.1.3. Trūkstant reikalingų sertifikatų (arba jeigu jie netvarkingi) taikyti minimaliems muitų mokesčiams, informuojamas tiekimo skyrius →3.5. Sudaromas trūkstamų sertifikatų sąrašas. Gavus sertifikatą, užrašoma gavimo data.	20 min.
3.1.2.	Padaromas programos DUTY archyvas (DUTY/ARCHYVAS).	5 min.
3.1.3.	Peržiūrimi atvykusių prekių dokumentai (INVOICE arba specifikacija):	10 min.
3.1.3.1.	if – yra naujų rūšių prekių →3.1.4. →3.1.6. →3.1.7. →3.1.8.	
3.1.3.2.	if – yra naujų pavadinimų esamų rūšių prekių, kurios dar nesuvestos į kainininką →3.1.5. →3.1.7. →3.1.8.	
3.1.3.3.	if – naujų prekių nėra →3.1.8.	
3.1.4.	Iš kombinuotosios prekių nomenklatūros sąrašo (knyga „Lietuvos respublikos muitų tarifai“ ¹ ir 4 leidimai) arba programinio paketo „Muitinė“ parenkamas optimaliausias prekių rūšies kodas.	60 min.
3.1.5.	Kainininko atnaujinimas (automatinis) (DUTY/kainininkas/atnaujinimas) ir peržiūra (DUTY/kainininkas/koregavimas)	10 – 30 min.
3.1.6.	Duomenys apie naujas rūšis (pavadinimas, kombinuotosios prekių nomenklatūros kodas, muitų, akcizų, PVM tarifai) suvedami į kompiuterį (DUTY/muitai/Lietuva).	20 min./1 rūšiai
3.1.7.	Duomenys apie naujas prekes (tiekęjas, rūšis, nomenklatūrinis kodas, pavadinimas, pakavimas, svoris, tūris, kaina, KPN kodas) iš prekių kortelių (duoda TSVRS) suvedami į kompiuterį (DUTY/kainininkas/koregavimas).	10 min./1 prekei
3.1.8.	Duomenys apie atvykusias prekes (kiekis, vertė, NETO ir BRUTO svoriai), įvertinant jų paskirstymą (duoda PV), iš originalių dokumentų (INVOICE, PACKING LIST, specifikacija, CMR, sertifikatai, TIR CARNET) suvedami į kompiuterį (DUTY/INVOICE/įvedimas).	20 – 40 min.
3.1.9.	Atspausdinamos prekių apskaitos kortelės (kiekis priklauso nuo prekių rūšių) ir pasiskirstymo suvestinė (spausdinimas automatinis).	10 min.
3.1.10.	Analizuojama pasiskirstymo suvestinė:	10 min.
3.1.10.1.	if – muitinis sandėliavimas (procedūra 7100*) →3.1.11. →3.1.12. arba →3.1.13. (variantą pasako DK1) →3.1.20. →3.1.21.	
3.1.10.2.	if – importas vidaus vartojimui (procedūra 4000*) →3.1.11. →3.1.14. →3.1.25. →3.1.20. →3.1.21. →3.1.22. →3.1.23. →3.1.24.	
3.1.10.3.	if – reeksportas (procedūra 3171*) →3.1.13.→3.1.15.→3.1.16.→3.1.18.→3.1.20. arba →3.1.12.→3.1.15.→3.1.16.→3.1.20. (variantą pasako DK1).	
3.1.10.4.	If – reeksportas K–M/1 (procedūra 3171) →3.1.13. →3.1.17. →3.1.18. →3.1.20. arba →3.1.12. →3.1.17. →3.1.20. (variantą pasako DK1).	
3.1.10.5.	If – muitinis sandėliavimas (procedūra 7100) →3.1.10.1. →3.1.9. ir importas vidaus vartojimui (procedūra 4000) →3.1.10.2. →3.1.19. →3.1.25.	

3.1.11.	Esant trūkumui (pasako DK1), atliekamas trūkumo paskaičiavimas, taisomi duomenys kompiuteryje (DUTY/įvedimas/anuliavimas) suvedant duomenis iš naujo, prekių apskaitos kortelėse (kai procedūra 7100*), paskirstymo suvestinėje. Apie trūkumą informuojamas teikimo skyrius.	30 – 60 min.
3.1.12.	Paskirstymo suvestinė perduodama DK1 muitinio sandėliavimo (kai procedūra 7100*) apiforminimui, jeigu bendrasis dokumentas (IM7) spausdinamas AB „Agrokomplekte“.	10 min.
3.1.13.	Bendrojo dokumento (IM7) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekei) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ/INFO/bd pildymo instrukcija), atspausdinimas, įrašymas į disketę (MUITINĖ/bendrasis dokumentas/eksportavimas).	30 – 50 min.
3.1.14.	Bendrojo dokumento (IM4) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekei) bei vertės deklaracijos (kai vertė >3000Lt) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ/INFO/BD pildymo instrukcija/VD pildymo instrukcija), atspausdinimas, įrašymas į disketę (MUITINĖ/bendrasis dokumentas/eksportavimas).	30 – 60 min.
3.1.15.	Pagal paskirstymo suvestinės duomenis (prekių vertė gali būti perskaičiuota pagal PV nurodymą kainomis > negu FOB) atspausdinama rusiška sąskaita – faktūra (DUTY/išrinkimas/rusiškas važtaraštis arba EXEL) PVM sąskaita – faktūra (EXEL), užpildomas CMR (DUTY/įvedimas/peržiūra/C), TIR CARNET (pildymas rankiniu būdu), parašoma specifikacija (EXEL).	2 –3 val.
3.1.16.	Rusiška sąskaita – faktūra, specifikacija faksu perduodama Minskui ir Odesai. Laukiamas atsakymas tolesniam dokumentų ruošimui arba duomenys taisomi.	30 – 60 min.
3.1.17.	Pagal paskirstymo suvestinės duomenis atspausdinama sąskaita – faktūra (DUTY/išrinkimas/rusiškas važtaraštis), PVM sąskaita – faktūra (EXEL), užpildomas CMR (DUTY/įvedimas/peržiūra/).	40 – 60 min.
3.1.18.	Bendrojo dokumento (EK3 – su TIR CARNET arba ET3 – be TIR CARNET) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekėms) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ3/INFO/BD pildymo instrukcija), atspausdinimas ir įrašymas į disketę (MUITINĖ3/bendrasis dokumentas).	0.5 – 1 val.
3.1.19.	Parašomi ir atspausdinami išmuitinamų ir padedamų į MS prekių sąrašai (paaiškinamieji raštai) (EXEL).	20 – 30 min.
3.1.20.	Reikalingi dokumentai atšviečiami. Paruoštas dokumentų komplektas perduodamas DK1 muitinės procedūrų įforminimui.	20 min.
3.1.21.	Patvirtintų bendrųjų dokumentų (IM7 ir IM4) numeriai ir datos suvedami į kompiuterį (DUTY/INVOICE/deklaracijų numerių įvedimas). IM7 numeris užrašomas ant prekių apskaitos kortelių. Registracijos knygoje užregistruojamas IM4 garantinis raštas. Peržiūrima, ar sugrąžinti visi reikalingi dokumentai, jie sugrupuojami ir susegami.	30 min./1 tralui
3.1.22.	Sudaromas mokesčių sąrašas pagal patvirtintus IM4 bendruosius dokumentus ir pateikiamas sekretorei pavedimų parašymui(kas savaitę).	10 min./1 BD
3.1.23.	Savalaikio mokesčių sumokėjimo kontrolė (turi būti sumokėta per 20 darbo dienų).	20 min./1 MP
3.1.24.	Sumokėjus mokesčius, procedūros užbaigimas atžymimas registracijos knygoje, pavedimo kopija prisegama prie BD.	20 min./1 MP
3.1.25.	Kai prekės atvežamos su kilmės sertifikatu EUR1 ir jos paskirstomos į MS bei CS, prekėms, kurios skirtos vidaus vartojimui, atspausdinamas pakeitimo sertifikatas (DUTY/įvedimas/peržiūra/E).	20 – 30 min./1 EUR1
3.2.	Eksporto ir išmuitinimo apiforminimas.	
3.2.1.	Jeigu eksportuojamos prekės iš muitinės arba centrinio sandėlio →3.2.2. jeigu išsiunčiamos mašinos ar kitas turtas (laikinam naudojimui arba parduodama) →3.2.21. →3.2.22. →3.2.11. →3.2.13. →3.2.18. →3.2.24.	0 min. if 1 sąlyga, 1 val. If 2 sąlyga

3.2.2.	Analizuojamas užsakymas (duoda PV): if – reeksportuotas iš muitinės sandėlio (procedūra 3171)→3.2.3.→3.2.4.→ →3.2.5. →3.2.7. →3.2.8. →3.2.11. →3.2.12. →3.2.14. →3.2.18. arba →3.2.3. →3.2.4. →3.2.5. →3.2.7. →3.2.8. →3.2.11. →3.2.14. →3.2.18. if – išmuitinimas arba importas vidaus vartojimui iš muitinės sandėlio (procedūra 4071*) →3.2.3. →3.2.4. →3.2.5. →3.2.15. →3.2.16. → →3.2.17. →3.2.19. →3.2.18. →3.2.20.	10 min.
3.2.3.	Jeigu užsakymas koreguojamas žodžiu (PV nurodymu), kai daromas papildymas arba neatitinka kiekiai užsakyme su kiekiais programoje DUTY, pataisymai perduodami sandėlio vedėjui.	10 – 30 min.
3.2.4.	Užsakymo duomenys (kiekis, gavėjas, numeris) suvedami į kompiuterį (DUTY/išrinkimas).	10 – 30 min.
3.2.5.	Atspausdinama užsakymo suvestinė, NETO svorių nurašymas pagal deklaracijas, prekių likučiai pagal deklaracijas, užsakymo suvestinė, užsakymo dokumentas (spausdinimas automatinis).	10 min.
3.2.6.	Atspausdinama užsakymo suvestinė, užsakymo dokumentas (spausdinimas automatinis).	5 min.
3.2.7.	Jeigu yra tos pačios rūšies prekių iš skirtingų tiekėjų, išrenkamos prekių rūšys (kiekiai, NETO ir BRUTO svoriai, vertės) pagal atskirus tiekėjus iš užsakymo dokumento; padaromas šių prekių sąrašas.	10 – 30 min.
3.2.8.	Nurašomi NETO svoriai arba kiekiai nuo prekių apskaitos kortelių. Pagal užsakymo suvestinės duomenis (prekių vertė gali būti perskaičiuota pagal PV nurodymą kainomis > negu FOB) atspausdinama rusiška sąskaita – faktūra (DUTY/išrinkimas/rusiškas važtaraštis), PVM sąskaita – faktūra (EXEL), užpildomas CMR (DUTY/INVOICE/peržiūra/C), TIR CARNET (pildymas rankiniu būdu), parašoma specifikacija (EXEL).	3 – 4 val.
3.2.9.	Nurašomi NETO svoriai arba kiekiai nuo prekių apskaitos kortelių, pagal užsakymo suvestinės duomenis atspausdinama rusiška sąskaita – faktūra (DUTY/ išrinkimas/ rusiškas važtaraštis), PVM sąskaita – faktūra (EXEL), užpildomas CMR (DUTY/INVOICE/peržiūra/C).	1 – 2 val.
3.2.10.	Pagal užsakymo suvestinės duomenis (prekių vertė gali būti perskaičiuota PV nurodytomis kainomis) atspausdinama rusiška sąskaita – faktūra (DUTY/išrinkimas/rusiškas važtaraštis), PVM sąskaita – faktūra (EXEL), užpildomas CMR (DUTY/INVOICE/peržiūra/C), TIR CARNET (pildymas rankiniu būdu), parašoma specifikacija (EXEL).	2 – 3 val.
3.2.11.	Patvirtinta rusiška sąskaita – faktūra, specifikacija, priedas prie sutarties (Minskui) faksu perduodami gavėjams (Minskui, Odesai). Laukiamas atsakymas tolesniam dokumentų ruošimui arba duomenys taisomi.	30 – 60 min.
3.2.12.	Bendrojo dokumento (EK3 – su TIR CARNET arba ET3 – be TIR CARNET) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekėms) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ3/INFO/BD pildymo instrukcija), atspausdinimas ir įrašymas į disketę (MUITINĖ3/bendrasis dokumentas/eksportavimas).	40 min. – 1.5 val.
3.2.13.	Bendrojo dokumento (EK1 – su TIR CARNET arba ET1 – be TIR CARNET) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekėms) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ3/INFO /BD pildymo instrukcija), atspausdinimas ir įrašymas į disketę (MUITINĖ3/bendrasis dokumentas/peržiūra).	40 min. – 1.5 val.
3.2.14.	Suruošiami papildomi dokumentai reikalingi muitinės kontrolei (kilmės sertifikatų, kokybės sertifikatų, sutarčių, registracijos pažymėjimo kopijos). Eksporto į Minską ir Odesą atveju reikalingi higienos centro leidimai kavai, riešutams, arbatai, saulėgrąžoms. Informacija apie tai (prekių kiekis, NETO svoris, mašinos numeris, sienos pravažiavimo postas) perduodama PVA.	30 – 60 min.
3.2.15.	Nurašomi NETO svoriai arba kiekiai nuo prekių apskaitos kortelių. Iš užsakymo dokumento išrenkamos prekių rūšys pagal atskirus tiekėjus, pagal kiekvieną IM7 deklaraciją, iš kurios paimamos išmuitinamos prekės. Sudaromas sąrašas, pagal kurį atspausdinamos prekių išmuitinimo sąskaitos–faktūros (EXEL).	30 – 40 min./1 tiekėjui

3.2.16.	Bendrųjų dokumentų (IM4) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekei) bei vertės deklaracijų (kai vertė >3000 Lt) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ3/INFO/BD pildymo instrukcija/VD pildymo instrukcija), atspausdinimas, įrašymas į disketę (MUITINĖ3/bendrasis dokumentas/vertės deklaracija). BD kiekis priklauso nuo tiekėjų skaičiaus.	20 – 30 min./1 tiekėjui
3.2.17.	Suruošiami papildomi dokumentai (kilmės sertifikatai, IM7 kopijos).	1 – 1.5 val.
3.2.18.	Paruoštas dokumentų komplektas perduodamas DK1 muitinės procedūrų įforminimui.	20 min.
3.2.19.	Kai prekės turi kilmės sertifikatą EUR1, atspausdinamas pakeitimo sertifikatas (DUTY/INVOICE/peržiūra/E).	20–30min./1 EUR1
3.2.20.	Pagal patvirtintus bendrojo dokumentus (IM4) sudaromas atidėtų mokesčių sąrašas ir pateikiamas sekretorei pavedimų aprašymui.	30 – 60 min.
3.2.21.	Išsiaiškinami su gavėjais visi klausimai su išsiunčiamo turto dokumentų formavimo formalumais.	1 – 4 val.
3.2.22.	Išsiunčiamoms mašinoms ar kitam turtui parašoma rusiška sąskaita – faktūra, PVM sąskaita – faktūra (laikinam išvežimui – nereikia) specifikacija, priedas prie sutarties (Minskui) (EXEL).	2 val.
3.2.23.	Bendrųjų dokumentų (IM4) su papildomais lapais (esant dviem ir daugiau rūšių prekių) arba be jų (esant vienos rūšies prekei) bei vertės deklaracijų (kai vertė >3000 Lt) surinkimas pagal BD pildymo instrukciją (MUITINĖ3/INFO/BD pildymo instrukcija/VD pildymo instrukcija), atspausdinimas, įrašymas į disketę (MUITINĖ3/bendrasis dokumentas/eksportavimas).	1 – 1.5 val.
3.2.24.	Nepasibaigus metams dėl laikino išvežimo, atliekamas procedūros užbaigimas, t. y. įforminamas importas (3.1.10.2.) arba pratęsiama laikinojo išvežimo procedūra.	1.5 – 2 val.
3.3.	Reikalingų sertifikatų atrinkimas prekių realizavimo leidimams gauti.	10 – 30 min.
3.3.1.	Peržiūrimi gauti su prekių siunta sertifikatai:	
3.2.1.1.	if – yra šampas „Ivežti draudžiama“, sertifikatas pateikiamas PVA.	
3.2.1.2.	If – yra šampas „Privaloma papildoma kontrolė“	
3.2.1.2.1.	– kai prekės atiduodamos muitiniam sandėliavimui, leidimai išimami išmuitinimo metu,	
3.2.1.2.2.	– kai prekės pateikiamos vidaus vartojimui, originalūs kokybės sertifikatai ir patvirtinti BD IM7 bei IM4 pateikiami PVA.	
3.4.	Prekių likučių muitinės sandėlyje kontrolė.	1 – 3 val.
3.4.1.	Prekių likučiai programoje DUTY sutikrinami su kompiuteriniais prekių likučiais „Agrokomplekto“ muitinės sandėlio prekių kortelėse (kas mėnesį). Esant nukrypimams, aiškinamos nukrypimų priežastys.	
3.4.2.	Prekių likučiai prekių apskaitos kortelėse derinami su prekių likučiais „Agrokomplekto“ muitinės sandėlio prekių kortelėse (kas mėnesį). Esant nukrypimams, aiškinamos nukrypimų priežastys.	
3.5.	Permokėtų mokesčių išieškojimas (kas mėnesį).	
3.5.1.	Gavus pavėluotai kilmės sertifikatą (pateikia tiekimo skyrius), pagal kurį galimi mažesni mokesčiai, atliekamas mokesčių perskaičiavimas, rašomas prašymas Šiaulių teritorinei muitinei dėl permokėtų mokesčių grąžinimo.	1 – 2 val.
3.5.2.	Paruošiami reikalingi dokumentai: BD, vertės deklaracijų, INVOICE, pavedimų, CMR, paaiškinamųjų raštų kopijos, originalūs kilmės sertifikatai arba jų kopijos (2 egz.), atspausdinami pakeitimo sertifikatai (DUTY/INVOICE/peržiūra/E).	apie 1 val.
3.5.3.	Pakeitimo sertifikatai patvirtinami teritorinės muitinės sertifikatų skyriuje.	1 – 2 val.
3.5.4.	Paruošti dokumentai pateikiami teritorinės muitinės mokesčių skyriui.	Apie 1 val.
3.6.	Nutarimų, reguliuojančių importą, eksportą, muitinių darbą, mokesčius ir kt. Lietuvoje, sekimas.	Pastoviai, turint laiko tarpą.
3.6.1.	„Valstybės žinių“ studijavimas. Reikalingos informacijos perdavimas suinteresuotiems asmenims (GD, PV).	
3.6.2.	Duomenų apie mokesčių pasikeitimą suvedimas į kompiuterį (DUTY/muitai/Lietuvos).	

3.7.	Baltarusijos, Ukrainos importo mokesčių tarifų paieška bei jų pasikeitimų sekimas.	Pastoviai, turint laiko tarpą.
3.7.1.	Atsiradus naujų rūšių prekėms, surandami mokesčių tarifai šioms prekėms (Baltarusijos muitai, Ukrainos muitai). Šie tarifai suvedami į kompiuterį (DUTY/muitai/ Baltarusijos/Ukrainos).	
3.7.2.	Operatyvūs mokesčių pasikeitimai sužinomi iš Minsko ir Odesos telefonu. Pasikeitimai suvedami analogiškai 3.7.1.	
3.8.	Reikalingų duomenų suvedimas į „kainų būrimo“ programą (DUTY/kainininkas).	Pastoviai, esant naujų davinių.
3.9.	Baltarusijos, Ukrainos mokesčių paskaičiavimo, mokesčių sumokėjimo kontrolė (kas mėnesį), gautų rezultatų perdavimas reikalingiems asmenims (iki sekančio mėnesio 15 dienos).	3 – 5 dienos kas mėn.
3.10.	Sutarčių su klientais, esančiais ne Lietuvoje, ruošimas.	Pastoviai, esant reikalui.
3.11.	BD ištaisymas arba anuliavimas pagal muitinės sprendimą.	Pastoviai, gavus sprendimą.
3.11.1.	Gavus BD taisymo pažymą dėl prekės kodo pasikeitimo ar dėl mokesčių perskaičiavimo, padaromi ištaisymai BD, pažyma prisegama prie BD rinkinio.	
3.11.2.	Anuliuojamas BD performinamas einamąja data, paliekant buvusį valiutos kursą ir atliekant nurodytus sprendime pakeitimus. Senasis BD kartu su naujuoju pateikiamas DK1.	
3.12.	Duoti pasiūlymus (pateikiant aprašymus) IKC dėl atskirų funkcijų kompiuterizavimo.	Pastoviai, esant reikalui.
3.13.	Mėnesinių ataskaitų apie prekių importą, priskaičiuotus mokesčius, PVM sąskaitų panaudojimą paruošimas ir pateikimas vyr. buhalterei.	Pasibaigus ataskaitin. mėnesiui.

* Žvaigždute pažymėtų muitinės procedūrų paaiškinimai pateikiami 4 priede.

2 PRIEDAS

FUNKCIJŲ PRIORITETAI

Funkcijos atliekamos tokia tvarka:

1. 3.1. ir 3.2.
2. 3.3.
3. 3.13.
4. 3.6.
5. 3.7.
6. 3.8.
7. 3.5.
8. 3.4.
9. 3.9.
10. 3.10.
11. 3.11.
12. 3.12.

Besidubliuojančių funkcijų vykdymo tvarka:

Iš funkcijų (3.1., 3.2. ir 3.4.), besidubliuojančių su DK3 funkcijomis, DK 2 prioritetą skiria funkcijoms, reikalaujančioms papildomo išsiaiškinimo, organizacinio darbo, t. y. funkcijoms 3.1.1., 3.1.2., 3.1.4., 3.1.5., 3.1.6., 3.1.7., 3.2.21., 3.2.22., 3.4.2.

Kitos besidubliuojančios funkcijos atliekamos kolektyviniu principu, turint tikslą – kuo greičiau paruošti dokumentus.

3 PRIEDAS

METINIS PLANAS 1998 METAMS

1. Toliau mokytis naudoti ir pritaikyti praktikoje kompiuterines programas „EXEL“ ir „WORD“:
 - iki 1998 metų pabaigos išmokyti braižyti grafikus ir diagramas.
2. Duoti pasiūlymus IKC dėl programos „DUTY“ tobulinimo, pritaikymo prie besikeičiančių muitinės reikalavimų.
3. Išmokyti geriau naudotis programomis „LIKUČIAI MS“ ir „ATSARGOS“, kad galėčiau, esant būtinybei, atlikti PV funkcijas 3.7., 3.2., 3.11., 3.14.
4. Gilinti žinias BY įstatymuose, reglamentuojančiuose importą ir eksportą.
5. Išmokyti naudotis „TIME MANAGER“ programa.

ASMENINIS PLANAS

1. Esant galimybei, pailsėti ir pasigydyti sveikatą sanatorijoje.

4 PRIEDAS

PROCEDŪRŲ PAAIŠKINIMAI

Procedūra 7100 – prekės, dalyvaujant muitinės inspektoriui ir muitinės sandėlio atstovui, iškraunamos į muitinės sandėlį.

Procedūra 4000 – prekės, dalyvaujant muitinės inspektoriui, iškraunamos į centrinį sandėlį.

Procedūra 4071 – prekės iš muitinės sandėlio, dalyvaujant muitinės inspektoriui ir muitinės sandėlio atstovui, pakraunamos į automašiną ir pervežamos į centrinį sandėlį.

Procedūra 3171 – prekės iš muitinės sandėlio, dalyvaujant muitinės inspektoriui ir muitinės sandėlio atstovui, pakraunamos į automašiną ir išvežamos gavėjams už Lietuvos Respublikos ribų.

Procedūra 4000 – prekės iš centrinio sandėlio, dalyvaujant muitinės inspektoriui, pakraunamos į automašiną ir išvežamos gavėjams už Lietuvos Respublikos ribų.

5 PRIEDAS

PAREIGYBIŲ SUTRUMPINIMAI

1. DK1 – deklarantas nr.1,
2. DK2 – deklarantas nr.2,
3. DK3 – deklarantas nr.3,
4. PV – prekybos vadybininkas,
5. PVA – prekybos vadybininko asistentė,
6. VF – vyriausia finansistė,
7. GD – generalinis direktorius,
8. TSVRS – tiekimo skyriaus viršininkas,
9. TSV1 – tiekimo skyriaus vadybininkas nr.1,
10. TSV2 – tiekimo skyriaus vadybininkas nr.2,
11. TSV3 – tiekimo skyriaus vadybininkas nr.3,
12. VB – vyriausioji buhalterė,
13. BUH1 – buhalterė nr.1,
14. S1 – sekretorė nr.1,
15. OP – operatyvinis pavaduotojas,
16. BY DK1 – Baltarusijos deklarantė nr.1,
17. II – informatikos inžinierius,
18. SV – sandėlio vedėja,
19. SPI – sisteminio programavimo inžinierius,
20. PI1 – programavimo inžinierius nr.1,
21. PI2 – programavimo inžinierius nr.2,
22. PI3 – programavimo inžinierius nr.3.

6 PRIEDAS.

DOKUMENTŲ PAVYZDŽIAI

(čia nepridedami, su jais galima susipažinti toje šio PP kopijoje, kuri saugoma pas kurso dėstytoją)

Naudodamiesi čia pateiktais metodiniais nurodymais ir šiuo pareigybės paso pavyzdžiu (o vėliau – ir anksčiau studijavusių studentų sudarytais PP projektais), sistematyros kursą studijuojantys studentai, gavę atitinkamas užduotis, savarankiškai kurė pareigybės pasų projektus realioms (jiems pažįstamiems) pareigūnams. Įdomesni ir vertingesni PP projektai (o tokių buvo gana daug), tiksliau – jų kopijos, nes patys projektai pareigūnų pageidavimu dažniausiai būdavo perduodami toms organizacijoms, kuriose dirbo tie pareigūnai, buvo palikti VU MIF Matematinės statistikos katedroje ir joje saugomi iki šiol. Jie naudojami kaip pavyzdžiai ateinančioms studentų kartoms. Ir ne tik studentams, bet ir organizacijų bei jų padalinių vadovams, norintiems tobulinti valdymą savo organizacijose bei jų padaliniuose, nes tuos PP pareigūnai, kuriems jie buvo projektuojami, ir tų pareigūnų vadovai, susipažinę su PP ir patvirtinę tų PP tinkamumą savo parašais, labai gerai juos įvertino ir pripažino rekomenduotiniais praktiniam naudojimui ne tik savo, bet ir kitose organizacijose. Ir **jais iš tikrųjų naudojamas.**

Ypatingai dažnai jais naudojamas, priimant naujus darbuotojus į tą ar analogišką pareigybę, taip pat kaip pavyzdžiais kitiems pareigūnams, kuriantiems savo PP.

Visi, susipažinę su studentų sukurtais PP projektais, pripažįsta, jog **tokie PP žymiai vertingesni negu dabar daugelyje organizacijų egzistuojančios labai formaliai sudarytos pareigybinės instrukcijos.** Tai dar kartą patvirtina praktinę sisteminio požiūrio ir sisteminės projektavimo metodologijos taikymo naudą.

1.4. skyriaus santrauka

Šis skyrius supažindina su sistematyros mokslui ir sistematyros kursui labai svarbia sąvoka – **objekto išorinio matematinio modelio** sąvoka, tokio **modelio sudėtimi**, jo **sudarymo procesu** ir su įvairių objektų **išorinių matematinių modelių sudarymo** ir tų modelių panaudojimo objektų funkcionavimo analizei **pavyzdžiais.**

Objekto išoriniu matematiniu modeliu vadinamas matematine kalba išreikštas **sąryšių tarp objekto įėjimų, būsenų ir išėjimų bei objekto būsenos keitimosi, laikui bėgant ir įėjimui veikiant, dėsningumų aprašymas**, kuriuo naudojantis ir žinant aplinkos poveikį į objektą bei pilnąją to objekto būseną koku nors jo stebėjimo momentu, būtų galima apskaičiuoti pokyčius objekto būsenoje ir objekto reakciją – jo poveikį į aplinką.

Kitaip tariant, objekto išoriniu matematiniu modeliu vadinamas toks objekto išorinis matematinis aprašymas, kuris yra **būtinas ir pakankamas, kad iš jo, žinant objekto įėjimo trajektoriją ir pilnąją to objekto būseną, būtų galima matematiškai išvesti ar bent apskaičiuoti to objekto fazinę ir išėjimo trajektorijas.**

Sudarant objekto išorinį matematinį modelį, reikia:

1) nustatyti **modeliuojamo objekto padėtį to objekto egzistavimo erdvėje**, t. y. nustatyti ir aprašyti, **kas yra nagrinėjamas objektas, o kas – jo aplinka**, nustatyti ir aprašyti **objekto įėjimus bei išėjimus** (kaip tai padaryti, buvo aprašyta 1.2. skyriuje) ir **jo būseną** (kaip tai padaryti, žiūr 1.3. skyrių), įsivedant atitinkamus žymenis, leidžiančius **matematiškai atvaizduoti objekto įėjimus, išėjimus ir būsenas vektoriais $\bar{x}$, $\bar{y}$ ir $\bar{z}$ apibrėžti ir aprašyti tų vektorių koordinates, jų kitimo sritis, įėjimų, išėjimų ir būsenų erdves X, Y, Z ;**

2) nustatyti ir aprašyti matematine kalba **objekto funkcionavimą laike** bei to funkcionavimo stebėjimo ypatumus, t. y. nustatyti ir aprašyti, **koki kalendorių – tolydų, diskretų ar mišrų tikslinga panaudoti objekto funkcionavimo stebėjimui ir to funkcionavimo matematiniam aprašymui**, t. y. **jo įėjimų, išėjimų ir fazinių trajektorijų $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ ir $\bar{z}(t)$ sudarymui;**

3) nustatyti ir matematiškai aprašyti **priklausomybes, egzistuojančias tarp objekto įėjimų, išėjimų ir būsenų vektorių koordinačių reikšmių**, taip pat **objekto būsenos kitimo laike, įėjimams veikiant, dėsningumus**, t. y. to kitimo priklausomybę nuo objekto įėjimų ir pačios būsenos. Matematine kalba sakant, tai reiškia: **sudaryti objekto išėjimų funkciją $\bar{y} = \varphi(\bar{x}, \bar{z})$ ir objekto perėjimų funkciją**

$\bar{z}((k+1)T) = \bar{\psi}(\bar{z}(kT), \bar{x}(kT))$, kai objekto kalendorius diskretus, arba **$\frac{d\bar{z}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{z}(t), \bar{x}(t))$** , kai

objekto kalendorius tolydus, arba, taikant Lebego integralą, $\bar{z}(t + \Delta t) = \bar{z}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \bar{f}(\bar{z}(\tau), \bar{x}(\tau)) d\tau$ bendruoju

atveju, t. y. taikant bet kokių kalendorių: tolydų, diskretų ar mišrų.

Aprašant įėjimų, išėjimų ir būsenų vektorius $\bar{x}$, $\bar{y}$ ir $\bar{z}$ būtina nurodyti, kokias įėjimų, išėjimų ir būsenų charakteristikas išreiškia tų vektorių koordinatės, kaip nustatomos tų koordinačių reikšmės, t. y. kokias būdais, kokiomis skalėmis bei kokiais matavimo ar kitokio vertinimo „vienetais“ minėtosios charakteristikos vertinamos, matematiškai išreiškiant to vertinimo rezultatus atitinkamų koordinačių reikšmėmis. Pageidautina nurodyti ir to vertinimo galimų paklaidų įverčius.

Aprašant objekto stebėjimo kalendorių, būtina nurodyti laiko matavimo vienetų, laiko intervalo, kuriame buvo, yra ar bus stebimas modeliuojamas objektas, ribas, o diskretaus kalendoriaus atveju – dar ir objekto stebėjimo momentus (objekto kalendoriaus ypatinguosius taškus) ar algoritmą, kuris leistų tuos taškus nustatyti. Taikant mišrųjį kalendorių, turi būti nurodyti tolydumo intervalų ribiniai taškai, o diskretumo intervaluose – objekto stebėjimo momentai.

Objekto stebėjimo momentai gali būti parenkami „sinchroniškai“, išdėstant juos laike tolygiai, ir „asinchroniškai“, parenkant tuos taškus taip, kad jie iš tikrųjų būtų kuo nors ypatingi, pavyzdžiui atitiktų kokius nors ypatingus įvykius objekto ar jo aplinkos funkcionavime, ypatinguosius objekto fazinės, jo įėjimų ar išėjimų trajektorijų taškus.

Sudarant objektų išorinius matematinius modelius ne visada būtina sudarinėti abi (perėjimų ir išėjimų) funkcijas, nes ne visų objektų būseną reikšmingai keičiasi stebėjimo metu, o kai kurių objektų aplinka yra tokia, jog jie į jos poveikius reikšmingai nereaguoja. Todėl **modelių sudėtis gali būti įvairi. Įvairi gali būti ir funkcijų forma**, pradedant nuo elementarių funkcijų ir baigiant sudėtingomis operatorinėmis bei algoritminėmis formomis, sudėtingomis kompiuterinėmis programomis bei programų paketais.

Neretai (ypač, kai objektas – sudėtinga sistema ar objekto funkcionavime pasireiškia stochastiškumas), nepavyksta sudaryti objekto išorinio matematinio modelio **analizinėje formoje**. Tuomet sudaromas arba sistemos **vidinis matematinis modelis, kuris gali būti panaudotas ir jos išorinio modelio vaidmenyje** (žiūr. 1.12. šios mokymosi priemonės skyrių), arba **objekto funkcionavimo imitacinis modelis** (žiūr. 1.13. ir 1.14. skyrius), galintis būti **ir deterministinis, ir stochastinis**.

Papildomi sunkumai atsiranda, kai objektas **nėra stacionarus**, t. y. kai gali keistis ne tik jo įėjimų, išėjimų ir būsenų koordinačių reikšmės, bet ir modeliuojamos sistemos struktūra ar/ir sudėtis, dėl ko **gali keistis pačių perėjimo ar išėjimo funkcijų struktūra ar/ir sudėtis**. Nors ir šiuo atveju bendrąją išorinio matematinio modelio formą įmanoma formaliai suvesti į „standartinę formą“, pateiktą šio skyriaus ir šios jo santraukos pradžioje, tačiau realūs konkretaus modelio sudarymo sunkumai išlieka: ne visada paprasta nustatyti, kaip, laikui bėgant, keičiasi pačios priklausomybės tarp objekto išėjimų, įėjimų ir būsenų bei kaip keičiasi objekto būsenos kitimo dėsniniai, objektui senėjant, ir visa tai išreikšti matematiškai, sudarant sudėtingas laike keičiančias save funkcijas.

Kitas papildomas sunkumas – **objekto „nemarkoviškumas“**, pasireiškiantis tuo, kad objektas gali turėti ne tik „momentinę“, bet ir „ilgalaikę“, „atmintį“, t. y. tuo, kad **objekto funkcionavimas gali priklausyti ne tik nuo jo „momentinės būsenos dabar“, bet ir nuo jo funkcionavimo trajektorijos, kuri tą objektą atvedė į dabartinę jo būseną**.

Norint suvesti tokių objektų išorinius modelius į Markovo objektų matematinius modelius, tenka išplėsti objekto būsenos sąvoką ir jos matematinio aprašymo formą, tuo žymiai padidinant būsenos vektoriaus koordinačių skaičių, papildant pradinę objekto momentinę būseną objekto fazinės trajektorijos, atvedusios objektą į dabartinę būseną, atkarpa, vaizduojančia **objekto „priešistorę“**. Visa tai žymiai padidina skaičiavimų apimtį bei jų sudėtingumą, ir tik kompiuterinės technikos dėka tokių modelių panaudojimas tampa praktiškai įmanomas.

Objektų matematinių modelių kūrimas – ne tik sudėtingas mokslas, bet ir subtilus menas, reikalaujantis ne tik gero matematikos žinojimo bei mokėjimo naudotis jos kalba ir aparatu, bet ir sugebėjimo suvokti tos srities, kuriai priklauso modeliuojamas objektas, reiškinį ir jų specifiką, sugebėjimo visa tai, pasitelkiant sisteminį matematinį mąstymą, sintezuoti ir formalizuoti. Tokios žinios ir tokie sugebėjimai atsiranda ne iškart, o tik palengva kaupiasi, vystosi, tobulėja, pakankamai ilgai dirbant šį sudėtingą kūrybinį darbą.

Kad studentams būtų lengviau suvokti ir įsisavinti šio sudėtingo mokslo ir meno pagrindus bei pradmenis, šiame skyriuje pateikta **gana daug įvairių objektų bei procesų nagrinėjimo ir jų išorinių matematinių modelių sudarymo pavyzdžių**. Todėl šiame skyriuje ir atsirado smulkiu šriftu pateikti 1.4.1.–1.4.12. skyreliai, skirti išorinių matematinių modelių sudarymo ir jų taikymo, nagrinėjant objektų funkcionavimą, proceso demonstravimui ir iliustravimui. Šių skyrelių tekstai skirti ne tam, kad juos studentai „iškalėtų“, o tam, kad jie būtų perskaityti ir suprasti, kad galėtų būti panaudoti kaip pavyzdžiai,

atkreipiantys dėmesį į tuos sunkumus, su kuriais tenka susidurti, kuriant objektų matematinius modelius, ir, galų gale, kaip išorinių matematinių modelių kūrimo „treniruokliai“, kuriais naudojantis palengvėja ir pagreitėja reikalingo supratimo, reikalingų žinių ir reikalingų įgūdžių įsigijimo procesas. Pasimokius kurti objektų matematinius modelius, naudojantis „treniruokliais“, galima pereiti ir prie užduočių, pateiktų šio skyriaus pabaigoje, t. y. pabandyti kurti šiame skyriuje neaprašytų objektų išorinius matematinius modelius jau savarankiškai. Skaitytojams, norintiems išmokyti kurti objektų ir procesų išorinius matematinius modelius, rekomenduojau atlikti šias užduotis.

Šių eilučių autoriaus ilgametė dėstyto patirtis rodo, jog **išmokyti studentus savarankiškai kurti objektų ir procesų matematinius modelius, nors ir nelengva, bet įmanoma.**

Matematiniai, informaciniai (plačiaja prasme) ir techniniai modeliai gali būti ne tik **deskriptiniai**, bet ir **normatyviniai**.

Normatyvinių modelių kūrimas vadinamas **projektavimu**. Tai – irgi mokslas ir menas, ne mažiau sudėtingas ir ne mažiau svarbus bei naudingas už deskriptinių modelių kūrimo mokslą ir meną.

Priimta naujo objekto kūrimo procesą skaidyti į **tris stadijas: priešprojektinę, projektinę ir projekto realizavimo stadiją.**

Priešprojektinėje stadijoje atliekami **poreikių ir galimybių** tyrimai, projektuojamo objekto **vizijos formavimas ir misijos formulavimas**, būsimojo **projekto idėjos kūrimas ir jos techninis bei ekonominis pagrindimas**. Ši stadija užsibaigia **projektavimo techninės užduoties sudarymu, aptarimu ir patvirtinimu.**

Projektinė stadija, kai projektuojamas visiškai naujas objektas, savo eile skaidoma į tris etapus, o kai naudojamos jau turimos **tipiniai projektai** ir belieka tik juos **adaptuoti**, pritaikant prie konkrečių sąlygų ir būsimojo vartotojo specifinių poreikių, tai pakanka tik dviejų etapų, o ir tie dažnai sujungiami.

Pirmojo etapo metu sudaromas **techninis projektas** – išorinio normatyvinio informacinio modelio ir vidinio modelio principinių idėjų, tų modelių principinių schemų junginys, leidžiantis patikrinti ir patvirtinti kuriamo projekto realizuojamumą ir naudingumą, pakankamai patikimai įvertinus projektuojamo objekto sukūrimo sąnaudas bei jo būsimo eksploatacijos ekonominį efektyvumą.

Projektinės stadijos **antrajame etape**, vyksta tų idėjų ir tų prielaidų, kurių pagrindu buvo kuriamas visiškai naujo objekto techninis projektas, ir paties techninio projekto principinės schemos **išbandymas, atliekant matematinius ir natūrinius eksperimentus**. Kartais specialiai tokiems išbandymams kuriami būsimojo objekto svarbiausių dalių ir net viso objekto **bandomieji egzemplioriai**. Naudojantis tipiniais projektais šis etapas tampa nereikalingas.

Projektinės stadijos **trečiajame etape** kuriamas objekto **darbinis projektas**, kuriame galima išskirti dvi dalis:

1) detalų vidinį būsimojo objekto normatyvinį modelį, kurį galima pavadinti to **objekto konstrukcijos projektu**,

2) objekto pagaminimo proceso informacinį modelį, kurį galima pavadinti **objekto technologiniu projektu**, nes, jį sudarant, suprojektuojamas **objekto pagaminimo ir jo eksploatavimo technologijos**.

Projekto **realizavimo stadijoje** pagaminamas ir išbandomas suprojektuotas objektas. Sudėtingų sistemų projektų realizavimo atveju ši stadija taip pat skaidoma į **etapus**, o sudėtingos sistemos diegimas – dar ir į **eiles**. Visa tai bus nagrinėjama antrojoje mokymosi priemonės dalyje, o kol ji dar neatspausdinta, besidomintieji sisteminiu projektavimu tikrai daug naudingos informacijos gali rasti knygoje [15, 16] ir šių eilučių autoriaus tinklalapyje.

Sudėtingų sistemų deskriptinių ir normatyvinių modelių kūrimas reikalauja specialios **sisteminės modeliavimo ir projektavimo metodologijos** taikymo. Su ta metodologija skaitytojas galės susipažinti antrojoje mokymosi priemonės dalyje, o dabar – jau minėtose knygoje [15, 16].

Šiame (1.4.) skyriuje apsiribota tik vienu normatyvinio verbalinio modelio sukūrimo pavyzdžiu – **pareigybės paso projekto** sudarymu, vadovaujantis šiame skyriuje pateiktais **metodiniais nurodymais** ir konkrečiu ten pateiktu praktikoje patikrintu ir gerai save užsirekomendavusiu pareigybės pasu (jo kopija).

Pareigybės paso sudarymo užduotį atlieka kiekvienas sistemos tyros kursą studijuojantis studentas. Keliolikos metų patirtis rodo, jog šią užduotį dauguma studentų atlieka pakankamai gerai, o nemaža jų dalis – net labai gerai, nors **matematinis objektų modelių didžioji dalis studentų sudarinėja labai nelengvai. PP projektavimas jiems sekasi žymiai geriau.** Tai galima paaiškinti, matyt, tuo, kad PP normatyvinis modelis – dar **tik verbalinis**, o taip pat tuo, kad PP projektavimo tema gana artima tai gyvenimo praktikai, kurią nemaža dalis studentų jau turi. Labai svarbu, kad, atlikdami šią užduotį, studentai praktiškai įsitikina sistemos tyros metodų ir principų naudingumu. Tai didina jų pasitikėjimą savo jėgomis ir palengvina mokymąsi kurti objektų bei procesų sisteminius matematinius modelius ir eksperimentuoti su jais.

Išsiaiškinamos sąvokos

abstrahavimo operacija	artutiniai skaičiavimo ir sudėtingų uždavinių sprendimo metodai
abstrakti sąvoka	ataskaita
adaptacija	atminties elementas
aktyvus sistemos elementas	atraktorius
aktuarinė matematika	atsitiktinis vėlavimas
algebrinė grupė	automatas
algebrinės grupės sąlyga, kurią turi tenkinti KDS	automatas, juntantis „priešistorę“ (automatas, turintis „priešistorę“)
algoritmas	automatinė valdymo sistema
algoritmė kalba	automatinis valdymas
algoritmė modelio forma	automatizuota imitacinio modeliavimo sistema (AIMS)
algoritmo neegzistavimo įrodymo problema	automatizuotas valdymas
Amontsono dėsnis slydimo trinčiai	automatizuota projektavimo sistema (APS)
amperas	automatizuota valdymo sistema (AVS)
amplitudė	automato būsenos matematinis aprašymas
amplitudinė – dažninė charakteristika	automato momentinė būsena
analizinė matematinio modelio forma	automato pilnoji būsena
analoginis modeliavimas	automatų teorija
antroji signalinė sistema	autonominio automato perėjimų į naujas būsenas tikimybės
apibendrintos fazinės koordinatės	autonominis automatas
apibendrintos koordinatės	AVS kūrimo principai, jų klasifikavimas ir taikymai
apribojimai (sudėtinė optimizacinio modelio dalis)	
apskaita	bifurkacija
Archimedo jėga, veikianti skystyje ar dujose	bifurkacijų teorija
panardintą kūną	biznio ciklai
	blokinė schema
baigtinis automatas	Bulio algebra
baigtinių automatų teorija	„būsena dabar“
baigtinių elementų metodas	būsenų erdvė ir jos matematinis aprašymas
bandomasis egzempliorius	Buslenkos agregatas (BA)
bandomoji eksploatacija	Buslenkos agregatinė sistema (BAS)
bendrasis lygties sprendinys	
bendrasisteminiai principai	ciklinis svyravimų dažnis
bendroji išėjimų funkcijos forma	CPM („kritinio kelio metodas“)
bendroji perėjimų funkcijos forma	Čiorčo tezė
Bernulio dėsnis tekančiam skysčiui	
	diferencialinė lygtis
chaosas	diferencialinė perėjimų funkcijos forma
chaoso teorija	diferencialinis vektorinis operatorius
chaotiškumas	diferencijavimo grandelė
	dinaminė pusiausvyra
„dalinė“ būsena	dinaminė sistema (DS)
dalinė logikos funkcija	dinaminė sistema, turinti mišrų kalendorių
„dalinis“ automatas	dinaminės sistemos apibendrintosios fazinės koordinatės
„dalinis“ modelis	dinaminės sistemos fazė
dalinis sprendinys	dinaminės sistemos fazinė erdvė
darbinis projektas	dinaminės sistemos fazinės koordinatės
darbo grafikas	dinaminės sistemos fazinė trajektorija
darbo tvarkaraštis	dinaminės sistemos kalendorius
dedukcija	dinaminės sistemos kinematika
de Morgano formulės	dinaminės sistemos konfigūracija
delsa	dinaminės sistemos matematinis modelis
deskripcinis modelis	dinaminės sistemos nestabilumo priežastys
deterministinė chaoso teorija	
determinizmas	
determinuotas automatas	
determinuota Tiūringo mašina	
dezorganizacija	
dezorganizacijos lygis	

dinaminės sistemos stabilumo tipai ir sąlygos
dinaminis klampumo koeficientas
dinaminis modelis ir dinaminis modeliavimas
DYNAMO
disjunkcija
disjunktorius

ekologija
ekologija „placiaja prasme“
ekologinė sistema
ekonometrija
ekonometrinis modelis
ekonominis efektyvumas
eksploatacija
ekvifinališkumas
elektrinė įtampa
elektrinės analoginės modeliavimo mašinos
elektrinė talpa

faradas
Faradėjaus dėsnis
fazė
fazinė – dažninė charakteristika
fazinė erdvė
fazinės koordinatės
fazinė trajektorija
fazinės trajektorijos ypatingieji taškai
fazinės trajektorijos kritiniai taškai
fazinės trajektorijos portretas
fazinis objekto portretas
finalinė būseną
finalinė pusiausvyra
finalinės tikimybės

gamyba
gamybinis darbinis projektas
gamybos planas
gęstantys svyravimai
glodžiujų atvaizdų ypatumų teorija
GPSS

Hamiltono operatorius (hamiltonianas)
henris
Hevisaio transformacija
hibridinė (integralinė) skaičiavimo sistema (mašina)
hidrodinamika
hidrodinaminė sistema
hidrostatika
hidraulika
hierarchija
hierarchinė struktūra

įėjimų erdvė
įėjimų erdvės matematinis aprašymas
įėjimų trajektorijos
įėjimų vektorius
imitacinis modeliavimas
imitacinis modelis
indukcija

diskreti dinaminė sistema
divergencija (div)
Dufingo diferencialinė lygtis
dvejetainis kodas, dvejetainis kodavimas
dvejetainis vienaskiltis sumatorius (DVS)
DVS₃

elektrodinaminė sistema
elektromagnetinių virpesių kontūras
elektroninės modeliavimo mašinos
elektroninė skaičiavimo mašina (ESM)
elektros srovės stipris
elektros varomoji jėga (e.v.j)
elementarioji funkcija
elementari Tiūringo mašina
emerdžencija
energijos tvermės dėsnis

fizinė erdvė
fizinė švytuoklė
fizinis objekto modelis
flateris
formalizavimas
Foresterio dinaminė sistema (FDS)
funkcija (diskreti ir tolydi, išėjimo ir perėjimo, perdavimo)
funkcija (pareigūno)
funkcijos atlikimo kokybė
funkcijos atlikimo kokybės rodikliai
funkcijos atlikimo kriterijus
funkcinis organizacijos modelis

gradientas ($\overrightarrow{\text{grad}}$)
grafas
grafikas
grafinė modelio forma
gravitacija
gravitacinė konstanta

hierarchinė vektorinė funkcija
hierarchinis vektorius
hiperbolinės funkcijos
hipotetinis modelis
hipotezė
hipotezių kėlimo ir tikrinimo metodas
hipotezių teisingumo tikrinimo metodai
homogeninė Markovo grandinė
homomorfizmas

induktyvumas
inercija
inercijos momentas
informacinis modelis
„informacinis modelis“ (knygoje [34])
informacinis modelis „placiaja prasme“
informacinis modelis „siaurąją prasme“

informacinių modelių kompiuterinė analizė
integralinė lygtis
integralinis operatorius
integravimo grandelė
integralinė – diferencialinė lygtis
integralinė – diferencialinis operatorius
intervalinė funkcija
intervalinė matavimų skalė
invertorius

katastrofa
katastrofų teorija
katastrofų tipai
kauzalinis modelis
keistasis atraktorius
kiekybinė analizė
kiekybinės ir kokybinės analizės sintezė
kinetinė energija
Kirchofo dėsniai
klasifikavimo pagrindo vienumo taisyklė
klasikinė dinaminė sistema (KDS)
kodas
kodavimas
kokybinė analizė
kokybinis objekto modelis
Kolmogorovo algebrinių lygčių sistema Markovo grandinėms
Kolmogorovo – Čepmeno formulė

labiausiai tikėtina būseną
lagas
laiko eilutė
laiko logika
laiko logikos funkcija
Laplaso operatorius
Laplaso transformacija
Lebegeo integralas
lygiagretaus veikimo dvejetainis n – skaitis
sumatorius (LVDS)

makroekonomika
makrometodas
makromodelis
maksimumas, maksimumo taškas, jo radimas
MAPLE
„markoviškumo“ savybė
Markovo grandinė
Markovo grandinės su diskrečiu laiku
Markovo grandinės su tolydžiu laiku
Markovo objektas
Markovo procesas
maršrutinė technologinė kortelė (MTK)
masinio aptarnavimo sistema (MAS)
masinio aptarnavimo sistemų teorija
masė
masių centras
masių centro koordinatės ir jų reikšmių apskaičiavimas
matavimo paklaida
matavimo vienetas

išėjimų erdvė
išėjimo funkcija
išėjimo signalo išdavimo tikimybė
išėjimo trajektorija
išorinio matematinio modelio sudėtis
išorinis matematinis modelis
„išsigimęs“ automatas
izoliuotas kritinis taškas

Kolmogorovo diferencialinių lygčių sistema
Markovo grandinėms
kombinacinė schema
kompleksinis informacinis modelis
konceptinis modelis
kondensatorius, kondensatoriaus talpa
konjunkcija
konjunktoriaus
konsensusas
konstruktyvinis apibrėžimas
konstruktorinis projektas
koordinatė
koordinatės reikšmė
kraštinės sąlygos
kritinė reikšmė
Kulono dėsnis elektriniams krūviams
Kulono dėsnis riedėjimo trinčiai
kūrybiniai darbai

lygiagretus jungimas
linkio taškas, jo radimas
loginė funkcija
loginė schema
loginis automatas
loginis operatorius
loginis sistemos elementas
logistinė kreivė
lošimų teorija

matavimų (vertinimų) skalės
matematinė ekonomika
matematinė švytuoklė
matematinio modelio parametrai
matematinio modelio struktūra
matematinio modelio sudarymo procesas
matematinio modelio struktūra
matematinio modelio sudėtis
matematinis modelis (deskriptinis, normatyvinis, sisteminis, optimizacinis)
matematininių modelių izomorfizmas
MATHCAD
MATLAB
matrica
matricų matrica
matricų vektorius
mažų parametro metodas
medžiagų sandėlio matematinis modelis
mechaninė dinaminė sistema
Mendelejevo – Klapeirono lygtis

metodo paklaida
mikroekonomika
mikrometodas
mikromodelis
Milio automatas
minimali disjunkcinė normalinė forma (MDNF)
minimali konjunkcinė normalinė forma (MKNF)
minimumas, minimumo taškas, jo radimas
misija, misijos formulavimas
mišrus objekto kalendorius, jo matematinis aprašymas

nabla operatorius
Navje – Stokso lygtis
neapibrėžtųjų koeficientų metodas
nedeterminuota Tiūringo mašina
nehomogeninė (heterogeninė) Markovo grandinė
neišreikštinė funkcijos forma
nekiekybinis objekto modelis
neizoliuotas kritinis taškas
nereglamentuota funkcija
nereglamentuotas režimas
nestabili pusiausvyra
nestacionari dinaminė sistema
nestacionarus objektas
netiesinis modelis

objektas
objekto aprašymas
objekto aplinkos aprašymas
objekto būsenos aprašymas
objekto būsenų erdvė
objekto būsenų vektorius
objekto fazinės trajektorijos
objekto fazinis portretas
objekto įėjimų aprašymas
objekto įėjimų erdvė
objekto įėjimų trajektorijos
objekto įėjimų vektorius
objekto išėjimų aprašymas
objekto išėjimų erdvė
objekto išėjimų trajektorijos
objekto išėjimų vektorius
objekto išorinio matematinio modelio sudarymas
objekto išorinio matematinio modelio sudėtis
objekto išorinis matematinis modelis
objekto kalendoriaus matematinis aprašymas
objekto stebėjimo kalendoriaus pasirinkimas

pageidaujamoji būseną
pareiğybės pasas (PP)
pareiğybės paso redakcijos
pareiğybės paso sudarymo etapai
pareiğybės paso sudarymo metodiniai nurodymai
pareiğybė instrukcija (PI)
pasyvus elementas
percepcija
percepcinis modelis
perdavimo funkcija
perėjimo funkcijos diferencialinė išraiška

modelio adekvatumas tikrovei
modelio nestabilumas
modelio objektyvumas
modelio paklaida
modelio pilnumas
modelio stabilumas
„momentinė“ būseną
morfologinis modelis
multimedia priemonės
Muro automatas

nevaldomieji modelio parametrai
nominalinė skalė
nominalinė reikšmė
normalinė dinaminės sistemos matematinio modelio forma
normalusis Markovo algoritmas
normatyvinė logika
normatyvinė organizacinė dokumentacija (NOD)
normatyvinė technologija
normatyvinis modelis
nuosavi svyravimai
nuoseklaus veikimo dvejetainis sumatorius (NVDS)
nuoseklus jungimas

omas
Omo dėsnis
operacijos atlikimo algoritmas
operacijų tyrimas
operacijų tyrimo metodai
operacinė instrukcija (OI)
operacinė kortelė (OK)
operatorinė blokinė schema
operatorius
optimalumo kriterijus
optimalumo rodiklis
optimizacinis modelis
optimizavimas
optimumas, optimumo taškas
organizacija
organizacijos įstatai
organizacijos padalinio nuostatai
organizmas
organizuotumas
organizuotumo lygis

perėjimo funkcijos skirtuminė išraiška
perėjimo – išėjimo tikimybė
perėjimo – išėjimo tikimybių matricos
perėjimų funkcija
perėjimų tikimybė
perėjimų tikimybių matrica
perėjimų charakteristikos
PERT
pilnas išorinis matematinis modelis
pilnoji objekto būseną
pirmoji signalinė sistema

planavimas
 planinė normatyvinė dokumentacija (PNOD)
 planuojamoji būseną
 populiacija
 populiacijos augimo greičio formulė
 potencialinė energija
 POWERSIM
 pradinė būseną
 pradinė funkcija
 pradinės sąlygos
 pradinių sąlygų suderinamumas
 priešistorė
 priešistorės ilgis
 priešprojektinė stadija
 principinė schema
 priverstiniai svyravimai
 prognozavimas, prognozė
 prognozuojamoji būseną

rangas
 rangų skalė
 ranginė koreliacija
 redukcija
 redukuotos fizinės švytuoklės ilgis
 reglamentas
 reglamentuota funkcija
 reglamentuota informacija
 reglamentuoto informacinio aprūpinimo režimas
 regresija
 regresinis modelis
 regresinis modelis su pasiskirsčiaisiais lagais

santykių skalė
 sąryšiai tarp objekto būsenos, įėjimų ir išėjimų
 saviorganizacija
 sekvencinė mašina
 signalas
 signalinė informacija
 signalinis informavimo režimas
 simbolinė duomenų forma
 simbolis
 sisteminė metodologija
 sisteminė projektavimo metodologija
 sisteminiai modeliai
 sisteminiai principai
 sisteminis mąstymas
 sisteminis modeliavimas
 sisteminis požiūris
 sisteminis projektavimas
 skaičiavimo paklaida
 skaitmeninė duomenų forma
 skaitmeninis modelis
 skaliaras
 skaliarinė funkcija
 skaliarinis operatorius
 skirtuminė lygtis
 skysčio nesuspaudžiamumo dėsnis
 slydimo trintis

šilumos laidumo diferencialinė lygtis

projektas
 projektavimas
 projektavimo sąnaudos
 projektavimo techninė užduotis (PTU)
 projektinė stadija
 projektinės stadijos etapai
 projekto ekonominis pagrindimas
 projekto kūrimo stadijos
 projekto optimalumas
 projekto optimizavimas
 projekto racionalumas
 projekto realizuojamumas
 projekto techninis pagrindimas
 pusiausvyra
 pusiausvyrinė būseną
 pusiausvyros nestabilumo sąlyga
 pusiausvyros stabilumo sąlyga

rekurentinis procesas
 rekursija
 rekursinė funkcija, rekursyvioji funkcija
 rekursinis modelis
 rezistorius, rezistoriaus varža
 rezonansas
 rezonanso energija
 riedėjimo trintis
 ritelė, ritelės induktyvumas
 rutininė operacija
 rutininiai darbai

solitonas
 srautų tinkluose valdymas
 stabilaus funkcionavimo tikslai (tikslų grupė „a“)
 stabilioji pusiausvyra
 stacionari dinaminė sistema
 stacionarus objektas
 standartinė dinaminės sistemos matematinio modelio forma
 „standartinis“ išorinis matematinis modelis
 „standartinis“ operatorius
 statinis modelis
 statistinis modeliavimas
 statistinis modelis
 stochastinis automatas
 stochastiškumo – determinuotumo dilema
 Stokso dėsnis rutuliuko grimzdimui
 struktūrinis stabilumas
 suderinamumo sąlyga KDS apibrėžime
 sukamasis kūno judėjimas
 svyravimų amplitudė
 svyravimų ciklinis dažnis
 svyravimų dažnis
 svyravimų fazė
 svyravimų periodas
 svorio centras

švytuoklės matematinis modelis

taisyklingas automatas
taktas
taškinė (taško) funkcija
techninė užduotis (TU)
techninis projektas
techninis projektavimas
techninis realizuojamumas
technologinė normatyvinė organizacinė dokumentacija (TNOD)
teleologinė metodologija
technologinis projektas
tenzorinė algebra
tenzorius
terminalinė metodologija
tiesiaiegis judėjimas
tikimybių matrica
tikimybių matricų matrica
tikslų funkcija
tikslų medis

universalus išorinis matematinis modelis
užklausa

valdomieji kintamieji
valdomieji modelio parametrai
valdomųjų kintamųjų reikšmių apribojimai
valdomųjų kintamųjų reikšmių optimizavimas
van der Vaalso formulė
varža (aktyvioji, reaktyvioji)
vektorinė funkcija
vektorinis operatorius
vektorius
verbalinis modelis
vėlinimas
vėlinimo blokas
vėlinimo konstanta

X automatai

Y automatai

Z automatai

tinklinė struktūra
tinklinis grafikas (TG)
tinklinis modelis
tinklinių struktūrų optimizavimas
tipinis išorinis matematinis modelis
tipinis projektas (TP)
Tiūringo mašina
Tiūringo mašinos matematinis modelis
Tiūringo mašinų kompozicija
tobuloji disjunkcinė normalinė forma (TDNF)
tobuloji konjunkcinė normalinė forma (TKNF)
tolydumo – diskretumo dilema
tolydumo sąlyga KDS apibrėžime
tolydus kalendorius
tolydusis skirstinys
tolygus pasiskirstymas
trigeris
tvarkaraštis, tvarkaraščių teorija

užklausiama informacija
užklauso režimas informacinėje sistemoje

vėluojančio argumento diferencialinė lygtis
vėluojančio argumento DS modelis
vėluojančio argumento funkcija
vėluojančio argumento funkcijos Laplaso atvaizdas
vidinis matematinis sistemos modelis
vidurkių dinamika
vienaparametrinė algebrinė grupė
vieneto konstituentė
vystymosi tikslai (tikslų grupė „b“)
visuotinės traukos dėsnis
vizija, vizijos formavimas
voltas

$X \rightarrow Y$ automatai

UŽDUOTYS

1.4.1. Sudarykite matematinės svyruoklės išorinį matematinį modelį ir išnagrinėkite galimas to objekto fazines trajektorijas ir portretus. Kuo skiriasi šis modelis nuo elektromagnetinių virpesių kontūro matematinio modelio, sudaryto 1.4.8. skyrelyje?

1.4.2. Sudarykite automato, kurio veikimas aprašytas 2-joje lentelėje, išorinį matematinį modelį, užrašydami išėjimo ir perėjimo funkcijų TKNF. Ar galima tą automatą pavadinti sekvenčine mašina? Pateikite $X \rightarrow Y$, Y ir X automatų pavyzdžių. Kokius automatus vadina Muro automatais?

1.4.3. Sudarykite gazuoto vandens pardavimo automato išorinį matematinį modelį.

1.4.4. Sudarykite sistemos, pavaizduotos 18 pav. ir aprašytos užduotyje 1.3.7., išorinį matematinį modelį, atvejui, kada $m_1 > 0$, pasinaudodami Bernulio dėsniu skysčiams. Raskite matematinę išėjimo ir fazinę trajektorijų išraišką ir pavaizduokite jas grafiškai. Kuo tos trajektorijos skiriasi nuo trajektorijų, gautų atvejui, kai $m_1 = 0$?

1.4.5. Išnagrinėkite ir paaiškinkite, iš kur ir kaip gautos medžiagų sandėlio įmonėje (žiūr. užduotį 1.3.8. ir skyrelį 1.4.5.) išėjimų ir perėjimų funkcijos. Ar gali jos būti kitokios?

1.4.6. Suraskite diferencijavimo grandelės išėjimo trajektoriją, jei įėjimo trajektorijos ir grandelės pradinė būsena aprašomos formulėmis:

a) $x(t)=at+b$, kur $a=\text{const.}$, $b=\text{const.}$, $z(0)=0$.

b) $x(t)=A\sin(\omega t + \varphi)$, kur $A=\text{const.}$, $\omega=\text{const.}$, $\varphi=\text{const.}$, $z(0)=0$.

Atlikite šią užduotį dviem būdais: 1) tiesiogiai, naudodamiesi konkrečiu diferencijavimo grandelės modeliu ir duotomis pradinėmis jos funkcionavimo sąlygomis; 2) išsiveddami bendrąją

fazinės trajektorijos $z(t)$ formulę $z(t) = z(0)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} \int_0^t x(\tau)e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau$ ir po to ją taikydami

konkrečiuose skaičiavimuose.

1.4.7. Sudarykite automato, aprašyto užduotyje 1.3.13., išorinį matematinį modelį. Koks tai automatas: Muro ar Milio? Sudarykite to automato perėjimo ir išėjimo funkcijų TDNF ir TKNF. Supaprastinkite tas funkcijas.

1.4.8. Knygos [32] 61–62 puslapiuose (pavyzdyje 3.1.) nagrinėjamas autobuso bilietų pardavimo automatas ir sudarytas to automato išorinis modelis. Išreikškite automato perėjimų ir išėjimų funkcijas dvireikšmės matematinės logikos kalba.

1.4.9. Knygos [32] 62–63 puslapiuose (pavyzdyje 3.2.) nagrinėjamas automatas, paskirstantis iš liejyklos transporteriu atgabenamus įvairaus skersmens vamzdžius jų valcavimo staklynų linijoms, kur tie vamzdžiai turi būti apdorojami. Sudarykite automato išorinį modelį ir raskite klaidą minėtoje knygoje pateiktame to automato matematiniam modelyje.

1.4.10. Knygoje [32] puslapiuose 63–64 (pavyzdyje 3.3) nagrinėjama sandėlio saugykla, turinti n stelažų, kurioje skirtingi gaminiai saugomi skirtinguose stelažuose. Išnagrinėję saugyklos aprašymą ir jos išorinį matematinį modelį, pateiktą knygoje [32], pabandykite sudaryti tobulesnį modelį, kuriame įėjimų ir išėjimų erdvės būtų natūralesnės ir kur būtų atsižvelgta į tą aplinkybę, kad saugykla turi medžiaginius ir informacinius įėjimus ir išėjimus.

1.4.11. Išnagrinėkite galimus atvejus, aprašytus knygos [32] pavyzdyje 3.10, (78–79 psl.), ir sudarykite procesų išorinius matematinius modelius. Gaukite kiekvienam atvejui proceso fazinės trajektorijos ir jos portreto matematinį aprašymą. Iliustruokite gautus rezultatus brėžiniais.

1.4.12. Sudarykite procesų, aprašytų knygos [32] pavyzdyje 3.11 (79–80 psl.), išorinius matematinius modelius ir gaukite tų procesų fazinės trajektorijos matematines išraiškas.

1.4.13. Sudarykite populiacijos augimo proceso, aprašyto knygos [4] pavyzdyje 3.12 (80–81 psl.), matematinį modelį. Jei šį procesą nagrinėtume ne izoliuotai, o atsižvelgdami į populiacijos sąveiką su aplinka (populiacijai reikalingas maistas, ji pati gali būti maistu kitoms populiacijoms ir t. t.), kaip pasikeistų šio proceso matematinis modelis?

1.4.14. Palyginkite mechaninių ir elektromagnetinių virpesių procesų matematinius modelius ir įsitikinkite, jog tie modeliai skiriasi tik vartojamais žymėjimais ir jų interpretacija.

Suraskite dar keletą pavyzdžių, iliustruojančių teiginį, jog skirtingi objektai (procesai) gali turėti izomorfiškus matematinius modelius, besiskiriančius vienas nuo kito tik vartojamais žymėjimais bei jų interpretacija.

Kokia praktinė išvada išplaukia iš izomorfiškų matematinių modelių egzistavimo fakto?

1.4.15. Iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais makrometodų ir mikrometodų vartojimą, sudarant objektų išorinius matematinius modelius.

Kuo, jūsų nuomone, skiriasi analiziniai ir imitaciniai procesų modeliai?

1.4.16. Sudarykite tokį objekto išorinį matematinį modelį, kurio išėjimų ir perėjimų funkcijos būtų sudėtingi operatoriai.

1.4.17. Kuo skiriasi stacionarių ir nestacionarių objektų matematiniai modeliai? Iliustruokite savo atsakymą pavyzdžiais. Pateikite KDS pavyzdį, skirtingą nuo mokymosi priemonėje pateiktą KDS pavyzdžių.

1.4.18. Raskite pavyzdžių tokių objektų, kurių išėjimai priklauso ne tik nuo įėjimų ir tos būsenos, kurioje tie objektai yra dabar, bet ir nuo to, kokių būdu (kokia trajektorija) jie į tą būseną pateko. Kaip sudaryti tokio objekto išorinį matematinį modelį? Kaip atrodytų tokio objekto perėjimo ir išėjimo funkcijos (perėjimo ir išėjimo operatoriai) bei fazinės trajektorijos ir jų portretai?

1.4.19. Raskite dinaminės sistemos, kurios išorinį matematinį modelį sudaro dvi skaliarinės perėjimo funkcijos: $\dot{z}_1 = b + 2t$ ir $\dot{z}_2 = 1$, esant pradinėms sąlygoms $z_1=a=\text{const.}$, $z_2=b=\text{const.}$, fazinę trajektoriją $\bar{z}(t)=(z_1(t), z_2(t))$ ir tos trajektorijos fazinį portretą $z_1=\xi(z_2)$, kai $a=0$ ir $b=0$. Kaip pasikeis tas portretas, pakeitus pradines sąlygas, pavyzdžiui, priėmus, jog $a=8$, $b=4$? Ar nagrinėjamoji dinaminė sistema yra KDS? Kodėl? Keisdami pradines sąlygas, apskaičiuokite dar keletą fazinių trajektorijų ir raskite jų portretus. Ką galite pasakyti apie tokių portretų šeimą? Kiek skirtingų parabolų gali kirsti kiekvieną būsenų erdvės tašką? Ar kiekviena šios portretų šeimos parabolė kertasi su kiekviena kita tos šeimos parabolė? Kokioje taške kertasi parabolė, atitinkanti pradines sąlygas $a=0$, $b=0$, su parabolė, atitinkančia pradines

sąlygas $a=-2$, $b=0$? Kokias pradines sąlygas turi turėti ši sistema, kad jos fazinis portretas nesikirstų baigtiniame taške su sistemos, turinčios pradines sąlygas $a=2$, $b=-4$ faziniu portretu?

1.4.20. Pasirinkite koki nors nesudėtingą objektą ir sudarykite jo išorinį matematinį modelį, panašų į tuos modelius, kurių pavyzdžiai pateikti šio skyriaus 1.4.1÷1.4.12. skyreliuose, bet nesutaptų nė su vienu iš jų. Raskite to objekto fazinę ir išėjimo trajektorijas ar pradines jų atkarpas, atitinkančias Jūsų pasirinktas pradines sąlygas ir įėjimo trajektoriją ar jos pradinę atkarpą.

1.4.21. Nustatykite, ar hidrodinaminė sistema, kurią nagrinėjome 1.4.4. skyrelyje, kai jos įėjimas $x(t)=0$, yra KDS?

1.4.22. Atlikite 1.4.21. užduotį, nagrinėdami elektromagnetinių virpesių kontūrą, aprašytą 1.4.8. skyrelyje.

1.4.23. Raskite medžiagų sandėlio, kurio išorinį matematinį modelį sudarėme 1.4.5. skyrelyje, fazines ir išėjimo trajektorijas tuo atveju, kai medžiagų rūšių skaičius $n=3$, cechų skaičius $m=2$, $\bar{z}_1(t)=(z_{1,1}(t), z_{1,2}(t), z_{1,3}(t))=(100; 80; 150)$, $\bar{z}_2(t)=(z_{2,1,1}(t), z_{2,1,2}(t), z_{2,2,1}(t), z_{2,2,2}(t), z_{2,3,1}(t), z_{2,3,2}(t))=(0; 0; 0; 0; 0; 0)$, $\bar{z}_3(t)=(z_{3,1,1}(t), z_{3,1,2}(t), z_{3,2,1}(t), z_{3,2,2}(t), z_{3,3,1}(t), z_{3,3,2}(t))=(600; 550; 400; 600; 700; 650)$, o įėjimų trajektorijos duotos 25 lentelėje, kurioje t – duotojo mėnesio k darbo dienos eilės numeris.

25. lentelė

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_{1,1}$	0	0	100	0	0	100	200	100	0	0	0	0	50	100	100	200	200	0	0	100
$x_{1,2}$	50	50	0	0	100	100	100	0	0	0	0	0	100	0	100	0	200	200	200	0
$x_{1,3}$	100	0	0	200	0	200	200	0	0	0	100	100	0	50	100	200	0	100	0	100
$x_{2,1,1}$	20	30	20	35	20	20	50	20	20	30	20	20	30	20	50	80	50	50	50	20
$x_{2,1,2}$	15	20	10	20	15	20	50	20	30	20	30	30	20	20	50	80	100	50	50	20
$x_{2,2,1}$	10	40	25	20	40	40	20	20	20	20	20	20	50	120	100	100	100	100	50	50
$x_{2,2,2}$	30	40	35	30	50	60	30	20	20	20	20	20	40	40	80	100	100	100	90	70
$x_{2,3,1}$	40	50	50	75	100	50	100	40	50	50	40	120	60	50	80	100	100	50	40	60
$x_{2,3,2}$	50	60	50	75	100	50	100	50	50	50	40	40	60	50	80	100	100	50	60	50

1.4.24. Sudarykite sandėlio, aprašyto 1.4.23. užduotyje, funkcionavimo imitacinį modelį, patys įvertindami artutines sandėlyje atliekamų operacijų (išskrovimo, sandėliavimo, išdavimo, dokumentų tvarkymo) trukmių reikšmes ir, atsižvelgdami į tai, jog įmonės cechai turi pradėti darbą nuo ryto, nustatykite valandą, nuo kurios sandėlis turėtų pradėti išdavinėti medžiagas cechams. Atvežtą tą dieną medžiagų priėmimą sandėlio darbuotojai galėtų pradėti tik po to, kai aptarnavo cechus.

1.4.25. Sistemų analizėje gana dažnai vartojamos Laplaso ir Hevisaido transformacijos, sudarant objektų įėjimų ir išėjimų atvaizdus $X(p)$ ir $Y(p)$ bei objektų perdavimo funkcijas

$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$. Ar kiekvienas objektas turi nekintančią (jam būdingą) perdavimo funkciją?

Susipažinkite su Laplaso ir Hevisaido transformacijomis ir perdavimo funkcijų sudarymo metodais. Kaip, žinant objekto įėjimo trajektoriją ir perdavimo funkciją, rasti jo išėjimo trajektoriją?

1.4.26. Radiotechnikoje dažnai vartojamos amplitudinė–dažninė ir fazinė–dažninė charakteristikos. Ką jos charakterizuoja, kur ir kaip naudojamos? Kaip jas galima gauti, žinant objekto perdavimo funkciją?

1.4.27. Daugelyje vadovėlių, kuriuose sprendžiamas šios mokymosi priemonės 1.4.4. skyrelyje aprašytas idealaus skysčio išteklėjimo greičio nustatymo uždavinys, nurodoma, kad „formulė $v = \sqrt{2gh}$ nėra tiksli“, nes, ją išvedant, „nebuvo atsižvelgta į skysčio judėjimo inde greitį“, ir todėl

išvedama kita formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{s^2}}}$, kuri laikoma tikslesne. Ši formulė išvedama iš Bernulio dėsnio

$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{const.}$, teigiančio, jog visuose skysčio srauto pjūviuose duotuoju momentu t išorinio, hidrostatinio ir hidrodinaminio slėgių suma yra pastovus dydis.

Ar teisinga nuoroda, kad formulė $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{s^2}}}$ yra tikslesnė už formulę $v = \sqrt{2gh}$?

Kada teisinga pirmoji, o kada – antroji formulė?

Kaip interpretuoti formulę $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sigma^2}{s^2}}}$, o taip pat formulę $v^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2}\right) = 2gh$, kai $\sigma = s$?

1.4.28. Palyginkite šioje mokymosi priemonėje sudarytą hidrodinaminės sistemos išorinį matematinį modelį su skysčio išteklėjimo modeliu, pateiktu knygoje [31], kurioje, kaip ir buvo rašyta, yra daug įdomių ir įvairių modelių. Kokias išvadas padarėte iš to palyginimo? Kaip galėtų pasikeisti hidrodinaminės sistemos modelis, jei skystis būtų neidealus.

1.4.29. Kuo skiriasi hidrostatiniai ir hidrodinaminiai modeliai? Sudarykite 1.4.4. skyrelyje aprašytos hidrodinaminės sistemos modelį, naudodamiesi Navje–Stokso lygtimi. Palyginkite tokiu būdu gautą modelį su knygoje [31] sudarytu skysčio išteklėjimo modeliu. Kokias išvadas galima padaryti?

1.4.30. Nagrinėjant dujose vykstančius termodinaminis procesus kartais naudojamos Mendelejevo–Klapeirono, kartais – Van der Vaalso formulės. Kuo ir kodėl skiriasi šios formulės? Kokią fizinę reikšmę turi Van der Vaalso formulės parametrai a ir b ? Ar galima Mendelejevo–Klapeirono formulę taikyti skysčiams? O Van der Vaalso formulę? Kodėl?

1.4.31. Pasinaudodami knyga [31], pabandykite argumentuotai atsakyti į klausimą, kodėl kosminės raketos turi būtent tris pakopas?

1.4.32. Kokių modelių (mikro– ar makro–) klasei Jūs priskirtumėte knygoje [31] aprašytas benzolo, difenilo, trifenilo, fenantreno ir kitų medžiagų molekulių matricinius ir grafinius modelius? Kaip apskaičiuojamas molekulių galimų struktūrų skaičius? Kas yra rezonanso energija ir kaip ją galima apskaičiuoti?

1.4.33. Naudodamiesi knyga [31], sudarykite gręžimo lazeriu proceso matematinį modelį. Kaip sprendžiama šilumos laidumo diferencialinė lygtis? Apibūdinkite mažo parametro metodą, nurodymai, kada ir kaip jis taikomas.

1.4.34. Naudodamiesi knyga [31], susipažinkite su baigtinių elementų metodo taikymu, apskaičiuojant statybines, hidrodinamines, aerodinamines ir biomechanines konstrukcijas. Kaip sprendžiamos diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistemos, kai duotos ne tik pradinės, bet ir kraštinės sąlygos? Kas yra tenzoriai? Suformuluokite koki nors tenzorių skaičiavimo uždavinį. Kuo tenzorių algebra skiriasi nuo vektorių algebros?

1.4.35. Susipažinkite su knygoje [31] pateiktais populiacijų modeliais ir išspręskite ten pateiktas užduotis 1, 2 ir 3. Palyginkite ten pateiktus modelius ir jų sprendinius su knygoje [47] pateiktais vidurkių dinamikos modeliais bei sprendiniais. Kokias išvadas galima padaryti?

1.4.36. Išnagrinėkite knygoje [31] aprašytą cukrinio diabeto diferencialinį modelį ir atlikite ten pateiktas užduotis 1÷6. Prisiminkite izomorfizmo dėsnį (žiūr. „Įvadą“) ir, panagrinėję šios užduoties ir 1.4.29. užduoties atlikimo rezultatus, raskite pavyzdžių, patvirtinančių tą dėsnį ir jo taikymo moksliniuose tyrimuose naudą.

1.4.37. Išnagrinėkite knygoje [31] pateiktus stochastinius transporto priemonių ir pėsčiųjų judėjimo miesto gatvėmis modelius. Palyginkite tuos modelius su šios mokymosi priemonės 1.14. skyriuje nagrinėjamu kirpyklos funkcionavimo modeliu. Ką bendro turi visi tie modeliai? Kuo jie skiriasi? Ką vadiname masinio aptarnavimo sistema (MAS)? Susipažinkite su knygoje [47] pateiktais MAS teorijos pradžios pradžios. Ką vadina Markovo procesais? O Markovo grandinėmis? Sudarykite kokią nors diferencialinę Kolmogorovo lygtį. Kada iš tos lygties galima gauti algebrinę Kolmogorovo lygtį? Pateikite diferencialinių ir algebrinių Kolmogorovo lygčių sistemų taikymo pavyzdžių.

1.4.38. Susipažinkite su knygoje [31] pateiktu įmonės veiklos planavimo modeliu ir nuspręskite kokias ekonomikos matematinių modelių klasei jis priklauso. Palyginkite šį modelį su knygoje [48] pateiktais makroekonomikos ir mikroekonomikos modeliais. Pabandykite paeksperimentuoti su bent vienu makromodeliu ir bent vienu mikromodeliu, pasinaudodami knygoje [48] pateiktais kompiuterinių programų paketais. Grįžkite prie šios mokymosi priemonės „Įvade“ pateikto 1 pav. ir pabandykite pafantazuoti, kur ir kaip makro– ir mikroekonomikos matematinius modelius galima būtų pritaikyti praktikoje.

1.4.39. Išnagrinėkite knygoje [31] aprašytus universiteto dėstytojų personalo struktūros tobulinime ir valdyme išskylančius uždavinius, jų modelius, o taip pat tų uždavinių sprendimo būdus. Kokios problemos iškyla projektuojant bei tobulinant organizacinių sistemų valdymo sistemas? Kas yra automatizuoto valdymo sistema (AVS) ir automatinio valdymo sistema? Kur ir kada tokios sistemos taikomos? Susipažinkite su šių eilučių autoriaus knygučiu [15], aprašančią AVS kūrimo principus, ir suraskite, kurie iš tų principų priskirtini bendrasisteminių principų grupei.

1.4.40. Susipažinkite su knygoje [31] aprašytu automobilių draudimo matematiniu modeliu ir konkrečiu skaitmeniniu pavyzdžiu. Kokius uždavinius nagrinėja ir sprendžia taip vadinamoji aktuarinė matematika? Kokie sisteminiai modeliai būtų naudingi draudimo kompanijoms?

1.4.41. Susipažinkite su knygoje [31] aprašytais lošimo teorijos taikymo karinėje veikloje pavyzdžiais. Ką Jūs esate girdėję apie lošimų teoriją ir jos taikymus? Jei Jus sudomino lošimų teorija, tai su jos pradmenimis galima susipažinti jau ne kartą nagrinėtoje knygoje [47]. Lošimų teorijos filosofija ir jos taikymų ekonominėje veikloje esmė ir reikšmė labai detalai išdėstyta tos teorijos pradininkų Fon Neumano ir Morgenšterno knygoje „Theory of games and economic behaviour“ [49]. Ar galima lošimų teoriją laikyti operacijų tyrimo (OT) dalimi?

1.4.42. Išnagrinėkite knygoje [31] aprašytus tinklinius modelius ir jų taikymo pavyzdžius, sprendžiant srautų tinkluose valdymo uždavinius. Ką Jūs esate girdėjęs apie tinklinius grafikus (TG) ir jų taikymą, sprendžiant sudėtingo darbų komplekso, kurių atlikime dalyvauja daug nepriklausomų vykdytojų, planavimo ir valdymo uždavinius? Su TG ir jų taikymo sistemomis PERT ir CPM Jūs susipažinsite antroje šios mokymosi priemonės dalyje, o su kai kurių uždavinių, skirtų srautų optimizavimui tinkluose bei tinklinių struktūrų optimizavimui, sprendimo metodais susidursite operacijų tyrimo (OT) kurse. Ką apie tas sistemas ir metodus esate girdėję?

1.4.43. Išnagrinėkite knygoje [31] pateiktą labai jau abstraktų ir formalizuotą matematinį miesto struktūros aprašymą. Palyginkite šį aprašymą su knygoje [7] Dž. Foresterio sudarytais urbanistiniais imitaciniais modeliais. Kurie modeliai, Jūsų nuomone, adekvačiau aprašo miestuose vykstančius procesus? Ar galima abiejų šių tipų modelių sintezė? Ar galima Dž. Foresterio dinaminis modelius papildyti, įvedant statistinio modeliavimo, aprašyto šios mokymosi priemonės 1.14. skyriuje, elementus? Su Dž. Foresterio ir jo pasekėjų ekonominio modeliavimo sistemomis (tame tarpe ir su POWERSIM) skaitytojas galės detalai susipažinti antroje šios mokymosi priemonės dalyje. Ką apie tuos modelius esate girdėję dabar?

1.4.44. Susipažinkite su knygoje [31] aprašyta matematinių modelių struktūrinio stabilumo sąvoką ir katastrofų teorijos pradmenimis. Išvardinkite ir trumpai apibūdinkite kai kurių dažniausiai pasitaikančius katastrofų tipus. Ką Jūs esate girdėjęs apie atraktorius? Suraskite taip vadinamojo keistojo atraktoriaus pavyzdžių. Kokia išvada Jūs galėtumėte padaryti iš keistųjų atraktorių egzistavimo fakto? Kokią reikšmę turi katastrofų teorija ir atraktorių egzistavimas sistemos tyros mokslui?

1.4.45. Kuo skiriasi koncepcinis išorinis objekto modelis nuo verbalinio išorinio modelio? Pateikite kokio nors objekto verbalinio išorinio modelio pavyzdį.

1.4.46. Kuo skiriasi verbalinis išorinis objekto modelis nuo informacinio išorinio modelio? Ar gali egzistuoti toks objektas, kurio koncepcinio modelio sudaryti iškart nepavyksta, tačiau galima sudaryti jo informacinį modelį? Pateikite kokio nors objekto ar proceso išorinio informacinio modelio pavyzdį.

1.4.47. Pateikite pavyzdžius tokių situacijų, kada žmogus, vadovaudamas sudėtingai sistemai, tiesioginį bendravimą su sistema pakeičia bendravimu su objekto informaciniu modeliu. Kodėl jis taip daro? Kuo užsiima valstybinės statistikos tarnyba?

1.4.48. Kuo skiriasi matematinis išorinis objekto modelis nuo informacinio, tačiau nesančio matematiniu, išorinio modelio? Kokie sunkumai iškyla bandant sudaryti objekto matematinį modelį? Kokius būdus, leidžiančius įveikti kai kuriuos iš tų sunkumų, Jūs žinote? Trumpai apibūdinkite juos.

1.4.49. Kuo skiriasi išorinis ir vidinis objekto modeliai? Ar visada vidinis matematinis objekto modelis gali pakeisti išorinį matematinį to objekto modelį? Kodėl? O vidinį modelį – išoriniu? Kodėl? Atsakymą iliustruokite konkrečiais pavyzdžiais.

1.4.50. Kokią reikšmę objektų modeliai (tame tarpe – ir matematiniai) turi pažinimo procesuose ir žmonių praktinėje veikloje? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.4.51. Kokius modelius knygos [34] autoriai vadina funkciniais, kokius – morfologiniais, kokius – informaciniais? Palyginkite šiuos modelių tipus su išoriniais ir vidiniais modeliais, aprašytais šioje mokymosi priemonėje. Kuo skiriasi šios sisteminių modelių klasifikacijos ir kas jose bendra?

1.4.52. Pateikite ekonometrinio modelio pavyzdį. Išvardinkite ekonometrinių modelių teigiamas savybes ir trūkumus. Kaip ekonometriniai modeliai gali būti panaudoti sudarant kauzalius modelius, vaizduojančius sistemoje egzistuojančius priežastinius ryšius?

1.4.53. Paaiškinkite, ką vadina Tiūringo mašinomis ir kokia jų paskirtis. Kodėl kilo būtinybė sukonstruoti griežtą algoritmo apibrėžimą, kodėl pradėjo nebepakakti intuityvaus tos sąvokos suvokimo? Išvardinkite pagrindines algoritmo savybes. Ką Jūs esate girdėję apie Posto, Čiorčo ir Klini, Markovo, Kolmogorovo ir Uspenskio sukonstruotus algoritmo apibrėžimus? Ką vadiname rekursija ir rekursine funkcija? Ką vadina normaliuoju Markovo algoritmu (algorifmu)?

1.4.54. Sudarykite tokios Tiūringo mašinos modelį, kuri sumuotų teigiamus sveikus skaičius standartiniu būdu. Kaip pasikeistų tas modelis, jei reikėtų sudėti ne du, o tris sveikus skaičius?

1.4.55. Ką vadina elementariomis Tiūringo mašinomis? Susipažinkite su šia sąvoka knygoje [50] ir pateikite keletą elementarių Tiūringo mašinų pavyzdžių. Kokias operacijas galima atlikti su elementariomis Tiūringo mašinomis, konstruojant iš jų sudėtingesnes Tiūringo mašinas. Pateikite Tiūringo mašinų kompozicijos pavyzdį.

1.4.56. Kokias operacijas (procedūras) turi sugebėti atlikti Tiūringo mašina, kad būtų galima teigti, jog Tiūringo mašina gali atlikti bet kokią (kad ir labai sudėtingą) procedūrą, kurios algoritmas mums žinomas? Suformuluokite Čiorčo tezę. Kas iš jos išplaukia?

1.4.57. Dinaminės sistemos, neturinčios nei įėjimų, nei išėjimų, išorinį matematinį modelį sudaro jos perėjimų funkcijos – diferencialinių lygčių sistema:
$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -3z_2(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = 3z_1(t). \end{cases}$$

Raskite šios sistemos fazines trajektorijas ir jų portretus, atitinkančius pradines sąlygas:

a) $z_1(0)=1, z_2(0)=3$;

b) $z_1(0)=3, z_2(0)=1$.

Ar ši DS yra KDS? Pagrįskite savo atsakymą.

1.4.58. Dinaminės sistemos, neturinčios nei įėjimų, nei išėjimų, išorinį matematinį modelį sudaro jos perėjimų funkcijos – diferencialinių lygčių sistema:
$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -3, \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = 3t. \end{cases}$$

Raskite šios sistemos fazines trajektorijas ir jų portretus, atitinkančius pradines sąlygas:

a) $z_1(0)=0, z_2(0)=0$;

b) $z_1(0)=1, z_2(0)=0$;

b) $z_1(0)=0, z_2(0)=3$.

Ar ši DS yra KDS? Pagrįskite savo atsakymą.

1.4.59. Raskite elektrodinaminės sistemos, kurioje vyksta 1.3. skyriuje aprašytas procesas P_2 (žiūr. 10 pav.), keletą fazinių trajektorijų ir jų portretus. Ar ši elektrodinaminė sistema yra KDS? Atsakymą pagrįskite.

1.4.60. Ar 1.4.4. skyrelyje nagrinėjamoji hidrodinaminė sistema yra KDS? Atsakymą pagrįskite.

1.4.61. Sudarykite kokio nors baigtinio determinuoto automato su priešistore informacinį modelį, t. y. lentelę, analogišką 23. lentelei, ir gaukite to automato išorinį matematinį modelį – jo perėjimo ir išėjimo funkcijas.

Kaip randamos tokio automato fazinė ir išėjimo trajektorijos? Atsakymą iliustruokite pavyzdžiais.

1.4.62. Prateškite vėluojančio argumento dinaminės sistemos fazinės trajektorijos apskaičiavimus, pradėtus 1.4.11. skyrelyje, iki momento $t=10$. Pavaizduokite fazinę trajektoriją grafiškai. Palyginkite savo rezultatus su rezultatais, kuriuos gavo studentės R. Kutavičiūtė, V. Tomkovskaja, A. Pereskokova ir A. Ikvildaitė.

1.4.63. Prateškite stochastinio automato, aprašyto 1.4.12. skyrelyje, fazinės ir išėjimo trajektorijų apskaičiavimus, pradžioje gaudami tuos rezultatus, kurie pateikti tame skyrelyje, o po to, pailginę įėjimo trajektorijos pradinę atkarpą dar vienu taktu, raskite atitinkamus išėjimo ir fazinių trajektorijų pratešimus.

1.4.64. Pabandykite sudaryti išorinį matematinį modelį kokios nors determinuotos sistemos, turinčios mišrų kalendorių ir rasti jos fazinę ir išėjimo trajektorijas. Pavaizduokite tų trajektorijų pradines atkarpas grafiškai.

1.4.65. Pateikite homogeninės Markovo grandinės su diskrečiu laiku pavyzdį.

1.4.66. Pateikite homogeninės Markovo grandinės su tolydžiu laiku pavyzdį.

1.4.67. Suraskite deskriptinių ir normatyvinių (preskriptinių) modelių pavyzdžių. Prie kokių modelių reikėtų priskirti pareigūno pareiginį pasą (pareiginę instrukciją)? O konkretaus pareigūno charakteristiką (asmens bylą)? Pagrįskite savo atsakymus.

1.4.68. Sudarykite verbalinį savo asmenybės (fizinės ir dvasinės, tame tarpe – intelektualinės ir moralinės) deskriptinį modelį, į kurio sudėtį įeitų ir Jūsų motyvacinis modelis. Ar galima laikyti Jūsų sudarytą verbalinį modelį pakankamai adekvačiu? Kokios galimos neadekvatumo priežastys? Ką, Jūsų nuomone, galima laikyti modelio pilnumu, o ką – modelio objektyvumu? Ką vadina subjektyviu požiūriu?

Kodėl sistemotyrininką – sistemų analitiką, užsiimančią organizacinių sistemų projektavimu, gali dominti ne tik objektyvi, bet ir subjektyvi informacija?

1.4.69. Sudarykite verbalinį savo pareigybės (kaip studento, šeimos nario, galbūt, kokios nors visuomeninės organizacijos nario ar kokios nors įstaigos bei firmos darbuotojo) normatyvinį modelį. Ar galėtumėte tą modelį formalizuoti? Kurį modelį – deskriptinį savo asmenybės, ar normatyvinį savo

pareigybės – formalizuoti būtų lengviau? Kodėl? Kurį iš tų modelių būtų galima laikyti pilnesniu, adekvatesniu, objektyvesniu? Kodėl? Kurių modelių – deskriptinių ar normatyvinių – grupei priskirtumėte darbuotojo asmens bylą bei jo charakteristiką, parašytą rekomenduojant tą darbuotoją į atsakingas pareigas?

Ką Jūs esate girdėję apie normatyvinę logiką, apie kurią bus trumpai kalbama šios mokymosi priemonės 1.16.1.5. skyrelyje? Kodėl normatyvinę logiką studijuoja Teisės fakulteto studentai?

1.4.70. susipažinkite su kokios nors organizacijos NOD. Ar visos organizacijos turi struktūrinę NOD? O technologinę NOD? Kokią planinę NOD Jums pavyko rasti toje organizacijoje? Ar joje naudojama tokia priemonė kaip „TIME MANAGER“?

1.4.71. Sudarykite kokios nors rutininės operacijos OK. Sudarykite kokios nors nelabai sudėtingos procedūros MTK. Sudarykite savo darbo grafiką – tvarkaraštį ir darbų planą metams (ketvirčiais), artimiausiam ketvirčiui (mėnesiais) ir artimiausiam mėnesiui (savaitėmis).

1.4.72. Susipažinkite su PP sudarymo metodika ir su konkrečiais PP pavyzdžiais ne tik mokymosi priemonėje, bet ir su ankstesnių kursų studentų projektais (pavyzdžiui, su PP, kuriuos sudarė Daiva Lukoševičiūtė, Simona Klimavičiūtė, Vaiva Markūnaitė, Ramunė Katinaitė, Reda Senderavičiūtė, Neringa Mažeikytė, Jūratė Bartkevičiūtė, Tatjana Rakovskaja ir kiti studentai). Tų projektų kopijas galima gauti VU MIF Matematinės statistikos katedroje pas sistemos tyros kurso dėstytoją.

Parašykite trumpą ataskaitą apie tai, ką davė Jums susipažinimas su studentų darbais ir jų recenzijomis?

Pasirinkite kurį nors Jums pažįstamą kokios nors įmonės, įstaigos ar kitokios organizacijos darbuotoją, susipažinkite su jo pareigomis ir jo atliekamais darbais, su jo turima pareigine instrukcija ir suprojektuokite kartu su juo jo pareigybės pasą, tenkinantį reikalavimus, suformuotus mokymosi priemonėje esančiuose metodiniuose nurodymuose.